Πανεπιστήμιο Αιγαίου
URL: http://www.aegean.gr

Ασκήσεις στις Πιθανότητες

Κωνσταντίνος Πετρόπουλος
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 1 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή-Αμερόληπτοι Εκτιμητές

1.1. Στοιχεία Θεωρίας

Το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε στο κομμάτι της Στατιστικής που λέγεται εκτιμητική έχει ως εξής.

Έστω ότι δίνονται δεδομένα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}, \vartheta)$, που εξαρτάται από μία άγνωστη παράμετρο ϑ, η οποία ανήκει σε κάποιο σύνολο Θ. Το ϑ λέγεται **άγνωστη παράμετρος** και το Θ καλείται **παραμετρικός χώρος**. Σκοπός μας είναι, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα, να εκτιμήσουμε μία συνάρτηση του ϑ, έστω $g(\cdot) : \Theta \to \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, η οποία ονομάζεται **παραμετρική συνάρτηση**. Το τυχαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{X}$ αναφέρεται σαν **δείγμα**. Αν επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, δηλαδή έχουν την ίδια κατανομή, τότε το $\underset{\sim}{X}$ αναφέρεται σαν

τυχαίο δείγμα.

Ορισμός 1.1.1 *Μία συνάρτηση μόνο του δείγματος καλείται στατιστική συνάρτηση*

Ορισμός 1.1.2 *Μία στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της τιμής της άγνωστης παραμέτρου* ∂ *(ή γενικότερα για την εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\partial)$, *όπου* $g(\cdot) : \Theta \to \mathbb{R}^k$*) αναφέρεται σαν εκτιμητής του* ∂ *(ή του* $g(\partial)$*).*

Ορισμός 1.1.3 *Ο εκτιμητής* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *ονομάζεται αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\partial)$, *αν*

$$E_\partial T(\underset{\sim}{X}) = g(\partial), \quad \forall \partial \in \Theta.$$

Ένα από τα πιο συνηθισμένα κριτήρια επιλογής εκτιμητών είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{X})$, συμβολικά ΜΤΣ(T, ∂), που ορίζεται ως εξής,

Ορισμός 1.1.4 $MT\Sigma(T, \partial) = E_\partial(T(\underset{\sim}{X}) - g(\partial))^2$

Πρόταση 1.1.5 $MT\Sigma(T, \partial) = Var_\partial(T(\underset{\sim}{X})) + (E_\partial(T(\underset{\sim}{X})) - g(\partial))^2$. *Η ποσότητα* $b(T, \partial) = E_\partial(T(\underset{\sim}{X})) - g(\partial)$ *καλείται* **μεροληψία** *ή συστηματικό σφάλμα του εκτιμητή* T *για την ποσότητα* $g(\partial)$, *οπότε,*

$$MT\Sigma(T, \partial) = Var_\partial(T(\underset{\sim}{X})) + b^2(T, \partial).$$

Παρατήρηση 1.1.6 *Αν* T *είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\partial)$, *τότε* $MT\Sigma(T, \partial) = Var_\partial(T(\underset{\sim}{X}))$.

Ορισμός 1.1.7 *Ο εκτιμητής* T_1 *ονομάζεται καλύτερος του εκτιμητή* T_2 *για την εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\partial)$, *αν,*

$MT\Sigma(T_1, \partial) \leq MT\Sigma(T_2, \partial)$, $\forall \partial \in \Theta$

και επιπλέον

$MT\Sigma(T_1, \partial_0) < MT\Sigma(T_2, \partial_0)$, *για κάποιο* $\partial_0 \in \Theta$.

Ορισμός 1.1.8 *Εάν ο εκτιμητής T_1 είναι καλύτερος από τον T_2 (ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα) για την $g(\vartheta)$, τότε ο T_2 λέγεται μη αποδεκτός για την εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$.*

Ορισμός 1.1.9 *Ο T ονομάζεται βέλτιστος εκτιμητής (ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα) για την $g(\vartheta)$, αν είναι καλύτερος από κάθε άλλο εκτιμητή της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$.*

Οι ακόλουθες προτάσεις μας βοηθάνε να βρούμε αμερόληπτους εκτιμητές τόσο για την μέση τιμή , όσο και για τη διασπορά μιας κατανομής, όταν το **δείγμα** μας είναι **τυχαίο**.

Πρόταση 1.1.10 *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από μία κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$ και $g(\vartheta) = \mu$ η μέση τιμή της κατανομής, τότε ο δειγματικός μέσος $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, είναι αμερόληπτος εκτιμητής του μ.*

Πρόταση 1.1.11 *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από μία κατανομή $f_1(x, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$ και $g(\vartheta) = \sigma^2$ η διασπορά της κατανομής, τότε η δειγματική διασπορά $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2.*

1.2. Ασκήσεις

Άσκηση 1.2.1 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ και να υπολογιστεί το Μέσο Τετραγωνικό του Σφάλμα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.2 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^2. **Υπόδειξη-Λύση**

Παρατήρηση 1.2.3 *Ένας δεύτερος τρόπος εύρεσης αμερόληπτου εκτιμητή για το* ϑ^2 *είναι ο εξής. Επειδή στην Άσκηση* 1.2.1 *αποδείξαμε ότι ο εκτιμητής* $T = T(\underset{\sim}{X}) = 2\bar{X}$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής για το* ϑ*, είναι πιθανό ο* T^2 *να είναι αμερόληπτος εκτιμητής για το* ϑ^2*. Όμως,*

$$E_\vartheta T^2 = Var_\vartheta T + (E_\vartheta T)^2 = \frac{\vartheta^2}{3n} + \vartheta^2 = \frac{3n+1}{3n}\vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta(T^2) = \frac{3n+1}{3n}\vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta\left(\frac{3n}{3n+1}T^2\right) = \vartheta^2,\ \forall \vartheta \in \Theta,$$

άρα ο $\dfrac{3n}{3n+1}T^2$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής του* ϑ^2*.*
Παρατηρήστε ότι αυτός είναι διαφορετικός από τον αμερόληπτο εκτιμητή του ϑ^2*, που υπολογίστηκε στην Άσκηση* 1.2.2*, οπότε βγαίνει το συμπέρασμα ότι υπάρχουν περισσότεροι του ενός αμερόληπτοι εκτιμητές για την ίδια παραμετρική συνάρτηση* $g(\vartheta)$*.*

Άσκηση 1.2.4 Έστω X είναι μία παρατήρηση από την $\mathcal{P}(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^2. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.5 Έστω X είναι μία παρατήρηση από την $\mathcal{P}(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\vartheta) = e^{-\vartheta}\dfrac{\vartheta^k}{k!}$ για $k = 0, 1, \ldots$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.6 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, \vartheta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Να βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ και να υπολογιστεί το Μέσο Τετραγωνικό του Σφάλμα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.7 Αν οι ανεξάρτητες στατιστικές συναρτήσεις, $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι αμερόληπτοι εκτιμητές της παραμέτρου ϑ, να βρεθεί εκείνη η συνθήκη, ώστε η στατιστική συνάρτηση $T = a_1T_1 + a_2T_2$ να αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.8 Αν τα τυχαία δείγματα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $\underset{\sim}{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους με την ίδια άγνωστη μέση τιμή $\vartheta \in \mathbb{R}$ και γνωστές διασπορές σ_1^2, σ_2^2 αντίστοιχα.

1. Δείξτε ότι, η στατιστική συνάρτηση $T_c = T_c(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{Y}) = c\bar{X} + (1-c)\bar{Y}$, $c \in \mathbb{R}$, είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ.
2. Να βρεθεί ο καλύτερος εκτιμητής από τους T_c, για την εκτίμηση του ϑ, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.9 Έστω μία παρατήρηση X, η οποία προέρχεται από την κατανομή Bernoulli με άγνωστη πιθανότητα επιτυχίας $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$. Υπάρχει αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = \vartheta^2$; **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.10 Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα πιθανότητας,

$$f_X(x;\vartheta) = \begin{cases} \vartheta(1-\vartheta)^x & , x \in \{0, 1, \dots\}, \vartheta \in (0,1) \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

να δειχθεί ότι ο εκτιμητής,

$$T(X) = \begin{cases} 1 & , X = 0 \\ 0 & , X \neq 0. \end{cases}.$$

είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ. Είναι αυτός ο εκτιμητής αποδεκτός; **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.11 Αν $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από κάποια κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, να δειχθεί ότι,

1. Η στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του μ όταν οι σταθερές a_i ικανοποιούν τη συνθήκη $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

2. Αν $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, βρείτε για ποια a_i ελαχιστοποιείται η $Var_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)$. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.2.12 Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο ϑ, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.13 Αν ο T είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, δείξτε ότι ο εκτιμητής $S = aT + b$ είναι αμερόληπτος για την παραμετρική συνάρτηση $ag(\vartheta) + b$. Ισχύει το ίδιο για οποιαδήποτε συνάρτηση f, δηλαδή ο $f(T)$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $f(g(\vartheta))$; **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.14 Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, $\vartheta \in (0, 1)$. Να δειχθεί ότι η κλάση των αμερόληπτων εκτιμητών του ϑ^2 είναι $C = \{T(x_1, x_2) : T(0,0) = 0, T(1,1) = 1, T(1,0) = -T(0,1)\}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 2

ΑΟΕΔ εκτιμητές

2.1. Στοιχεία Θεωρίας

Επειδή, είναι γενικά δύσκολο να βρούμε τον βέλτιστο εκτιμητή (βλ. Ορισμό 1.1.9) στην κλάση όλων των εκτιμητών περιοριζόμαστε σε αυτήν των αμερόληπτων εκτιμητών.

Ορισμός 2.1.1 *Η στατιστική συνάρτηση* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *ονομάζεται Αμερόληπτος Εκτιμητής Ελάχιστης Διασποράς (ΑΟΕΔ) για το* $g(\vartheta)$ *εάν,*

1. T *είναι αμερόληπτος, δηλ.* $E_\vartheta T = g(\vartheta)$, $\forall \vartheta \in \Theta$.
2. $Var_\vartheta T \leq Var_\vartheta T_1$, $\forall \vartheta \in \Theta$ *και για κάθε άλλο αμερόληπτο εκτιμητή* T_1 *του* $g(\vartheta)$.

Από τον Ορισμό 2.1.1 φαίνεται ότι για να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητή πρέπει να ελαττώσουμε όσον το δυνατόν περισσότερο τη διασπορά μίας στατιστικής συνάρτησης σε σχέση με την προς εκτίμηση ποσότητα, δηλαδή είναι επιθυμητό να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών αυτής της ποσότητας. Αυτό το κάτω φράγμα μας το προσφέρει το Θεώρημα Cramer-Rao το οποίο ισχύει όταν επαληθεύονται οι παρακάτω συνθήκες.

(I1) Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(I2) Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από το ϑ.

(I3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\vartheta} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\mathbb{R}^n} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)d\underset{\sim}{x},\ \forall\vartheta\in\Theta.$

(I4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x}) f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)d\underset{\sim}{x},\ \forall\vartheta\in\Theta$ και κάθε στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$.

(I5) Αν $\displaystyle I(\vartheta) = E_\vartheta\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)\right)^2$, τότε $0 < I(\vartheta) < \infty,\ \forall\vartheta\in\Theta$.

Η ποσότητα $I(\vartheta)$ ονομάζεται **αριθμός** ή **μέτρο πληροφορίας του Fisher**.

Θεώρημα 2.1.2 *(Cramer-Rao) Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα δείγμα με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)$, $\vartheta\in\Theta$. Εάν $T(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστική συνάρτηση με $E_\vartheta T(\underset{\sim}{X}) = g(\vartheta)$, $\forall\vartheta\in\Theta$, και ισχύουν οι συνθήκες (I1) - (I5), τότε*

$$Var_\vartheta T(\underset{\sim}{X}) \geq \frac{(g'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)},\quad \forall\vartheta\in\Theta.$$

Το κάτω φράγμα για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $g(\vartheta)$ ονομάζεται **Cramer-Rao Κάτω Φράγμα**. (C.R.-Κ.Φ.)

Για τον υπολογισμό του αριθμού πληροφορίας Fisher χρησιμοποιούμε, συνήθως, κάποιες βοηθητικές ιδιότητες.

Ιδιότητες

1. $I(\vartheta) = -E_{\vartheta}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)\right)$, $\forall \vartheta \in \Theta$.

2. Αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε μία από τις X_i ακολουθεί μία κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας, $f_{X_i}(x_i;\vartheta)$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε

$$I(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\vartheta)$$

   όπου $I_i(\vartheta) = E_{\vartheta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f_{X_i}(x_i;\vartheta)\right)^2$.

3. Αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι τυχαίο, τότε

$$I(\vartheta) = nI_1(\vartheta)$$

   όπου $I_1(\vartheta)$ είναι ο αριθμός πληροφορίας Fisher για κάθε μία από τις $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Η δυσκολία του Θεωρήματος Cramer - Rao βρίσκεται στην επαλήθευση των συνθηκών (I1) - (I5), η οποία άρεται όταν η οικογένεια κατανομών του τυχαίου διανύσματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην **Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών** (ΜΕΟΚ).

Ορισμός 2.1.3 *Η οικογένεια κατανομών $\{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta), \vartheta \in \Theta\}$ ανήκει στην Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΜΕΟΚ) αν,*

1. *Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x}; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από το ϑ.*

2. $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = e^{A(\vartheta)+B(\underset{\sim}{X})+c(\vartheta)D(\underset{\sim}{X})}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{S}$, $\vartheta \in \Theta$.

Θεώρημα 2.1.4 *Αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)$ η οποία ανήκει στην ΜΕΟΚ και η $c(\vartheta)$ (που εμφανίζεται στον τύπο της $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)$) έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο $\forall \vartheta \in \Theta$, τότε οι συνθήκες (I2), (I3) και (I4) του Θεωρήματος Cramer-Rao ισχύουν και η (I4) ισχύει για κάθε στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X})$.*

Η παρακάτω πρόταση δίνει, ουσιαστικά, έναν τρόπο εύρεσης του ΑΟΕΔ εκτιμητή για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ και γραμμικούς συνδυασμούς αυτής.

Πρόταση 2.1.5 *Αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)$ η οποία ανήκει στην ΜΕΟΚ $\left(f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = e^{A(\vartheta)+B(\underset{\sim}{X})+c(\vartheta)D(\underset{\sim}{X})}\right)$ και ισχύουν,*

a) Το σύνολο Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
b) Το $c(\vartheta)$ έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο $\forall \vartheta \in \Theta$.
c) $0 < I(\vartheta) < \infty$.

Τότε,

1. *Η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X})$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\vartheta) = E_\vartheta D(\underset{\sim}{X})$.*
2. *Η στατιστική συνάρτηση $c_1 D(\underset{\sim}{X}) + c_2$, με c_1, c_2 σταθερές, $c_1 \neq 0$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της $c_1 g(\vartheta) + c_2$.*

Ισχύει, όμως, και η εξής πρόταση,

Πρόταση 2.1.6 *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες (I1), (I2), (I3) και (I5) του Θεωρήματος Cramer - Rao και η (I4) ισχύει για κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$, αμερόληπτο εκτιμητή του $g(\vartheta)$. Έστω, ακόμα, η παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ είναι μη σταθερά (σαν συνάρτηση του ϑ) και η $T(\underset{\sim}{X})$ επιτυγχάνει το C.R.-Κ.Φ., δηλαδή*

$$Var_\vartheta(T(\underset{\sim}{X})) = \frac{(g'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)}, \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Τότε, $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = e^{A(\vartheta)+B(\underset{\sim}{X})+c(\vartheta)T(\underset{\sim}{X})}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{S}$, $\vartheta \in \Theta$, *δηλαδή η κατανομή του δείγματος* $\underset{\sim}{X}$ *ανήκει στην ΜΕΟΚ.*

Παρατήρηση 2.1.7 *Οι Προτάσεις 2.1.5 και 2.1.6 συνεπάγονται το γεγονός ότι η εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή για κάποια παραμετρική συνάρτηση* $g(\vartheta)$ *είναι δυνατή με τη χρήση του Θεωρήματος Cramer-Rao αν και μόνο αν η κατανομή του δείγματος* $\underset{\sim}{X}$ *ανήκει στην ΜΕΟΚ και η* $g(\vartheta)$ *έχει μία συγκεκριμένη μορφή,* $g(\vartheta) = E_\vartheta D(\underset{\sim}{X})$ *ή κάποιος γραμμικός μετασχηματισμός της* $E_\vartheta D(\underset{\sim}{X})$.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό από την Παρατήρηση 2.1.7 η μέθοδος εύρεσης ΑΟΕΔ εκτιμητή με χρήση του Θεωρήματος Cramer-Rao μας περιορίζει τόσο ως προς την οικογένεια του δείγματος, όσο και ως προς την μορφή των παραμετρικών συναρτήσεων για τις οποίες βρίσκουμε ΑΟΕΔ εκτιμητές, οπότε χρειάζεται μία διαφορετική μέθοδος από την προηγούμενη η οποία να μην έχει αυτού του είδους τα προβλήματα. Αρχικά, εισάγουμε δύο έννοιες οι οποίες βοηθούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ορισμός 2.1.8 *Έστω ότι το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, *τότε η στατιστική συνάρτηση* $T(\underset{\sim}{X})$ *ονομάζεται επαρκής αν η δεσμευμένη κατανομή του* $\underset{\sim}{X}$ *δοθέντος ότι* $T(\underset{\sim}{X}) = t$ *δεν εξαρτάται από το* ϑ *για κάθε τιμή* t *για την οποία μπορεί να οριστεί η δεσμευμένη κατανομή.*

Ένας τρόπος εύρεσης μίας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης, εκτός του ορισμού, δίνεται από την παρακάτω πρόταση, η οποία αναφέρεται και ως **παραγοντικό κριτήριο των Neyman-Fisher**.

Πρόταση 2.1.9 *Η στατιστική συνάρτηση* $T(\underset{\sim}{X})$ *είναι επαρκής αν και μόνο αν* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)h(\underset{\sim}{x})$, $\forall \underset{\sim}{x}$ *και* $\vartheta \in \Theta$, *όπου* q *και* h *είναι συναρτήσεις.*

Παρατήρηση 2.1.10 *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις.*

1. *Το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *είναι τετριμμένα επαρκής στατιστική συνάρτηση.*

2. *Η στατιστική συνάρτηση* $T(\underset{\sim}{X}) = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ *είναι επαρκής, όπου οι* $X_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *είναι οι διατεταγμένες παρατηρήσεις.*

3. *Έστω* $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ *επαρκής στατιστική συνάρτηση και* $T_2 = K(T_1) = K(T_1(\underset{\sim}{X}))$, *όπου* $K(\cdot)$ *είναι "*$1-1$*" συνάρτηση, τότε και η στατιστική συνάρτηση* $T_2(\underset{\sim}{X})$ *είναι επαρκής.*

Συνήθως, όταν μιλάμε για επαρκή στατιστική συνάρτηση αναφερόμαστε στην ελάχιστη επαρκή.

Ορισμός 2.1.11 *Ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση είναι μία επαρκής στατιστική συνάρτηση η οποία προέρχεται από την μεγαλύτερη δυνατή "σύμπτηξη" (δηλ. έχει την μικρότερη δυνατή διάσταση).*

Παρατήρηση 2.1.12 *Σχεδόν πάντα, η διάσταση της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\vartheta)$ *συμπίπτει με την διάσταση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.*

Στο παρακάτω Θεώρημα χρησιμοποιείται η έννοια της επάρκειας στη βελτίωση εκτιμητών.

Θεώρημα 2.1.13 *(Rao-Blackwell) Έστω* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση και* $S = S(\underset{\sim}{X})$ *είναι εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\vartheta)$. *Θέτουμε* $S^* = E_\vartheta(S|T)$. *Τότε,*

1. *Η* S^* *είναι στατιστική συνάρτηση.*

2. $E_\vartheta S^* = E_\vartheta S$, $\forall \vartheta \in \Theta$, *έτσι αν* S *είναι αμερόληπτος εκτιμητής για την* $g(\vartheta)$, *τότε* S^* *είναι αμερόληπτος εκτιμητής για την* $g(\vartheta)$.

3. $Var_\vartheta S^* \le Var_\vartheta S$, $\forall \vartheta \in \Theta$ *και ισχύει αυστηρή ανισότητα εκτός εάν* S *είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης* T, *οπότε* $S^* = S$.

4. $MT\Sigma(S^*, \vartheta) \le MT\Sigma(S, \vartheta)$, $\forall \vartheta \in \Theta$ *και ισχύει αυστηρή ανισότητα εκτός εάν* S *είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης* T, *οπότε* $S^* = S$.

Επομένως, αν S είναι ένας εκτιμητής της $g(\vartheta)$ ο οποίος δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης T, τότε ο S είναι μη αποδεκτός και βελτιώνεται από τον $S^* = E_\vartheta(S|T)$ που ονομάζεται βελτίωση του S κατά Rao-Blackwell ή **Rao-Blackwell βελτίωση** του S.

Παρατήρηση 2.1.14 *Έστω* T_1 *και* T_2 *είναι επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις και* S *είναι αμερόληπτος εκτιμητής της* $g(\vartheta)$. *Τότε* $S_1^* = E_\vartheta(S|T_1)$ *είναι η Rao-Blackwell βελτίωση του* S, *μέσω της* T_1 *και* $S_2^* = E_\vartheta(S|T_2)$ *είναι η Rao-Blackwell βελτίωση του* S, *μέσω της* T_2. *Όμως, μέσω του Θεωρήματος 2.1.13 δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τις δύο αυτές βελτιώσεις. Η έννοια της* **πληρότητας** *θα βοηθήσει σε αυτήν την σύγκριση.*

Ορισμός 2.1.15 *Η στατιστική συνάρτηση* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *ονομάζεται πλήρης, αν ισχύει η ακόλουθη σχέση,*

$$E_\vartheta \phi(T) = 0, \quad \forall \vartheta \in \Theta \Rightarrow \phi(t) = 0$$

για κάθε δυνατή τιμή t *της* T, *δηλαδή* $\phi(T) = 0$.

Ουσιαστικά, αν η μόνη συνάρτηση του T, που έχει μέση τιμή 0 είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε η στατιστική συνάρτηση T είναι πλήρης.

Θεώρημα 2.1.16 *(Lehmann-Scheffe′) Έστω* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και* S *είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της* $g(\vartheta)$. *Τότε* $S^* = E_\vartheta(S|T)$ *είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής της* $g(\vartheta)$.

Άρα με τη βοήθεια του Θεωρήματος των Lehmann-Scheffe′ μπορούμε να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητή με την χρήση επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης και μάλιστα, αν υπάρχει αυτός ο ΑΟΕΔ εκτιμητής, είναι και μοναδικός. Όσον αφορά, την επίλυση των ασκήσεων, συνήθως, χρησιμοποιείται το Πόρισμα των Lehmann-Scheffe′.

Πόρισμα 2.1.17 *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και S είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\vartheta)$, ο οποίος είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους T. Τότε S είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\vartheta)$.*

Όπως καταλαβαίνουμε, σε αυτήν την μεθοδολογία είναι σημαντική η εύρεση μιας επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης και μέσω του ορισμού δεν είναι πάντα εύκολο, αλλά αν η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην **Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών** (ΠΕΟΚ) τα πράγματα απλοποιούνται.

Ορισμός 2.1.18 *Η οικογένεια κατανομών $\{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta), \vartheta \in \Theta\}$ ανήκει στην Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΠΕΟΚ), διάστασης k αν,*

1. *Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x}; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από το ϑ.*

2. $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = e^{A(\vartheta)+B(\underset{\sim}{X})+\sum_{j=1}^{k} c_j(\vartheta)D_j(\underset{\sim}{X})}$, $\forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{S}$, $\vartheta \in \Theta$.

Παρατήρηση 2.1.19 *Η ΠΕΟΚ διάστασης 1 συμπίπτει με την ΜΕΟΚ.*

Πρόταση 2.1.20 *Έστω ότι το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ έχει κατανομή η οποία ανήκει στην ΠΕΟΚ διάστασης k, τότε ισχύουν τα εξής,*

1. *Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (D_1(\underset{\sim}{X}), D_2(\underset{\sim}{X}), \ldots, D_k(\underset{\sim}{X}))$ είναι επαρκής.*

2. *Αν το πεδίο τιμών του διανύσματος $(c_1(\vartheta), c_2(\vartheta), \ldots, c_k(\vartheta))$ περιέχει ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, τότε η $T(\underset{\sim}{X})$ είναι και πλήρης.*

Δηλαδή, με την χρήση της Πρότασης 2.1.20 και του Πορίσματος 2.1.17 μπορούμε και αναπτύσσουμε την μεθοδολογία εύρεσης ΑΟΕΔ εκτιμητή με χρήση επάρκειας και πληρότητας. Η παρακάτω πρόταση, γνωστή και ως Θεώρημα του Basu, πιστοποιεί και άλλη μία χρήση της επάρκειας και της πληρότητας, αυτής της απόδειξης ανεξαρτησίας μεταξύ στατιστικών συναρτήσεων (δηλαδή τυχαίων μεταβλητών).

Πρόταση 2.1.21 *Έστω $T(\underset{\sim}{X})$ επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και $S(\underset{\sim}{X})$ μία στατιστική συνάρτηση, η κατανομή της οποίας δεν εξαρτάται από το ϑ. Τότε οι στατιστικές συναρτήσεις $T(\underset{\sim}{X})$ και $S(\underset{\sim}{X})$ είναι ανεξάρτητες.*

Αν, επιπλέον, το δείγμα μας είναι κανονικό, κάτι που συμβαίνει αρκετά συχνά, η Πρόταση 2.1.21 οδηγεί στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.1.22 *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, τότε ισχύουν τα εξής,*

1. $\bar{X}, (X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ *είναι ανεξάρτητες σ.σ.*
2. $\bar{X}, S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ *είναι ανεξάρτητες σ.σ.*
3. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

2.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1 Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \vartheta)$, με μ γνωστό και άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, να υπολογιστεί ο αριθμός πληροφορίας Fisher και το Cramer-Rao Κάτω Φράγμα για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $\vartheta^{1/2}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.2 Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ είναι ανεξάρτητες Poisson τυχαίες μεταβλητές $\mathcal{P}(a_i\vartheta)$, με γνωστά a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ και άγνωστο $\vartheta > 0$, να υπολογιστεί ο αριθμός πληροφορίας Fisher, καθώς και το C.R.-Κ.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $g(\vartheta) = \vartheta$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.3 Αν $X_1, X_2, \ldots, X_k$, $k \geq 2$ είναι ανεξάρτητες διωνυμικές τυχαίες μεταβλητές $\mathcal{B}(n_i, \vartheta)$, με γνωστά n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ και άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$, να βρεθεί ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του $g(\vartheta) = \vartheta$ κάνοντας χρήση της ανισότητας Cramer - Rao. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.4 Αν $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $Gamma(a, \vartheta)$, με $a > 0$ γνωστό και $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$ άγνωστο, να υπολογισθεί ο αριθμός πληροφορίας Fisher και το C.R.-Κ.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του ϑ και του ϑ^2. Για ποιες παραμετρικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητές μέσω της ανισότητας Cramer - Rao; **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.5 Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$, δείξτε ότι η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_1 + X_2$ είναι επαρκής, ενώ η $S = S(\underset{\sim}{X}) = X_1$ δεν είναι επαρκής. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.6 Θεωρούμε τις παρατηρήσεις X_1, X_2 οι οποίες είναι ανεξάρτητες με $X_1 \sim \mathcal{B}(1, \vartheta)$ και $X_2 \sim \mathcal{B}(1, 2\vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, 1/2)$. Εξετάστε αν η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_1 + X_2$ είναι επαρκής. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.7 Αν $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$. Βρείτε επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.8 Αν $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή, με πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x;\vartheta) = e^{-(x-\vartheta)}, \quad x \geq \vartheta$, με άγνωστο $\vartheta \in \mathbb{R}$, βρείτε επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.9 Αν $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(-\vartheta, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$. Βρείτε επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.10 Η παρατήρηση X έχει κατανομή που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα για $\vartheta \in \Theta = \{-1, 0, 1\}$.

Τιμές της τ.μ. X

	1	2	3
-1	1/6	1/6	2/3
0	1/3	1/3	1/3
1	2/3	1/6	1/6

Δείξτε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι επαρκής και πλήρης. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.11 Έστω ότι η στατιστική συνάρτηση S είναι πλήρης και οι $T_1 = \phi_1(S)$ και $T_2 = \phi_2(S)$ είναι δύο αμερόληπτοι εκτιμητές του ϑ, οι οποίοι είναι συναρτήσεις της πλήρους S. Να δειχθεί ότι $T_1 = T_2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.12 Να δειχθεί ότι αν $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα, με $X_1 \sim \mathcal{N}(\vartheta, 1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(\vartheta^2, 1)$, τότε η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (X_1, X_2)$ δεν είναι πλήρης.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.13 Έστω ένα τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, το οποίο προέρχεται από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\vartheta, \vartheta^2)$, με άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι επαρκής, αλλά όχι πλήρης.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.14 Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, X_3)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta \in \Theta = (0, 1)$.

1. Να βρεθεί επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση.

2. Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής

$$S_1 = \begin{cases} 1 & , X_1 = 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

   είναι αμερόληπτος για το ϑ, ενώ ο εκτιμητής

$$S_2 = \begin{cases} 1 & , X_1 = 1, X_2 = 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

   είναι αμερόληπτος για το ϑ^2.

3. Να βρεθούν ΑΟΕΔ εκτιμητές των ϑ, ϑ^2 όπως και της $g(\vartheta) = P_\vartheta(X_1 \geq X_2)$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.15 Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, με άγνωστες τις παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ εκτιμητής του σ^k, $k > 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.16 Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta > 0$.

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο . . .
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και . . .
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 19 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

1. Να βρεθούν ΑΟΕΔ εκτιμητές των ϑ και ϑ^r, $r > 0$.

2. Να βρεθεί ο καλύτερος εκτιμητής του ϑ, με κριτήριο το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Μ.Τ.Σ.), της μορφής $cX_{(n)}$, όπου c είναι μια θετική σταθερά.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.17 Θεωρούμε $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε $X_k \sim Gamma(k, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta > 0$. Να βρεθούν ΑΟΕΔ εκτιμητές των ϑ και ϑ^r, $r > -\dfrac{n(n+1)}{2}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.18 Η παρατήρηση X έχει κατανομή που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα για $\vartheta \in \Theta = \{0, 1\}$.

Τιμές της τ.μ. X

	-1	2
0	2/3	1/3
1	1/3	2/3

Να βρεθεί ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.19 Θεωρούμε $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε $X_i \sim \mathcal{P}(\vartheta t_i)$, με άγνωστο $\vartheta > 0$ και γνωστές σταθερές $t_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Να βρεθούν ΑΟΕΔ εκτιμητές των ϑ και ϑ^2. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.20 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta > 0$. Να δειχθεί ότι $E_\vartheta(\frac{2n}{n+1}\bar{X}|X_{(n)}) = X_{(n)}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 3

Εκτίμηση με τη μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας

3.1. Στοιχεία Θεωρίας

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι δυνατόν είτε ο ΑΟΕΔ εκτιμητής να είναι μη αποδεκτός (με κριτήριο το μέσο τετραγωνικό σφάλμα), είτε η εκτίμηση που δίνει αυτός ο εκτιμητής να μην είναι επιτρεπτή τιμή της παραμέτρου.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για άλλες δύο μεθόδους εύρεσης εκτιμητών. Η πρώτη μέθοδος είναι αυτή της μέγιστης πιθανοφάνειας και σύμφωνα με αυτήν, έχοντας παρατηρήσει τα δεδομένα $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$, επιλέγουμε σαν εκτίμηση της παραμέτρου ϑ εκείνη την τιμή $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(\underset{\sim}{x})$ που μεγιστοποιεί ως προς $\vartheta \in \Theta$ την **πιθανοφάνεια** του $\underset{\sim}{x}$.

Ορισμός 3.1.1 *Θεωρούμε ότι το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, *τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας (ή απλά πιθανοφάνεια) του*

ϑ *ορίζεται από τη σχέση,*

$$L(\vartheta) = L(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta).$$

Ορισμός 3.1.2 *Ο εκτιμητής* $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(\underset{\sim}{X})$, *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$L(\hat{\vartheta}) = \max_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta)$$

ονομάζεται Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) του ϑ.

Παρατήρηση 3.1.3 *Από τον προηγούμενο ορισμό φαίνεται ότι ο Ε.Μ.Π. του* ϑ *είναι εκείνη η τιμή του* $\vartheta \in \Theta$, *η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Επειδή η συνάρτηση* $\ln x$ *είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του* x, *η τιμή του* ϑ *που μεγιστοποιεί την* $L(\vartheta)$ *είναι η ίδια με αυτήν που μεγιστοποιεί την* $\ln L(\vartheta)$. *Συνήθως θα ακολουθούμε αυτήν τη διαδικασία όταν το μέγιστο μπορεί να βρεθεί με παραγώγιση.*

Παρατήρηση 3.1.4

1. *Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας ισχύει και για το διάνυσμα* $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k)$.
2. *Είναι δυνατόν ο εκτιμητής* $\hat{\vartheta}$ *να μην μπορεί να βρεθεί σε αναλυτική μορφή, τότε η τιμή του* ϑ *για την οποία επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση της* $L(\vartheta)$ *βρίσκεται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης.*
3. *Ορισμένες φορές υπάρχουν "παθολογικές καταστάσεις" με την έννοια ότι είτε δεν υπάρχει τιμή του* ϑ *η οποία να μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, είτε υπάρχουν περισσότερα μέγιστα για την* $L(\vartheta)$ *και συνεπώς περισσότεροι του ενός Ε.Μ.Π.*

Παρατήρηση 3.1.5 *Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε κάποιες γενικές ιδιότητες των Ε.Μ.Π.*

1. *Από τον Ορισμό 3.1.2 προκύπτει ότι (αν υπάρχει) παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο* Θ.

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

2. *Αν ο Ε.Μ.Π. του ϑ είναι μοναδικός, τότε είναι συνάρτηση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.*

3. *Αν $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(\underset{\sim}{X})$ είναι ο Ε.Μ.Π. του ϑ, τότε ο Ε.Μ.Π. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ είναι ο $g(\hat{\vartheta})$.*

4. *Οι Ε.Μ.Π. είναι (υπό ορισμένες συνθήκες)* **συνεπείς** *εκτιμητές (βλ. Ορισμό 3.1.6)*

Ορισμός 3.1.6 *Έστω $T_n = T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ένας εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$. Τότε ο εκτιμητής T_n ονομάζεται συνεπής αν*

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - g(\vartheta)| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Η παρακάτω Πρόταση δίνει ικανές συνθήκες έτσι ώστε ένας εκτιμητής για την $g(\vartheta)$ να είναι συνεπής.

Πρόταση 3.1.7 *Έστω ότι ο εκτιμητής T_n ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες,*

1. $Var_{\vartheta} T_n \to 0, \quad n \to +\infty.$

2. $b(T_n, \vartheta) = E_{\vartheta} T_n - g(\vartheta) \to 0, \quad n \to +\infty.$

Τότε ο T_n είναι συνεπής εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$.

Παρατήρηση 3.1.8 *Οι Ε.Μ.Π. έχουν (υπό ορισμένες συνθήκες) κάποιες ασυμπτωτικές ιδιότητες. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x, \vartheta)$ και συμβολίσουμε με $\hat{\vartheta}$ τον Ε.Μ.Π. του ϑ, τότε,*

1. *Η κατανομή του $\hat{\vartheta}$ είναι κατά προσέγγιση ($n \to +\infty$) η κανονική κατανομή, δηλαδή*

$$\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}(\vartheta, \frac{1}{I(\vartheta)})$$

όπου $I(\vartheta)$ είναι ο αριθμός πληροφορίας του Fisher.

2. *Ο $\hat{\vartheta}$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικός εκτιμητής, δηλαδή αν κάποιος άλλος εκτιμητής του ϑ, S_n, έχει κατά προσέγγιση κανονική κατανομή $N(\vartheta, \sigma_n^2(\vartheta))$, τότε (υπό ορισμένες συνθήκες), $\sigma_n^2(\vartheta) \geq \dfrac{1}{I(\vartheta)}$.*

Οι παραπάνω ιδιότητες των Ε.Μ.Π. συνεπάγονται ότι ο $\hat{\vartheta}$ είναι ασυμπτωτικά ΑΟΕΔ για το ϑ, δηλαδή αν υπάρχουν οι ΑΟΕΔ και Ε.Μ.Π. για κάποια $g(\vartheta)$, τότε αυτοί δεν διαφέρουν ασυμπτωτικά.

Τελειώνοντας αυτήν την παράγραφο θα αναφερθούμε στην εκτίμηση με την μέθοδο των ροπών.

Ορισμός 3.1.9 *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x, \vartheta)$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$, τότε η στατιστική συνάρτηση*

$$\mu_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

ονομάζεται δειγματική ροπή k τάξης.

Παρατήρηση 3.1.10 *Η δειγματική ροπή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες,*

1. *Η στατιστική συνάρτηση μ_k είναι αμερόληπτος εκτιμητής της ροπής k τάξης της κατανομής $m_k = E_\vartheta X^k$.*

2. *Η στατιστική συνάρτηση μ_k είναι συνεπής εκτιμητής του m_k, οπότε για αρκετά μεγάλο δείγμα, $\mu_k \approx m_k$.*

Παρατήρηση 3.1.11 *Όσον αφορά τη μεθοδολογία εύρεσης εκτιμητών με την μέθοδο των ροπών (Ε.Μ.Ρ.) αυτή αναπτύσσεται στα εξής δύο βήματα:*

B1) Υπολογίζουμε r ροπές της κατανομής, συνήθως τις πρώτες r, δηλαδή τις $m_1, m_2, \ldots, m_r$, οι οποίες είναι συναρτήσεις των $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$,

$$m_1 = m_1(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r), \ldots, m_r = m_r(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r).$$

B2) Θέτουμε

$$m_i(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r) = \mu_i \ , i = 1, 2, \ldots, r.$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος, έστω $\hat{\hat{\vartheta}}_1, \hat{\hat{\vartheta}}_2, \ldots, \hat{\hat{\vartheta}}_r$, δίνει τους εκτιμητές με την μέθοδο των ροπών των παραμέτρων $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$.

3.2. Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.1 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, όπου κάθε $X_k \sim \mathcal{P}(k\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$, να βρεθούν Ε.Μ.Π. των ϑ και ϑ^2. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.2 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, με $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ άγνωστα, να βρεθούν Ε.Μ.Π. των μ, σ και σ^2. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.3 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{U}[\vartheta_1, \vartheta_2]$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$ και $\vartheta_1 < \vartheta_2$, τότε να βρεθούν οι Ε.Μ.Π.

1. του ϑ_1, όταν το ϑ_2 θεωρείται γνωστό,
2. του ϑ_2, όταν το ϑ_1 θεωρείται γνωστό.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.4 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την γεωμετρική κατανομή $Ge(\vartheta)$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in [0, 1]$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.5 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \dfrac{e^{-(x-\vartheta)}}{(1+e^{-(x-\vartheta)})^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ο Ε.Μ.Π. του ϑ και είναι μοναδικός. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.6 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}[-\vartheta, \vartheta]$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.7 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}[-2\vartheta, 3\vartheta]$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.8 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\vartheta)$, με άγνωστο $\vartheta > 0$.

1. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του ϑ και της παραμετρικής συνάρτηση $g(\vartheta) = P_\vartheta(X_1 > t)$, όπου t είναι γνωστή θετική σταθερά.
2. Να εξεταστεί αν ο Ε.Μ.Π. είναι συνεπής για το ϑ.
3. Να εκτιμηθεί το ϑ με την μέθοδο των ροπών.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.9 Δίνεται μια παρατήρηση X από την κατανομή που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα,

Τιμές της τ.μ. X

	1	2	3
-1	1/2	1/2	0
0	1/6	1/6	2/3
1	1/3	1/3	1/3

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο . . .
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και . . .
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 26 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του $\vartheta \in \Theta = \{-1, 0, 1\}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.10 Θεωρούμε ότι η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή ϑ, άγνωστη. Σε τυχαίο δείγμα 10 λαμπτήρων καταμετρήθηκαν οι εξής χρόνοι ζωής,

$$1540, 1620, 1570, 1552, 1605, 1580, 1590, 1557, 1563, 1547.$$

Να εκτιμηθεί με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας το ποσοστό των λαμπτήρων, των οποίων η διάρκεια ζωής υπερβαίνει, *i*) τις 1700 ώρες, *ii*) τις 2000 ώρες και *iii*) τις 2500 ώρες **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.11 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή Rayleigh, με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\vartheta) = \dfrac{x}{\vartheta}\, e^{-x^2/2\vartheta}$, $x > 0$ και $\vartheta > 0$. Δίνεται ότι $E_\vartheta X^2 = 2\vartheta$ και $E_\vartheta X^4 = 8\vartheta^2$.

1. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του ϑ.
2. Να εξεταστεί αν αυτός ο εκτιμητής είναι συνεπής για το ϑ.
3. Ποια είναι η ασυμπτωτική κατανομή του Ε.Μ.Π. του ϑ;

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.12 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu, \sigma)$, με πυκνότητα πιθανότητας $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}$, $x \geq \mu$ και άγνωστες παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$.

1. Να βρεθούν οι Ε.Μ.Π. των μ και σ.
2. Να εκτιμηθούν με την μέθοδο των ροπών οι άγνωστες παράμετροι μ και σ.

3. Να δειχθεί ότι ο Ε.Μ.Π. του μ είναι συνεπής εκτιμητής αυτού.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.13 Θεωρούμε μία τυχαία παρατήρηση X από την κατανομή Bernoulli $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

1. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. του ϑ.
2. Να υπολογισθεί το Μ.Τ.Σ. του Ε.Μ.Π. και να συγκριθεί με αυτό του τετριμμένου εκτιμητή $\hat{\vartheta}_1 = \frac{1}{2}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 3.2.14 Έστω (X_1, X_2) είναι ένα ανεξάρτητο δείγμα με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2/4)$, όπου το $\vartheta > 0$ είναι η άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της $g(\vartheta) = P_\vartheta(X_1^2 + 4X_2^2 > a)$, $a > 0$ δοσμένο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.15 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}[-\vartheta, \vartheta]$. Να γίνει εκτίμηση του ϑ με την μέθοδο των ροπών. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 4

Εκτιμητές Bayes και minimax

4.1. Στοιχεία Θεωρίας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου ϑ κάτω από μια διαφορετική σκοπιά σε σχέση με ότι έχουμε αντιμετωπίσει μέχρι τώρα, που αντιλαμβανόμασταν το ϑ απλά σαν ένα πραγματικό αριθμό χωρίς καμμιά ιδιότητα. Αν, π.χ., θεωρήσουμε μία βιομηχανία η οποία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες, τότε ο χρόνος ζωής αυτών των λαμπτήρων ακολουθεί την εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο ϑ και αυτή η παράμετρος εκφράζει τον μέσο χρόνο ζωής των λαμπτήρων. Επομένως δεν πρέπει να αναμένουμε ούτε "μεγάλες" τιμές για το ϑ, αλλά ούτε και "μικρές". Δηλαδή σε σχέση με το πρόβλημα και την εμπειρία που διαθέτουμε πρέπει να δώσουμε μια διαφορετική βαρύτητα στις διάφορες τιμές του ϑ, για να εκμεταλλευτούμε αυτήν την εμπειρία ώστε να δώσουμε καλύτερη εκτίμηση για το ϑ.

Οπότε, θεωρούμε το ϑ σαν μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $\pi(\vartheta)$,

$\vartheta \in \Theta$, και τις εξής δύο ιδιότητες,

$$(i)\pi(\vartheta) \geq 0, \quad \forall\, \vartheta \in \Theta \quad \text{και} \quad (ii) \int_\Theta \pi(\vartheta)d\vartheta = 1 \ \ (\text{ ή } \sum_\vartheta \pi(\vartheta) = 1).$$

Η συνάρτηση $\pi(\vartheta)$ ονομάζεται **εκ των προτέρων κατανομή** του ϑ και εκφράζει είτε την προσωπική μας αντίληψη για την πιθανή τιμή του ϑ, είτε συνοψίζει κάποιες εκ των προτέρων (δηλ. πριν από τη συλλογή των δεδομένων) πληροφορίες για το ϑ. Όπως κάναμε και στα προηγούμενα κεφάλαια θεωρούμε μια **συνάρτηση ζημίας** $L(t,\vartheta)$ και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη **συνάρτηση κινδύνου** $R(T,\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta L(T(\underset{\sim}{X}),\vartheta)$. Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι το ϑ είναι μία τυχαία μεταβλητή, προφανώς, η συνάρτηση κινδύνου είναι και αυτή μία τυχαία μεταβλητή, επομένως είναι λογικό, σε αυτήν την περίπτωση, να προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την μέση τιμή της, δηλαδή τη συνάρτηση,

$$BR(T) = \mathbb{E}R(T,\vartheta) = \int_\Theta R(T,\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta$$

η οποία ονομάζεται **κίνδυνος Bayes** του εκτιμητή T. Συνεπώς βέλτιστος εκτιμητής είναι εκείνος που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο Bayes, οπότε καταλήγουμε στον εξής ορισμό για τον εκτιμητή Bayes.

Ορισμός 4.1.1 *Ο εκτιμητής $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται εκτιμητής Bayes του $g(\vartheta)$, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\vartheta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\vartheta)$ αν,*

$$\int_\Theta R(T^*,\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta \leq \int_\Theta R(T,\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta$$

για κάθε εκτιμητή $T = T(\underset{\sim}{X})$.

Συνήθως, για να υπολογίσουμε αυτόν τον εκτιμητή Bayes πρέπει να βρούμε πρώτα την **εκ των υστέρων κατανομή** του ϑ

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} \qquad (4.1)$$

όπου $f(\underset{\sim}{x}) = \int_{\Theta} f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta$. Η εκ των υστέρων κατανομή συνοψίζει την πληροφορία για το ϑ μετά την συλλογή των δεδομένων και έχει τις ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητα πιθανότητας.

Παρατήρηση 4.1.2 *Είναι σημαντικό να τονίσουμε, σε αυτό το σημείο, ότι δεν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η ακριβής συνάρτηση $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})$, αλλά η μορφή της εκ των υστέρων κατανομής για την οποία διαπιστώνουμε, συνήθως, ότι ακολουθεί κάποια από τις γνωστές κατανομές.*

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε έναν διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του εκτιμητή Bayes.

Θεώρημα 4.1.3 *Για $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\vartheta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\vartheta)$ έχει τιμή $T^*(\underset{\sim}{x}) = t^*$, όπου t^* είναι η τιμή του t που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t) = \int_{\Theta} L(t,\vartheta)\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})d\vartheta$.*

Αν, επιπλέον, η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, δηλαδή $L(t,\vartheta) = (t - g(\vartheta))^2$, τότε η εύρεση του εκτιμητή Bayes γίνεται πιο απλά, όπως φαίνεται και στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.4 *Έστω ότι η συνάρτηση ζημίας για την εκτίμηση του $g(\vartheta)$ είναι το τετραγωνικό σφάλμα $L(t,\vartheta) = (t - g(\vartheta))^2$. Τότε για $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ έχει τιμή $T^*(\underset{\sim}{x}) = E_{\vartheta}g(Y)$, όπου Y είναι μία τυχαία μεταβλητή με κατανομή την εκ των υστέρων κατανομή $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})$.*

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε έναν καλό εκτιμητή είναι να βρούμε εκείνον τον εκτιμητή $T = T(\underset{\sim}{X})$ που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης κινδύνου, $\max_{\vartheta} R(T,\vartheta)$ δηλαδή τη μέγιστη μέση ζημία. Οπότε έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.1.5 *Ο εκτιμητής $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται εκτιμητής minimax του $g(\vartheta)$, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\vartheta)$ αν,*

$$\max_{\vartheta\in\Theta} R(T^*,\vartheta) \leq \max_{\vartheta\in\Theta} R(T,\vartheta)$$

για κάθε εκτιμητή $T = T(\underset{\sim}{X})$.

Η εύρεση ενός εκτιμητή minimax γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 4.1.6 *Αν ο εκτιμητής $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ είναι εκτιμητής Bayes της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\vartheta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\vartheta)$ και έχει σταθερά συνάρτηση κινδύνου, δηλαδή,*

$$R(T^*,\vartheta) = c \;, \quad \forall\, \vartheta \in \Theta,$$

τότε ο $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ είναι εκτιμητής minimax του $g(\vartheta)$.

4.2. Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1 Θεωρούμε ένα ανεξάρτητο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$, όπου $X_1 \sim \mathcal{P}(\vartheta)$ και $X_2 \sim \mathcal{P}(2\vartheta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\vartheta) = e^{-\vartheta}$, $\vartheta > 0$.

1. Να βρεθεί η εκ των υστέρων κατανομή του ϑ.

2. Να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes των παραμετρικών συναρτήσεων $g_1(\vartheta) = \vartheta$ και $g_2(\vartheta) = \vartheta^2$, όταν η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα.

Υπόδειξη-Λύση

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 32 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 4.2.2 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in (0, 1)$. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι η $\mathcal{U}(0, 1)$,

1. να βρεθεί εκτιμητής Bayes ϑ, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t; \vartheta) = \dfrac{(t - g(\vartheta))^2}{\vartheta(1 - \vartheta)}$.
2. Να βρεθεί εκτιμητής minimax του ϑ, ως προς την ίδια συνάρτηση ζημίας.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.2.3 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες παρατηρήσεις, όπου κάθε $X_i \sim \mathcal{P}(i\vartheta)$, $i = 1, \ldots, n$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta > 0$. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι, $\pi(\vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta}$, $\vartheta > 0$ και η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.4 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας, $f_1(x; \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta > 0$. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι μία κατανομή Γάμμα, δηλαδή $\pi(\vartheta) \sim Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ γνωστά, να βρεθούν οι εκτιμητές Bayes των $g_1(\vartheta) = \vartheta$ και $g_2(\vartheta) = e^{-\vartheta}$ όταν η συνάρτηση ζημίας είναι $L(t, \vartheta) = \vartheta^2(t - g(\vartheta))^2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.5 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε κάθε $X_i \sim \mathcal{N}(\vartheta t_i, 1)$, $t_i \in \mathbb{R}$ είναι γνωστές σταθερές, $i = 1, 2, \ldots, n$ και $\vartheta \in \mathbb{R}$ άγνωστο. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι η κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\alpha, \beta^2)$ και η συνάρτηση ζημίας είναι $L(t, \vartheta) = (t - g(\vartheta))^2$, να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.6 Έστω $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, $\vartheta > 0$ άγνωστο. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι, $\pi(\vartheta) = 1$, $0 < \vartheta < 1$ και η συνάρτηση ζημίας είναι $L(t, \vartheta) = \dfrac{(t - g(\vartheta))^2}{\vartheta^2}$, να βρεθούν εκτιμητές Bayes για τις παραμετρικές συναρτήσεις $g_1(\vartheta) = \vartheta$ και $g_2(\vartheta) = \vartheta^2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.7 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας, $f_1(x;\vartheta) = \dfrac{\vartheta}{x^{\vartheta+1}}$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta > 0$ και $x > 1$. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι, $\pi(\vartheta) = e^{-\vartheta}$, $\vartheta > 0$ και η συνάρτηση ζημίας είναι $L(t, \vartheta) = (t - g(\vartheta))^2$, να βρεθεί ο εκτιμητής Bayes του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.8 Να δειχθεί ότι ο εκτιμητής Bayes είναι συνάρτηση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.9 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in (0, 1)$. Αν η εκ των προτέρων κατανομή του ϑ είναι η $Beta(\alpha, \beta)$, $0 < \vartheta < 1$ και $\alpha, \beta > 0$, τότε να βρεθεί εκτιμητής minimax για το ϑ, όταν η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.10 Έστω X_1, X_2 είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli $\mathcal{B}(1, \vartheta)$, με άγνωστη παράμετρο $\vartheta \in (0, 1)$. Για την εκτίμηση του ϑ χρησιμοποιείται ως συνάρτηση ζημίας η $L(t, \vartheta) = \dfrac{(t - \vartheta)^2}{\vartheta(1 - \vartheta)}$. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = \dfrac{1}{2}$ δεν είναι minimax εκτιμητής του ϑ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.2.11 Να δειχθεί ότι αν ένας εκτιμητής είναι minimax, αλλά μη αποδεκτός, τότε κάθε καλύτερός του εκτιμητής είναι επίσης minimax. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 5

Διαστήματα Εμπιστοσύνης

5.1. Στοιχεία Θεωρίας

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με την εκτίμηση μιας παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$ σημειακά, με την έννοια ότι αφού γνωρίζουμε την τιμή, $\underset{\sim}{x}$, του δείγματος μπορούμε να κάνουμε μία εκτίμηση $t = T(\underset{\sim}{x})$ της τιμής αυτής της $g(\vartheta)$, όπου $T(\underset{\sim}{X})$ είναι ένας εκτιμητής της παραμετρικής μας συνάρτησης. Επειδή μιλάμε για εκτίμηση, προφανώς, αυτή θα απέχει από την πραγματική τιμή της $g(\vartheta)$, δηλαδή θα έχουμε κάποιο σφάλμα εκτίμησης. Θα θέλαμε λοιπόν να έχουμε κάποια ιδέα για αυτό το σφάλμα εκτίμησης, δίνοντας μάλιστα εμείς την ακρίβεια με την οποία ο εκτιμητής μας θέλουμε να εκτιμά την πραγματική τιμή της $g(\vartheta)$. Με άλλα λόγια επιθυμία μας είναι να βρούμε ένα τυχαίο διάστημα, δηλαδή τα άκρα του να είναι συναρτήσεις του δείγματος, το οποίο να καλύπτει με την ακρίβεια που θέλουμε την πραγματική τιμή της άγνωστης παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$. Επομένως, καταλήγουμε στον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.1.1 *Αν $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $T_1 < T_2$, τότε το τυχαίο διάστημα $[T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$ ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης (Δ.Ε.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$, αν*

$$P_\vartheta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\vartheta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = 1 - a \ , \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Ο αριθμός $1-a$ εκφράζει την ακρίβεια με την οποία θέλουμε να κάνουμε την εκτίμηση, ενώ ο αριθμός a, ο οποίος είναι δικής μας επιλογής, εκφράζει τον βαθμό ανεκτικότητας μας, υποδεικνύοντας ότι είμαστε διατεθιμένοι να ανεχθούμε (αγνοήσουμε) $100a\%$ πιθανότητα το διάστημα να μην περιέχει την τιμή της $g(\vartheta)$.

Σημειώνουμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, ειδικά σε διακριτές κατανομές (ή σε περιπτώσεις όπου η κατανομή των δεδομένων είναι εντελώς άγνωστη) δεν είναι δυνατόν για κάθε a, να μπορούμε να βρίσκουμε ένα διάστημα $[T_1, T_2]$ έτσι ώστε $P_\vartheta(T_1 \leq g(\vartheta) \leq T_2)$ να είναι ακριβώς $1-a$. Σε αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να βρούμε στατιστικές συναρτήσεις T_1 και T_2 τέτοιες ώστε η $P_\vartheta(T_1 \leq g(\vartheta) \leq T_2)$ να είναι όσον το δυνατόν πλησιέστερα στην τιμή $1-a$. Εφ' όσον, λοιπόν, το μέγεθος του δείγματος n είναι αρκετά μεγάλο μπορούμε να υπολογίσουμε τα παρακάτω διαστήματα εμπιστοσύνης.

Ορισμός 5.1.2 *Αν $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $T_1 < T_2$, τότε το τυχαίο διάστημα $[T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$ ονομάζεται ασυμπτωτικό (ή προσεγγιστικό) διάστημα εμπιστοσύνης (Α.Δ.Ε.) για την παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$, αν*

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ P_\vartheta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\vartheta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) \right\} = 1 - a \ , \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Αναφέρουμε, ακόμα, ότι πολλές φορές μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα κάτω φράγμα ή ένα άνω φράγμα για την $g(\vartheta)$. Για παράδειγμα αν το $g(\vartheta)$ παριστάνει το μέσο χρόνο ζωής ενός συστήματος, τότε ένα κάτω φράγμα εκφράζει την εγγύηση για την πιθανή διάρκεια του συστήματος.

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 36 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ορισμός 5.1.3 *Έστω $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις. Αν,*

$$P_\vartheta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\vartheta)) = 1 - a\ ,\ \ \forall\ \vartheta \in \Theta,$$

τότε η $T_1(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται κάτω φράγμα (Κ.Φ.) για την $g(\vartheta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$. Ενώ, αν

$$P_\vartheta(g(\vartheta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = 1 - a\ ,\ \ \forall\ \vartheta \in \Theta,$$

τότε η $T_2(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται άνω φράγμα (Α.Φ.) για την $g(\vartheta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$.

Ανάλογα ορίζονται οι έννοιες του **ασυμπτωτικού κάτω φράγματος** και του **ασυμπτωτικού άνω φράγματος**.

Ορισμός 5.1.4 *Έστω $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις. Αν,*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P_\vartheta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\vartheta))\right\} = 1 - a\ ,\ \ \forall\ \vartheta \in \Theta,$$

τότε η $T_1(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται ασυμπτωτικό κάτω φράγμα (Α.Κ.Φ.) για την $g(\vartheta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$. Ενώ, αν

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P_\vartheta(g(\vartheta) \leq T_2(\underset{\sim}{X}))\right\} = 1 - a\ ,\ \ \forall\ \vartheta \in \Theta,$$

τότε η $T_2(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται ασυμπτωτικό άνω φράγμα (Α.Α.Φ.) για την $g(\vartheta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.) $100(1-a)\%$.

Είναι προφανές ότι, για δοσμένο σ.ε., μπορούν να βρεθούν πολλά Δ.Ε. για την ίδια παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$. Είναι φανερό τότε ότι όσο μικρότερο είναι το μήκος του διαστήματος, τόσο καλύτερο είναι το διάστημα γιατί έτσι παρέχει περισσότερες πληροφορίες για τα πιθανά όρια της τιμής της άγνωστης παραμέτρου. Γι' αυτό σαν κριτήριο επιλογής μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης, με τον ίδιο σ.ε. μπορεί να ληφθεί είτε το μήκος αυτών, είτε η μέση τιμή του μήκους τους, γιατί το μήκος γενικά εξαρτάται από το δείγμα και συνεπώς είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συχνά, όμως, επειδή είναι δύσκολο να κάνουμε αυτήν την ελαχιστοποίηση, αντί για το διάστημα με το ελάχιστο μήκος παίρνουμε το **διάστημα ίσων ουρών**, δηλαδή ένα διάστημα $[T_1, T_2]$ τέτοιο ώστε,

$$P_\vartheta(g(\vartheta) < T_1(\underset{\sim}{X})) = P_\vartheta(g(\vartheta) > T_2(\underset{\sim}{X})) = \frac{\alpha}{2}.$$

Επίσης, συνιστάται οι στατιστικές συναρτήσεις που αποτελούν τα άκρα του διαστήματος να είναι συναρτήσεις της (ελάχιστης) επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.

Παρατήρηση 5.1.5 *Μία γενική μέθοδος κατασκευής Δ.Ε. για μια μονοδιάστατη παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ αποτελείται από τα εξής βήματα.*

1. *Βρίσκουμε μια τυχαία μεταβλητή $T = T(\underset{\sim}{X}, \vartheta)$ η οποία εξαρτάται από το ϑ, αλλά η κατανομή της δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο. Αυτή η τ.μ. ονομάζεται* ***ποσότητα οδηγός*** *(pivotal quantity) ή αντιστρεπτή ποσότητα.*

2. *Προσδιορίζουμε σταθερές $c_1 < c_2$, οι οποίες εξαρτώνται από την κατανομή της T και από το α, τέτοιες ώστε,*

$$P_\vartheta(c_1 \le T(\underset{\sim}{X}, \vartheta) \le c_2) = 1 - \alpha, \quad \forall\, \vartheta \in \Theta, \quad 0 < \alpha < 1.$$

3. *Λύνουμε (αντιστρέφουμε) τη διπλή ανισότητα και εφ' όσον αυτό είναι δυνατόν καταλήγουμε στη σχέση,*

$$P_\vartheta(T_1(\underset{\sim}{X}) \le g(\vartheta) \le T_2(\underset{\sim}{X})) = 1 - \alpha\,, \quad \forall\, \vartheta \in \Theta,$$

για κάποιες στατιστικές συναρτήσεις $T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})$.

4. *Τότε το διάστημα* $[T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$ *είναι Δ.Ε. για το* $g(\vartheta)$ *με σ. ε.* $100(1-\alpha)\%$.

Στην περίπτωση που έχουμε μια (απολύτως) συνεχή κατανομή, μπορούμε να βρούμε πάντα μια ποσότητα οδηγό, όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.6 *Έστω* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *είναι ένα τυχαίο δείγμα από μία (απολύτως) συνεχής κατανομή με συνάρτηση κατανομής* $F_\vartheta(x)$, $\vartheta \in \Theta$. *Τότε ισχύουν τα εξής.*

1. *Η τ.μ.* $Y_i = F_\vartheta(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *έχει την ομοιόμορφο κατανομή* $\mathcal{U}(0, 1)$.
2. *Η τ.μ.* $Z_i = -2 \ln F_\vartheta(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *έχει κατανομή* $\mathcal{X}_2^2$.
3. *Η τ.μ.* $T = -2 \sum_{i=1}^{n} \ln F_\vartheta(X_i)$, *έχει κατανομή* $\mathcal{X}_{2n}^2$ *και συνεπώς είναι ποσότητα οδηγός που βασίζεται στο τυχαίο δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Παρατήρηση 5.1.7 *Επειδή η παραπάνω συνάρτηση* T *δεν είναι κατ' ανάγκην συνάρτηση της (ελάχιστης) επαρκούς στατιστικής συνάρτησης, πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο όταν δεν μπορούμε να βρούμε άλλη ποσότητα οδηγό, η οποία να είναι συνάρτηση της (ελάχιστης) επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.*

5.2. Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.1 Θεωρούμε τις ανεξάρτητες παρατηρήσεις $X_1, X_2, \ldots, X_n$, όπου κάθε $X_k \sim \mathcal{N}(\mu + k, 1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, και $\mu \in \mathbb{R}$ είναι η άγνωστη παράμετρος. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $T = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{n+1}{2} - \mu\right)$ είναι ποσότητα οδηγός, να αναγνωρισθεί η κατανομή της και (χρησιμοποιώντας την) να κατασκευασθεί ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το μ με σ. ε. $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.2 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\vartheta)$, όπου η παράμετρος $\vartheta > 0$ είναι άγνωστη.

1. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $T = \dfrac{2}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι ποσότητα οδηγός.
2. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.
3. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.3 Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X, η οποία προέρχεται από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x;\vartheta) = \dfrac{2}{\vartheta} x e^{-\frac{x^2}{\vartheta}}$, $x > 0$ και η παράμετρος $\vartheta > 0$ είναι άγνωστη.

1. Να δειχθεί ότι η τ.μ. $T = \dfrac{X^2}{\vartheta}$ είναι ποσότητα οδηγός.
2. Να κατασκευασθεί Δ.Ε. ίσων ουρών με σ. ε. $100(1-a)\%$ για τις παραμετρικές συναρτήσεις $g_1(\vartheta) = \vartheta$ και $g_2(\vartheta) = P_\vartheta(X > 1)$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.4 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x;\vartheta) = e^{-(x-\vartheta)}$, όπου $x \geq \vartheta$ και η παράμετρος $\vartheta \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη.

1. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.
2. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.5 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(0, \vartheta)$, όπου η παράμετρος $\vartheta > 0$ είναι άγνωστη.

1. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-\alpha)\%$.
2. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $100(1-\alpha)\%$.
3. Να βρεθούν Α.Φ. και Κ.Φ. για το ϑ με σ.ε. $100(1-\alpha)\%$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.6 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή $\mathcal{U}(-\vartheta, \vartheta)$, όπου η παράμετρος $\vartheta > 0$ είναι άγνωστη. Να βρεθεί ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ^2 με σ. ε. $100(1-\alpha)\%$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.7 Θεωρούμε μια παρατήρηση X από την κατανομή, η οποία έχει ως π.π. την $f_X(x;\vartheta) = \dfrac{2}{\vartheta}\left(1 - \dfrac{x}{\vartheta}\right)$, $0 < x < \vartheta$ και ϑ είναι η άγνωστη παράμετρος. Να κατασκευασθεί ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $1-\alpha$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.8 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $Beta(\vartheta, 1)$, όπου η παράμετρος $\vartheta > 0$ είναι άγνωστη. Να κατασκευασθεί ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $1-\alpha$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.9 Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μεγέθους του δείγματος n, έτσι ώστε το 90% Δ.Ε. για το μ της $\mathcal{N}(\mu, 1)$ να έχει μήκος το πολύ $1/5$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.10 Να υπολογισθεί η πιθανότητα, όπως το διάστημα $\bar{X} \pm \dfrac{8.2}{\sqrt{n}}$ να περιέχει τη μέση τιμή της κατανομής $\mathcal{N}(\mu, 25)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.11 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την κατανομή $Gamma(2, \vartheta)$, όπου η παράμετρος $\vartheta > 0$ είναι άγνωστη και δίνεται το Δ.Ε. $\left[0, c\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$ για την $g(\vartheta) = 2\vartheta$. Να υπολογιστεί η σταθερά c, ώστε ο σ.ε. για το παραπάνω διάστημα να είναι $1 - a$. $(0 < a < 1)$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.12 Θεωρούμε μια παρατήρηση $X \sim \mathcal{E}(\vartheta)$, να υπολογιστεί η σταθερά c, έτσι ώστε το διάστημα $[0, cX]$ να είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 6

Παράρτημα

6.1. Κατανομές

1. **Διωνυμική κατανομή**

   Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

   $f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $0 < p < 1$.

   $EX = np$, $VarX = np(1-p)$.

   • Αν $n = 1$, τότε η τ.μ. X ονομάζεται Bernoulli.

2. **Κατανομή Poisson**

   Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

   $f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$, $x \in \{0, 1, \ldots\}$, $\lambda > 0$.

$EX = \lambda$, $VarX = \lambda$.

3. **Αρνητική διωνυμική κατανομή**

   Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{NB}(r, p)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

   $$f_X(x) = P(X = x) = \binom{r + x - 1}{x} p^r (1 - p)^x,\ x \in \{0, 1, \ldots\},\ 0 < p < 1.$$

   $$EX = \frac{r(1 - p)}{p},\ VarX = \frac{r(1 - p)}{p^2}.$$

   • Αν $r = 1$, τότε η τ.μ. X ονομάζεται γεωμετρική ($X \sim Ge(p)$).

4. **Κανονική κατανομή**

   Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

   $$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

   $EX = \mu$, $VarX = \sigma^2$.

   • Αν $\mu = 0$ και $\sigma = 1$, τότε η τ.μ. X ονομάζεται τυπική κανονική ($X \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

   • $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

   • $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + \beta \sim \mathcal{N}(a\mu + \beta, a^2\sigma^2)$.

5. **Κατανομή Γάμμα**

   Η τυχαία μεταβλητή $X \sim Gamma(a, \beta)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

   $$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} x^{a-1}\ e^{-\frac{x}{\beta}},\ x > 0,\ a > 0,\ \beta > 0.$$

   $$* \ \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\ e^{-x} dx.$$

$EX = a\beta$, $VarX = a\beta^2$.

• Αν $a = 1$, τότε η τ.μ. X ονομάζεται εκθετική ($X \sim \mathcal{E}(\beta)$).

• Αν $a = \frac{r}{2}$ και $\beta = 2$, τότε η τ.μ. X ονομάζεται Χι τετράγωνο με r βαθμούς ελευθερίας ($X \sim \mathcal{X}^2_r$).

• $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \mathcal{X}^2_1$.

• $X \sim Gamma(n, \beta) \Rightarrow \dfrac{2}{\beta} X \sim \mathcal{X}^2_{2n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

6. **Ομοιόμορφη Κατανομή**

Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{U}(a, \beta)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta - a},\ x \in (a, \beta),\ a < \beta.$$

$$EX = \frac{a+\beta}{2},\ VarX = \frac{(\beta - a)^2}{12}.$$

7. **Κατανομή Βήτα**

Η τυχαία μεταβλητή $X \sim Beta(a, \beta)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a,\beta)}\, x^{a-1}\, (1-x)^{\beta-1},\ x \in (0,1),\ a > 0,\ \beta > 0.$$

$$* \ B(a,\beta) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)} = \int_1^0 x^{a-1}\,(1-x)^{\beta-1} dx.$$

$$EX = \frac{a}{a+\beta},\ VarX = \frac{a\beta}{(a+\beta)^2(a+\beta+1)}.$$

• Αν $a = \beta = 1$, τότε η τ.μ. $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.

8. **Διπαραμετρική Εκθετική Κατανομή**

Η τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{E}(\mu, \sigma)$, εάν η πυκνότητα πιθανότητας είναι,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}},\ x \geq \mu,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

$EX = \mu + \sigma$, $VarX = \sigma^2$.

• $X \sim \mathcal{E}(\mu, \sigma) \Rightarrow X - \mu \sim \mathcal{E}(\sigma)$.

6.2. Αντίστροφοι μετασχηματισμοί

Θεώρημα 6.2.1 *'Εστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας f_X, εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία x. 'Εστω, επίσης, μία μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η $Y = h(X)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | f_X(x) > 0\}$ και T είναι η εικόνα της $\mathcal{S}$ μέσω της h. Αν,*

1. *η συνάρτηση $h : \mathcal{S} \to T$ είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε υπάρχει η αντίστροφος συνάρτηση $x = h^{-1}(y)$, $y \in T$.*

2. *Η συνάρτηση h^{-1} είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι συνεχής στον T,*

τότε η πυκνότητα πιθανότητας της Y, f_Y, δίνεται από τη σχέση,

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|.$$

Θεώρημα 6.2.2 *Θεωρούμε το συνεχές k-διάστατο τυχαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_k)$, με πυκνότητα πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}} = f_{X_1,\ldots,X_k}$, εκτός από κάποιο πεπερασμένο πλήθος σημείων $\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_k)$. 'Εστω, επίσης, ένας μετρήσιμος μετασχηματισμός $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, όπου $\underset{\sim}{y} =$*

$h(\underset{\sim}{x}) = (h_1(x_1), \ldots, h_k(x_k))$, *τέτοιος ώστε* $\underset{\sim}{Y} = h(\underset{\sim}{X})$ *είναι ένα* k*-διάστατο τυχαίο διάνυσμα. Θεωρούμε το σύνολο* $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k | f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) > 0\}$ *και* T *είναι η εικόνα της* $\mathcal{S}$ *μέσω της* h. *Αν,*

1. *η συνάρτηση* $h : \mathcal{S} \to T$ *είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε υπάρχει ο αντίστροφος μετασχηματισμός* $\underset{\sim}{x} = h^{-1}(\underset{\sim}{y}) = (g_1(y), \ldots, g_k(y))$, $y \in T$.

2. *Υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης* h^{-1},

$$g_{ji}(\underset{\sim}{y}) = \frac{\partial}{\partial y_i} g_j(y_1, \ldots, y_k)\ , \quad i, j = 1, 2, \ldots, k$$

   και είναι συνεχής στον T.

Τότε η πυκνότητα πιθανότητας του τ.δ. $\underset{\sim}{Y}$ *δίνεται από τη σχέση,*

$$f_{\underset{\sim}{Y}}(\underset{\sim}{y}) = f_{\underset{\sim}{X}}(h^{-1}(\underset{\sim}{y}))\ |J|$$

όπου J *είναι η Ιακωβιανή και ορίζεται ως,*

$$J = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \ldots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \ldots & g_{2k} \\ & & & \\ g_{k1} & g_{k2} & \ldots & g_{kk} \end{vmatrix}.$$

6.3. Αναπαραγωγικές ιδιότητες

Θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι ανεξάρτητες.

1. $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, $i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)$.

- $n_i = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, τότε $X_i \sim \mathcal{B}(1, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{B}(k, p)$.

2. $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)$.

3. $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2)$.

4. $X_i \sim Gamma(a_i, \beta)$, $i = 1, 2, \ldots, k \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Gamma(\sum_{i=1}^{k} a_i, \beta)$.
   - $a_i = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, τότε $X_i \sim \mathcal{E}(\beta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim Gamma(k, \beta)$.
   - $a_i = \frac{r_i}{2}$, $\beta = 2$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, τότε $X_i \sim \mathcal{X}^2_{r_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \mathcal{X}^2_{\sum_{i=1}^{k} r_i}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.1.10. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.1.11. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 1.1.10. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή για να καταλήξετε σε άτοπο. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή και για την αποδεκτικότητα συγκρίνετε τις τιμές που παίρνει ο εκτιμητής με τις τιμές της υπό εκτίμηση παραμετρικής συνάρτησης. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Υπόδειξη: Για το πρώτο ερώτημα χρησιμοποιείστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή, ενώ για το δεύτερο χρησιμοποιείστε πολλαπλασιαστές Lagrange. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή και αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τη συνάρτηση e^{ϑ}. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε για αντιπαράδειγμα την Άσκηση 1.2.4 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον Ορισμό 1.1.3 του αμερόληπτου εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.14

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή μίας ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής στο διάστημα (a, b) (δηλαδή, όταν $X \sim \mathcal{U}(a, b)$) είναι $EX = \frac{a+b}{2}$, επομένως, η μέση τιμή της κατανομής μας είναι $\frac{\vartheta}{2}$. Όμως, από την Πρόταση 1.1.10, επειδή έχουμε ένα τυχαίο δείγμα, ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για την μέση τιμή της κατανομής, δηλαδή,

$$E_\vartheta \bar{X} = \frac{\vartheta}{2} \Rightarrow E_\vartheta(2\bar{X}) = \vartheta, \quad \forall \vartheta \in \Theta,$$

άρα ο $T(\underset{\sim}{X}) = 2\bar{X}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ.

Λόγω της Παρατήρησης 1.1.6, για να βρούμε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα του $T(\underset{\sim}{X})$, αρκεί να υπολογίσουμε τη διασπορά του. Οπότε,

$$Var_\vartheta T = Var_\vartheta(2\bar{X}) = Var_\vartheta\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 Var_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var_\vartheta X_i = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\vartheta^2}{12} = \frac{\vartheta^2}{3n}.$$

Συνεπώς, $\text{ΜΤΣ}(T, \vartheta) = Var_\vartheta(T) = \frac{\vartheta^2}{3n}$. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο...
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και...
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 62 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η διασπορά μίας ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής στο διάστημα (a, b) (δηλαδή, όταν $X \sim \mathcal{U}(a, b)$) είναι $VarX = \dfrac{(a-b)^2}{12}$, επομένως, η διασπορά της κατανομής μας είναι $\dfrac{\vartheta^2}{12}$. Όμως, από την Πρόταση 1.1.11, επειδή έχουμε ένα τυχαίο δείγμα, η δειγματική διασπορά S^2 είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς της κατανομής, δηλαδή

$$E_\vartheta S^2 = \frac{\vartheta^2}{12} \Rightarrow E_\vartheta(12S^2) = \vartheta^2, \quad \forall \vartheta \in \Theta,$$

άρα ο $T(\underset{\sim}{X}) = 12S^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^2. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή και η διασπορά μίας Poisson τυχαίας μεταβλητής με παράμετρο λ (δηλαδή, όταν $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$) είναι $EX = VarX = \lambda$, επομένως, η μέση τιμή της κατανομής μας είναι ϑ. Άρα, ένας αμερόληπτος εκτιμητής για το ϑ είναι ο X, οπότε είναι εύλογο να δοκιμάσω για αμερόληπτο εκτιμητή του ϑ^2, τον X^2.
$E_\vartheta(X^2) = Var_\vartheta X + (E_\vartheta X)^2 = \vartheta + \vartheta^2 = E_\vartheta X + \vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta(X^2) = E_\vartheta X + \vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta(X^2) - E_\vartheta X = \vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta(X^2 - X) = \vartheta^2 \Rightarrow E_\vartheta(X(X-1)) = \vartheta^2, \forall \vartheta \in \Theta$. Συνεπώς, ο $T(X) = X(X-1)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^2. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Απόδειξη: Στη συγκεκριμένη περίπτωση μας ζητείται να υπολογίσουμε έναν αμερόληπτο εκτιμητή για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\vartheta)$ η οποία είναι περίπλοκη, όμως μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $g(\vartheta) = P_\vartheta(X = k)$, οπότε εδώ χρησιμοποιείται το εξής τέχνασμα. Θεωρούμε τη στατιστική συνάρτηση

$$T(X) = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } X = k \\ 0 & ,\text{αν } X \neq k. \end{cases}.$$

Επομένως,

$E_\vartheta(T(X)) = 1 \cdot P_\vartheta(T(X) = 1) + 0 \cdot P_\vartheta(T(X) = 0) = P_\vartheta(T(X) = 1) =$

$P_\vartheta(X = k) = e^{-\vartheta}\dfrac{\vartheta^k}{k!}, \ \forall \vartheta \in \Theta.$

Συνεπώς ο εκτιμητής $T(X)$ είναι αμερόληπτος για την $g(\vartheta)$. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Απόδειξη: Επειδή οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, από τις αναπαραγωγικές ιδιότητες προκύπτει ότι η στατιστική συνάρτηση

$$T = T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{n} n_i, \vartheta).$$

Επομένως,

$$E_\vartheta T = (\sum_{i=1}^{n} n_i)\vartheta \Rightarrow E_\vartheta \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i} T \right) = \vartheta, \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Συνεπώς, ο εκτιμητής $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ είναι αμερόληπτος του ϑ.

Ακόμα, λόγω της Παρατήρησης 1.1.6,

$$\text{ΜΤΣ}(T_1, \vartheta) = Var_\vartheta(T_1(\underset{\sim}{X})) = Var_\vartheta \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \right)^2 Var_\vartheta(\sum_{i=1}^{n} X_i) \Rightarrow \text{ΜΤΣ}(T_1, \vartheta) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{\sum_{i=1}^{n} n_i}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Απόδειξη: Για να αποτελεί η T αμερόληπτο εκτιμητή του ϑ πρέπει

$$E_\vartheta T(\underset{\sim}{X}) = \vartheta, \quad \forall \vartheta \in \Theta.$$

Συνεπώς, $E_\vartheta T = \vartheta \Rightarrow E_\vartheta(a_1 T_1 + a_2 T_2) = \vartheta \Rightarrow a_1 E_\vartheta T_1 + a_2 E_\vartheta T_2 = \vartheta \Rightarrow a_1 \vartheta + a_2 \vartheta = \vartheta$ και η τελευταία πρέπει να ισχύει $\forall \vartheta \in \Theta$, επομένως η ζητούμενη συνθήκη είναι $a_1 + a_2 = 1$. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Απόδειξη:

1. Για να είναι ο T_c αμερόληπτος εκτιμητής του ∂ πρέπει να ισχύει, $E_\partial T_c = \partial, \forall \partial \in \partial$. Οπότε,

   $E_\partial T_c = E_\partial(c\bar{X} + (1-c)\bar{Y}) = cE_\partial(\bar{X}) + (1-c)E_\partial(\bar{Y}) = c\partial + (1-c)\partial = \partial, \forall \partial \in \partial$. Συνεπώς, ο T_c είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ∂ και αυτό συμβαίνει για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

2. Επειδή, αυτοί οι εκτιμητές T_c ορίζουν μία οικογένεια αμερόληπτων εκτιμητών του ∂, σε αυτό το ερώτημα ψάχνουμε εκείνη την τιμή του c η οποία ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (ουσιαστικά τη διασπορά) του αμερόληπτου εκτιμητή T_c.

   $Var_\partial T_c = Var_\partial(c\bar{X} + (1-c)\bar{Y}) = c^2 Var_\partial(\bar{X}) + (1-c)^2 Var_\partial(\bar{Y}) = c^2\frac{\sigma_1^2}{n} + (1-c)^2\frac{\sigma_2^2}{n} = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}c^2 - 2\frac{\sigma_2^2}{n}c + \frac{\sigma_2^2}{n}$.

   Παρατηρούμε ότι η διασπορά του T_c είναι ένα τριώνυμο ως προς c (της μορφής $ac^2 + bc + d$), το οποίο ελαχιστοποιείται για

   $$c_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2\frac{\sigma_2^2}{n}}{2\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

   Συνεπώς, ο καλύτερος εκτιμητής στην οικογένεια των αμερόληπτων εκτιμητών του ∂, είναι ο

   $$T_{c_0} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\bar{X} + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\bar{Y}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο . . .
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και . . .
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 68 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $T = T(X)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για το ϑ^2. Εφ' όσον η τυχαία μεταβλητή X έχει κατανομή Bernoulli, η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από τη σχέση,

$$P(X = x) = \vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

Οπότε,
$E_\vartheta T = \vartheta^2 \Leftrightarrow T(0)P(X = 0) + T(1)P(X = 1) = \vartheta^2 \Leftrightarrow T(0)(1-\vartheta) + T(1)\vartheta = \vartheta^2$

$$\Leftrightarrow \vartheta^2 + (T(0) - T(1))\vartheta - T(0) = 0 \tag{6.1}$$

και η Σχέση (6.1) θέλουμε να ισχύει $\forall \vartheta \in (0, 1)$, άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει αμερόληπτος εκτιμητής για το ϑ^2. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η X είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή, άρα η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x;\vartheta) = P_\vartheta(X = x) = \vartheta(1-\vartheta)^x$. Οπότε,

$$E_\vartheta T(X) = 1 \cdot P_\vartheta(T(X) = 1) + 0 \cdot P_\vartheta(T(X) = 0) = P_\vartheta(T(X) = 1) =$$
$$P_\vartheta(X = 0) = \vartheta, \ \forall \vartheta \in (0, 1),$$

δηλαδή η στατιστική συνάρτηση $T(X)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ.

Όσον αφορά το ερώτημα εάν αυτός ο εκτιμητής είναι αποδεκτός, μπορούμε να πούμε ότι προσπαθούμε να εκτιμήσουμε την άγνωστη παράμετρο ϑ, η οποία παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $(0, 1)$, με τη συνάρτηση $T(X)$ η οποία παίρνει μόνο δύο τιμές (0 και 1), κάτι που προφανώς δεν είναι καλό να το επιδιώκουμε, άρα ο αμερόληπτος εκτιμητής που βρήκαμε είναι μη αποδεκτός μόνο και μόνο για αυτήν την ερμηνεία που δόθηκε. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Απόδειξη:

1. Για να είναι η στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ αμερόληπτος εκτιμητής του μ, πρέπει

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \mu, \quad \forall \mu.$$

Όμως,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E_\vartheta(X_i) = \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \mu = \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

2. Ουσιαστικά θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $Var_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)$ με τη συνθήκη $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, οπότε χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστές Lagrange, δηλαδή κατασκευάζουμε τη συνάρτηση,

$$L = L(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = Var_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var_\vartheta X_i - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1\right).$$

Κατόπιν, παραγωγίζοντας την L, ως προς $a_1, \ldots, a_n$ και λ σχηματίζουμε ένα σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους.

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 2a_1\sigma^2 - \lambda = 0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = 2a_2\sigma^2 - \lambda = 0 \qquad (2)$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial L}{\partial a_n} = 2a_n\sigma^2 - \lambda = 0 \qquad (n)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1\right) = 0 \qquad (n+1)$$

Λύνοντας τις Εξισώσεις $(1)-(n)$, ως προς $a_1, \ldots, a_n$ αντίστοιχα προκύπτει,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{\lambda}{2\sigma^2} \qquad (6.2)$$

και αντικαθιστώντας στην Εξίσωση $(n+1)$ έχουμε,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2\sigma^2} - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2\sigma^2}{n}. \qquad (6.3)$$

Επομένως, λόγω της της Εξίσωσης (6.2) συμπεραίνουμε ότι,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{n}$$

Τελικά, ο ζητούμενος εκτιμητής είναι ο $T(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, δηλαδή ο γνωστός μας δειγματικός μέσος. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι σε ένα τυχαίο δείγμα, ο καλύτερος αμερόληπτος εκτιμητής (ο οποίος είναι γραμμική συνάρτηση του δείγματος) είναι ο δειγματικός μέσος.

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Απόδειξη: Έστω $T(X)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ, δηλαδή

$$E_{\vartheta}(T(X)) = \vartheta, \quad \forall \vartheta \in (0, \infty).$$

Όμως,

$$E_{\vartheta}(T(X)) = \vartheta \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\vartheta^x}{x!} e^{-\vartheta} = \vartheta \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\vartheta^x}{x!} = \vartheta e^{\vartheta}.$$

Αναπτύσσοντας στην τελευταία εξίσωση την e^{ϑ} σε δυναμοσειρά προκύπτει,

$$\sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\vartheta^x}{x!} = \vartheta \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\vartheta^x}{x!} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{T(x)}{x!} \vartheta^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\vartheta^{x+1}}{x!} \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{T(x)}{x!} \vartheta^x = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\vartheta^x}{(x-1)!} \Rightarrow$$

$$T(0) + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{T(x)}{x!} \vartheta^x = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)!} \vartheta^x, \quad \forall \vartheta \in (0, \infty).$$

Επειδή το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά είναι μοναδικό πρέπει να ισχύει,

$$T(0) = 0 \;\text{ και }\; \frac{T(x)}{x!} = \frac{1}{(x-1)!}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

Δηλαδή, ο $T(X) = X$ είναι ο μοναδικός αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ (λόγω της μοναδικότητας του αναπτύγματος). □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.12

Απόδειξη: Αφού ο T είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, ισχύει ότι,

$$E_\vartheta T = g(\vartheta), \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Επομένως,

$$E_\vartheta S = E_\vartheta(aT + b) = aE_\vartheta T + b = ag(\vartheta) + b, \quad \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Δηλαδή, η πρόταση ισχύει.

Για να απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα μπορούμε να δείξουμε ότι δεν ισχύει φέρνοντας ένα αντιπαράδειγμα. Παρατηρήστε ότι στην Άσκηση 1.2.4, ενώ ο $T(X) = X$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ, για την παραμετρική συνάρτηση $f(\vartheta) = \vartheta^2$, η συνάρτηση $f(T(X)) = X^2$ δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής της, αλλά ο $T_1(X) = X(X-1)$. Συνεπώς, αν ο T είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta)$, ο $f(T)$ δεν είναι αμερόληπτος εκτιμητής της $f(g(\vartheta))$, εκτός εάν η f είναι γραμμική συνάρτηση. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.13

Απόδειξη: Θεωρούμε ότι ο $T = T(X_1, X_2)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^2, επομένως $\forall\vartheta \in (0,1)$,

$$
\begin{aligned}
&E_\vartheta T = \vartheta^2 \Rightarrow \sum_{x_1=0}^{1}\sum_{x_2=0}^{1} T(x_1,x_2)P_\vartheta(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \vartheta^2 \Rightarrow \\
&T(0,0)P_\vartheta(X_1 = 0, X_2 = 0) + T(0,1)P_\vartheta(X_1 = 0, X_2 = 1) + \\
&T(1,0)P_\vartheta(X_1 = 1, X_2 = 0) + T(1,1)P_\vartheta(X_1 = 1, X_2 = 1) = \vartheta^2 \Rightarrow \\
&T(0,0)P_\vartheta(X_1 = 0)P_\vartheta(X_1 = 0) + T(0,1)P_\vartheta(X_1 = 0)P_\vartheta(X_1 = 1) + \\
&T(1,0)P_\vartheta(X_1 = 1)P_\vartheta(X_1 = 0) + T(1,1)P_\vartheta(X_1 = 1)P_\vartheta(X_1 = 1) = \vartheta^2 \Rightarrow \\
&T(0,0)(1-\vartheta)^2 + T(0,1)(1-\vartheta)\vartheta + T(0,1)\vartheta(1-\vartheta) + T(1,1)\vartheta^2 = \vartheta^2 \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\{T(0,0)-T(0,1)-T(1,0)+T(1,1)\}\vartheta^2 + \{T(0,1)+T(1,0)-2T(0,0)\}\vartheta + T(0,0) = \vartheta^2. \quad (6.4)
$$

Η Εξίσωση (6.4) θέλουμε να ισχύει $\forall\vartheta \in (0,1)$ επομένως για να συμβαίνει αυτό αρκεί,

$$
\begin{cases} T(0,0) - T(0,1) - T(1,0) + T(1,1) = 1 \\ T(0,1) + T(1,0) - 2T(0,0) = 0 \\ T(0,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(1,1) = 1 \\ T(0,1) = -T(1,0) \\ T(0,0) = 0 \end{cases}
$$

Δηλαδή η κλάση των αμερόληπτων εκτιμητών του ϑ^2 είναι,

$$
C = \{T(x_1,x_2) : T(0,0) = 0, T(1,1) = 1, T(1,0) = -T(0,1)\}.
$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.14

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 2.1.4 για να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος Cramer-Rao. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 2.1.4 για να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του Θεωρήματος Cramer-Rao. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.1.5 για να βρείτε ΑΟΕΔ εκτιμητή του ϑ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 2.1.4 για να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος Cramer-Rao και την Πρόταση 2.1.5 για να βρείτε ΑΟΕΔ εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.1.9 για να αποδείξετε ότι η T είναι επαρκής και τον Ορισμό 2.1.8 για να διαπιστώσετε ότι η S δεν είναι επαρκής. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 2.1.8 για να διαπιστώσετε ότι η T δεν είναι επαρκής. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.1.9 για να βρείτε επαρκή στατιστική συνάρτηση και τον Ορισμό 2.1.15 για να βρείτε πλήρη στατιστική συνάρτηση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.1.9 για να βρείτε επαρκή στατιστική συνάρτηση και τον Ορισμό 2.1.15 για να βρείτε πλήρη στατιστική συνάρτηση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Υπόδειξη: Υπολογίστε την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών $|X_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 2.2.7 $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 2.1.10(1) για να βρείτε επαρκή στατιστική συνάρτηση και τον Ορισμό 2.1.15 για να βρείτε πλήρη στατιστική συνάρτηση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 2.1.15. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι ο Ορισμός 2.1.15 δεν ισχύει. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.1.9 για να βρείτε επαρκή στατιστική συνάρτηση και αποδείξτε ότι ο Ορισμός 2.1.15 δεν ισχύει. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 2.1.16. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 2.1.17. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 2.1.17. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πόρισμα 2.1.17. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.17

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 93 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 2.1.10(1) για να βρείτε επαρκή στατιστική συνάρτηση και τον Ορισμό 2.1.15 για να βρείτε πλήρη στατιστική συνάρτηση. Εφαρμόστε το Πόρισμα 2.1.17 για να βρείτε τον ΑΟΕΔ εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.18

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 2.1.20 για να βρείτε επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση και το Πόρισμα 2.1.17 για να βρείτε τους ΑΟΕΔ εκτιμητές. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.19

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 2.2.16 και το Θεώρημα 2.1.16. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.20

Απόδειξη: Για να υπολογίσουμε το C.R.-Κ.Φ. πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει το Θεώρημα Cramer-Rao, δηλαδή οι συνθήκες (I1) - (I5).

(I1) Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(I2) - (I4) Για να δείξουμε ότι ισχύουν αυτές οι τρεις ιδιότητες, αρκεί να ισχύει το Θεώρημα 2.1.4. Αρχικά δείχνουμε ότι η κανονική κατανομή ανήκει στην ΜΕΟΚ.

1. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x}, \partial) > 0\} = \mathbb{R}_+^n$ δεν εξαρτάται από το ∂.

2. $$f(\underset{\sim}{x}, \partial) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\partial^{1/2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\partial}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\partial^{n/2}} e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\partial}} \Rightarrow$$
$$f(\underset{\sim}{x}, \partial) = \exp\left\{-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\partial - \frac{1}{2\partial}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}.$$
Θεωρούμε,
$$A(\partial) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\partial,\ B(\underset{\sim}{x}) = 0,\ c(\partial) = -\frac{1}{2\partial} \text{ και } D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$
Επομένως η οικογένεια κατανομών ανήκει στην ΜΕΟΚ.

Επειδή η ποσότητα $c(\partial) = -\dfrac{1}{2\partial}$ έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο, $c'(\partial) = \dfrac{1}{2\partial^2}$ όταν $\partial \in (0, \infty)$, ισχύουν οι συνθήκες (I2) $-$ (I4), λόγω του Θεωρήματος 2.1.4.

(I5) Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό πληροφορίας Fisher. Έχουμε τυχαίο δείγμα επομένως,
$$I(\partial) = nI_1(\partial), \text{ όπου } I_1(\partial) = -E_\partial\left(\frac{\partial^2}{\partial\partial^2}\ln f(x;\partial)\right).$$
Οπότε,
$$f(x;\partial) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\partial^{1/2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\partial}} \Rightarrow \ln f(x;\partial) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\partial - \frac{(x-\mu)^2}{2\partial} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\partial}\ln f(x;\partial) =$$
$$-\frac{1}{2\partial} + \frac{(x-\mu)^2}{2\partial^2} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\partial^2}\ln f(x;\partial) = \frac{1}{2\partial^2} - \frac{(x-\mu)^2}{\partial^3}.$$

Άρα, $I_1(\vartheta) = -E_\vartheta\left\{-\vartheta^{-3}\left[(X-\mu)^2 - \frac{\vartheta}{2}\right]\right\} = \vartheta^{-3}\left\{E_\vartheta(X-\mu)^2 - \frac{\vartheta}{2}\right\} =$
$\vartheta^{-3}\left\{Var_\vartheta X - \frac{\vartheta}{2}\right\} = \vartheta^{-3}\left\{\vartheta - \frac{\vartheta}{2}\right\} = \frac{1}{2\vartheta^2}.$

Τελικά, $I(\vartheta) = nI_1(\vartheta) = \frac{n}{2\vartheta^2} > 0$ και πεπερασμένο $\forall\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$.

Εφ' όσον οι συνθήκες του Θεωρήματος Cramer-Rao αποδείχτηκαν, το C.R.-Κ.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $g(\vartheta) = \vartheta^{1/2}$ είναι,

$$\frac{(g'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)} = \frac{((1/2)\vartheta^{-1/2})^2}{n/(2\vartheta^2)} = \frac{\vartheta}{2n}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.1

Απόδειξη: Όπως συνέβη και στην Άσκηση 2.2.1 πρέπει να αποδειχθούν οι συνθήκες (I1) - (I5) του Θεωρήματος Cramer - Rao ή διαφορετικά να επαληθευτούν οι (I1), οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.1.4 και η (I5).

(I1) Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)$ είνα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(I2) - (I4) Η Poisson ανήκει στην ΜΕΟΚ διότι,

1. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x}, \vartheta) > 0\} = \mathbb{R}^n_+$ δεν εξαρτάται από το ϑ.

2. $f(\underset{\sim}{x}, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-a_i\vartheta} \dfrac{(a_i\vartheta)^{x_i}}{x_i!} = e^{-\sum a_i\vartheta} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{x_i}\right) \vartheta^{\sum x_i} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \Rightarrow$

   $$f(\underset{\sim}{x}, \vartheta) = \exp\left\{-(\sum_{i=1}^{n} a_i)\vartheta - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i! - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln a_i + \ln\vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

   Θεωρούμε,

   $A(\vartheta) = -(\sum_{i=1}^{n} a_i)\vartheta$, $B(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i! - \sum_{i=1}^{n} x_i \ln a_i$, $c(\vartheta) = \ln\vartheta$ και

   $D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i.$

   Επομένως η οικογένεια κατανομών ανήκει στην ΜΕΟΚ.

Επειδή η ποσότητα $c(\vartheta) = \ln\vartheta$ έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο, $c'(\vartheta) = \dfrac{1}{\vartheta}$ όταν $\vartheta \in (0, \infty)$, ισχύουν οι συνθήκες (I2) − (I4), λόγω του Θεωρήματος 2.1.4.

(I5) Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό πηροφορίας Fisher. Έχουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές επομένως,

$$I(\vartheta) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\vartheta), \text{ όπου } I_i(\vartheta) = -E_\vartheta\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \ln f(x_i; \vartheta)\right).$$

Οπότε,

$$f(x_i;\vartheta) = e^{-a_i\vartheta}\frac{(a_i\vartheta)^{x_i}}{x_i!} \Rightarrow \ln f(x_i;\vartheta) = -a_i\vartheta + x_i \ln a_i + x_i \ln\vartheta - \ln x_i! \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f(x_i;\vartheta) =$$

$$-a_i + \frac{x_i}{\vartheta} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f(x_i;\vartheta) = -\frac{x_i}{\vartheta^2} \Rightarrow I_i(\vartheta) = -E_\vartheta\left(-\frac{X_i}{\vartheta^2}\right) \Rightarrow I_i(\vartheta) = \frac{a_i}{\vartheta}.$$

Τελικά, ο αριθμός πληροφορίας Fisher $I(\vartheta) = \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i}{\vartheta} > 0$ και πεπερασμένος $\forall\vartheta \in (0,\infty)$.

Εφ' όσον οι συνθήκες του Θεωρήματος Cramer-Rao αποδείχτηκαν, το C.R.-K.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $g(\vartheta) = \vartheta$ είναι,

$$\frac{(g'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n a_i)/\vartheta} = \frac{\vartheta}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 100 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια κατανομών ανήκει στην ΜΕΟΚ.

1. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0\} = \{0,1\} \times \ldots \{0,1\} = \{0,1\}^k$ δεν εξαρτάται από το ϑ.

2. $$f(\underset{\sim}{x},\vartheta) = \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i} \vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{n_i-x_i} = \left(\prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{x_i}\right) \vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{\sum n_i - \sum x_i}$$
$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \ln\binom{n_i}{x_i} + (\ln\vartheta)\sum_{i=1}^{k} x_i + \ln(1-\vartheta)\left(\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} x_i\right)\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \ln\binom{n_i}{x_i} + \ln(1-\vartheta)\sum_{i=1}^{k} n_i + \ln\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)\sum_{i=1}^{k} x_i\right\}.$$
Οπότε αν θέσουμε,
$$A(\vartheta) = \ln(1-\vartheta)\sum_{i=1}^{k} n_i, \quad B(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{k} \ln\binom{n_i}{x_i}, \quad c(\vartheta) = \ln\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) \text{ και } D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{k} x_i,$$
αποδεικνύεται ότι η οικογένεια κατανομών ανήκει στην ΜΕΟΚ.

Κατόπιν δείχνουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες της Πρότασης 2.1.5,

a) Το σύνολο $\Theta = (0,1)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

b) Η $c(\vartheta) = \ln\left(\dfrac{\vartheta}{1-\vartheta}\right)$ έχει μη μηδενική παράγωγο, $c'(\vartheta) = \dfrac{1}{\vartheta(1-\vartheta)}$, η οποία είναι και συνεχής όταν $\vartheta \in (0,1)$.

c) Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, ο αριθμός πληροφορίας Fisher δίνεται από τη σχέση,
$$I(\vartheta) = \sum_{i=1}^{k} I_i(\vartheta), \text{ όπου } I_i(\vartheta) = -E_\vartheta\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f(x_i;\vartheta)\right).$$
Οπότε, $f(x_i;\vartheta) = \dbinom{n_i}{x_i}\vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{n_i-x_i}$

$$\Rightarrow \ln f(x_i;\vartheta) = \ln\binom{n_i}{x_i} + (\ln\vartheta)x_i + (\ln(1-\vartheta))n_i - (\ln(1-\vartheta))x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f(x_i;\vartheta) = \frac{x_i}{\vartheta} - \frac{n_i - x_i}{1-\vartheta} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f(x_i;\vartheta) = -\frac{x_i}{\vartheta^2} - \frac{n_i - x_i}{(1-\vartheta)^2}.$$

Επομένως,

$$I_i(\vartheta) = -E_\vartheta\left(-\frac{X_i}{\vartheta^2} - \frac{n_i - X_i}{(1-\vartheta)^2}\right) = \frac{E_\vartheta X_i}{\vartheta^2} + \frac{n_i - E_\vartheta X_i}{(1-\vartheta)^2} = \frac{n_i\vartheta}{\vartheta^2} + \frac{n_i - n_i\vartheta}{(1-\vartheta)^2} \Rightarrow$$

$$I_i(\vartheta) = \frac{n_i}{\vartheta(1-\vartheta)}.$$

Τελικά, $I(\vartheta) = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\vartheta(1-\vartheta)}$ το οποίο είναι θετικό και πεπερασμένο.

Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{k} X_i$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής του $g(\vartheta) = E_\vartheta D(\underset{\sim}{X}) = E_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} n_i\vartheta$

ή διαφορετικά,

η στατιστική συνάρτηση $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Απόδειξη: Για να υπολογισθεί το C.R.-Κ.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του ϑ και του ϑ^2 πρέπει να αποδειχθούν οι συνθήκες (I1) - (I5) του Θεωρήματος Cramer-Rao.

(I1) Ο παραμετρικός χώρος $\Theta = (0, \infty)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(I2) - (I4) Κατ΄ αρχάς θα αποδείξουμε ότι η κατανομή $Gamma(a, \vartheta)$ ανήκει στην ΜΕΟΚ.

1. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x}; \vartheta) > 0\} = \mathbb{R}_+^n$ δεν εξαρτάται από το ϑ.

2. $$f(\underset{\sim}{x}, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(a)\vartheta^a} x_i^{a-1} e^{-\frac{x_i}{\vartheta}} = \frac{1}{(\Gamma(a))^n \vartheta^{na}} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a-1} e^{-\frac{\sum x_i}{\vartheta}}$$
$$= \exp\left\{-n\ln(\Gamma(a)) - na\ln\vartheta + (a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}.$$
Οπότε αν θέσουμε $A(\vartheta) = -n\ln(\Gamma(a)) - na\ln\vartheta$, $B(\underset{\sim}{x}) = (a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$, $c(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$ και $D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.

(I5) Επειδή έχουμε ένα τυχαίο δείγμα, ο αριθμός πληροφορίας Fisher δίνεται από τη σχέση,
$$I(\vartheta) = nI_1(\vartheta), \quad \text{όπου} \quad I_1(\vartheta) = -E_\vartheta\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f(x;\vartheta)\right).$$
Επομένως,
$$f(x;\vartheta) = \frac{1}{\Gamma(a)\vartheta^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\vartheta}}$$
$$\Rightarrow \ln f(x;\vartheta) = -\ln(\Gamma(a)) - a\ln\vartheta + (a-1)\ln x - \frac{x}{\vartheta}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f(x;\vartheta) = -\frac{a}{\vartheta} + \frac{x}{\vartheta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f(x;\vartheta) = \frac{a}{\vartheta^2} - 2\frac{x}{\vartheta^3}$$
$$\Rightarrow I_1(\vartheta) = -E_\vartheta\left(\frac{a}{\vartheta^2} - 2\frac{X}{\vartheta^3}\right) = 2\frac{E_\vartheta X}{\vartheta^3} - \frac{a}{\vartheta^2} = 2\frac{a\vartheta}{\vartheta^3} - \frac{a}{\vartheta^2} = \frac{a}{\vartheta^2}.$$

Τελικά, $\forall\vartheta \in (0,\infty)$ ο αριθμός πληροφορίας Fisher $I(\vartheta) = \frac{na}{\vartheta^2}$ είναι θετικός και πεπερασμένος.

Αρχικά υπολογίζουμε το C.R.-Κ.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών της $g_1(\vartheta) = \vartheta$. Έτσι,

$$I_1 = \frac{(g_1'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)} = \frac{\vartheta^2}{na}$$

και έπειτα το C.R.-Κ.Φ. για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών της $g_2(\vartheta) = \vartheta^2$. Δηλαδή,

$$I_2 = \frac{(g_2'(\vartheta))^2}{I(\vartheta)} = \frac{4\vartheta^4}{na}.$$

Τελειώνοντας θα ασχοληθούμε με το ερώτημα για ποιες παραμετρικές συναρτήσεις μπορούμε να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητές, με χρήση της ανισότητας Cramer-Rao. Λόγω της Πρότασης 2.1.5, και εφ' όσον έχει αποδειχθεί ότι ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος Cramer-Rao, η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\vartheta) = E_\vartheta D(\underset{\sim}{X}) = E_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E_\vartheta X_i = na\vartheta$ και μόνο για αυτές τις παραμετρικές συναρτήσεις, καθώς και γραμμικούς συνδυασμούς αυτών, μπορούμε να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητές με χρήση της ανισότητας Cramer-Rao. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Απόδειξη: Επειδή οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες, $f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = f(x_1;\vartheta)f(x_2;\vartheta)$
$\Rightarrow f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \vartheta^{x_1}(1-\vartheta)^{1-x_1}\vartheta^{x_2}(1-\vartheta)^{1-x_2} = \vartheta^{x_1+x_2}(1-\vartheta)^{2-(x_1+x_2)}$.
Οπότε από το παραγοντικό κριτήριο των Neyman-Fisher (Πρόταση 2.1.9), αν θέσουμε $h(\underset{\sim}{x}) = 1$ και $q(T(\underset{\sim}{x}),\vartheta) = \vartheta^{x_1+x_2}(1-\vartheta)^{2-(x_1+x_2)}$, η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = X_1 + X_2$ είναι επαρκής.

Όσον αφορά τη στατιστική συνάρτηση S αυτή δεν θα είναι επαρκής, αν δεν ισχύει ο ορισμός, δηλαδή αν υπάρχει μία τιμή s της S για την οποία, η δεσμευμένη κατανομή της $\underset{\sim}{X}|S = s$ να εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ. Θεωρούμε $s = 1$ και υπολογίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα,

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0)}{P(X_1 = 1)} = \frac{P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)}{P(X_1 = 1)} =$$

$P(X_2 = 0) = 1 - \vartheta$. Εξαρτάται από το ϑ, άρα η S δεν είναι επαρκής. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Όπως και στην επίλυση της Ασκήσεως 2.2.5, θα δείξουμε ότι υπάρχει μία τιμή t της T για την οποία, η δεσμευμένη κατανομή της $\underset{\sim}{X}|T = t$ να εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο ϑ. Θεωρούμε $t = 1$ και υπολογίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα,

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0|X_1 + X_2 = 1) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_1 + X_2 = 1)}{P(X_1 + X_2 = 1)} =$$

$$\frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0)}{P(X_1 + X_2 = 1)} = \frac{P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)}{P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)} =$$

$\dfrac{(1-\vartheta)2\vartheta}{(1-\vartheta)2\vartheta + (1-2\vartheta)\vartheta} = \dfrac{2-2\vartheta}{3-4\vartheta}$, εξαρτάται από το ϑ και συνεπώς η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_1 + X_2$ δεν είναι επαρκής.

Παρατήρηση 6.3.1 *Παρατηρήστε ότι στην Άσκηση 2.2.5 όπου τα δεδομένα μας αποτελούν τυχαίο δείγμα, η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_1 + X_2$ είναι επαρκής, ενώ τώρα που έχουμε απλά ανεξάρτητα δεδομένα η ίδια στατιστική συνάρτηση δεν είναι επαρκής.*

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Απόδειξη: Αφού οι παρατηρήσεις μας είναι ανεξάρτητες,

$$f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\vartheta} I_{(0,\vartheta)}(x_i) = \frac{1}{\vartheta^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\vartheta)}(x_i).$$

Θεωρούμε την μέγιστη παρατήρηση $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ και την ελάχιστη παρατήρηση $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, οπότε,

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\vartheta)}(x_i) = \begin{cases} 1 & , 0 < x_i < \vartheta, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , 0 < x_{(1)} \le x_{(n)} < \vartheta \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\vartheta)}(x_i) = I_{(0,x_{(n)}]}(x_{(1)}) I_{[x_{(1)},\vartheta)}(x_{(n)})$$

Τελικά, $f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \dfrac{1}{\vartheta^n} I_{(0,x_{(n)}]}(x_{(1)}) I_{[x_{(1)},\vartheta)}(x_{(n)})$.

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε $h(\underset{\sim}{x}) = I_{(0,x_{(n)}]}(x_{(1)})$ και $q(T(\underset{\sim}{x}),\vartheta) = \dfrac{1}{\vartheta^n} I_{[x_{(1)},\vartheta)}(x_{(n)})$, τότε από το παραγοντικό κριτήριο των Neyman - Fisher η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)}$ είναι επαρκής.

Θα δείξουμε, με τον ορισμό, ότι η $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)}$ είναι και πλήρης.
Η κατανομή της $X_{(n)}$ δίνεται από τον τύπο,

$$f_{X_{(n)}}(t) = n(F_X(t))^{n-1} f_X(t)$$

όπου $f_X(\cdot)$ και $F_X(\cdot)$ είναι αντίστοιχα η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής κάθε μίας από τις αρχικές μας παρατηρήσεις X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή

$$f_X(t) = \frac{1}{\vartheta}, \text{ όταν } t \in (0,\vartheta)$$

και

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ \dfrac{t}{\vartheta} & , t \in (0,\vartheta) \\ 1 & , t \ge \vartheta \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_{X_{(n)}}(t) = n\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{n-1}\frac{1}{\vartheta}, \quad t \in (0, \vartheta).$$

Κατόπιν θεωρούμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall \vartheta > 0$,

$$E_\vartheta(\varphi(T)) = 0 \Rightarrow \int_0^\vartheta \varphi(t)\frac{n}{\vartheta^n}t^{n-1}dt = 0 \Rightarrow \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta \varphi(t)t^{n-1}dt = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^\vartheta \varphi(t)t^{n-1}dt = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta}\int_0^\vartheta \varphi(t)t^{n-1}dt = 0 \Rightarrow \varphi(\vartheta)\vartheta^{n-1} = 0, \ \forall \vartheta > 0 \Rightarrow$$

$\varphi(\vartheta) = 0, \ \forall \vartheta > 0 \Rightarrow \varphi(t) = 0, \ \forall t > 0$, επομένως η $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)}$ είναι και πλήρης. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Απόδειξη: Αφού οι παρατηρήσεις μας είναι ανεξάρτητες,

$$f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\vartheta)} I_{[\vartheta,\infty)}(x_i) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\vartheta\right\} \prod_{i=1}^{n} I_{[\vartheta,\infty)}(x_i).$$

Θεωρούμε την ελάχιστη παρατήρηση $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, οπότε,

$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\vartheta,\infty)}(x_i) = \begin{cases} 1 & ,\vartheta \leq x_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \\ 0 & ,\text{διαφορετικά.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\vartheta \leq x_{(1)} \\ 0 & ,\text{διαφορετικά.} \end{cases} = I_{[\vartheta,\infty)}(x_{(1)})$$

Τελικά, $f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\vartheta\right\} I_{[\vartheta,\infty)}(x_{(1)})$.

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε $h(\underset{\sim}{x}) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$ και $q(T(\underset{\sim}{x}),\vartheta) = e^{n\vartheta} I_{[\vartheta,\infty)}(x_{(1)})$, τότε από το παραγοντικό κριτήριο των Neyman - Fisher η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)}$ είναι επαρκής.

Θα δείξουμε, με τον ορισμό, ότι η $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)}$ είναι και πλήρης.

Η κατανομή της $X_{(1)}$ δίνεται από τον τύπο,

$$f_{X_{(1)}}(t) = n(1 - F_X(t))^{n-1} f_X(t)$$

όπου $f_X(\cdot)$ και $F_X(\cdot)$ είναι αντίστοιχα η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής κάθε μίας από τις αρχικές μας παρατηρήσεις X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή

$$f_X(t) = e^{-(t-\vartheta)}, \text{ όταν } t \in [\vartheta, \infty)$$

και

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & ,t < \vartheta \\ 1 - e^{-(t-\vartheta)} & ,t \in [\vartheta,\infty) \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$f_{X_{(1)}}(t) = n\left(1 - (1 - e^{-(t-\vartheta)})\right)^{n-1} e^{-(t-\vartheta)}, \quad t \in [\vartheta, \infty).$$

Κατόπιν θεωρούμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\forall \vartheta > 0$,

$$E_\vartheta(\varphi(T)) = 0 \Rightarrow \int_\vartheta^\infty \varphi(t) n e^{-n(t-\vartheta)} dt = 0 \Rightarrow n e^{n\vartheta} \int_\vartheta^\infty \varphi(t) e^{-nt} dt = 0 \Rightarrow \int_\vartheta^\infty \varphi(t) e^{-nt} dt =$$

$$0 \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} \int_\vartheta^\infty \varphi(t) e^{-nt} dt = 0 \Rightarrow -\varphi(\vartheta) e^{-n\vartheta} = 0,\ \forall \vartheta \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\varphi(\vartheta) = 0,\ \forall \vartheta \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, επομένως η $T = T(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)}$ είναι και πλήρης. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο . . .
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και . . .
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 110 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι όταν μία τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{U}(-\vartheta, \vartheta)$, τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = |X| \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$.

Έστω, γενικά, $F_Y(y)$ και $f_Y(y) = \dfrac{d}{dy}F_Y(y)$ είναι, αντίστοιχα, η συνάρτηση κατανομής και η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. Y, τότε για $y > 0$

$F_{|X|}(y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq -y) = F_X(y) - F_X(-y) \Rightarrow$ $f_{|X|}(y) = \dfrac{d}{dy}F_{|X|}(y) = \dfrac{d}{dy}F_X(y) - \dfrac{d}{d(-y)}F_X(-y)\dfrac{d(-y)}{d(y)} = f_X(y) + f_X(-y) = \dfrac{1}{2\vartheta} + \dfrac{1}{2\vartheta} = \dfrac{1}{\vartheta}$, όταν $0 < y < \vartheta$, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $Y = |X| \sim \mathcal{U}(0, \vartheta)$.

Επομένως, σύμφωνα με την Άσκηση 2.2.7, η στατιστική συνάρτηση

$$|X|_{(n)} = \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\}$$

είναι επαρκής και πλήρης. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Απόδειξη: Επειδή το δείγμα είναι τετριμμένα επαρκής στατιστική συνάρτηση (βλ. Παρατήρηση 2.1.10(1)) και στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε μόνο μία τυχαία μεταβλητή, αυτή θα είναι επαρκής, δηλαδή $T(X) = X$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση.

Αφού θέλουμε να δείξουμε ότι η $T(X) = X$ είναι και πλήρης στατιστική συνάρτηση, πρέπει να ισχύει.

$$E_\vartheta \phi(X) = 0, \quad \forall \vartheta \in \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \phi(x) = 0 \;\; \forall x \text{ και } \forall \phi.$$

Όμως,

$$E_\vartheta \phi(X) = 0 \Rightarrow \sum_{x=1}^{3} \phi(x) P_\vartheta(X = x) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta = -1 & , \phi(1)P_{-1}(X=1) + \phi(2)P_{-1}(X=2) + \phi(3)P_{-1}(X=3) = 0 \\ \vartheta = 0 & , \phi(1)P_{0}(X=1) + \phi(2)P_{0}(X=2) + \phi(3)P_{0}(X=3) = 0 \\ \vartheta = 1 & , \phi(1)P_{1}(X=1) + \phi(2)P_{1}(X=2) + \phi(3)P_{1}(X=3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(1)\dfrac{1}{6} + \phi(2)\dfrac{1}{6} + \phi(3)\dfrac{2}{3} = 0 \\ \\ \phi(1)\dfrac{1}{3} + \phi(2)\dfrac{1}{3} + \phi(3)\dfrac{1}{3} = 0 \\ \\ \phi(1)\dfrac{2}{3} + \phi(2)\dfrac{1}{6} + \phi(3)\dfrac{1}{6} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(1) = \phi(2) = \phi(3) = 0.$$

Δηλαδή $\phi(x) = 0$, $\forall x$ και για κάθε συνάρτηση ϕ, επομένως η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι και πλήρης. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Απόδειξη: Αφού η S είναι πλήρης στατιστική συνάρτηση, τότε $E_\vartheta \phi(S) = 0 \Rightarrow \phi(s) = 0$ για κάθε δυνατή τιμή της S και για κάθε συνάρτηση ϕ.
Θεωρούμε $\psi(S) = \phi_1(S) - \phi_2(S) = T_1 - T_2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι T_1 και T_2 είναι αμερόληπτοι εκτιμητές του ϑ προκύπτει ότι,

$$E_\vartheta \psi(S) = E_\vartheta(\phi_1(S) - \phi_2(S)) = E_\vartheta \phi_1(S) - E_\vartheta \phi_2(S) = \vartheta - \vartheta = 0.$$

Επειδή η S είναι πλήρης στατιστική συνάρτηση έπεται ότι $\psi(s) = 0$ για κάθε δυνατή τιμή s της S, επομένως $T_1 = T_2$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε ως συνάρτηση της T την $\phi(T) = \phi(X_1, X_2) = X_1^2 - X_2 - 1$, τότε αυτή, προφανώς παίρνει μη μηδενικές τιμές, ενώ

$E_\vartheta \phi(T) = E_\vartheta(X_1^2 - X_2 - 1) = E_\vartheta X_1^2 - E_\vartheta X_2 - 1 = Var_\vartheta X_1 + (E_\vartheta X_1)^2 - E_\vartheta X_1 - 1 = 1 + \vartheta^2 - \vartheta^2 - 1 = 0.$

Επομένως, λόγω του Ορισμού 2.1.15, η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (X_1, X_2)$ δεν είναι πλήρης. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Απόδειξη: Αφού οι παρατηρήσεις μας είναι ανεξάρτητες,

$$f(\underset{\sim}{x};\vartheta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\vartheta}e^{-\frac{(x_i-\vartheta)^2}{2\vartheta^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\vartheta^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta)^2\right\}=\exp\left\{-\frac{n}{2}\ln 2\pi-n\ln\vartheta-\frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{\vartheta}\right.$$

Αν θέσουμε $q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)=\exp\left\{-n\ln\vartheta-\frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$ με $T(\underset{\sim}{x})=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$ και $h(\underset{\sim}{x})=\exp\left\{-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\right\}$, τότε $f(\underset{\sim}{x};\vartheta)=q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)h(\underset{\sim}{x})$ οπότε, σύμφωνα με το κριτήριο των Neyman-Fisher, η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ είναι επαρκής.

Όσον αφορά την πληρότητα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(T)=\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

έχει μη μηδενικές τιμές, ενώ

$$E_\vartheta\varphi(T)=E_\vartheta\left[\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right]=$$
$$\frac{1}{n(n+1)}\left[Var_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+\left(E_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right)^2\right]-\frac{1}{2n}E_\vartheta\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=$$
$$\frac{1}{n(n+1)}(n\vartheta^2+n^2\vartheta^2)-\frac{1}{2n}2n\vartheta^2=\vartheta^2-\vartheta^2=0$$

επομένως, λόγω του Ορισμού 2.1.15, η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ δεν είναι πλήρης.

Παρατήρηση 6.3.2 *Παρατηρήστε ότι ενώ έχουμε μία μονοδιάστατη άγνωστη παράμετρο ϑ, η ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση είναι διδιάστατη.*

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.13

Απόδειξη:

1. Από την λύση της Ασκήσεως 2.2.3, προκύπτει για $k = 3$ και $n_i = 1, \forall i = 1, 2, 3$, ότι η οικογένεια κατανομών της $\mathcal{B}(1, \vartheta)$ ανήκει στην ΜΕΟΚ, δηλαδή στην ΠΕΟΚ τάξεως 1, με

$$A(\vartheta) = 3\ln(1-\vartheta), B(\underset{\sim}{x}) = 0, c(\vartheta) = \ln\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) \text{ και } D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{3} x_i$$

επομένως, λόγω της Πρότασης 2.1.20, η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{3} X_i$ είναι επαρκής και επειδή το πεδίο τιμών της $c(\vartheta) = \ln\left(\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\right) \in \mathbb{R}$ περιέχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{3} X_i$ είναι και πλήρης.

2. $E_\vartheta S_1 = 1 \cdot P(S_1 = 1) + 0 \cdot P(S_1 = 0) = P(S_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \vartheta$, $\forall \vartheta \in (0, 1)$, δηλαδή ο S_1 είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ.

   Ομοίως,

   $E_\vartheta S_1 = 1 \cdot P(S_1 = 1) + 0 \cdot P(S_1 = 0) = P(S_1 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) =$

   $P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \vartheta\vartheta = \vartheta^2$, $\forall \vartheta \in (0, 1)$.

   Επομένως, ο S_2 είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^2.

3. Επειδή ο S_1 είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ και η στατιστική συνάρτηση $D = D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{3} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης, έπεται, λόγω του Θεωρήματος 2.1.16 ότι ο $S_1^* = E(S_1|D)$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ.

   Όμως, $S_1^* = E(S_1|D) = 1 \cdot P(S_1 = 1|D) + 0 \cdot P(S_1 = 0|D) = P(S_1 = 1|D)$.

Όπου,

$$P(S_1 = 1|D = d) = \frac{P(X_1 = 1, X_1 + X_2 + X_3 = d)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = d)} \Rightarrow$$

$$P(S_1 = 1|D = d) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 + X_3 = d - 1)}{P(X_1 + X_2 + X_3 = d)}. \tag{6.5}$$

Επειδή κάθε $X_i \sim \mathcal{B}(1, \vartheta)$, από τις αναπαραγωγικές ιδιότητες προκύπτει ότι,

$$D = X_1 + X_2 + X_3 \sim \mathcal{B}(3, \vartheta) \Rightarrow f_D(d) = \binom{3}{d} \vartheta^d (1 - \vartheta)^{3-d} \tag{6.6}$$

και

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(2, \vartheta) \Rightarrow f_{X_1+X_2}(d - 1) = \binom{2}{d-1} \vartheta^{d-1} (1 - \vartheta)^{2-(d-1)} \tag{6.7}$$

Άρα, η Εξίσωση (6.5), λόγω των (6.6) και (6.7), γίνεται.

$$P(S_1 = 1|D = d) = \frac{\vartheta \binom{2}{d-1} \vartheta^{d-1} (1 - \vartheta)^{2-(d-1)}}{\binom{3}{d} \vartheta^d (1 - \vartheta)^{3-d}} = \frac{d}{3}.$$

Επομένως, $P(S_1 = 1|D) = E(S_1|D) = \frac{D}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

Ομοίως, $S_2^* = E(S_2 = 1|D) = P(S_2 = 1|D) = \frac{D(D-1)}{6}$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ^2.

Επίσης, επειδή $g(\vartheta) = P(X_1 \geq X_2) = 1 - P(X_1 < X_2) = 1 - P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 1 - (1 - \vartheta)\vartheta = 1 - \vartheta + \vartheta^2$, έπεται ότι ο εκτιμητής $1 - \frac{D}{3} + \frac{D(D-1)}{6}$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\vartheta)$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.14

Απόδειξη: Με απλή χρήση της Πρότασης 2.1.20, μπορεί να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ είναι επαρκής και πλήρης.

Επιπλέον, επειδή ισχύει η Πρόταση 1.1.11, η δειγματική διασπορά

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right\}$$

είναι αμερόληπτος εκτιμητής της διασποράς της κατανομής, δηλαδή του σ^2 και αφού είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης, έπεται, λόγω του Πορίσματος 2.1.17, ότι ο S^2 είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του σ^2. Επομένως για να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητή του σ^k είναι λογικό να θεωρήσουμε ως πιθανό εκτιμητή τον S^k και υπολογίζοντας την μέση του τιμή να οδηγηθούμε σε αμερόληπτο, άρα και σε ΑΟΕΔ, εκτιμητή του σ^k.

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.22, η στατιστική συνάρτηση $T = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$.

$$ES^k = E(S^2)^{k/2} = E\left(\frac{n-1}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n-1}S^2\right)^{k/2} = \frac{\sigma^k}{(n-1)^{k/2}}ET^{k/2},\ T \sim \mathcal{X}^2_{n-1}.$$

Ενώ,

$$ET^{k/2} = \int_0^\infty t^{k/2}\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)2^{(n-1)/2}}t^{(n-1)/2-1}e^{-t/2}dt =$$
$$\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)2^{(n-1)/2}}\int_0^\infty t^{(k+n-1)/2-1}e^{-t/2}dt =$$
$$\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)2^{(n-1)/2}}2^{(k+n-1)/2}\Gamma((n-1+k)/2) = 2^{k/2}\frac{\Gamma((n-1+k)/2)}{\Gamma((n-1)/2)}.$$

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι ο εκτιμητής

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)^{k/2}\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-1+k)/2)}\ S^k$$

είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του σ^k. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.15

Απόδειξη:

1. Στην Άσκηση 2.2.7 αποδείχτηκε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι επαρκής και πλήρης, με πυκνότητα πιθανότητας,

$$f_T(t) = \frac{n}{\vartheta^n} t^{n-1}, \quad t \in (0, \vartheta).$$

Υπολογίζοντας την μέση τιμή της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης T προκύπτει,

$$E_\vartheta T = \int_0^\vartheta t \frac{n}{\vartheta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{n+1}\vartheta \Rightarrow E_\vartheta\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \vartheta, \ \forall \vartheta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1.17, η στατιστική συνάρτηση $\dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ.

Για να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ^r, $r > 0$ μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους, ως εξής.

<u>Α′ τρόπος</u>

Εφ′ όσον η στατιστική συνάρτηση $T = X_{(n)}$ χρησιμοποιείται για να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητή του ϑ, είναι λογικό η T^r να μας βοηθήσει για την εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή του ϑ^r.

Οπότε,

$$E_\vartheta T^r = \int_0^\vartheta t^r \frac{n}{\vartheta^n} t^{n-1} dt = \frac{n}{n+r}\vartheta^r \Rightarrow E_\vartheta\left(\frac{n+r}{n} X_{(n)}^r\right) = \vartheta^r, \ \forall \vartheta > 0.$$

Δηλαδή, η στατιστική συνάρτηση $\dfrac{n+r}{n} X_{(n)}^r$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ^r, $r > 0$.

<u>Β′ τρόπος</u>

Έστω $S(T)$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ^r, ο οποίος είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης T, ουσιαστικά ο $S(T)$, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1.17, είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ^r, τότε ισχύει,

$E_\vartheta S(T) = \vartheta^r \Leftrightarrow \int_0^\vartheta s(t)\frac{n}{\vartheta^n}t^{n-1}dt = \vartheta^r \Leftrightarrow n\int_0^\vartheta s(t)t^{n-1}dt = \vartheta^{n+r} \Leftrightarrow n\frac{d}{d\vartheta}\int_0^\vartheta s(t)t^{n-1}dt = \frac{d}{d\vartheta}\vartheta^{n+r} \Leftrightarrow ns(\vartheta)\vartheta^{n-1} = (n+r)\vartheta^{n+r-1} \Leftrightarrow$

$s(\vartheta) = \frac{n+r}{n}\vartheta^r \Leftrightarrow s(t) = \frac{n+r}{n}t^r.$

Δηλαδή, η στατιστική συνάρτηση $\frac{n+r}{n}X_{(n)}^r$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ^r, $r > 0$.

2. Για να βρούμε τον καλύτερο εκτιμητή της μορφής $S_c = cX_{(n)}$ πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το Μ.Τ.Σ. ως προς c.

$$\text{Μ.Τ.Σ.}(S_c, \vartheta) = Var_\vartheta S_c + (E_\vartheta S_c - \vartheta)^2 \tag{6.8}$$

Όμως,

$E_\vartheta S_c = E_\vartheta(cX_{(n)}) = cE_\vartheta X_{(n)} = c\frac{n}{n+1}\vartheta.$

$Var_\vartheta S_c = Var_\vartheta(cX_{(n)}) = c^2 Var_\vartheta X_{(n)} = c^2\left\{E_\vartheta X_{(n)}^2 + (E_\vartheta X_{(n)})^2\right\} = c^2\left\{\frac{n}{n+2}\vartheta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\vartheta^2\right\} = c^2\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\vartheta^2.$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην Εξίσωση 6.8 προκύπτει ότι,

$\text{Μ.Τ.Σ.}(S_c, \vartheta) = c^2\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\vartheta^2 + (c\frac{n}{n+1}\vartheta - \vartheta)^2 \Rightarrow$

$$\text{Μ.Τ.Σ.}(S_c, \vartheta) = \left\{ \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} \right\} \vartheta^2 c^2 - \frac{2n}{n+1} \vartheta^2 c + \vartheta^2.$$

Συνεπώς, το παραπάνω τριώνυμο ελαχιστοποιείται για την τιμή

$$c = \frac{-\frac{2n}{n+1}\vartheta^2}{2\left\{ \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+1)^2} \right\} \vartheta^2} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Άρα, ο καλύτερος εκτιμητής, με κριτήριο το Μ.Τ.Σ., είναι ο $S = \frac{n+2}{n+1} X_{(n)}$.

Παρατήρηση 6.3.3 *Παρατηρήστε ότι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής του* ϑ, $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ *είναι της μορφής* $cX_{(n)}$ *και επειδή ο καλύτερος μεταξύ των εκτιμητών αυτής της μορφής είναι ο* $S = \frac{n+2}{n+1} X_{(n)}$, *έπεται ότι ο ΑΟΕΔ εκτιμητής είναι μη αποδεκτός με κριτήριο το Μ.Τ.Σ. (βλ. Ορισμό 1.1.8).*

□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.16

Απόδειξη: Αρχικά θα βρούμε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. Η οικογένεια κατανομών που μας δίνεται ανήκει στην ΠΕΟΚ διάστασης 1 (ΜΕΟΚ), διότι,

1. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0\} = \mathbb{R}_+^n$ δεν εξαρτάται από το ϑ.

2. $f(\underset{\sim}{x},\vartheta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(k)\vartheta^k} x_k^{k-1} e^{-\frac{x_k}{\vartheta}} = \frac{1}{(\prod_{k=1}^{n}\Gamma(k))\vartheta^{n(n+1)/2}} \prod_{k=1}^{n} x_k^{k-1} e^{-\frac{\sum x_k}{\vartheta}}$
$$= \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \ln\Gamma(k) - \frac{n(n+1)}{2}\ln\vartheta + \sum_{k=1}^{n}(k-1)\ln x_k - \frac{1}{\vartheta}\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}.$$
Οπότε αν θέσουμε,
$A(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{n}\ln\Gamma(k) - \frac{n(n+1)}{2}\ln\vartheta$, $B(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)\ln x_k$, $c(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta}$ και $D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.1.20, η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{k=1}^{n} X_k$ είναι επαρκής και επειδή το πεδίο τιμών της $c(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta} \in \mathbb{R}_-$ περιέχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, είναι και πλήρης.

Η εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή του ϑ, ανάγεται πλέον στο πρόβλημα ύπαρξης αμερόληπτου εκτιμητή του ϑ ο οποίος είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Υπολογίζοντας την $E_\vartheta D(\underset{\sim}{X})$ προκύπτουν τα εξής,

$$E_\vartheta D(\underset{\sim}{X}) = E_\vartheta \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} E_\vartheta X_k = \sum_{k=1}^{n} k\vartheta = \frac{n(n+1)}{2}\vartheta \Rightarrow$$

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο...
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και...
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 124 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$$E_\vartheta\left\{\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}X_k\right\}=\vartheta.$$

Δηλαδή ο εκτιμητής $\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}X_k$, ως αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ και συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης $D(\underset{\sim}{X})$, είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ (βλ. Πόρισμα 2.1.17).

Εφ' όσον η στατιστική συνάρτηση $D=\sum_{k=1}^{n}X_k$ χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή του ϑ, είναι λογικό να δουλέψουμε με τον D^r για την εκτίμηση του ϑ^r. Υπενθυμίζουμε ότι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_k\sim Gamma(k,\vartheta)$, $k=1,2,\ldots,n$, άρα η τ.μ.

$$D=\sum_{k=1}^{n}X_k\sim Gamma(\sum_{k=1}^{n}k,\vartheta)\equiv Gamma(\frac{n(n+1)}{2},\vartheta).$$

$$E_\vartheta D^r=\int_0^\infty x^r\frac{1}{\Gamma(n(n+1)/2)\vartheta^{n(n+1)/2}}x^{n(n+1)/2-1}e^{-\frac{x}{\vartheta}}dx=\frac{\Gamma(n(n+1)/2+r)}{\Gamma(n(n+1)/2)}\vartheta^r\Rightarrow$$
$$E_\vartheta\left\{\frac{\Gamma(n(n+1)/2)}{\Gamma(n(n+1)/2+r)}D^r\right\}=\vartheta^r,\ \forall\vartheta>0 \text{ και } r>-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1.17, η στατιστική συνάρτηση $\frac{\Gamma(n(n+1)/2)}{\Gamma(n(n+1)/2+r)}D^r$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ^r. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.17

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο ...
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και ...
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 125 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή το δείγμα είναι τετριμμένα επαρκής στατιστική συνάρτηση (βλ. Παρατήρηση 2.1.10(1)) και στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε μόνο μία τυχαία μεταβλητή, αυτή θα είναι επαρκής, δηλαδή $T(X) = X$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση.

Θα δείξουμε ότι η $T(X) = X$ είναι και πλήρης στατιστική συνάρτηση, δηλαδή πρέπει να ισχύει.

$$E_\vartheta \varphi(X) = 0, \quad \forall \vartheta \in \{0,1\} \Rightarrow \varphi(x) = 0 \ \ \forall x \text{ και } \forall \varphi.$$

Όμως,

$$E_\vartheta \varphi(X) = 0 \Rightarrow \sum_{x=1}^{2} \varphi(x) P_\vartheta(X = x) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vartheta = 0 & , \varphi(-1)P_0(X=-1) + \varphi(2)P_0(X=2) = 0 \\ \vartheta = 1 & , \varphi(-1)P_1(X=-1) + \varphi(2)P_1(X=2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(-1)\dfrac{2}{3} + \varphi(2)\dfrac{1}{3} = 0 \\ \\ \varphi(-1)\dfrac{1}{3} + \varphi(2)\dfrac{2}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(-1) = \varphi(2) = 0.$$

Δηλαδή $\varphi(x) = 0$, $\forall x$ και για κάθε συνάρτηση φ, επομένως η στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$ είναι και πλήρης.

Επίσης, παρατηρούμε τα εξής,

$$\vartheta = 0,\ E_0 X = (-1)P_0(X=-1) + 2P_0(X=2) = -\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3} = 0$$

και

$$\vartheta = 1,\ E_1 X = (-1)P_1(X=-1) + 2P_1(X=2) = -\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} = 1$$

Δηλαδή,

$$\forall \vartheta \in \Theta = \{0,1\}, \quad E_\vartheta X = \vartheta,$$

επομένως η στατιστική συνάρτηση X είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ και συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης, άρα είναι και ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.18

Απόδειξη: Αρχικά θα βρούμε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. Η οικογένεια κατανομών που μας δίνεται ανήκει στην ΠΕΟΚ διάστασης 1 (ΜΕΟΚ), διότι,

1. Το σύνολο $\mathcal{S} = \{\underset{\sim}{x} : f(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0\} = \{0,1,\ldots\} \times \{0,1,\ldots\} \times \ldots \{0,1,\ldots\}$ δεν εξαρτάται από το ϑ.

2. $$f(\underset{\sim}{x},\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\vartheta t_i} \frac{(\vartheta t_i)^{x_i}}{x_i!} = e^{-\vartheta \sum_{i=1}^n t_i} \vartheta^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^{n} t_i^{x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}$$
$$= \exp\left\{ -\vartheta \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln t_i - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i! + \ln\vartheta \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}.$$
Θέτουμε,
$$A(\vartheta) = -\vartheta \sum_{i=1}^{n} t_i,\ B(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln t_i - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!,\ c(\vartheta) = \ln\vartheta \text{ και } D(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ και}$$
καταλήγουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.1.20, η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής και επειδή το πεδίο τιμών της $c(\vartheta) = -\ln\vartheta \in \mathbb{R}$ περιέχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, είναι και πλήρης.

Επειδή οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_i \sim P(\vartheta t_i)$, έπεται από τις αναπαραγωγικές ιδιότητες ότι η στατιστική συνάρτηση

$$D = D(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{P}(\vartheta \sum_{i=1}^{n} t_i),$$

άρα

$$E_\vartheta D = \vartheta \sum_{i=1}^{n} t_i \Rightarrow E_\vartheta \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i} D \right\} = \vartheta, \quad \forall\, \vartheta > 0. \tag{6.9}$$

Κάνοντας χρήση του Πορίσματος 2.1.17 προκύπτει ότι ο αμερόληπτος εκτιμητής $\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} t_i}D$ του ∂, αφού είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης D είναι και ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ∂.

Ομοίως,

$$E_\partial D^2 = Var_\partial D + (E_\partial D)^2 = \partial \sum_{i=1}^{n} t_i + (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2 \partial^2.$$

Η παραπάνω σχέση, λόγω της Εξίσωσης 6.9, γίνεται

$$E_\partial D^2 = E_\partial D + (\sum_{i=1}^{n} t_i)^2 \partial^2 \Rightarrow E_\partial \left\{ \frac{D(D-1)}{(\sum_{i=1}^{n} t_i)^2} \right\} = \partial^2, \ \forall \partial > 0.$$

Οπότε, όπως και προηγουμένως, η στατιστική συνάρτηση $\frac{D(D-1)}{(\sum_{i=1}^{n} t_i)^2}$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ∂. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.19

Απόδειξη: Επειδή έχουμε ένα τυχαίο δείγμα γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής της κατανομής $\frac{\vartheta}{2}$ (βλ. Πρόταση 1.1.10), δηλαδή

$$E_\vartheta \bar{X} = \frac{\vartheta}{2} \Rightarrow E_\vartheta(2\bar{X}) = \vartheta, \ \forall\ \vartheta > 0.$$

Άρα ο $2\bar{X}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του ϑ. Επίσης στην Άσκηση 2.2.7 αποδείχτηκε ότι η στατιστική συνάρτηση $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι επαρκής και πλήρης, επομένως, λόγω του Θεωρήματος 2.1.16, ο εκτιμητής $S = E_\vartheta(2\bar{X}|X_{(n)})$ είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ. Επιπλέον στην Άσκηση 2.2.16 δείξαμε ότι ο $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ είναι, επίσης, ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής του ϑ, οπότε αυτοί οι εκτιμητές του ϑ δεν μπορεί παρά να ταυτίζονται, συνεπώς, $E_\vartheta(2\bar{X}|X_{(n)}) = \frac{n+1}{n}X_{(n)} \Rightarrow E_\vartheta(\frac{2n}{n+1}\bar{X}|X_{(n)}) = X_{(n)}$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.20

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 και την Παρατήρηση 3.1.5(3) για να βρείτε τους Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 και την Παρατήρηση 3.1.5(3) για να βρείτε τους Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε τους Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 και τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε τους Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 για να βρείτε τους Ε.Μ.Π. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε τους Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 για να βρείτε τον Ε.Μ.Π. του ϑ, την Πρόταση 3.1.7 για να αποδείξετε συνέπεια και την Παρατήρηση 3.1.11 για να κάνετε εκτίμηση με την μέθοδο των ροπών. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε τον Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 3.2.8. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 για να βρείτε τον Ε.Μ.Π., την Πρόταση 3.1.7 για να αποδείξετε συνέπεια και την Παρατήρηση 3.1.8 για να βρείτε την ασυμπτωτική κατανομή του Ε.Μ.Π. του ϑ. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 και τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε τους Ε.Μ.Π., την Παρατήρηση 3.1.11 για να βρείτε τους Ε.Μ.Ρ. των αγνώστων παραμέτρων και την Πρόταση 3.1.7 για να αποδείξετε συνέπεια. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 3.1.2 για να βρείτε τον Ε.Μ.Π. και την Πρόταση 1.1.5 για να υπολογίσετε το Μ.Τ.Σ. του εκτιμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 3.1.3 και την Παρατήρηση 3.1.5(3) για να βρείτε τον Ε.Μ.Π. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την μεθοδολογία της Παρατήρησης 3.1.11 για να βρείτε τον Ε.Μ.Ρ. του ϑ. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση,

$$L(\vartheta) = \prod_{k=1}^{n} e^{-k\vartheta} \frac{(k\vartheta)^{x_k}}{x_k!} = \exp\left\{-\vartheta \sum_{k=1}^{n} k\right\} \vartheta^{\sum x_k} \prod_{k=1}^{n} k^{x_k} \frac{1}{x_k!}.$$

$$\ln L(\vartheta) = -\vartheta \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (x_k \ln k - \ln x_k!) + (\ln \vartheta) \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \ln L(\vartheta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{\vartheta} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \hat{\vartheta} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ (αφού } \vartheta > 0).$$

Επίσης,

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln L(\vartheta) = -\frac{1}{\vartheta^2} \sum_{k=1}^{n} x_k \bigg|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = -\frac{n(n+1)}{2\hat{\vartheta}} < 0.$$

Επομένως, ο εκτιμητής $\hat{\vartheta} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} X_k$ είναι Ε.Μ.Π. για το ϑ.

Λόγω της Παρατήρησης 3.1.5(3), ο εκτιμητής $\hat{\vartheta}^2$ είναι Ε.Μ.Π. για το ϑ^2. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι της μορφής,

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}.$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2.$$

Επειδή θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, αρχικά, πρέπει να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu, \sigma^2) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu, \sigma^2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \\ n\sigma^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu = \hat{\mu} = \bar{x} \\ \sigma^2 = \hat{\sigma^2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \end{array}$$

Επομένως το σημείο $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \left(\bar{x}, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$ αποτελεί ακρότατο και για να διαπιστώσουμε αν αυτό αποτελεί μέγιστο ή ελάχιστο ασχολούμαστε με τις δεύτερες παραγώγους.

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln L(\mu, \sigma^2) = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu, \sigma^2)\right) = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right) = -\frac{n}{\sigma^2}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ln L(\mu, \sigma^2) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu, \sigma^2)\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)$$

$$= \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2)\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)$$

$$= -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

Για να έχουμε μέγιστο πρέπει να ισχύουν,

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) < 0 \text{ ή } \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\ln L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) < 0$$

και η Ιακωβειανή

$$H = \left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\ln L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ln L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2\partial\mu}\ln L(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)\right)^2 > 0.$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται ότι ισχύουν, συνεπώς έχουμε μέγιστο και οι Ε.Μ.Π. των μ και σ^2 είναι αντίστοιχα,

$$\hat{\mu} = \bar{X}\ , \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

Λόγω της Παρατήρησης 3.1.5(3), ο εκτιμητής

$$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}^2)^{1/2} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)^{1/2}$$

είναι ο Ε.Μ.Π. της τυπικής απόκλισης σ. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας του διανύσματος $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ υπολογίζεται ότι είναι,

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\, I_{[\vartheta_1, \vartheta_2]}(x_i) = \frac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^n}\, I_{[\vartheta_1, x_{(n)}]}(x_{(1)})\, I_{[x_{(1)}, \vartheta_2]}(x_{(n)}).$$

1. Στην περίπτωση όπου η παράμετρος ϑ_2 θεωρείται γνωστή, η συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνει την εξής μορφή,

$$L(\vartheta_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^n} & , \quad \vartheta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \vartheta_2 \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

   Για να βρούμε τον Ε.Μ.Π. του ϑ_1 θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $L(\vartheta_1)$ ως προς ϑ_1 και επειδή η συνάρτηση $\dfrac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^n}$ είναι αύξουσα ως προς ϑ_1, έχουμε,

$$\begin{aligned} \max_{\vartheta_1} L(\vartheta) &= \max_{\vartheta_1} \left\{ 0, \left\{ \frac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^n}\ \vartheta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \vartheta_2 \right\} \right\} \\ &= \max_{\vartheta_1 \le x_{(1)}} \left\{ \frac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^n} \right\} = \frac{1}{(\vartheta_2 - x_{(1)})^n}. \end{aligned}$$

   Συνεπώς ο Ε.Μ.Π. του ϑ_1, όταν το ϑ_2 είναι γνωστό είναι ο

$$\hat{\vartheta}_1 = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

2. Στην περίπτωση όπου η παράμετρος ϑ_1 θεωρείται γνωστή, η συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνει την εξής μορφή,

$$L(\vartheta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)^n} & , \quad \vartheta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \vartheta_2 \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για να βρούμε τον Ε.Μ.Π. του ϑ_2 θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $L(\vartheta_2)$ ως προς ϑ_2 και επειδή η συνάρτηση $\dfrac{1}{(\vartheta_2-\vartheta_1)^n}$ είναι φθίνουσα ως προς ϑ_2, έχουμε,

$$\begin{aligned}\max_{\vartheta_2} L(\vartheta) &= \max_{\vartheta_2}\left\{0, \left\{\frac{1}{(\vartheta_2-\vartheta_1)^n}\ \vartheta_1 \le x_{(1)} \le x_{(n)} \le \vartheta_2\right\}\right\}\\ &= \max_{\vartheta_2 \ge x_{(n)}}\left\{\frac{1}{(\vartheta_2-\vartheta_1)^n}\right\} = \frac{1}{(x_{(n)}-\vartheta_1)^n}.\end{aligned}$$

Συνεπώς ο Ε.Μ.Π. του ϑ_2, όταν το ϑ_1 είναι γνωστό είναι ο

$$\hat{\vartheta}_2 = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από την εξής σχέση,

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta(1-\vartheta)^{x_i - 1} = \vartheta^n (1-\vartheta)^{\sum x_i - n}, \text{ όπου } \sum_{i=1}^{n} x_i = n, n+1, \ldots.$$

Για να βρούμε τον Ε.Μ.Π. του ϑ, χρειάζεται να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\vartheta)$, ως προς ϑ. Παρατηρούμε ότι όταν $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ και $\vartheta = 1$, η πιθανοφάνεια δεν ορίζεται, επομένως διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις.

1. Έστω $\sum_{i=1}^{n} x_i > n$, τότε η πιθανοφάνεια μπορεί να μεγιστοποιηθεί χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 3.1.3, όταν $\vartheta \in (0, 1)$, δηλαδή,

$$\ln L(\vartheta) = n \ln \vartheta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \ln(1-\vartheta)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \ln L(\vartheta) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\vartheta} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \frac{1}{1-\vartheta} = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \hat{\vartheta} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Για να δείξω ότι αυτή η τιμή του ϑ αντιστοιχεί σε μέγιστο πρέπει να πάρω και τη δεύτερη παράγωγο.

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln L(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n \right) \frac{1}{(1-\vartheta)^2} \Bigg|_{\vartheta = \hat{\vartheta}} = -\frac{n}{\hat{\vartheta}^2 (1-\hat{\vartheta})} < 0.$$

Όσον αφορά τις τιμές $\vartheta = 0$ ή $\vartheta = 1$, αυτές προφανώς δεν μπορούν να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση πιθανοφάνειας αφού τότε η $L(\vartheta) = 0$, επομένως ο Ε.Μ.Π. του ϑ στη συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι ο $\hat{\vartheta} = \frac{1}{\bar{X}}$.

2. Όταν $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$, τότε η $L(\vartheta) = \vartheta^n$, για $\vartheta \in [0, 1)$.

Όταν $\vartheta = 1$, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, ως εξής.

Επειδή η $L(\vartheta)$, είναι συνεχής στο $[0, 1)$, ορίζω $L(1) = \lim_{\vartheta \to 1^-} L(\vartheta) = 1^n = 1$, συνεπώς,

$$L(\vartheta) = \vartheta^n, \text{ όταν } \vartheta \in [0, 1].$$

Η $L(\vartheta)$ είναι αύξουσα ως προς ϑ, άρα παίρνει την μέγιστη τιμή της για $\vartheta = 1$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι όταν $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ ή διαφορετικά όταν $\frac{1}{\bar{x}} = 1$, ο Ε.Μ.Π. του ϑ είναι ο $\hat{\vartheta} = 1 = \frac{1}{\bar{X}}$.

Τελικά και για τις δύο περιπτώσεις, με την επέκταση που έγινε στη δεύτερη περίπτωση, ο Ε.Μ.Π. του ϑ είναι ο

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, υπολογίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας,

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{(1+e^{-(x_i-\vartheta)})^2} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\vartheta}}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+e^{-(x_i-\vartheta)}\right)^2}.$$

$$\ln L(\vartheta) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\vartheta - 2\sum_{i=1}^{n}\left(1+e^{-(x_i-\vartheta)}\right).$$

Επομένως,

$$\frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) = n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{1+e^{-(x_i-\vartheta)}}.$$

Για να βρούμε Ε.Μ.Π. πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $\ln L(\vartheta)$, ή διαφορετικά να ισχύει η έξίσωση,

$$\frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) = 0 \Leftrightarrow n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{1+e^{-(x_i-\vartheta)}} = 0. \tag{6.10}$$

Θα δείξουμε ότι η Εξίσωση6.10 έχει μοναδική λύση, ως προς ϑ, η οποία μεγιστοποιεί την $\ln L(\vartheta)$.

Θεωρούμε, $g(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) = n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{1+e^{-(x_i-\vartheta)}}$.

Όμως,

$$\frac{dg(\vartheta)}{d\vartheta} = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{(1+e^{-(x_i-\vartheta)})^2} < 0,\ \forall\ \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η g είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Επίσης, ισχύει ότι,

$$\lim_{\vartheta\to+\infty} g(\vartheta) = \lim_{\vartheta\to+\infty}\left\{n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{1+e^{-(x_i-\vartheta)}}\right\} = n - 2\sum_{i=1}^{n} 1 = -n < 0.$$

και

$$\lim_{\vartheta\to-\infty} g(\vartheta) = \lim_{\vartheta\to-\infty}\left\{n - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{-(x_i-\vartheta)}}{1+e^{-(x_i-\vartheta)}}\right\} = n - 2\sum_{i=1}^{n} 0 = n > 0.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $g(\vartheta)$ είναι γνησίως φθίνουσα και παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές, δηλαδή για κάποια τιμή $\vartheta = \hat{\vartheta}$ αυτή μηδενίζεται,

$$g(\hat{\vartheta}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) \,|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = 0.$$

Όμως, $\dfrac{d^2}{d\vartheta^2}(\ln L(\vartheta)) = \dfrac{d}{d\vartheta}\left(\dfrac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta))\right) = \dfrac{d}{d\vartheta}(g(\vartheta)) < 0$, όπως είδαμε και πριν, συνεπώς,

$$\left.\frac{d^2}{d\vartheta^2}(\ln L(\vartheta))\right|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} < 0.$$

Δηλαδή, η μοναδική τιμή $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(\underset{\sim}{x})$ που βρήκαμε αποτελεί μέγιστο για την $L(\vartheta)$. Τελικά, ο $\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(\underset{\sim}{X})$ αποτελεί τον μοναδικό Ε.Μ.Π. του ϑ. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας έχει την εξής μορφή,

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\vartheta} I_{[-\vartheta,\vartheta]}(x_i) = \frac{1}{(2\vartheta)^n} I_{[0,\vartheta]}(|x|_{(n)}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\vartheta)^n} & , \quad |x|_{(n)} \leq \vartheta \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

όπου $|X|_{(n)} = \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\}$ (για λεπτομέρειες βλ. την λύση της Άσκησης 2.2.9).

Για να βρούμε τον Ε.Μ.Π. του ϑ θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $L(\vartheta)$ ως προς ϑ και επειδή η συνάρτηση $\dfrac{1}{(2\vartheta)^n}$ είναι φθίνουσα ως προς ϑ, έχουμε,

$$\max_{\vartheta} L(\vartheta) = \max_{\vartheta} \left\{0, \left\{\frac{1}{(2\vartheta)^n}, |x|_{(n)} \leq \vartheta\right\}\right\} = \max_{\vartheta \geq |x|_{(n)}} \left\{\frac{1}{(2\vartheta)^n}\right\} = \frac{1}{(2|x|_{(n)})^n}.$$

Συνεπώς ο Ε.Μ.Π. του ϑ, είναι ο

$$\hat{\vartheta} = |X|_{(n)} = \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.6

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας έχει την εξής μορφή,

$$L(\vartheta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{5\vartheta}I_{[-2\vartheta,3\vartheta]}(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{(5\vartheta)^n} & , \quad -2\vartheta\le x_1,x_2,\ldots,x_n\le 3\vartheta\\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(5\vartheta)^n} & , \quad -2\vartheta\le x_{(1)}\le x_{(n)}\le 3\vartheta\\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(5\vartheta)^n} & , \quad \max\left\{-\dfrac{x_{(1)}}{2},\dfrac{x_{(n)}}{3}\right\}\le\vartheta\\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά,}\end{cases}$$

όπου

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}\ ,\quad X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$$

και θέτουμε

$$Y=\max\left\{-\frac{X_{(1)}}{2},\frac{X_{(n)}}{3}\right\}.$$

Για να βρούμε τον Ε.Μ.Π. του ϑ θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την $L(\vartheta)$ ως προς ϑ και επειδή η συνάρτηση $\dfrac{1}{(2\vartheta)^n}$ είναι φθίνουσα ως προς ϑ, έχουμε,

$$\max_{\vartheta}L(\vartheta)=\max_{\vartheta}\left\{0,\left\{\frac{1}{(5\vartheta)^n}\ ,y\le\vartheta\right\}\right\}=\max_{\vartheta\ge y}\left\{\frac{1}{(5\vartheta)^n}\right\}=\frac{1}{(5y)^n}.$$

Συνεπώς ο Ε.Μ.Π. του ϑ, είναι ο

$$\hat{\vartheta}=Y=\max\left\{-\frac{X_{(1)}}{2},\frac{X_{(n)}}{3}\right\}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.7

Απόδειξη:

1. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τη σχέση,

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{1}{\vartheta}x_i} = \frac{1}{\vartheta^n} \exp\left\{-\frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}.$$

$$\ln L(\vartheta) = -n \ln \vartheta - \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Κατόπιν, βρίσκουμε την τιμή, που μεγιστοποιεί την $\ln L(\vartheta)$.

$$\frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) = 0 \Leftrightarrow -n\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Πρέπει να πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο για να δείξουμε ότι αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε μέγιστο.

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}(\ln L(\vartheta)) = \frac{n}{\vartheta^2} - \frac{2}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = -\frac{n}{\hat{\vartheta}^2} < 0.$$

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. του ϑ, είναι ο $\hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

Επίσης, $g(\vartheta) = P_\vartheta(X_1 > t) = \int_t^\infty \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{1}{\vartheta}x} dx = -e^{-\frac{1}{\vartheta}x}\Big|_t^\infty = \exp\left\{-\frac{t}{\vartheta}\right\}$.

Άρα, ο Ε.Μ.Π. του $g(\vartheta)$ είναι ο $g(\hat{\vartheta}) = \exp\left\{-\frac{t}{\hat{\vartheta}}\right\}$.

2. Για να δείξουμε ότι ο $\hat{\vartheta}$ είναι συνεπής εκτιμητής πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες της Προτάσεως 3.1.7.

$i)$ $E_\vartheta \hat{\vartheta}_n = E_\vartheta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_\vartheta X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \vartheta = \frac{1}{n} n\vartheta = \vartheta \to \vartheta$, καθώς το $n \to \infty$.

$$ii)\ Var_\vartheta \hat{\vartheta}_n = Var_\vartheta \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var_\vartheta X_i$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{n} \to 0, \text{ καθώς το } n \to \infty.$$

Δηλαδή ο Ε.Μ.Π. του ϑ είναι συνεπής εκτιμητής.

3. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της κατανομής (ροπή 1ης τάξης) είναι

$$m_1 = E_\vartheta X = \vartheta,$$

ενώ η δειγματική ροπή 1ης τάξης δίνεται από τη σχέση,

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X},$$

άρα, σύμφωνα με την μεθολογία που αναπτύχθηκε στην Παρατήρηση 3.1.11, $m_1 = \mu_1 \Leftrightarrow \vartheta = \hat{\hat{\vartheta}} = \bar{X}$ είναι ο Ε.Μ.Ρ. του ϑ.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.8

Απόδειξη: Επειδή έχουμε μόνο μία παρατήρηση, η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι,

$$L(\vartheta) = f_X(x;\vartheta) = P_\vartheta(X = x)$$

Επομένως, όταν $x = 1$, $L(\vartheta) = \begin{cases} 1/2 & , \quad \vartheta = -1 \\ 1/6 & , \quad \vartheta = 0 \\ 1/3 & , \quad \vartheta = 1. \end{cases}$
και η τιμή του ϑ που μεγιστοποιεί την $L(\vartheta)$ είναι $\vartheta = -1$.
Ομοίως, όταν $x = 2$, $L(\vartheta) = \begin{cases} 1/2 & , \quad \vartheta = -1 \\ 1/6 & , \quad \vartheta = 0 \\ 1/3 & , \quad \vartheta = 1. \end{cases}$
και η τιμή του ϑ που μεγιστοποιεί την $L(\vartheta)$ είναι $\vartheta = -1$.
Ενώ, όταν $x = 3$, $L(\vartheta) = \begin{cases} 0 & , \quad \vartheta = -1 \\ 2/3 & , \quad \vartheta = 0 \\ 1/3 & , \quad \vartheta = 1. \end{cases}$
και η τιμή του ϑ που μεγιστοποιεί την $L(\vartheta)$ είναι $\vartheta = 0$.
Επομένως, ο Ε.Μ.Π. του ϑ είναι ο

$$\hat{\vartheta} = \begin{cases} 0 & , \quad X = 3 \\ -1 & , \quad X = 1, 2. \end{cases}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 159 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Αν X_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$ είναι οι τ.μ. που μετρούν τον χρόνο ζωής ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα, τότε κάθε $X_i \sim \mathcal{E}(\vartheta)$. Σύμφωνα, με τα αποτελέσματα της Άσκησης 3.2.8, ο Ε.Μ.Π. της άγνωστης μέσης τιμής ϑ είναι ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$, όπου στην συγκεκριμένη περίπτωση παίρνει την τιμή $\bar{x} = 1572,4$, οπότε το ποσοστό των λαμπτήρων, των οποίων η διάρκεια ζωής υπερβαίνει τις α ώρες, δίνεται από την συνάρτηση

$$g(\vartheta) = P(X > \alpha) = e^{-\frac{\alpha}{\vartheta}},$$

και εκτιμάται από το $g(\hat{\vartheta})$.
i) $\alpha = 1700$, επομένως $g(\hat{\vartheta}) = e^{-1700/\bar{x}} = 0,3392$, δηλαδή το ποσοστό των λαμπτήρων που υπερβαίνει τις 1700 ώρες είναι 33,92%.
ii) $\alpha = 2000$, επομένως $g(\hat{\vartheta}) = e^{-2000/\bar{x}} = 0,2803$, δηλαδή το ποσοστό των λαμπτήρων που υπερβαίνει τις 2000 ώρες είναι 28,03%.
iii) $\alpha = 2500$, επομένως $g(\hat{\vartheta}) = e^{-2500/\bar{x}} = 0,2039$, δηλαδή το ποσοστό των λαμπτήρων που υπερβαίνει τις 2500 ώρες είναι 20,39%. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Απόδειξη:

1. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι,

   $$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\vartheta} e^{-\frac{x_i^2}{2\vartheta}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\vartheta^n} e^{-\frac{1}{2\vartheta}\sum x_i^2}.$$

   $$\ln L(\vartheta) = -n \ln \vartheta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

   Κατόπιν, βρίσκουμε την τιμή, που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

   $$\frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) = 0 \Leftrightarrow -n\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \hat{\vartheta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

   Πρέπει να πάρουμε τη δεύτερη παράγωγο για να δείξουμε ότι αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε μέγιστο.

   $$\frac{d^2}{d\vartheta^2}(\ln L(\vartheta)) = \frac{n}{\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = -\frac{n}{\hat{\vartheta}^2} < 0.$$

   Επομένως, ο Ε.Μ.Π. του ϑ, είναι ο $\hat{\vartheta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

2. Για να δείξουμε ότι αυτός ο εκτιμητής είναι συνεπής, πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες της Πρότασης 3.1.7.

   i) $E_\vartheta \hat{\vartheta}_n = E_\vartheta\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} E_\vartheta X_i^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} 2\vartheta = \frac{1}{2n}2n\vartheta = \vartheta \to \vartheta$, καθώς το $n \to \infty$.

   ii) $Var_\vartheta \hat{\vartheta}_n = Var_\vartheta\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} Var_\vartheta X_i^2$

$$= \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(E_\vartheta X_i^4 - (E_\vartheta X_i^2)^2\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^{n}(8\vartheta^2 - 4\vartheta^2) = \frac{4n\vartheta^2}{4n^2} = \frac{\vartheta^2}{n} \to 0,$$ καθώς το $n \to \infty$.

Δηλαδή ο Ε.Μ.Π. του ϑ είναι συνεπής εκτιμητής.

3. Επειδή ζητάμε την ασυμπτωτική κατανομή του $\hat{\vartheta}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Παρατήρηση 3.1.8, δηλαδή,

$$\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}(\vartheta, 1/I(\vartheta)),$$

όπου $I(\vartheta)$ είναι ο αριθμός πληροφορίας του Fisher (βλ. Κεφάλαιο 2).

Όμως, $I(\vartheta) = -E_\vartheta\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta)\right)$.

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\vartheta^n} e^{-\frac{1}{2\vartheta}\sum x_i^2}.$$

$$\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = -n\ln\vartheta + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{2\vartheta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = -n\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{2\vartheta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \frac{n}{\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Τέλικά,

$$I(\vartheta) = -E_\vartheta\left(\frac{n}{\vartheta^2} - \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = -\frac{n}{\vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} E_\vartheta X_i^2 = -\frac{n}{\vartheta^2} + \frac{1}{\vartheta^3}\sum_{i=1}^{n} 2\vartheta$$

$$= -\frac{n}{\vartheta^2} + \frac{2n\vartheta}{\vartheta^3} = \frac{n}{\vartheta^2}.$$

Οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\hat{\vartheta} \sim \mathcal{N}(\vartheta, \vartheta^2/n).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Απόδειξη:

1. Κατ' αρχάς βρίσκουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας του $\vartheta = (\mu, \sigma)$,

$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{x_i-\mu}{\sigma}} I_{[\mu,\infty)}(x_i) = \frac{1}{\sigma^n}\, e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)}{\sigma}} \prod_{i=1}^{n} I_{[\mu,\infty)}(x_i)$$
$$= \frac{1}{\sigma^n}\, e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)}{\sigma}} I_{[\mu,\infty)}(x_{(1)}), \text{ όπου } x_{(1)} = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Θεωρούμε, προς στιγμήν, ότι $\sigma = \sigma_0 > 0$ είναι γνωστή παράμετρος, επομένως,

$$L(\vartheta) = L(\mu, \sigma_0) = L(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_0^n}\, e^{-\frac{\sum x_i}{\sigma_0} + \frac{n\mu}{\sigma_0}} & , \quad x_{(1)} \geq \mu \\ -1 & , \quad x_{(1)} < \mu. \end{cases}$$

Όταν $x_{(1)} \geq \mu$, η συνάρτηση $L(\mu)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς μ, άρα $L(x_{(1)}) \geq L(\mu)$, $\forall \mu \in [x_{(1)}, \infty)$, δηλαδή η τιμή του μ η οποία ελαχιστοποιεί την $L(\mu)$ είναι $\mu = x_{(1)}$, ή διαφορετικά ο Ε.Μ.Π. του μ είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$\hat{\mu} = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

Αφού εκτιμήσαμε το μ, η συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνει την εξής μορφή,

$$L(\vartheta) = L(\hat{\mu}, \sigma) = L(\sigma) = \frac{1}{\sigma^n}\, e^{-\frac{\sum(x_i - x_{(1)})}{\sigma}}.$$

$$\ln L(\sigma) = -n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{(1)}).$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε ένα μέγιστο για την $\ln L(\sigma)$, δηλαδή

$$\frac{d}{d\sigma}(\ln L(\sigma)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\sigma} \ln L(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{(1)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{(1)}).$$

Επίσης, $\dfrac{d^2}{d\sigma^2}(\ln L(\sigma)) = \dfrac{n}{\sigma^2} - \dfrac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{(1)})\Big|_{\sigma=\hat{\sigma}} = -\dfrac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0$, οπότε το $\sigma = \hat{\sigma}$ αντιστοιχεί σε μέγιστο, άρα ο Ε.Μ.Π. του σ είναι,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}).$$

2. Για να βρούμε Ε.Μ.Ρ. για τις άγνωστες παραμέτρους θα ακολουθήσουμε την μεθοδολογία η οποία αναπτύχθηκε στην Παρατήρηση 3.1.11, λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι για την διπαραμετρική εκθετική κατανομή,

$$E_{\vartheta}X = \mu + \sigma \ \text{ και } \ Var_{\vartheta}X = \sigma^2.$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \mu_1 \\ m_2 &= \mu_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} E_{\vartheta}X &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \bar{X} \\ E_{\vartheta}X^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \mu + \sigma &= \bar{X} \\ Var_{\vartheta}X + (E_{\vartheta}X)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \mu + \sigma &= \bar{X} \\ \sigma^2 + (\mu + \sigma)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{X} - \sigma \\ \sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}$$

Επομένως, οι Ε.Μ.Ρ. των μ και σ είναι αντίστοιχα,

$$\hat{\hat{\mu}} = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \ \text{ και } \ \hat{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}.$$

3. Όσον αφορά τη συνέπεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις συνθήκες της Πρότασης 3.1.7, όμως πρέπει να υπολογίσουμε τόσο την μέση τιμή όσο και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η πυκνότητα πιθανότητας της ελάχιστης παρατήρησης $X_{(1)}$ δίνεται από τον τύπο,

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x),$$

όπου $f_X(x)$ και $F_X(x)$ είναι αντίστοιχα η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής των αρχικών τυχαίων μεταβλητών, στη συγκεκριμένη περίπτωση $X \sim \mathcal{E}(\mu, \sigma)$

Δηλαδή όταν $x \geq \mu$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}$$

και

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}$$

Τελικά,

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{n}{\sigma}\, e^{-n\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \ , \quad x \geq \mu$$

ή διαφορετικά

$$X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \sigma/n).$$

Επομένως,

i) $E_\partial \hat{\sigma} = E_\partial \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)}) \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_\partial X_i - E_\partial X_{(1)} = \frac{1}{n} n(\mu + \sigma) - \mu = \sigma \to \sigma$, όταν $n \to +\infty$.

ii) $Var_\partial \hat{\sigma} = Var_\partial \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)}) \right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var\partial X_i + Var_\partial (X_{(1)} = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n+1}{n^2}\sigma^2 \to 0$, όταν $n \to +\infty$.

Το συμπέρασμα είναι ότι ο Ε.Μ.Π. $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)})$ είναι συνεπής εκτιμητής του σ.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Απόδειξη:

1. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από τον εξής τύπο,

   $L(\vartheta) = \vartheta^x(1-\vartheta)^{1-x}$, $\vartheta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $x \in \{0, 1\}$.

   Αν ακολουθήσουμε την γνωστή διαδικασία για να βρούμε εκείνη την τιμή του ϑ, η οποία μεγιστοποιεί την $L(\vartheta)$, δηλαδή να παραγωγίσουμε ως προς ϑ, τότε παρατηρούμε ότι $\vartheta = x$, δηλαδή $\vartheta = 0$ ή 1 που δεν ανήκουν στο σύνολο που παίρνει τιμές η άγνωστη παράμετρος $\vartheta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, γι' αυτό τον λόγο δουλεύουμε ως εξής.

   Η συνάρτηση πιθανοφάνειας παίρνει και την παρακάτω μορφή,

   $$L(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta & , \quad x = 1 \\ 1-\vartheta & , \quad x = 0. \end{cases}$$

   Εφ' όσον $\vartheta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, όταν $x = 1$, η μέγιστη τιμή που παίρνει η $L(\vartheta)$ αντιστοιχεί για $\vartheta = \frac{2}{3}$, ενώ για $x = 0$, η αντίστοιχη τιμή είναι για $\vartheta = \frac{1}{3}$. Επομένως ο Ε.Μ.Π. του ϑ γράφεται στην εξής μορφή,

   $$\hat{\vartheta} = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad X = 0 \\ \frac{2}{3} & , \quad X = 1. \end{cases}$$

   Διαφορετικά μπορεί να γραφεί και σαν συνάρτηση του X, ως εξής,

   $$\hat{\vartheta} = \hat{\vartheta}(X) = \frac{X+1}{3}.$$

2. $$\text{ΜΤΣ}(\hat{\vartheta}, \vartheta) = Var_\vartheta\hat{\vartheta} + (E_\vartheta\hat{\vartheta} - \vartheta)^2 = Var_\vartheta\left(\frac{X+1}{3}\right) + \left(E_\vartheta\left(\frac{X+1}{3}\right) - \vartheta\right)^2$$
   $$= \frac{1}{9}Var_\vartheta X + \left(\frac{1}{3}(E_\vartheta X + 1) - \vartheta\right)^2 = \frac{1}{9}\vartheta(1-\vartheta) + \left(\frac{1}{3}\vartheta + \frac{1}{3} - \vartheta\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\vartheta^2 - \frac{1}{3}\vartheta + \frac{1}{9}.$$

Ενώ για τον εκτιμητή του ϑ, $\hat{\vartheta}_1 = \dfrac{1}{2}$, προκύπτει ότι,

$$\text{ΜΤΣ}(\hat{\vartheta}_1, \vartheta) = Var_\vartheta \hat{\vartheta}_1 + (E_\vartheta \hat{\vartheta}_1 - \vartheta)^2 = Var_\vartheta \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \vartheta\right)^2 = \vartheta^2 - \vartheta + \frac{1}{4}.$$

Επομένως, $\text{ΜΤΣ}(\hat{\vartheta}_1, \vartheta) - \text{ΜΤΣ}(\hat{\vartheta}, \vartheta) = \dfrac{2}{3}\vartheta^2 - \dfrac{2}{3}\vartheta + \dfrac{5}{36} \geq 0$,

όταν $\vartheta \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}] \simeq [0.296, 0.704] \supset [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο Ε.Μ.Π. του ϑ, $\hat{\vartheta}$, είναι καλύτερος του τετριμμένου εκτιμητή $\hat{\vartheta}_1 = \dfrac{1}{2}$, αφού

$$\text{ΜΤΣ}(\hat{\vartheta}_1, \vartheta) > \text{ΜΤΣ}(\hat{\vartheta}, \vartheta)\ , \quad \forall\, \vartheta \in \Theta = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

Απόδειξη: Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι,

$$L(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\vartheta}\, e^{-\frac{x_1^2}{2\vartheta^2}}\, \frac{2}{\sqrt{2\pi}\vartheta}\, e^{-\frac{2x_2^2}{\vartheta^2}} = \frac{1}{\pi\vartheta^2}\, e^{-\frac{1}{2\vartheta^2}(x_1^2+4x_2^2)}.$$

$$\ln L(\vartheta) = -\ln\pi - 2\ln\vartheta - \frac{1}{2\vartheta^2}(x_1^2+4x_2^2).$$

Οπότε, βρίσκουμε το μέγιστο με την γνωστή διαδικασία,

$$\frac{d}{d\vartheta}(\ln L(\vartheta)) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^3}(x_1^2+4x_2^2) = 0 \Leftrightarrow \vartheta^2 = \frac{1}{2}(x_1^2+4x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow \vartheta = \hat{\vartheta} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_1^2+4x_2^2)} \text{ (αφού } \vartheta > 0).$$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}(\ln L(\vartheta)) = \frac{2}{\vartheta^2} - \frac{3}{\vartheta^4}(x_1^2+4x_2^2)\Big|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} = -\frac{4}{\hat{\vartheta}^2} < 0,$$

δηλαδή η τιμή $\vartheta = \hat{\vartheta}$ αντιστοιχεί σε μέγιστο, επομένως η στατιστική συνάρτηση $\vartheta = \hat{\vartheta}(X_1, X_2) = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1^2+4X_2^2)}$ είναι Ε.Μ.Π. της άγνωστης παραμέτρου ϑ.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ζητάμε τον Ε.Μ.Π. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\vartheta) = P_\vartheta(X_1^2+4X_2^2 > a)$, όπου σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.5(3) είναι ο $g(\hat{\vartheta})$, οπότε αυτό που απομένει είναι να προσδιοριστεί η $g(\vartheta)$.

Γνωρίζουμε ότι, $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2) \Rightarrow \dfrac{X_1^2}{\vartheta^2} \sim \mathcal{X}_1^2$.

Επίσης, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \vartheta^2/4) \Rightarrow \dfrac{4X_2^2}{\vartheta^2} \sim \mathcal{X}_1^2$.

Αφού οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. έπεται ότι $\dfrac{X_1^2+4X_2^2}{\vartheta^2} \sim \mathcal{X}_2^2$.

Άρα, $g(\vartheta) = P_\vartheta(X_1^2+4X_2^2 > a) = P_\vartheta\left(\dfrac{X_1^2+4X_2^2}{\vartheta^2} > \dfrac{a}{\vartheta^2}\right)$

$$= \int_{\frac{a}{\vartheta^2}}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1)2^1} x^{1-1} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_{\frac{a}{\vartheta^2}}^{\infty} = 2e^{-\frac{a}{2\vartheta^2}}.$$

Τελικά, ο Ε.Μ.Π. της $g(\vartheta)$ είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$g(\hat{\vartheta}) = 2e^{-\frac{a}{2\hat{\vartheta}^2}} \;,\; \text{όπου} \;\; \hat{\vartheta} = \sqrt{\frac{1}{2}(X_1^2 + 4X_2^2)}$$

ή διαφορετικά,

$$g(\hat{\vartheta}) = 2\exp\left\{-\frac{a}{X_1^2 + 4X_2^2}\right\}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Απόδειξη: Εφ' όσον έχουμε μόνο μία άγνωστη παράμετρο θα χρησιμοποιήσουμε την ροπή 1ης τάξης $m_1 = E_\vartheta X$ και τη δειγματική ροπή 1ης τάξης $\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

Επομένως, $m_1 = \mu_1 \Leftrightarrow 0 = \bar{X}$, δηλαδή με τις ροπές 1ης τάξης δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τον Ε.Μ.Ρ. οπότε χρησιμοποιώ τις ροπές 2ης τάξης, δηλαδή

$$m_2 = \mu_2 \Leftrightarrow E_\vartheta X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow Var_\vartheta X + (E_\vartheta X)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vartheta^2}{3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \Leftrightarrow \hat{\hat{\vartheta}} = \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \text{ είναι ο Ε.Μ.Ρ. του } \vartheta > 0. \qquad \square$$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη Σχέση 4.1 για να βρείτε την εκ των υστέρων κατανομή του ϑ και το Θεώρημα 4.1.4 για να βρείτε τους εκτιμητές Bayes. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.3 για να βρείτε τον εκτιμητή Bayes και το Θεώρημα 4.1.6 για να βρείτε τον εκτιμητή minimax. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.4 για να βρείτε τον εκτιμητή Bayes. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.3 για να βρείτε τους εκτιμητές Bayes. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.4 για να βρείτε τον εκτιμητή Bayes. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.3 για να βρείτε τους εκτιμητές Bayes. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 178 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.4 για να βρείτε τον εκτιμητή Bayes. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.3 και το παραγοντικό κριτήριο των Neyman - Fisher (βλ. Πρόταση 2.1.9). □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 4.1.4 για να βρείτε έναν εκτιμητή Bayes και το Θεώρημα 4.1.6 για να βρείτε τον εκτιμητή minimax. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι ο Ορισμός 4.1.5 δεν ισχύει. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 4.1.5. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Απόδειξη:

1. Γνωρίζουμε, ότι η εκ των υστέρων κατανομή δίνεται από τη σχέση

$$\pi(\partial|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\partial)\pi(\partial)}{f(\underset{\sim}{x})},$$

όπου $f(\underset{\sim}{x}) = \int_{\Theta} f(\underset{\sim}{x};\partial)\pi(\partial)d\partial$.

Επομένως, λόγω ανεξαρτησίας,

$$f(\underset{\sim}{x};\partial) = f_{X_1}(x_1;\partial)f_{X_2}(x_2;\partial) = e^{-\partial}\frac{\partial^{x_1}}{x_1!}\,e^{-2\partial}\frac{(2\partial)^{x_2}}{x_2!} = \frac{2^{x_2}}{x_1!x_2!}\,e^{-3\partial}\partial^{x_1+x_2}.$$

Οπότε,

$$\pi(\partial|\underset{\sim}{x}) = \frac{\frac{2^{x_2}}{x_1!x_2!}\,e^{-3\partial}\partial^{x_1+x_2}e^{-\partial}}{f(\underset{\sim}{x})} = c(\underset{\sim}{x})\partial^{x_1+x_2}e^{-4\partial},\ \text{όπου}\ c(\underset{\sim}{x}) = \frac{2^{x_2}}{x_1!x_2!f(\underset{\sim}{x})}.$$

Λόγω της μορφής της εκ των υστέρων κατανομής, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\partial|\underset{\sim}{x} \sim Gamma(x_1 + x_2 + 1, 1/4).$$

2. Για να βρούμε τους εκτιμητές Bayes των $g_i(\partial)$, $i = 1, 2$ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.1.4, αφού η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα $L(t,\partial) = (t - g(\partial))^2$.

Άρα, ο εκτιμητής Bayes $T_1^* = T_1^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g_1(\partial) = \partial$ έχει τιμή $t_1^* = E_\partial g_1(Y) = E_\partial Y = \dfrac{x_1 + x_2 + 1}{4}$, δηλαδή,

$$T_1^* = \frac{X_1 + X_2 + 1}{4}$$

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 184 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

είναι ο εκτιμητής Bayes του ϑ.

Ενώ, ο εκτιμητής Bayes $T_2^* = T_2^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g_2(\vartheta) = \vartheta^2$ έχει τιμή $t_2^* = E_\vartheta g_2(Y) = E_\vartheta Y^2 = VarY + (E_\vartheta Y)^2 = \dfrac{x_1 + x_2 + 1}{16} + \dfrac{(x_1 + x_2 + 1)^2}{16} = \dfrac{(x_1 + x_2 + 1)(x_1 + x_2 + 2)}{16}$, δηλαδή,

$$T_2^* = \frac{(X_1 + X_2 + 1)(X_1 + X_2 + 2)}{16}$$

είναι ο εκτιμητής Bayes του ϑ^2.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.1

Απόδειξη:

1. Αρχικά, βρίσκουμε την εκ των υστέρων κατανομή του ϑ.

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})},$$

όπου $f(\underset{\sim}{x}) = \int_{\Theta} f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta$.

Επομένως, λόγω ανεξαρτησίας,

$$f(\underset{\sim}{x};\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i;\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{1-x_i} = \vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i}.$$

Ενώ, $\pi(\vartheta) = 1$, $0 < \vartheta < 1$.

Οπότε, $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \dfrac{\vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i}}{f(\underset{\sim}{x})}$.

Δηλαδή, παρατηρώντας προσεκτικά τη μορφή της εκ των υστέρων κατανομής, έπεται ότι

$$\vartheta|\underset{\sim}{x} \sim Beta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 1, n - \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.3, ο εκτιμητής Bayes του ϑ, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t;\vartheta) = \dfrac{(t-g(\vartheta))^2}{\vartheta(1-\vartheta)}$ είναι εκείνη η τιμή του t, t^*, που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t) = \int_{\Theta} L(t,\vartheta)\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})d\vartheta$.

Άρα, $h^*(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t-\vartheta)^2}{\vartheta(1-\vartheta)} \frac{\vartheta^{\sum x_i}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i}}{B(\sum x_i + 1, n - \sum x_i + 1)}\, d\vartheta$

$$= \frac{B(\sum x_i, n - \sum x_i)}{B(\sum x_i + 1, n - \sum x_i + 1)} \int_0^1 (t - \vartheta)^2 \frac{\vartheta^{\sum x_i - 1}(1 - \vartheta)^{n - \sum x_i - 1}}{B(\sum x_i, n - \sum x_i)} \, d\vartheta$$

$$= c^*(\underset{\sim}{x}) \int_0^1 (t - \vartheta)^2 f(\vartheta|\underset{\sim}{x}) d\vartheta = c^*(\underset{\sim}{x}) E_\vartheta(\vartheta - t)^2,$$

όπου

$$c^*(\underset{\sim}{x}) = \frac{B(\sum x_i, n - \sum x_i)}{B(\sum x_i + 1, n - \sum x_i + 1)} \text{ και } f(\vartheta|\underset{\sim}{x}) \sim Beta\left(\sum_{i=1}^n x_i, n - \sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Επομένως, η συνάρτηση $h^*(t)$ ελαχιστοποιείται ως προς t

$$\Updownarrow$$

η συνάρτηση $E_\vartheta(\vartheta - t)^2$ ελαχιστοποιείται ως προς t

$$\Updownarrow$$

$$t^* = E_\vartheta Y, \; Y \sim Beta\left(\sum_{i=1}^n x_i, n - \sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Οπότε $t^* = E_\vartheta Y = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i + n - \sum_{i=1}^n x_i} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$ είναι η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t)$ ή διαφορετικά,

$$T^* = T^*(\underset{\sim}{X}) = \bar{X}$$

είναι ο εκτιμητής Bayes του ϑ.

2. Για να βρούμε τον εκτιμητή minimax θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.1.6, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ο εκτιμητής Bayes του ϑ έχει σταθερά συνάρτηση κινδύνου, επομένως αυτός ο εκτιμητής θα είναι και minimax για την ίδια παραμετρική συνάρτηση.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(\bar{X},\vartheta) &= E_\vartheta\left\{\frac{(\bar{X}-\vartheta)^2}{\vartheta(1-\vartheta)}\right\} = \frac{1}{\vartheta(1-\vartheta)}E_\vartheta(\bar{X}-\vartheta)^2 \\ &= \frac{1}{\vartheta(1-\vartheta)}\{Var\bar{X} + (E_\vartheta\bar{X}-\vartheta)^2\} \\ &= \frac{1}{\vartheta(1-\vartheta)}\left\{\frac{1}{n^2}n\vartheta(1-\vartheta)+0\right\} = \frac{1}{n} = \text{σταθερά}.\end{aligned}$$

Επομένως, ο $\bar{X}$ είναι εκτιμητής minimax για το ϑ, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t;\vartheta) = \dfrac{(t-\vartheta)^2}{\vartheta(1-\vartheta)}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.2

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα βρούμε την εκ των υστέρων κατανομή του ∂,

$$\pi(\partial|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\partial)\pi(\partial)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\prod_{i=1}^{n} e^{-i\partial}\frac{(i\partial)^{x_i}}{x_i!}\,\partial e^{-\partial}$$

$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\, e^{-\partial(\sum i)}\, \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} i^{x_i}\right)\partial^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}\partial e^{-\partial} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i^{x_i}}{f(\underset{\sim}{x})\prod_{i=1}^{n} x_i!}\partial^{\sum x_i+1} e^{-\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)\partial}$$

$$= c(\underset{\sim}{x})\partial^{\sum x_i+1} e^{-\left(\frac{n(n+1)}{2}+1\right)\partial}, \text{ όπου } c(\underset{\sim}{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{n} i^{x_i}}{f(\underset{\sim}{x})\prod_{i=1}^{n} x_i!}.$$

Εφ' όσον έχουμε βρει την μορφή της εκ των υστέρων κατανομής του ∂, παρατηρούμε ότι ακολουθεί μια κατανομή Γάμμα, δηλαδή

$$\partial|\underset{\sim}{x} \sim Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + 2, \frac{2}{n(n+1)+2}\right).$$

Επειδή η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.1.4.
Άρα, ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ του ∂ παίρνει την τιμή

$$t^* = E_\partial Y = \frac{2(\sum_{i=1}^{n} x_i + 2)}{n(n+1)+2},$$

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 189 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

δηλαδή,

$$T^* = \frac{2(\sum_{i=1}^{n} X_i + 2)}{n(n+1)+2}$$

είναι ο εκτιμητής Bayes του ϑ. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.3

Απόδειξη: Αρχικά βρίσκουμε την εκ των υστέρων κατανομή του ϑ.

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\prod_{i=1}^{n}\vartheta e^{-\vartheta x_i}\frac{1}{\Gamma(a)\beta^a}\vartheta^{a-1}\ \vartheta e^{-\vartheta/\beta}$$
$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})\Gamma(a)\beta^a}\ \vartheta^n e^{-\vartheta\sum x_i}\ \vartheta^{a-1}\ \vartheta e^{-\vartheta/\beta} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})\Gamma(a)\beta^a}\ \vartheta^{a+n-1}e^{-\vartheta(\sum x_i+\frac{1}{\beta})}$$
$$= c(\underset{\sim}{x})\vartheta^{a+n-1}e^{-\vartheta(\sum x_i+\frac{1}{\beta})},\ \text{όπου}\ c(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})\Gamma(a)\beta^a}.$$

Εφ' όσον έχουμε βρει την μορφή της εκ των υστέρων κατανομής του ϑ, παρατηρούμε ότι ακολουθεί μια κατανομή Γάμμα, δηλαδή

$$\vartheta|\underset{\sim}{x} \sim Gamma\left(a+n, \left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.3, ο εκτιμητής Bayes του ϑ, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t;\vartheta) = \vartheta^2(t-g(\vartheta))^2$ είναι εκείνη η τιμή του t, t^*, που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t) = \int_\Theta L(t,\vartheta)\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})d\vartheta$.

$$\text{Άρα, } h^*(t) = \int_0^\infty \vartheta^2(t-g(\vartheta))^2\ \frac{\vartheta^{a+n-1}e^{-\vartheta(\sum x_i+\frac{1}{\beta})}}{\Gamma(a+n)(\sum x_i+\frac{1}{\beta})^{a+n}}\ d\vartheta$$
$$= \frac{\Gamma(a+n+2)(\sum x_i+\frac{1}{\beta})^2}{\Gamma(a+n)}\int_0^\infty (t-g(\vartheta))^2\ \frac{\vartheta^{a+n+1}e^{-\vartheta(\sum x_i+\frac{1}{\beta})}}{\Gamma(a+n+2)(\sum x_i+\frac{1}{\beta})^{a+n-2}}\ d\vartheta$$
$$= c^*(\underset{\sim}{x})\int_0^\infty (t-g(\vartheta))^2 f(\vartheta|\underset{\sim}{x})d\vartheta = c^*(\underset{\sim}{x})E_\vartheta(g(\vartheta)-t)^2,$$
$$\text{όπου, } c^*(\underset{\sim}{x}) = \frac{\Gamma(a+n+2)(\sum x_i+\frac{1}{\beta})^2}{\Gamma(a+n)}\ \text{και}$$

$$f(\vartheta|\underset{\sim}{x}) \sim Gamma\left(a+n+2, \left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right).$$

$$\begin{gathered}\text{Επομένως, η συνάρτηση } h^*(t) \text{ ελαχιστοποιείται ως προς } t\\ \Updownarrow\\ \text{η συνάρτηση } E_\vartheta(g(\vartheta)-t)^2 \text{ ελαχιστοποιείται ως προς } t\\ \Updownarrow\\ t^* = E_\vartheta g(Y),\ Y \sim Gamma\left(a+n+2, \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right).\end{gathered}$$

Οπότε, όταν $g_1(\vartheta) = \vartheta$,

$$t^* = E_\vartheta Y = \frac{a+n+2}{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\beta}}$$

είναι η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t)$ ή διαφορετικά,

$$T^* = T^*(\underset{\sim}{X}) = \frac{a+n+2}{\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{\beta}}$$

είναι ο εκτιμητής Bayes του ϑ.

Ενώ, όταν $g_1(\vartheta) = e^{-\vartheta}$, η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t)$, είναι η $t^* = E_\vartheta e^{-Y} = m_Y(-1)$, όπου $m_Y(t) = \dfrac{1}{(1-\beta t)^a}$, $t < \dfrac{1}{\beta}$ είναι η ροπογεννήτρια της κατανομής $Gamma(a, \beta)$.

Επομένως,

$$t^* = \frac{1}{\left(1 + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right)^{a+n+2}}$$

ή διαφορετικά

$$T^* = T^*(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\left(1 + \left(\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right)^{a+n+2}}$$

είναι ο εκτιμητής Bayes του $e^{-\vartheta}$. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.4

Απόδειξη: Αρχικά, βρίσκουμε την εκ των υστέρων κατανομή του ϑ.

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x_i-\vartheta t_i)^2}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\,e^{-\frac{(\vartheta-a)^2}{2\beta^2}}$$

$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\beta}\ \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta t_i)^2}{2}-\frac{(\vartheta-a)^2}{2\beta^2}\right\}$$

$$= c(\underset{\sim}{x})\ \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta t_i)^2}{2}-\frac{(\vartheta-a)^2}{2\beta^2}\right\},$$

όπου $c(\underset{\sim}{x}) = \dfrac{1}{f(\underset{\sim}{x})(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}\beta}$.

Αν εργαστούμε μόνο με τον εκθέτη του e προκύπτει ότι,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\vartheta t_i)^2}{2}+\frac{(\vartheta-a)^2}{2\beta^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\vartheta t_i+\vartheta^2 t_i^2)}{2}+\frac{\vartheta^2-2a\vartheta+a^2}{2\beta^2}$$

$$= \frac{\vartheta^2(\beta^2\sum_{i=1}^{n}t_i^2+1)-2(\beta^2\sum_{i=1}^{n}x_i t_i+a)\vartheta+(\beta^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^2+a^2)}{2\beta^2}$$

$$= \frac{\vartheta^2 - 2\dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}\vartheta + \left(\dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}\right)^2 - \left(\dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}\right)^2 + \dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}}{2\dfrac{\beta^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}}$$

$$= \frac{\left(\vartheta - \dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}\right)^2}{2\dfrac{\beta^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}} + c_1, \text{ όπου } c_1 = \frac{-\left(\dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}\right)^2 + \dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}}{2\dfrac{\beta^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}}.$$

Αν θέσουμε, $\mu = \dfrac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}$ και $\sigma^2 = \dfrac{\beta^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}$,

τότε η μορφή της εκ των υστέρων κατανομής θα είναι,

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = c(\underset{\sim}{x})e^{-\left[\frac{(\vartheta-\mu)^2}{2\sigma^2}+c_1\right]} = c(\underset{\sim}{x})\, e^{-c_1} e^{-\frac{(\vartheta-\mu)^2}{2\sigma^2}} = c_2(\underset{\sim}{x})\, e^{-c_1} e^{-\frac{(\vartheta-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

όπου $c_2(\underset{\sim}{x}) = c(\underset{\sim}{x})\, e^{-c_1}$.

Από την μορφή, λοιπόν της $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})$ προκύπτει ότι αυτή είναι η $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, δηλ.

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο . . .
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και . . .
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 195 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$$\vartheta|\underset{\sim}{x} \sim \mathcal{N}\left(\frac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}, \frac{\beta^2}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}\right).$$

Επειδή η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, από το Θεώρημα 4.1.4 προκύπτει ότι ο εκτιμητής Bayes του ϑ έχει τιμή $t^* = E_\vartheta Y$, όπου Y έχει ως κατανομή την εκ των υστέρων, δηλαδή

$$t^* = \frac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} x_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}.$$

Άρα ο εκτιμητής Bayes του ϑ, είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$T = T(\underset{\sim}{X}) = \frac{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i t_i + a}{\beta^2 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + 1}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.5

Απόδειξη: Κατ' αρχάς πρέπει να υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή του ϑ, λαμβάνοντας, όμως, υπ' όψιν ότι μέσα στο πεδίο τιμών του δείγματος υπάρχει η άγνωστη παράμετρος.

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\vartheta}\; I_{(0,\vartheta)}(x_i)\; I_{(0,1)}(\vartheta)$$

$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\frac{1}{\vartheta^n}\;\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\vartheta)}(x_i)\; I_{(0,1)}(\vartheta)$$

$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\frac{1}{\vartheta^n}\; I_{(0,x_{(n)}]}(x_{(1)})\; I_{[x_{(1)},\vartheta)}(x_{(n)})\; I_{(0,1)}(\vartheta)$$

$$= c(\underset{\sim}{x})\;\frac{1}{\vartheta^n}\; I_{(x_{(n)},1)}(\vartheta), \text{ όπου } c(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\; I_{(0,x_{(n)}]}(x_{(1)}).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.3, ο εκτιμητής Bayes του ϑ, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t;\vartheta) = \dfrac{(t-g(\vartheta))^2}{\vartheta^2}$ είναι εκείνη η τιμή του t, t^*, που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t) = \int_\Theta L(t,\vartheta)\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})d\vartheta$.

Άρα, $h^*(t) = \displaystyle\int_{x_{(n)}}^{1}\frac{(t-g(\vartheta))^2}{\vartheta^2}c(\underset{\sim}{x})\;\frac{1}{\vartheta^n}\;d\vartheta = c(\underset{\sim}{x})\int_{x_{(n)}}^{1}(t-g(\vartheta))^2\;\frac{1}{\vartheta^{n+2}}d\vartheta.$

Οπότε, η τιμή t που ελαχιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση είναι

$$t = t^* = \frac{\displaystyle\int_{x_{(n)}}^{1} g(\vartheta)\frac{1}{\vartheta^{n+2}}d\vartheta}{\displaystyle\int_{x_{(n)}}^{1}\frac{1}{\vartheta^{n+2}}d\vartheta}.$$

Όταν $g_1(\vartheta) = \vartheta$, αυτή η τιμή είναι,

$$t^* = \frac{n+1}{n} \frac{x_{(n)} - x_{(n)}^{n+1}}{1 - x_{(n)}^{n+1}}$$

ή διαφορετικά ο εκτιμητής Bayes του ϑ είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$T_1 = T_1(\underset{\sim}{X}) = \frac{n+1}{n} \frac{X_{(n)} - X_{(n)}^{n+1}}{1 - X_{(n)}^{n+1}}.$$

Ενώ, όταν $g_2(\vartheta) = \vartheta^2$, αυτή η τιμή είναι,

$$t^* = \frac{n+1}{n-1} \frac{x_{(n)}^2 - x_{(n)}^{n+1}}{1 - x_{(n)}^{n+1}}$$

ή διαφορετικά ο εκτιμητής Bayes του ϑ^2 είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$T_2 = T_2(\underset{\sim}{X}) = \frac{n+1}{n-1} \frac{X_{(n)}^2 - X_{(n)}^{n+1}}{1 - X_{(n)}^{n+1}}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.6

Απόδειξη: Η εκ των υστέρων κατανομή του ϑ είναι της μορφής,

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\prod_{i=1}^{n}\frac{\vartheta}{x_i^{\vartheta+1}}\ e^{-\vartheta}$$

$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\ \vartheta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\vartheta+1)} e^{-\vartheta} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\ \vartheta^n e^{-(\vartheta+1)\ln(\prod x_i)}e^{-\vartheta}$$

$$= c(\underset{\sim}{x})\vartheta^n e^{-\vartheta(1+\sum\ln x_i)},\ \vartheta > 0,\ \text{όπου}\ c(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\ e^{-\sum\ln x_i}.$$

Από την μορφή, λοιπόν της $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})$ προκύπτει ότι αυτή είναι η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής *Gamma*, δηλ.

$$\vartheta|\underset{\sim}{x} \sim Gamma\left(n+1, \left(1+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^{-1}\right).$$

Επειδή η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, από το Θεώρημα 4.1.4 προκύπτει ότι ο εκτιμητής Bayes του ϑ έχει τιμή $t^* = E_\vartheta Y$, όπου Y έχει ως κατανομή την εκ των υστέρων, δηλαδή

$$t^* = \frac{n+1}{1+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

Άρα ο εκτιμητής Bayes του ϑ, είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$T = T(\underset{\sim}{X}) = \frac{n+1}{1+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.2.7

Απόδειξη: Λόγω του Θεωρήματος 4.1.3, ο εκτιμητής Bayes είναι εκείνη η τιμή $T^*(\underset{\sim}{x}) = t^*$, του t η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $h^*(t) = \int_\Theta L(t,\vartheta)\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})d\vartheta$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από το δείγμα, μέσω της εκ των υστέρων κατανομής $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \dfrac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})}$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})$ είναι συνάρτηση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.

Θεωρούμε ότι η $T(\underset{\sim}{X})$ είναι η ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση, οπότε από το παραγοντικό κριτήριο των Neyman - Fisher προκύπτει ότι,

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) = q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)h(\underset{\sim}{x}).$$

Επίσης,
$$f(\underset{\sim}{x}) = \int_\Theta f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta = \int_\Theta q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)h(\underset{\sim}{x})\pi(\vartheta)d\vartheta$$
$$= h(\underset{\sim}{x})\int_\Theta q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)\pi(\vartheta)d\vartheta = h(\underset{\sim}{x})q_1(T(\underset{\sim}{x})).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εκ των υστέρων γίνεται,

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)h(\underset{\sim}{x})\pi(\vartheta)}{h(\underset{\sim}{x})q_1(T(\underset{\sim}{x}))} = \frac{q(T(\underset{\sim}{x});\vartheta)\pi(\vartheta)}{q_1(T(\underset{\sim}{x}))} = q_2(T(\underset{\sim}{x});\vartheta).$$

Δηλαδή, η εκ των υστέρων είναι συνάρτηση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης, άρα το ίδιο συμβαίνει και για τον εκτιμητή Bayes. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.8

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 201 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για να βρούμε εκτιμητή minimax θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 4.1.6, δηλαδή αρχικά θα προσδιορίσουμε τον εκτιμητή Bayes του ϑ.

Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε την εκ των υστέρων κατανομή του ϑ,

$$\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\vartheta)\pi(\vartheta)}{f(\underset{\sim}{x})} = \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})}\prod_{i=1}^{n}\vartheta^{x_i}(1-\vartheta)^{1-x_i}\ \frac{1}{B(a,\beta)}\ \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{\beta-1}$$
$$= \frac{1}{f(\underset{\sim}{x})B(a,\beta)}\vartheta^{\sum x_i+a-1}(1-\vartheta)^{n-\sum x_i+\beta-1}$$

Από την μορφή, λοιπόν της $\pi(\vartheta|\underset{\sim}{x})$ προκύπτει ότι αυτή είναι η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής Βήτα, δηλ.

$$\vartheta|\underset{\sim}{x} \sim Beta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i + a, n - \sum_{i=1}^{n}x_i + \beta\right).$$

Επειδή η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, από το Θεώρημα 4.1.4 προκύπτει ότι ο εκτιμητής Bayes του ϑ έχει τιμή $t^* = E_\vartheta Y$, όπου Y έχει ως κατανομή την εκ των υστέρων, δηλαδή

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i + a}{\sum_{i=1}^{n}x_i + a + n - \sum_{i=1}^{n}x_i + \beta}.$$

Άρα ο εκτιμητής Bayes του ϑ, είναι η στατιστική συνάρτηση,

$$T = T(\underset{\sim}{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i + a}{n + a + \beta}.$$

Επομένως, αυτός ο εκτιμητής Bayes θα είναι και εκτιμητής minimax του ϑ αν η συνάρτηση κινδύνου είναι σταθερή σαν συνάρτηση του ϑ.
Οπότε,

$$\begin{aligned} R(T,\vartheta) &= E_\vartheta(T-\vartheta)^2 = VarT + (E_\vartheta T - \vartheta)^2 \\ &= \frac{1}{(n+\alpha+\beta)^2}\, n\vartheta(1-\vartheta) + \left(\frac{n\vartheta+\alpha}{n+\alpha+\beta} - \vartheta\right)^2. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$R(T,\vartheta) = \frac{(\alpha+\beta)^2 - n}{(n+\alpha+\beta)^2}\,\vartheta^2 + \frac{n-2\alpha(\alpha+\beta)}{(n+\alpha+\beta)^2}\,\vartheta + \frac{\alpha^2}{(n+\alpha+\beta)^2}.$$

Για να είναι, λοιπόν, η συνάρτηση κινδύνου σταθερή συνάρτηση, ως προς ϑ πρέπει οι συντελεστές των ϑ^2 και ϑ να είναι μηδέν, δηλαδή,

$$\left.\begin{array}{r} (\alpha+\beta)^2 - n = 0 \\ n - 2\alpha(\alpha+\beta) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha^* = \beta^* = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.6, η στατιστική συνάρτηση

$$T^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{\sqrt{n}}{2}}{n + \sqrt{n}}$$

είναι εκτιμητής minimax του ϑ, με εκ των προτέρων κατανομή την $Beta(\alpha^*,\beta^*)$. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.9

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.5, αν βρεθεί ένας εκτιμητής T^*, ο οποίος έχει συνάρτηση κινδύνου μικρότερη ή ίση από αυτήν του $T = \frac{1}{2}$, $\forall \partial \in \Theta$, τότε ο T δεν θα είναι minimax.
Ένας καλός εκτιμητής του ∂ είναι ο $T^* = \bar{X}$, θα δείξουμε ότι αυτός πληροί την παραπάνω προϋπόθεση.

$$R(T, \partial) = \frac{\left(\frac{1}{2} - \partial\right)^2}{\partial(1-\partial)}.$$

Ενώ,

$$\begin{aligned} R(T^*, \partial) &= E_\partial\left\{\frac{(T^* - \partial)^2}{\partial(1-\partial)}\right\} = E_\partial\left\{\frac{1}{\partial(1-\partial)}\left(\frac{X_1 + X_2}{2} - \partial\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\partial(1-\partial)}\left\{Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) + \left(E_\partial\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) - \partial\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{\partial(1-\partial)}\frac{2\partial(1-\partial)}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$R(T^*, \partial) \leq R(T, \partial) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\left(\frac{1}{2} - \partial\right)^2}{\partial(1-\partial)} \Leftrightarrow 3\partial^2 - 3\partial + 1 \geq 0. \tag{6.11}$$

Η Σχέση (6.11) ισχύει $\forall \partial \in (0, 1)$, αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου, $\Delta = -3$, είναι αρνητική. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{2}$ δεν είναι minimax εκτιμητής του ∂. □

Πίσω στην Άσκηση 4.2.10

Απόδειξη: Θεωρούμε τον εκτιμητή T_1 ο οποίος είναι minimax και έναν καλύτερό του εκτιμητή τον T^*, επομένως

$$R(T^*,\vartheta) \leq R(T_1,\vartheta) \;\; \forall\, \vartheta \in \Theta.$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει $\forall\, \vartheta \in \Theta$, το ίδιο θα συμβαίνει και για τις μέγιστες τιμές των συναρτήσεων, δηλαδή

$$\max_{\vartheta\in\Theta} R(T^*,\vartheta) \leq \max_{\vartheta\in\Theta} R(T_1,\vartheta). \tag{6.12}$$

Όμως, ο T_1 είναι ένας minimax εκτιμητής, οπότε από τον Ορισμό 4.1.5 προκύπτει ότι για οποιονδήποτε εκτιμητή, άρα και για τον T^*,

$$\max_{\vartheta\in\Theta} R(T_1,\vartheta) \leq \max_{\vartheta\in\Theta} R(T^*,\vartheta). \tag{6.13}$$

Επομένως από τις Σχέσεις (6.12) και (6.13) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι,

$$\max_{\vartheta\in\Theta} R(T^*,\vartheta) = \max_{\vartheta\in\Theta} R(T_1,\vartheta). \tag{6.14}$$

Επιπλέον ο εκτιμητής T_1 είναι minimax και επομένως για κάθε άλλο εκτιμητή T θα έχουμε ότι,

$$\max_{\vartheta\in\Theta} R(T_1,\vartheta) \leq \max_{\vartheta\in\Theta} R(T,\vartheta). \tag{6.15}$$

Από τις Σχέσεις (6.14) και (6.15) προκύπτει ότι

$$\max_{\vartheta\in\Theta} R(T^*,\vartheta) \leq \max_{\vartheta\in\Theta} R(T,\vartheta) \;\; \text{για κάθε άλλον εκτιμητή} \;\; T.$$

Δηλαδή, ο T^* είναι ένας εκτιμητής minimax. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε ένα Δ.Ε. για το μ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε ένα Δ.Ε. για το ϑ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε τα Δ.Ε. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε το Δ.Ε. για το ϑ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε το Δ.Ε. και τον Ορισμό 5.1.3 για να βρείτε τα φράγματα. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε το Δ.Ε. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε το Δ.Ε. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.7

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 5.1.6 για να βρείτε την ποσότητα οδηγό και την Παρατήρηση 5.1.5 για να βρείτε το Δ.Ε. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 5.2.1. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 5.1.1. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 5.1.1. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.11

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον Ορισμό 5.1.1. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.12

Απόδειξη: Για να είναι η T ποσότητα οδηγός πρέπει να περιέχει την άγνωστη παράμετρο μ (κάτι που συμβαίνει) και η κατανομή της να μην εξαρτάται από αυτή την παράμετρο. Όμως,

$$X_k \sim \mathcal{N}(\mu + k, 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{n}(\mu + k), \sum_{k=1}^{n} 1\right) \equiv \mathcal{N}\left(n\mu + \frac{n(n+1)}{2}, n\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{N}\left(\mu + \frac{n+1}{2}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \left(\frac{n+1}{2} + \mu\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

ή διαφορετικά $T = \sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{n+1}{2} - \mu\right) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, δηλαδή η κατανομή της T δεν εξαρτάται από το ϑ.

Στη συνέχεια θεωρούμε σταθερές $c_1 < c_2$ τέτοιες ώστε,

$$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta\left(c_1 \leq \sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{n+1}{2} - \mu\right) \leq c_2\right) = 1 - a$$

$$\Leftrightarrow P_\vartheta\left(\bar{X} - \frac{n+1}{2} - \frac{c_2}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} - \frac{n+1}{2} - \frac{c_1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - a$$

Δηλαδή το διάστημα $\left[\bar{X} - \frac{n+1}{2} - \frac{c_2}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \frac{n+1}{2} - \frac{c_1}{\sqrt{n}}\right]$ είναι Δ.Ε. για το μ με σ.ε. $1 - a$.

Για να βρούμε Δ.Ε. ίσων ουρών εργαζόμαστε ως εξής (ουσιαστικά με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία καθορίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2),

$$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \leq c_2) - P_\vartheta(T < c_1) = 1 - a$$

$$\Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + 1 - P_\vartheta(T \leq c_2) = a \Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + P_\vartheta(T > c_2) = a.$$

Επειδή θέλουμε Δ.Ε. ίσων ουρών, πρέπει

$$P_\vartheta(T < c_1) = P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2}. \qquad (6.16)$$

Ισχύει ο ακόλουθος συμβολισμός,

$$\left.\begin{array}{c} P(T > c) = p \\ T \sim \mathcal{N}(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow c = z_p$$

όπου z_p ονομάζεται το p–ποσοστιαίο σημείο της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επομένως, λόγω της Σχέσης (6.16) και του παραπάνω συμβολισμού προκύπτει ότι,

$P_\partial(T > c_2) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow c_2 = z_{a/2}$.

$P_\partial(T < c_1) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow P_\partial(T \geq c_1) = 1 - \dfrac{a}{2}$

Επειδή η T έχει μία συνεχή κατανομή, $P_\partial(T \geq c_1) = P_\partial(T > c_1)$, δηλαδή

$P_\partial(T > c_1) = 1 - \dfrac{a}{2} \Rightarrow c_1 = z_{1-a/2} = -z_{a/2}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή η $\mathcal{N}(0,1)$ είναι συμμετρική κατανομή ως προς το 0.

Τελικά, αφού υπολογίσαμε τις σταθερές, το διάστημα

$$\left[\bar{X} - \frac{n+1}{2} - \frac{z_{a/2}}{\sqrt{n}}, \bar{X} - \frac{n+1}{2} + \frac{z_{a/2}}{\sqrt{n}}\right]$$

είναι Δ.Ε. για το μ με σ.ε. $1 - a$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.1

Απόδειξη:

1. Επειδή οι τ.μ. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες από την εκθετική κατανομή έπεται, από τις αναπαραγωγικές ιδιότητες, ότι

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(n, \vartheta) \Rightarrow T = \frac{2}{\vartheta} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{X}^2_{2n}.$$

   Δηλαδή, η T περιέχει την άγνωστη παράμετρο ϑ και η κατανομή της δεν εξαρτάται από αυτήν την παράμετρο, επομένως η T είναι μια ποσότητα οδηγός.

2. Θεωρούμε σταθερές $c_1 < c_2$ τέτοιες ώστε,

   $P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(c_1 \le \frac{2}{\vartheta} \sum_{i=1}^{n} X_i \le c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta\left(\frac{2n\bar{X}}{c_2} \le \vartheta \le \frac{2n\bar{X}}{c_1}\right) = 1 - a$

   Δηλαδή το διάστημα $\left[\frac{2n\bar{X}}{c_2}, \frac{2n\bar{X}}{c_1}\right]$ είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ.ε. $1 - a$. Ουσιαστικά, αυτό που απομένει είναι να καθορίσουμε τις σταθερές c_1 και c_2. Οπότε, για το Δ.Ε. ίσων ουρών εργαζόμαστε ως εξής,

   $P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \le c_2) - P_\vartheta(T < c_1) = 1 - a$

   $\Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + 1 - P_\vartheta(T \le c_2) = a \Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + P_\vartheta(T > c_2) = a.$

   Επειδή θέλουμε Δ.Ε. ίσων ουρών, πρέπει

$$P_\vartheta(T < c_1) = P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2}. \tag{6.17}$$

   Ισχύει ο ακόλουθος συμβολισμός,

$$\left.\begin{array}{c} P(T > c) = p \\ T \sim \mathcal{X}^2_k \end{array}\right\} \Rightarrow c = \mathcal{X}^2_{k,p}$$

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο ...
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και ...
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 220 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

όπου $\mathcal{X}^2_{k,p}$ ονομάζεται το p–ποσοστιαίο σημείο της κατανομής $\mathcal{X}^2_k$.

Επομένως, λόγω της Σχέσης (6.17) και του παραπάνω συμβολισμού προκύπτει ότι,

$P_\vartheta(T > c_2) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow c_2 = \mathcal{X}^2_{2n,a/2}$.

$P_\vartheta(T < c_1) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow P_\vartheta(T \geq c_1) = 1 - \dfrac{a}{2}$.

Επειδή η T έχει μία συνεχή κατανομή $P_\vartheta(T \geq c_1) = P_\vartheta(T > c_1)$, δηλαδή

$P_\vartheta(T > c_1) = 1 - \dfrac{a}{2} \Rightarrow c_1 = \mathcal{X}^2_{2n,1-a/2}$.

Άρα το διάστημα

$$\left[\frac{2n\bar{X}}{\mathcal{X}^2_{2n,a/2}}, \frac{2n\bar{X}}{\mathcal{X}^2_{2n,1-a/2}}\right]$$

είναι Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

3. Για να βρούμε ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ, πρέπει προφανώς να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος του διαστήματος $\left[\dfrac{2n\bar{X}}{c_2}, \dfrac{2n\bar{X}}{c_1}\right]$ για να μπορέσουμε να καθορίσουμε τις σταθερές c_1 και c_2. Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι η μία εξαρτάται από την άλλη, δηλαδή, $c_2 = c_2(c_1)$. Ενώ το μήκος του διαστήματος είναι $l = 2n\bar{X}\left(\dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{c_2}\right)$ και το ελαχιστοποιούμε ως προς c_1.

$$\frac{dl}{dc_1} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\frac{dc_2}{dc_1} = 0 \Rightarrow \frac{dc_2}{dc_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2}. \qquad (6.18)$$

Επειδή η T έχει μια (απολύτως) συνεχή κατανομή, διαπιστώνουμε ότι,

$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \leq c_2) - P_\vartheta(T \leq c_1) = 1 - a \Leftrightarrow F_T(c_2) - F_T(c_1) = 1 - a \Leftrightarrow f_T(c_2)\dfrac{dc_2}{dc_1} - f_T(c_1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dc_2}{dc_1} = \dfrac{f_T(c_1)}{f_T(c_2)}$.

Η παραπάνω σχέση, λόγω της (6.18), γίνεται

$$\frac{f_T(c_1)}{f_T(c_2)} = \frac{c_2^2}{c_1^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{\Gamma(n)2^n} c_1^{n-1} e^{-\frac{c_1}{2}}}{\frac{1}{\Gamma(n)2^n} c_2^{n-1} e^{-\frac{c_2}{2}}} = \frac{c_2^2}{c_1^2} \Leftrightarrow$$

$$c_1^{n+1} e^{-\frac{c_1}{2}} = c_2^{n+1} e^{-\frac{c_2}{2}} \tag{6.19}$$

Προφανώς, θα χρειαστούμε και μια δεύτερη σχέση για να υπολογίσουμε τα c_1 και c_2, η οποία θα προκύψει ως εξής,

$$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{\Gamma(n)2^n} t^{n-1} e^{-\frac{t}{2}} dt = 1 - a \tag{6.20}$$

Από τις Σχέσεις (6.19) και (6.20) υπολογίζουμε αριθμητικά τις σταθερές c_1 και c_2.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 222 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

1. Για να αποδείξουμε ότι η T είναι ποσότητα οδηγός, μιας και περιέχει το ϑ, αρκεί να δείξουμε ότι η κατανομή της δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο. Από αντίστροφους μετασχηματισμούς έχουμε τα εξής,

   $t = \dfrac{x^2}{\vartheta} \Rightarrow x = \sqrt{t\vartheta}$, επομένως η π.π. της T είναι,

   $$f_T(t;\vartheta) = f_X(\sqrt{t\vartheta};\vartheta)\left|\frac{d(\sqrt{t\vartheta})}{dt}\right| = \frac{2}{\vartheta}\sqrt{t\vartheta}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t\vartheta}}\vartheta = e^{-t}.$$

   Από την μορφή της $f_T(t;\vartheta)$ παρατηρούμε ότι η $T \sim \mathcal{E}(1)$, δηλαδή η T είναι ποσότητα οδηγός.

2. Θεωρούμε σταθερές $c_1 < c_2$ τέτοιες ώστε,

   $$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta\left(c_1 \leq \frac{X^2}{\vartheta} \leq c_2\right) = 1 - a$$

   $$\Leftrightarrow P_\vartheta\left(\frac{X^2}{c_2} \leq \vartheta \leq \frac{X^2}{c_1}\right) = 1 - a.$$

   Δηλαδή το διάστημα $\left[\dfrac{X^2}{c_2}, \dfrac{X^2}{c_1}\right]$ είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ.ε. $1 - a$. Στη συνέχεια καθορίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2, ώστε το Δ.Ε. να είναι ίσων ουρών. Επομένως εργαζόμαστε ως εξής,

   $$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \leq c_2) - P_\vartheta(T < c_1) = 1 - a$$

   $$\Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + 1 - P_\vartheta(T \leq c_2) = a \Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + P_\vartheta(T > c_2) = a.$$

   Επειδή θέλουμε Δ.Ε. ίσων ουρών, πρέπει

   $$P_\vartheta(T < c_1) = P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2}.$$

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι,

$$P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow \int_{c_2}^{\infty} e^{-x}dx = \frac{a}{2} \Rightarrow c_2 = -\ln(a/2).$$

$$P_\vartheta(T < c_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow \int_{0}^{c_1} e^{-x}dx = \frac{a}{2} \Rightarrow c_1 = -\ln(1-a/2)$$

Άρα το διάστημα

$$\left[\frac{X^2}{-\ln(a/2)}, \frac{X^2}{-\ln(1-a/2)}\right]$$

είναι Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

Όταν $g_2(\vartheta) = P_\vartheta(X > 1) = \int_1^\infty \frac{2}{\vartheta} x e^{-\frac{x^2}{\vartheta}} = e^{-1/\vartheta}$, τότε εργαζόμαστε ως ακολούθως,

$$P_\vartheta\left(\frac{X^2}{-\ln(a/2)} \le \vartheta \le \frac{X^2}{-\ln(1-a/2)}\right) = 1-a$$

$$\Leftrightarrow P_\vartheta\left(\frac{\ln(a/2)}{X^2} \le -\frac{1}{\vartheta} \le \frac{\ln(1-a/2)}{X^2}\right) = 1-a$$

$$\Leftrightarrow P_\vartheta\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{1/X^2} \le e^{-1/\vartheta} \le \left(1-\frac{a}{2}\right)^{1/X^2}\right) = 1-a.$$

Δηλαδή το διάστημα

$$\left[\left(\frac{a}{2}\right)^{1/X^2}, \left(1-\frac{a}{2}\right)^{1/X^2}\right]$$

είναι Δ.Ε. ίσων ουρών για την $g_2(\vartheta)$ με σ.ε. $1-a$.

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Απόδειξη:

1. Παρατηρούμε από την εκφώνηση της άσκησης ότι δεν υπάρχει μια σαφής εικόνα για το ποια τ.μ. μπορούμε να πάρουμε ως ποσότητα οδηγό. Σε αυτές τις περιπτώσεις βρίσκουμε έναν Ε.Μ.Π. για το ϑ. Από τη λύση της Άσκησης 3.2.12 ($\mu = \vartheta$ και $\sigma = 1$) προκύπτει ότι η στατιστική συνάρτηση $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι Ε.Μ.Π. για το ϑ με πυκνότητα πιθανότητας,

   $f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x) = ne^{-n(x-\vartheta)}$, όταν $x \geq \vartheta$ (βλ. τη λύση της Άσκησης 2.2.8).

   Από τη μορφή, λοιπόν, της π.π. της $X_{(1)}$ παρατηρούμε ότι αυτή είναι της μορφής $f(x-\vartheta)$, οπότε είναι λογικό να θεωρήσουμε ως πιθανή ποσότητα οδηγό την $T = X_{(1)} - \vartheta$ η οποία φυσικά περιέχει την άγνωστη παράμετρο, επομένως αυτό που απομένει είναι να δείξουμε ότι η κατανομή της T δεν εξαρτάται από το ϑ.

   Χρησιμοποιούμε αντίστροφους μετασχηματισμούς,

   $t = x - \vartheta \Rightarrow x = t + \vartheta$, επομένως η π.π. της T είναι,

   $$f_T(t;\vartheta) = f_X(t+\vartheta;\vartheta)\left|\frac{d(t+\vartheta)}{dt}\right| = ne^{-n(t+\vartheta-\vartheta)} = ne^{-nt} \text{ όταν } t \geq 0.$$

   Από την μορφή της $f_T(t;\vartheta)$ παρατηρούμε ότι η $T \sim \mathcal{E}(1/n)$, δηλαδή η T είναι μία ποσότητα οδηγός.

   Στη συνέχεια θεωρούμε σταθερές $c_1 < c_2$ τέτοιες ώστε,

   $P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\vartheta(c_1 \leq X_{(1)} - \vartheta \leq c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\vartheta\left(X_{(1)} - c_2 \leq \vartheta \leq X_{(1)} - c_1\right) = 1-a.$

   Δηλαδή το διάστημα $[X_{(1)} - c_2, X_{(1)} - c_1]$ είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ.ε. $1-a$.

   Κατόπιν καθορίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2, έτσι ώστε το Δ.Ε. να είναι ίσων ουρών. Επομένως εργαζόμαστε ως εξής,

   $P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \leq c_2) - P_\vartheta(T < c_1) = 1-a$

$\Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + 1 - P_\vartheta(T \leq c_2) = a \Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + P_\vartheta(T > c_2) = a.$

Επειδή θέλουμε Δ.Ε. ίσων ουρών, πρέπει

$$P_\vartheta(T < c_1) = P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2}.$$

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι,

$P_\vartheta(T > c_2) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{c_2}^{\infty} ne^{-nt}dt \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{n}\ln(a/2)$

και

$P_\vartheta(T < c_1) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{0}^{c_1} ne^{-nt}dt \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{n}\ln(1 - a/2).$

Δηλαδή το διάστημα

$$\left[X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln(a/2), X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln(1 - a/2)\right]$$

είναι ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

2. Για να βρούμε ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος του διαστήματος $[X_{(1)} - c_2, X_{(1)} - c_1]$ για να μπορέσουμε να καθορίσουμε τις σταθερές c_1 και c_2. Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι η μία εξαρτάται από την άλλη, δηλαδή, $c_2 = c_2(c_1)$. Ενώ το μήκος του διαστήματος είναι $l = c_2 - c_1$, το οποίο ελαχιστοποιούμε, ως προς c_1, υπό τον περιορισμό,

   $P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \leq c_2) - P_\vartheta(T \leq c_1) = 1 - a \Leftrightarrow F_T(c_2) - F_T(c_1) = 1 - a \Leftrightarrow f_T(c_2)\dfrac{dc_2}{dc_1} - f_T(c_1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dc_2}{dc_1} = \dfrac{f_T(c_1)}{f_T(c_2)} = \dfrac{ne^{-nc_1}}{ne^{-nc_2}} = e^{n(c_2 - c_1)} > 1$, αφού $c_2 > c_1$.

   Επομένως, $\dfrac{dl}{dc_1} = \dfrac{dc_2}{dc_1} - 1 > 0$, δηλαδή το μήκος αυξάνεται όσο αυξάνεται η τιμή του c_1, οπότε αυτό ελαχιστοποιείται για $c_1 = 0$.

Σε αυτήν την περίπτωση ο περιορισμός μας γίνεται,

$$P_\vartheta(0 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow \int_0^{c_2} ne^{-nt}dt = 1 - a \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{n}\ln a.$$

Τελικά, το διάστημα

$$\left[X_{(1)} + \frac{1}{n}\ln a, X_{(1)}\right]$$

είναι ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Απόδειξη:

1. Κατ' αρχάς πρέπει να βρούμε έναν Ε.Μ.Π. για το ϑ. Από τη λύση της Άσκησης 3.2.3 ($\vartheta_1 = 0$ και $\vartheta_2 = \vartheta$) προκύπτει ότι η στατιστική συνάρτηση $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ είναι Ε.Μ.Π. για το ϑ με πυκνότητα πιθανότητας,

   $f_{X_{(n)}}(x) = n(F_X(x))^{n-1} f_X(x) = n\left(\frac{x}{\vartheta}\right)^{n-1}\frac{1}{\vartheta}$, όταν $x \in (0, \vartheta)$ (βλ. την λύση της Άσκησης 2.2.7).

   Από την μορφή, λοιπόν, της π.π. της $X_{(n)}$ παρατηρούμε ότι αυτή είναι της μορφής $f(x/\vartheta)$, οπότε είναι λογικό να θεωρήσουμε ως πιθανή ποσότητα οδηγό την $T = \frac{X_{(n)}}{\vartheta}$ η οποία περιέχει την άγνωστη παράμετρο, αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι η κατανομή της T δεν περιέχει το ϑ.

   Χρησιμοποιούμε αντίστροφους μετασχηματισμούς,

   $t = \frac{x}{\vartheta} \Rightarrow x = t\vartheta$, επομένως η π.π. της T είναι,

   $f_T(t;\vartheta) = f_X(t\vartheta;\vartheta)\left|\frac{d(t\vartheta)}{dt}\right| = n\left(\frac{t\vartheta}{\vartheta}\right)^{n-1}\frac{1}{\vartheta}\vartheta = nt^{n-1}$ όταν $t \in (0, 1)$.

   Δηλαδή η T είναι μία ποσότητα οδηγός.

   Στη συνέχεια θεωρούμε σταθερές $c_1 < c_2$ τέτοιες ώστε,

   $P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(c_1 \le \frac{X_{(n)}}{\vartheta} \le c_2) = 1 - a$

   $\Leftrightarrow P_\vartheta\left(\frac{X_{(n)}}{c_2} \le \vartheta \le \frac{X_{(n)}}{c_1}\right) = 1 - a.$

   Δηλαδή το διάστημα $\left[\frac{X_{(n)}}{c_2}, \frac{X_{(n)}}{c_1}\right]$ είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ.ε. $1 - a$.

   Κατόπιν καθορίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2, έτσι ώστε το Δ.Ε. να είναι ίσων ουρών. Επομένως εργαζόμαστε ως εξής,

$$P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \le c_2) - P_\vartheta(T < c_1) = 1 - a$$

$$\Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + 1 - P_\vartheta(T \le c_2) = a \Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + P_\vartheta(T > c_2) = a.$$

Επειδή θέλουμε Δ.Ε. ίσων ουρών, πρέπει

$$P_\vartheta(T < c_1) = P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2}.$$

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι,

$$P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow \int_{c_2}^{1} nt^{n-1} dt \Rightarrow c_2 = \left(1 - \frac{a}{2}\right)^{1/n}$$

και

$$P_\vartheta(T < c_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow \int_{0}^{c_1} nt^{n-1} dt \Rightarrow c_1 = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/n}.$$

Δηλαδή το διάστημα

$$\left[\frac{X_{(n)}}{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{\left(\frac{a}{2}\right)^{1/n}}\right]$$

είναι ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

2. Για να βρούμε ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ, πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το μήκος του διαστήματος $\left[\frac{X_{(n)}}{c_2}, \frac{X_{(n)}}{c_1}\right]$ για να μπορέσουμε να καθορίσουμε τις σταθερές c_1 και c_2. Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι η μία εξαρτάται από την άλλη, δηλαδή, $c_2 = c_2(c_1)$. Ενώ το μήκος του διαστήματος είναι $l = X_{(n)}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$, το οποίο ελαχιστοποιούμε, ως προς c_1, υπό τον περιορισμό,

$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1 - a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \leq c_2) - P_\vartheta(T \leq c_1) = 1 - a \Leftrightarrow F_T(c_2) - F_T(c_1) = 1 - a \Leftrightarrow f_T(c_2)\dfrac{dc_2}{dc_1} - f_T(c_1) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dc_2}{dc_1} = \dfrac{f_T(c_1)}{f_T(c_2)} = \dfrac{nc_1^{n-1}}{nc_2^{n-1}} \Rightarrow$

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{c_1^{n-1}}{c_2^{n-1}}. \tag{6.21}$$

Επομένως,

$\dfrac{dl}{dc_1} = X_{(n)}\left(-\dfrac{1}{c_1^2} + \dfrac{dc_2}{dc_1}\dfrac{1}{c_2^2}\right)$, οπότε λόγω της Σχέσης (6.21) προκύπτει ότι

$\dfrac{dl}{dc_1} = X_{(n)}\dfrac{c_1^{n+1} - c_2^{n+1}}{c_2^{n+1}c_1^2} < 0$, αφού $0 < c_1 < c_2$.

Δηλαδή το μήκος μειώνεται όσο αυξάνεται η τιμή του c_1, οπότε αυτό ελαχιστοποιείται όταν το c_1 πάρει την μεγαλύτερη τιμή του.

Όμως από τον περιορισμό μας διαπιστώνουμε ότι,

$P_\vartheta(c_1 \leq T \leq c_2) = 1-a \Rightarrow \displaystyle\int_{c_1}^{c_2} nt^{n-1}dt = 1-a \Rightarrow c_2^n - c_1^n = 1-a \Rightarrow c_1^n = c_2^n + a - 1 \Rightarrow c_1^n \leq 1 + a - 1 \Rightarrow c_1^n \leq a \Rightarrow c_1 \leq a^{1/n}$.

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει η σταθερά c_1, είναι $c_1 = a^{1/n}$ (η οποία αντιστοιχεί στην τιμή $c_2 = 1$) και τότε, όπως προείπαμε, ελαχιστοποιείται το μήκος του τυχαίου διαστήματος.

Τελικά, το διάστημα

$$\left[X_{(n)}, a^{-1/n}X_{(n)}\right]$$

είναι ένα Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

3. Για να βρούμε ένα άνω φράγμα για το ϑ χρησιμοποιούμε την ποσότητα οδηγό που έχουμε βρει, $T = \dfrac{X_{(n)}}{\vartheta}$,

$$P_\vartheta(T \geq c) = 1 - a \Rightarrow P_\vartheta\left(\frac{X_{(n)}}{\vartheta} \geq c\right) = 1 - a \Rightarrow P_\vartheta\left(\vartheta \leq \frac{X_{(n)}}{c}\right) = 1 - a.$$

Επομένως, η σ.σ. $\dfrac{X_{(n)}}{c}$ είναι ένα Α.Φ. για το ϑ, μόνο που πρέπει να καθορίσουμε τη σταθερά c.

$$P_\vartheta(T \geq c) = 1 - a \Rightarrow \int_c^1 nt^{n-1}dt = 1 - a \Rightarrow c = a^{1/n}.$$

Οπότε, η σ.σ. $a^{-1/n}X_{(n)}$ είναι ένα Α.Φ. για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$.

Όσον αφορά το Κ.Φ. εργαζόμαστε κατά παρόμοιο τρόπο,

$$P_\vartheta(T \leq c) = 1 - a \Rightarrow P_\vartheta\left(\frac{X_{(n)}}{\vartheta} \leq c\right) = 1 - a \Rightarrow P_\vartheta\left(\vartheta \geq \frac{X_{(n)}}{c}\right) = 1 - a.$$

Επομένως, η σ.σ. $\dfrac{X_{(n)}}{c}$ είναι ένα Κ.Φ. για το ϑ και απλά καθορίζουμε τη σταθερά c.

$$P_\vartheta(T \leq c) = 1 - a \Rightarrow \int_0^c nt^{n-1}dt = 1 - a \Rightarrow c = (1-a)^{1/n}.$$

Τελικά, η σ.σ. $(1-a)^{-1/n}X_{(n)}$ είναι ένα Κ.Φ. για το ϑ με σ. ε. $100(1-a)\%$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Απόδειξη: Για να βρούμε ένα Δ.Ε. για το ϑ^2, αρκεί να βρούμε ένα Δ.Ε. για το ϑ. Στην Άσκηση 2.2.9 δείξαμε, ουσιαστικά, ότι το τυχαίο δείγμα $|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|$ προέρχεται από την $\mathcal{U}(0, \vartheta)$. Οπότε, σύμφωνα με την λύση της Άσκησης 5.2.5, το διάστημα

$$\left[\frac{|X|_{(n)}}{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^{1/n}}, \frac{|X|_{(n)}}{\left(\frac{a}{2}\right)^{1/n}} \right],$$

όπου $|X|_{(n)} = \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\}$, είναι ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ. ε. $100(1 - a)\%$.

Τελικά, το διάστημα

$$\left[\left(\frac{|X|_{(n)}}{\left(1 - \frac{a}{2}\right)^{1/n}} \right)^2, \left(\frac{|X|_{(n)}}{\left(\frac{a}{2}\right)^{1/n}} \right)^2 \right],$$

όπου $|X|_{(n)} = \max\{|X_1|, |X_2|, \ldots, |X_n|\}$, είναι ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ^2 με σ.ε. $100(1 - a)\%$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.6

Απόδειξη: Αρχικά, πρέπει να βρούμε μια ποσότητα οδηγό. Παρατηρούμε ότι η π.π. της X είναι της μορφής $f(x/\vartheta)$, οπότε είναι λογικό να εξετάσουμε αν η τ.μ. $T = \dfrac{X}{\vartheta}$, η οποία περιέχει την άγνωστη παράμετρο, έχει κατανομή που δεν εξαρτάται από το ϑ. Για να βρούμε την κατανομή της T χρησιμοποιούμε την μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού.

$t = \dfrac{x}{\vartheta} \Rightarrow x = t\vartheta$, επομένως η π.π. της T είναι,

$f_T(t;\vartheta) = f_X(t\vartheta;\vartheta)\left|\dfrac{d(t\vartheta)}{dt}\right| = \dfrac{2}{\vartheta}\left(1-\dfrac{t\vartheta}{\vartheta}\right)\vartheta = 2(1-t)$, όταν $t \in (0,1)$, δηλαδή δεν εξαρτάται από το ϑ, συνεπώς η T είναι ποσότητα οδηγός.

Στη συνέχεια θεωρούμε σταθερές $0 < c_1 < c_2 < 1$ τέτοιες ώστε,

$P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\vartheta(c_1 \le \dfrac{X}{\vartheta} \le c_2) = 1-a$

$\Leftrightarrow P_\vartheta\left(\dfrac{X}{c_2} \le \vartheta \le \dfrac{X}{c_1}\right) = 1-a.$

Δηλαδή το διάστημα $\left[\dfrac{X}{c_2}, \dfrac{X}{c_1}\right]$ είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ. ε. $1-a$.

Κατόπιν καθορίζουμε τις σταθερές c_1 και c_2, έτσι ώστε το Δ.Ε. να είναι ίσων ουρών. Επομένως εργαζόμαστε ως εξής,

$P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \le c_2) - P_\vartheta(T < c_1) = 1-a$

$\Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + 1 - P_\vartheta(T \le c_2) = a \Leftrightarrow P_\vartheta(T < c_1) + P_\vartheta(T > c_2) = a.$

Επειδή θέλουμε Δ.Ε. ίσων ουρών, πρέπει

$$P_\vartheta(T < c_1) = P_\vartheta(T > c_2) = \frac{a}{2}.$$

Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι,

$P_\vartheta(T > c_2) = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{c_2}^{1} 2(1-t)dt = \dfrac{a}{2} \Rightarrow c_2 = 1 \pm \sqrt{\dfrac{a}{2}}.$

Επειδή $0 < c_2 < 1$, επιλέγουμε την λύση $c_2 = 1 - \sqrt{\dfrac{a}{2}}$.

$$P_\vartheta(T < c_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow \int_0^{c_1} 2(1-t)dt = \frac{a}{2} \Rightarrow c_1 = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{a}{2}}.$$

Επειδή $0 < c_1 < 1$, επιλέγουμε την λύση $c_1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{a}{2}}$.

Δηλαδή το διάστημα

$$\left[\frac{X}{1 - \sqrt{\frac{a}{2}}}, \frac{X}{1 - \sqrt{1 - \frac{a}{2}}} \right]$$

είναι ένα Δ.Ε. ίσων ουρών για το ϑ με σ. ε. $1 - a$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.7

Απόδειξη: Επειδή η διαδικασία εύρεσης ποσότητας οδηγού είναι γενικά δύσκολη (κυρίως όσον αφορά την κατανομή), θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.1.6.

Η συνάρτηση κατανομής των X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ υπολογίζεται ότι είναι,

$$F_\partial(x_i) = \begin{cases} 0 & , \quad x_i \leq 0 \\ x_i^\partial & , \quad 0 < x_i < 1 \\ 1 & , \quad x_i \geq 1. \end{cases}$$

Επειδή $0 < x_i < 1$ με πιθανότητα 1, αγνοούμε τους άλλους δύο κλάδους και παίρνουμε μόνο τον μεσαίο. Επομένως η ποσότητα οδηγός θα είναι η τ.μ.

$$T = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_\partial(X_i) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i^\partial = -2\partial \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \sim \mathcal{X}^2_{2n}.$$

Κατόπιν θεωρούμε σταθερές $0 < c_1 < c_2 < 1$ τέτοιες ώστε,

$$P_\partial(c_1 \leq T \leq c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\partial(c_1 \leq -2\partial \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \leq c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\partial\left(\frac{-c_1}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} \leq \partial \leq \frac{-c_2}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right) =$$

$1 - a$, $\forall \partial \in \Theta$.

Δηλαδή το διάστημα $\left[\dfrac{-c_1}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}, \dfrac{-c_2}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}\right]$ είναι Δ.Ε. για το ∂ με σ.ε. $1 - a$.

Το επόμενο βήμα είναι να καθορίσουμε τις τιμές των c_1 και c_2, έτσι ώστε το μήκος του παραπάνω διαστήματος,

$$l = \frac{-c_2}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} - \frac{-c_1}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} = \frac{1}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} l^*, \quad l^* = c_1 - c_2,$$

ή διαφορετικά το l^*, να ελαχιστοποιείται.
Θεωρούμε ότι το c_2 είναι συνάρτηση του c_1, δηλαδή $c_2 = c_2(c_1)$, επομένως προκύπτει ότι,

$$\frac{dl^*}{dc_1} = 1 - \frac{dc_2}{dc_1}. \tag{6.22}$$

Επίσης, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το l^*, υπό τον περιορισμό

$$P_\vartheta(c_1 \le T \le c_2) = 1-a \Leftrightarrow P_\vartheta(T \le c_2) - P_\vartheta(T \le c_1) = 1-a \Leftrightarrow F_T(c_2) - F_T(c_1) = 1-a \Leftrightarrow$$
$$f_T(c_2)\frac{dc_2}{dc_1} - f_T(c_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{dc_2}{dc_1} = \frac{f_T(c_1)}{f_T(c_2)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-c_1/2}}{\frac{1}{2}e^{-c_2/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{dc_2}{dc_1} = e^{(c_2-c_1)/2} > 1\ ,\quad \text{αφού}\ \ c_1 < c_2. \tag{6.23}$$

Από τις Σχέσεις (6.22) και (6.23) προκύπτει ότι το μήκος του διαστήματος είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς c_1, επομένως αυτό παίρνει την ελάχιστη τιμή του, όταν το c_1 παίρνει την μέγιστη, δηλαδή για $c_1 = 1$.
Σ' αυτήν την περίπτωση προκύπτει ότι,

$$P_\vartheta(1 \le T \le c_2) = 1 - a \Rightarrow \int_1^{c_2} \frac{1}{2}e^{-t/2}dt = 1 - a \Rightarrow c_2 = -2\ln(e^{-1/2} + a - 1).$$

Τελικά, το διάστημα

$$\left[\frac{-1}{2\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}, \frac{\ln(e^{-1/2}+a-1)}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}\right]$$

είναι το Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το ϑ με σ.ε. $1 - a$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.8

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 236 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Στο αποτέλεσμα της Άσκησης 5.2.1 θέτουμε όπου $k = 0$, στην κατανομή, $\forall\ k = 1, 2, \ldots, n$, τότε προκύπτει ότι το διάστημα

$$\left[\bar{X} - z_{a/2}\frac{1}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{a/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

είναι Δ.Ε. με σ.ε. $100(1-a)\%$.

Το μήκος αυτού του διαστήματος είναι $l = 2z_{a/2}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε ότι $a = 0.1$, $z_{0.05} = 1.645$, οπότε το μήκος είναι $l = 3.29\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Ψάχνουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του n, για την οποία

$$l \leq \frac{1}{5} \Rightarrow 3.29\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \sqrt{n} \geq 16.45 \Rightarrow n \geq 270.6$$

Επομένως, η ελάχιστη τιμή του n, είναι $n = 271$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.9

Απόδειξη: Ζητάμε την πιθανότητα,

$$P\left(\bar{X} - \frac{8.2}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{8.2}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{8.2}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{8.2}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \leq \frac{8.2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}\right| \leq \frac{8.2}{\sigma}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{8.2}{5}\right) = P(|Z| \leq 1.64)$$

$$= \Phi(1.64) - \Phi(-1.64) = \Phi(1.64) - (1 - \Phi(1.64)) = 2\Phi(1.64) - 1$$

$$= 2 \cdot 0.9495 - 1 = 0.899. \qquad \square$$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.10

Απόδειξη: Αφού το διάστημα $\left[0, c\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$ είναι ένα Δ.Ε. για την $g(\vartheta) = 2\vartheta$ με σ.ε. $1 - \alpha$, έχουμε

$$P\left(0 \leq 2\vartheta \leq c\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2\vartheta}{c}\right) = 1 - \alpha \ (c > 0).$$

Με τη βοήθεια των αναπαραγωγικών ιδιοτήτων συμπεραίνουμε τα εξής,

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες $\sim Gamma(2, \vartheta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Gamma(2n, \vartheta) \Rightarrow T = \frac{2}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{X}^2_{4n}$.

Επομένως, μπορούμε να καθορίσουμε τη σταθερά c, όπως φαίνεται και παρακάτω.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2\vartheta}{c}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\frac{2}{\vartheta}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{2}{\vartheta}\frac{2\vartheta}{c}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(T > \frac{4}{c}\right) = 1 - \alpha.$$

Ισχύει ο ακόλουθος συμβολισμός,

$$\left.\begin{array}{c} P(T > c) = p \\ T \sim \mathcal{X}^2_k \end{array}\right\} \Rightarrow c = \mathcal{X}^2_{k,p}$$

όπου $\mathcal{X}^2_{k,p}$ ονομάζεται το p−ποσοστιαίο σημείο της κατανομής $\mathcal{X}^2_k$.

Οπότε, λόγω του παραπάνω συμβολισμού, προκύπτει ότι,

$$P\left(T > \frac{4}{c}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow \frac{4}{c} = \mathcal{X}^2_{4n,1-\alpha} \Rightarrow c = \frac{4}{\mathcal{X}^2_{4n,1-\alpha}}. \qquad \square$$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.11

Απόδειξη: Επειδή θέλουμε το διάστημα $[0, cX]$ να είναι Δ.Ε. για το ϑ με σ.ε. $100(1-a)\%$, προκύπτει ότι,

$$P(0 \leq \vartheta \leq cX) = 1-a \Leftrightarrow P\left(X > \frac{\vartheta}{c}\right) = 1-a \Leftrightarrow \int_{\vartheta/c}^{\infty} \frac{1}{\vartheta}\, e^{-\frac{x}{\vartheta}} dx = 1-a \Leftrightarrow c = -\frac{1}{\ln(1-a)}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.2.12

Αμερόληπτοι Εκτιμητές
Ασκήσεις
ΑΟΕΔ εκτιμητές
Ασκήσεις
Εκτίμηση με τη μέθοδο...
Ασκήσεις
Εκτιμητές Bayes και...
Ασκήσεις
Διαστήματα Εμπιστοσύνης
Ασκήσεις
Παράρτημα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 240 από 240
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος