Πανεπιστήμιο Αιγαίου
URL: http://www.aegean.gr

Ασκήσεις στην Πραγματική Ανάλυση

Αντώνης Μανουσάκης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ
ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Συμβολισμός

Εάν A είναι ένα σύνολο με $\#A$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του A.

Ανισότητα Minkowski: για κάθε $p \geq 1$ και $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$$

Ένα σύνολο A λέμε ότι είναι (άπειρο) αριθμήσιμο εάν υπάρχει μια απεικόνιση $f : A \to \mathbb{N}$ που είναι $1-1$ και επί.

Κάθε άπειρο υποσύνολο σύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι επίσης αριθμήσιμο σύνολο.

Εάν ένα σύνολο δεν είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο τότε λέμε ότι είναι υπεραριθμήσιμο.

Το σύνολο των ρητών αριθμών είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ που είναι το σύνολο των ακολουθιών με στοιχεία 0 και 1 είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών καθώς επίσης και κάθε διάστημα $[a, b]$ των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

Κεφάλαιο 1

Μετρικές

1.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 1.1.1 *Εάν M είναι ένα μη-κενό σύνολο τότε μετρική στο M είναι μια απεικόνιση $d : M \times M \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες*

M1) $d(x, y) \geq 0$ *για κάθε* $x, y \in M$.

M2) $d(x, y) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = y$.

M3) $d(x, y) = d(y, x)$ *για κάθε* $x, y \in M$.

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *για κάθε* $x, y, z \in M$.

Η ιδιότητα M4) ονομάζεται τριγωνική ανισότητα.

1.2. Ασκήσεις

Άσκηση 1.2.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι*

α) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ *για κάθε* $x, y, z \in X$.

β) $|d(x,y) - d(z,u)| \leq d(x,z) + d(y,u)$ *για κάθε* $x, y, z, u \in X$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.2 *Δείξτε ότι η απεικόνιση* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{i \leq n} |x_i - y_i|$$

είναι μετρική. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.3 *Δείξτε ότι στον* $\mathbb{R}^n$ *για κάθε* $p \geq 1$ *η*

$$d_p((x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

είναι μετρική. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.4 *Δείξτε ότι η* $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ *ορίζει μετρική στον* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.5 *Εάν* $\mathcal{N} = \{0,1\}^n = \{\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) : a_i = 0$ *ή* 1 *για κάθε* $i \leq n\}$ *δείξτε ότι η*

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \#(\{i \leq n : a_i \neq b_i\})$$

ορίζει μετρική στο $\mathcal{N}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.6 *Εάν* S *είναι ένα σύνολο και με* $F(S)$ *συμβολίσουμε τα πεπερασμένα υποσύνολα του* S *να δείξετε ότι η*

$$d(A,B) = \#((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$$

ορίζει μετρική στο $F(S)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.7 *Έστω* $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ *συνεχής*$\}$. *Ορίζουμε για* $f, g \in C([0,1])$

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Δείξτε ότι η $d(\cdot,\cdot)$ *είναι μια μετρική στο* $C([0,1])$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.8 *Δείξτε ότι οι*

$$\text{α)}\quad d(x,y) = |\tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)|, \quad \text{β)}\quad d(x,y) = \tau o\xi\varepsilon\varphi|x-y|$$

είναι μετρικές στο $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.9 *Έστω* (X,d) *μετρικός χώρος. Να δείξετε ότι οι*

$$i) d_1(x,y) = \sqrt{d(x,y)}, \quad ii) d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}, \quad iii) d_3(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

είναι μετρικές στον X. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.10 *Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου* (X,d) *για τον οποίο η* $\bar{d}(x,y) = d(x,y)^2$ *δεν είναι μετρική* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.11 *Έστω* $p \in \mathbb{N}$ *πρώτος αριθμός (μεγαλύτερος της μονάδας). Ορίζουμε την απεικόνιση* $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *ως εξής:*

$$d(n,n) = 0 \quad \text{και} \quad d(m,n) = 1/r \ \text{αν} \ m - n = p^{r-1}k$$

r, k *ακέραιοι και* k *δεν διαιρείται από τον* p. *Δείξτε ότι η* $d(\cdot,\cdot)$ *είναι μετρική στο* $\mathbb{Z}$. **Υπόδειξη-Λύση**

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
➤ Σύνορο συνόλου, Απόσταση από σύνολο
➤ Σημεία Συσσώρευσης
➤ Ισοδύναμες μετρικές
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 5 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Κεφάλαιο 2

Ανοικτά-κλειστά σύνολα

2.1. Στοιχεία θεωρίας

Ορισμός 2.1.1 *Έστω* (X, d) *ένας μετρικός χώρος. Το σύνολο*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \text{ όπου } x \in X \text{ και } r > 0$$

ονομάζεται ανοικτή μπάλα με κέντρο το x *και ακτίνα* r.

Το σύνολο

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \text{ όπου } x \in X \text{ και } r > 0$$

ονομάζεται κλειστή μπάλα με κέντρο το x *και ακτίνα* r.

Ορισμός 2.1.2 *Έστω* (X, d) *ένας μετρικός χώρος*

α) Ένα υποσύνολο U *του* X *ονομάζεται ανοικτό αν για κάθε* $x \in U$ *υπάρχει* $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ *ώστε* $B(x, \varepsilon) \subset U$.

β) Ένα υποσύνολο F του X ονομάζεται κλειστό αν το συμπλήρωμα του $X \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο.

Ορισμός 2.1.3 *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$.*

α) Εσωτερικό του συνόλου A, που συμβολίζεται με A^o είναι το σύνολο

$$A^o = \{x \in A : \textit{υπάρχει } r > 0 \textit{ ώστε } B(x, r) \subset A\}$$

β) Κλειστότητα του A, συμβολίζεται με $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X που περιέχει το A.

Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς ότι

α) ένα σύνολο A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A = A^o$

β) ένα F είναι κλειστό αν και μόνο αν $F = \overline{F}$.

γ) εάν A_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι ανοικτά τότε και το σύνολο $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι ανοικτό.

δ) εάν F_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστά τότε και το σύνολο $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι κλειστό.

Από τους ορισμούς είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα διαστήματα (a, b),$(a, +\infty)$ και $(-\infty, a)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και επομένως τα $[a, b]$, $a < b$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 2.1.4 *Ένα υποσύνολο F ενός μετρικού χώρου ονομάζεται πυκνό αν $\overline{F} = X$.*

Ένα υποσύνολο F ενός μετρικού χώρου ονομάζεται πουθενά πυκνό αν $(\overline{F})^o = \emptyset$.

2.2. Ασκήσεις

2.2.1. Ανοικτά-Κλειστά σύνολα

Άσκηση 2.2.1 *Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα του $(\mathbb{R}^2, d)$ όπου $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ είναι κλειστά*

α) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$

β) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$
γ) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.2 *Εάν* (X, d) *μετρικός χώρος δείξτε ότι για κάθε* $a \in X$ *και κάθε* $x \in B(a, \rho)$,

$$B(x, \rho - d(x, a)) \subset B(a, \rho).$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.3 *Δείξτε ότι ένα σύνολο* U *σ' ένα μετρικό χώρο είναι ανοικτό αν και μόνο αν είναι ένωση ανοικτών μπαλών.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.4 *Δείξτε ότι στο* $\mathbb{R}$ *εφοδιασμένο με την απόλυτη τιμή ισχύει*

α) $\mathbb{Q}^o = \emptyset$, β) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^o = \emptyset$, γ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

και επομένως το $\mathbb{Q}$ *δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.5 *Δείξτε ότι το σύνολο* $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ *δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.6 α) *Έστω* $U_1, \ldots, U_k$ *ανοικτά σύνολα στον μετρικό χώρο* (X, d). *Δείξτε ότι η* $\cap_{i=1}^k U_i$ *είναι ανοικτό σύνολο.*

β) *Έστω* $F_1, \ldots, F_k$ *κλειστά σύνολα στον μετρικό χώρο* (X, d). *Δείξτε ότι η* $\cup_{i=1}^k F_i$ *είναι κλειστό σύνολο.*

γ) *Δώστε παράδειγμα μιας ακολουθίας ανοικτών συνόλων* $(U_n)_{n=1}^\infty$ *του* $\mathbb{R}$ *για την οποία η* $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ *δεν είναι ανοικτό σύνολο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.7 α) *Δείξτε ότι αν το σύνολο* A *είναι ανοικτό στον μετρικό χώρο* (X, d) *τότε* $A \subset (\overline{A})^o$.

β) *Δείξτε ότι αν το σύνολο* C *είναι κλειστό στον μετρικό χώρο* (X, d) *τότε* $C \supset \overline{C^o}$.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.2.8 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $F \subset X$.

α) Δείξτε ότι το $F \subset X$ είναι κλειστό αν και μόνο για κάθε $x \in X$ με $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $x \in F$.

β) Δείξτε ότι $x \in \overline{F}$ αν και μόνο αν $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.9 Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο σ' ένα μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.10 Έστω A μη-κενό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C = \{x \in \overline{A} : \text{υπάρχει ένα } \varepsilon > 0 \text{ ώστε } (x, x + \varepsilon) \cap A = \emptyset\}$$

είναι αριθμήσιμο σύνολο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.11 Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την μετρική της απόλυτης τιμής και $U \subset \mathbb{R}$ ανοικτό σύνολο.

α) Για κάθε $x \in U$ θέτουμε I_x να είναι η ένωση όλων των ανοικτών διαστημάτων που περιέχουν το x και περιέχονται στο U. Δείξτε ότι το I_x είναι ανοικτό διάστημα.

β) Δείξτε ότι αν $x, y \in U$ και $x \neq y$ τότε είτε $I_x = I_y$ είτε $I_x \cap I_y = \emptyset$.

γ) Δείξτε ότι το U είναι η ένωση αριθμήσιμου το πολύ το πλήθος ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.12 Αποδείξτε ότι $(X \setminus A)^o = X \setminus \overline{A}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.13 Έστω (X, d) μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. Το A είναι πουθενά πυκνό.
2. Το σύνολο $(X \setminus A)^o$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.
3. Για κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο C υπάρχουν $x \in C$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Υπόδειξη-Λύση

2.3. Σύνορο συνόλου, Απόσταση από σύνολο

2.3.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 2.3.1 *Εάν* (X, d) *μετρικός χώρος και* $B \subset X$. *Ένα σημείο* $x \in X$ *ονομάζεται συνοριακό σημείο του* B *αν* $x \in \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$. *Τα συνοριακά σημεία του* B *τα συμβολίζουμε με* $\mathrm{Bd}\, B$.

Ορισμός 2.3.2 *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος,* $x \in X$ *και* $A \subset X$ *διάφορο του κενού Απόσταση του* x *από το* A*, συμβολίζεται με* $\mathrm{dist}(x, A)$ *ορίζουμε να είναι*

$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}. \tag{2.1}$$

2.3.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.3 *α) Εάν* $\mathrm{Bd}\, B \subset A \subset B$ *δείξτε ότι* $\mathrm{Bd}\, B \subset \mathrm{Bd}\, A$.
β) $A^o \cup \mathrm{Bd}\, A = \overline{A}$. ***Υπόδειξη-Λύση***

Άσκηση 2.3.4 *Δείξτε ότι*

α) $\mathrm{Bd}(\overline{A}) \subset \mathrm{Bd}(A)$

β) $\mathrm{Bd}(A^0) \subset \mathrm{Bd}(A)$

Δώστε παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ *που η σχέση του περιέχεστε είναι γνήσια.* ***Υπόδειξη-Λύση***

Άσκηση 2.3.5 *Δείξτε ότι*
α) $\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)) \subset \mathrm{Bd}(A)$
β) $\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))) = \mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))$. ***Υπόδειξη-Λύση***

Άσκηση 2.3.6 *Εάν* (X, d) *μετρικός χώρος και* $A \subset X$ *δείξτε ότι* $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$.
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.3.7 *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία. Να βρεθούν υποσύνολα* A, B *του* X *ώστε* $\mathrm{diam}(A \cup B) \geq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$, **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.3.8 *α) Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος,* $x \in X$ *και* A, B *μη κενά υποσύνολα του* X *ώστε* $A \subset B$. *Δείξτε ότι*

$$\mathrm{dist}(x, B) \leq \mathrm{dist}(x, A) \leq \mathrm{dist}(x, B) + \mathrm{diam}(B).$$

β) Δώστε παράδειγμα δύο υποσυνόλων A, B *του* $\mathbb{R}$ *με* $A \subset B$ *και ενός* $x \in \mathbb{R}$ *ώστε*

$$\mathrm{dist}(x, A) > \mathrm{dist}(x, B) + \mathrm{diam}(B \setminus A).$$

Υπόδειξη-Λύση

2.4. Σημεία Συσσώρευσης

2.4.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 2.4.1 *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος και* $A \subset X$.
α) Ένα $x \in X$ *ονομάζεται οριακό σημείο ή σημείο συσσώρευσης του* A *αν* $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. *Τα οριακά σημεία του* A *τα συμβολίζουμε με* $\mathrm{acc}(A)$.
β) Ένα $x \in A$ *ονομάζεται μεμονωμένο σημείο του* A *εάν υπάρχει περιοχή* $U(x)$ *του* x *ώστε* $U(x) \cap A = \{x\}$. *Τα μεμονωμένα σημεία τα συμβολίζουμε με* $\mu\varepsilon\mu(A)$.

2.4.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.2 *Εάν* (X, d) *μετρικός χώρος και* $A \subset X$ *δείξτε ότι αν* $x \in \mathrm{acc}(A)$ *τότε κάθε περιοχή του* x *περιέχει άπειρα σημεία του* A. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.4.3 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Δείξτε ότι $\overline{A} = acc(A) \cup \mu\varepsilon\mu(A)$.*
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.4.4 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Δείξτε ότι $\mu\varepsilon\mu(A) = A \setminus \mathrm{acc}(A)$.*
Υπόδειξη-Λύση

2.5. Ισοδύναμες μετρικές

2.5.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 2.5.1 *Έστω X ένα σύνολο και d, ρ δύο μετρικές στο X. Οι d, ρ ονομάζονται ισοδύναμες αν ισχύει ότι οι μετρικοί χώροι (X,d) και (X,ρ) έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα, δηλαδή ένα υποσύνολο $U \subset X$ είναι ανοικτό ως προς την μετρική d αν και μόνο αν είναι ανοικτό ως προς την ρ.*

2.5.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.5.2 *Εάν d, ρ είναι δύο μετρικές στο σύνολο X τέτοιες ώστε υπάρχουν θετικοί αριθμοί $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$md(x,y) \leq \rho(x,y) \leq Md(x,y) \quad \text{για κάθε } x,y \in X \tag{2.2}$$

δείξτε ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.5.3 *Δείξτε ότι οι μετρικές των Ασκήσεων 1.2.2, 1.2.3 είναι ισοδύναμες.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.5.4 *Εάν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος δείξτε ότι η μετρική $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ (δες άσκηση 1.2.9) είναι ισοδύναμη με την d.* **Υπόδειξη-Λύση**

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
➤ Σύνορο συνόλου, Απόσταση από σύνολο
➤ Σημεία Συσσώρευσης
➤ Ισοδύναμες μετρικές
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◂◂ ▸▸
◂ ▸
Σελίδα 12 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 2.5.5 *Εάν d, ρ είναι δυο μετρικές στο σύνολο X ώστε υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί m, M, δ ώστε*

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow md(x,y) \leq \rho(x,y) \leq Md(x,y) \tag{2.3}$$

δείξτε ότι είναι ισοδύναμες **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.5.6 *Δείξτε ότι οι μετρικές $d(x,y) = |x-y|$, $\rho(x,y) = τοξεφ|x-y|$ είναι ισοδύναμες μετρικές στο $\mathbb{R}$, αλλά δεν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $d(x,y) \leq M\rho(x,y)$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 3

Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

3.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 3.1.1 *Μία ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *σ' ένα μετρικό χώρο* (X, d) *συγκλίνει σ' ένα* $x \in X$ *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$.

Ορισμός 3.1.2 *'Εστω* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο* (X, d). *'Εστω* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία φυσικών αριθμών με* $n_k < n_{k+1}$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Τότε η ακολουθία* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *ονομάζεται υπακολουθία της* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 3.1.3 *Μία ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *σ' ένα μετρικό χώρο* (X, d) *ονομάζεται Cauchy εάν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *για κάθε* $n, m \geq n_0$.

Ορισμός 3.1.4 *'Ενας μετρικός χώρος* (X, d) *ονομάζεται πλήρης αν κάθε Cauchy ακολουθία στον* (X, d) *είναι συγκλίνουσα.*

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 14 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένος με την απόλυτη τιμή είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε σε πολλές ασκήσεις τον χώρο $C([a,b])$ εφοδιασμένο με την μετρική

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Η μετρική αυτή ονομάζεται ομοιόμορφη μετρική. Στις ασκήσεις θα θεωρούμε τον χώρο $C([a,b])$ εφοδιασμένο με την ομοιόμορφη μετρική εκτός και αν αναφέρουμε ρητώς μια άλλη μετρική.

3.2. Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.1 *Εάν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια Cauchy ακολουθία στον (X,d) και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της που συγκλίνει, δείξτε ότι και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο ίδιο όριο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.2 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι $x \in \overline{F}$ αν και μόνο αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του F με $\lim d(x_n, x) = 0$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.3 *Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,d) και $x_0 \in X$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m > n$ ώστε $x_m \in B(x_0, \varepsilon)$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει στο x_0.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.4 *Έστω d, ρ δύο μετρικές σε ένα σύνολο X. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α) Οι d, ρ είναι ισοδύναμες

β) μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς την d αν και μόνο αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς την ρ. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.5 *Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,d) ώστε οι υπακολουθίες $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.6 *Εάν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθίες σε ένα μετρικό χώρο (X, d) δείξτε ότι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $a_n = d(x_n, y_n)$ είναι συγκλίνουσα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.7 *Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X με $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$ συγκλίνει.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.8 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και D υποσύνολο του X ώστε $\overline{D} = X$. Δείξτε ότι αν κάθε Cauchy ακολουθία στοιχείων του D συγκλίνει τότε ο (X, d) είναι πλήρης.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.9 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

1. *Ο X είναι πλήρης.*
2. *Για κάθε φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών συνόλων $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ ισχύει ότι $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Ιδιαίτερα η $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ είναι μονοσύνολο.*

Υπόδειξη-Λύση

Στην επόμενη άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε την ορισμό της συνεχούς συνάρτησης

Ορισμός 3.2.10 *Μια συνάρτηση $F : (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$.*

Άσκηση 3.2.11 *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι. Εάν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων από τον X στον Y και $f : X \to Y$ ώστε $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$, δείξτε ότι η f είναι συνεχής.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.12 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο $(C(X), d_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.13 *Δείξτε ότι ο* $C^1[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ *έχει συνεχή παράγωγο*$\}$ *εφοδιασμένος με την μετρική*

$$d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t) - g'(t)|$$

είναι πλήρης μετρικός χώρος. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.14 *Στον* $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f$ *συνεχής*$\}$ *θεωρούμε τη μετρική* $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$. *Δείξτε ότι ο* $(C([0,1]), d)$ *δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος .* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.15 *Δείξτε ότι στο σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών η* $d(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ *είναι μετρική και το* $\mathbb{N}$ *εφοδιασμένο με αυτή την μετρική δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.16 *Δείξτε ότι ο* $\mathbb{R}$ *με την μετρική*

$$d(x,y) = |\text{τοξεφ}(x) - \text{τοξεφ}(y)|$$

δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Κεφάλαιο 4

Διαχωρισιμότητα

4.1. Ορισμοί- Θεωρήματα

Ορισμός 4.1.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο D του X ονομάζεται πυκνό στον X εάν $\overline{D} = X$.*

Εάν A ένα υποσύνολο του X τότε ένα B υποσύνολο του X ονομάζεται πυκνό ως προς το A εάν $A \subset \overline{B}$.

Ορισμός 4.1.2 *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται διαχωρίσιμος εάν υπάρχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του.*

Ο μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, όπου $|\cdot|$ η απόλυτη τιμή είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος εφόσον $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ορισμός 4.1.3 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα στοιχείο $x \in X$ είναι σημείο συμπύκνωσης του $A \subset X$ αν κάθε περιοχή του περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία του A. Συμβολίζουμε με $Ac(A)$ τα σημεία συμπύκνωσης του A.*

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1.4 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του. Δείξτε ότι για κάθε ανοικτό σύνολο U ισχύει ότι $\overline{U \cap D} = \overline{U}$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.5 *Έστω (X,d) διαχωρίσιμος μετρικός και $(U_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια από μη κενά ανοικτά και ξένα ανά δύο υποσύνολα του. Δείξτε ότι τα σύνολα είναι U_i, $i \in I$ είναι το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.6 *Έστω $\mathcal{B} = \{f : [a,\beta] \to \mathbb{R} : f$ φραγμένη$\}$. Στο σύνολο $\mathcal{B}$ θεωρούμε την μετρική*

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,\beta]\}.$$

Δείξτε ότι $(\mathcal{B}, d_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.7 *Δείξτε ότι αν (X,d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος τότε υπάρχει ένα αριθμήσιμο το πλήθος σύνολο από ανοικτά υποσύνολα του $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ώστε για κάθε ανοικτό σύνολο G και κάθε $x \in G$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_n \subset G$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.8 *Δείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του πληθάριθμου του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.9 *Δείξτε ότι αν (X,d) είναι μετρικός χώρος με την ιδιότητα κάθε άπειρο σύνολο να έχει οριακό σημείο τότε ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.10 *Έστω (X,d) μετρικός χώροςκαι $A \subset X$. Αποδείξτε*

α) ότι το σύνολο σημείων συμπύκνωσης $Ac(A)$ του A είναι κλειστό.

β) $Ac(A \cup B) = Ac(A) \cup Ac(B)$ για κάθε $A, B \subset X$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.1.11 *Έστω (X,d) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι*

α) Εάν $A \subset X$ το οποίο δεν έχει σημεία συμπύκνωσης δείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

β) Δείξτε ότι το σύνολο $A \cap (X \setminus Ac(A))$ είναι το πολύ αριθμήσιμο και ότι $Ac(A) = Ac(Ac(A))$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.1.12 *Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μια τυχαία συνάρτηση. Λέμε ότι η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in X$ ένα υπάρχει μια περιοχή U του x_0 ώστε $f(x_0) > f(x)$ για κάθε $x \in U, x \neq x_0$. Έστω M το σύνολο των σημείων του X στα οποία η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο. Δείξτε ότι το M είναι το πολύ αριθμήσιμο.*
Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 4.1.13 *α) Έστω G μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο είναι κλειστό στην πρόσθεση και το αντίθετο στοιχείο,δηλαδή αν $x, y \in G$ τότε $x + y \in G, -x \in G$. Τότε*

είτε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$

είτε το G είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x < y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $g \in G$ με $x < g < y$.

β) Δείξτε ότι σύνολο $\{συν(n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$ δηλαδή $\overline{\{συν(n) : n \in \mathbb{N}\}} = [0, 1]$.
Υπόδειξη-Λύση

Κεφάλαιο 5

Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

5.1. Στοιχεία Θεωρίας

Ορισμός 5.1.1 *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής στο σημείο $x \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x, y \in X \text{ με } d(x, y) < \delta.$$

Λέμε ότι η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Θεώρημα 5.1.2 *Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι και $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

ι) Η f είναι συνεχής.

ii) *Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του Y το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό.*

iii) *Για κάθε κλειστό υποσύνολο F του Y το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.*

Ορισμός 5.1.3 *Έστω $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων από τον X στον Y. Λέμε ότι οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής στο $x \in X$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon \text{ για κάθε } y \in X \text{ με } d(x,y) < \delta \text{ και κάθε } f \in \mathcal{F}.$$

Λέμε ότι οι οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχής αν είναι ισοσυνεχής για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 5.1.4 *Εάν $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $f_n : X \to Y$ μια ακολουθία συναρτήσεων λέμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f : X \to Y$ εάν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$\rho(f_n(x),f(x)) < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } x \in X$$

Ορισμός 5.1.5 *Εάν $(X,d),(Y,\rho)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon \text{ για κάθε } x,y \in X \text{ με } d(x,y) < \delta.$$

Αποδεικνύεται ότι αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Στο Κεφάλαιο 6 θα δείξουμε ότι αυτό ισχύει γενικότερα, δες Άσκηση 6.1.27

Ορισμός 5.1.6 *Μια συνάρτηση $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ ονομάζεται συστολή εάν υπάρχει $\vartheta \in (0,1)$ ώστε*

$$\rho(f(x),f(y)) \leq \vartheta d(x,y) \text{ για κάθε } x,y \in X.$$

Στην Άσκηση 5.1.33 Θα δείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση συστολής $f : (X,d) \to (X,d)$ υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = x$.

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1.7 *Θεωρούμε τον μετρικό χώρο* $(C([0,1]), d_\infty)$. *Δείξτε ότι η απεικόνιση* $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ *με* $F(f) = \int_0^1 f(x)dx$ *είναι συνεχής.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.8 *Έστω* $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ *μια συνάρτηση. Δείξτε ότι η* f *είναι συνεχής στο* x_0 *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *με* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ *ισχύει ότι* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(x_0)) = 0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.9 *Δείξτε ότι μια* $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ *είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε* $A \subset X$ *ισχύει*

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.1.10 *Στον* $\mathbb{R}^n$ *θεωρούμε την μετρική της Άσκησης 1.2.3. Δείξτε ότι για κάθε* $j = 1, \ldots, n$ *η απεικόνιση* $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *με τύπο* $p_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j$ *είναι συνεχής.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.11 *Έστω* (X,d) *είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και* $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ *συνεχής. Δείξτε ότι το σύνολο* $f(X)$ *είναι διαχωρίσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.12 *Έστω* (X,d) *μετρικός χώρος και* $K \subset X$ *υποσύνολο του.*

α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ *με*

$$f(x) = \operatorname{dist}(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\},$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Δείξτε ότι το K *είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε* $x \in X$ *με* $\operatorname{dist}(x,K) = 0$ *ισχύει ότι* $x \in K$. **Υπόδειξη-Λύση**

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 5.1.13 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος.*

α)Δείξτε ότι για κάθε κλειστό σύνολο F υπάρχει μια ακολουθία ανοικτών συνόλων $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

β) Δείξτε για κάθε ανοικτό σύνολο G υπάρχει μια ακολουθία κλειστών συνόλων $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $G = \cup_{n\in N} F_n$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.14 *Έστω (X,d) μετρικός χώροςκαι A, B κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με $f_{|A} = 0$ και $f_{|B} = 1$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.15 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων από τον X στο $\mathbb{R}$. Εάν το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ δείξτε ότι η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ είναι συνεχής.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.16 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος, (Y,ρ) μετρικός και $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ συνεχής συνάρτηση. Εάν $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστά υποσύνολα του X με $\lim\limits_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ δείξτε ότι $f(\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \cap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.17 *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x, x \in D = (0,+\infty)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο D.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.18 *Δείξτε ότι αν η $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε για κάθε Cauchy ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X ισχύει ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον Y.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.19 *Έστω (X,d) μετρικός χώρος ώστε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.20 *Βρείτε ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχής*

α) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
β) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$
γ) $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.21 α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\frac{1}{x})$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.22 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.23 Εάν $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής δείξτε ότι το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχει. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.24 Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και ομοιομορφισμός δηλαδή, 1-1, επί και η f^{-1} ομοιόμορφα συνεχής. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.25 Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων στον $C(X)$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$D = \{x \in X : \text{η ακολουθία } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι Cauchy}\}$$

είναι κλειστό. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.26 *Έστω* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, n = 1, 2 \dots,$ *μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων,* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ώστε* $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ *και* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών στο* $[a,b]$ *με* $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.1.27 *α) Έστω* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στον μετρικό χώρο* (X,d) *η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f. *Δείξτε ότι αν* $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

β) Εάν $f_n = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2 x + 2n & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & 2/n \le x \le 1 \end{cases}$ *δείξτε ότι* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ *για κάθε* $x \in [0,1]$ *και* $\lim_{n\to\infty} f_n(1/n) \neq 0$. *Αυτό μας δείχνει ότι η υπόθεση* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα στο α) ερώτημα δεν μπορεί να παραλειφθεί.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.1.28 *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση και για* $n \in \mathbb{N}$ *ορίζουμε τη συνάρτηση* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$, *όπου* $[a]$ *το ακέραιο μέρος του του αριθμού* a. *Δείξτε ότι η ακολουθία* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.1.29 *Έστω* $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *με* $f_n(x) = \text{τοξεφ}(nx)$. *Δείξτε ότι για κάθε* $a > 0$ *η ακολουθία* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[a, +\infty)$ *ενώ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[0, +\infty)$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.1.30 *Στον $C([0,1])$ θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου*

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x\in[0,1]\setminus[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}]\\ 2^{n+2}(x-\frac{1}{2^{n+1}}) & \text{αν } x\in[\frac{1}{2^n+1},\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}]\\ -2^{n+2}x+4 & \text{αν } x\in[\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}},\frac{1}{2^n}]\end{cases}$$

δείξτε ότι

α) Για κάθε $x\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$.

β) $d_\infty(f_n,f_m)=1$ για κάθε $m\neq n$.

γ) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.31 *Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f_n(t)=n^2t(1-t)^n$. Δείξτε ότι*

α) για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(t)=0$

β) η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f=0$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.32 *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε*

$$|f(x)|\leq a\|x\|_{\ell_2}+b \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^n.$$

όπου για $x=(x_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_{\ell_2}=(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.33 *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. και $f:(X,d)\to(X,d)$ συνάρτηση συστολής. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x\in X$ ώστε $f(x)=x$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.34 *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x=\text{συν}(x)-2$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $I=[-1.5,-0.5]$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.35 *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{2x+3}{3x+2}$ είναι συστολή αλλά δεν υπάρχει $x\in[2,+\infty)$ με $f(x)=x$. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τέτοιο x.* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 6

Συμπάγεια

6.1. Στοιχεία Θεωρίας

Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος.

Ορισμός 6.1.1 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A είναι ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in A$ ώστε $A \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

Ορισμός 6.1.2 *Μια οικογένεια $(U_i)_{i \in I}$ από υποσύνολα του X ονομάζεται ανοικτή κάλυψη του X αν*

ι) για κάθε $i \in I$ το U_i είναι ανοικτό υποσύνολο του (X, d)

ιι) $X = \cup_{i \in I} U_i$.

Μια ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i \in I}$ είναι αριθμήσιμη αν το σύνολο I είναι το $\mathbb{N}$. Μια ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i \in I}$ είναι πεπερασμένη αν το σύνολο I είναι πεπερασμένο.

Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται συμπαγής αν για κάθε ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i \in I}$ του X υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψή της, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο

F του I ώστε $X = \cup_{i\in F} U_i$.

Ορισμός 6.1.3 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο K του X είναι συμπαγές αν είναι συμπαγές στη σχετική τοπολογία.*

Θεώρημα 6.1.4 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος.*

α) Κάθε συμπαγές υποσύνολο του X είναι κλειστό.

β) Κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς υποσυνόλου είναι συμπαγές.

Απόδειξη:) Έστω K συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d). Θα δείξουμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοικτό και έτσι θα έχουμε ότι το K είναι κλειστό.

Έστω $x \in X \setminus K$. Τότε για κάθε $y \in K$ έχουμε ότι $\varepsilon_y = d(x, y) > 0$. Για κάθε y παίρνουμε τη μπάλα $V_y = B(y, \varepsilon_y/4) \cap K$. Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $y \in K$

$$B(y, \varepsilon_y/4) \cap B(x, \varepsilon_y/4) = \emptyset. \tag{6.1}$$

Η οικογένεια $(V_y)_{y\in K}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του K και επειδή K συμπαγές σύνολο έχουμε ότι υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in K$ ώστε

$$K = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n} = (B(y_1, \varepsilon_y/4) \cup \cdots \cup B(y_n, \varepsilon_y/4)) \cap K.$$

Εάν θέσουμε $U = \cap_{i=1}^{n} B(x, \varepsilon_{y_i}/4)$ τότε έχουμε ότι το U είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x και $U \cap K = \emptyset$. Πράγματι αν $z \in U \cap K$ τότε θα έχουμε ότι $x \in U \cap (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n})$ που είναι άτοπο από την (6.1).

Έτσι έχουμε ότι $x \in U \subset X \setminus K$ και άρα το $X \setminus K$ είναι ανοικτό.

β) Έστω K συμπαγές υποσύνολο του X και F κλειστό υποσύνολο του K.

Εάν $(U_i)_{i\in I}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του F τότε η οικογένεια $(K \setminus F), (U_i)_{i\in I}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του K. Επειδή K συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο L του I ώστε $K = \cup_{i\in L} \cup (K \setminus F)$. Είναι άμεσο ότι $F \subset \cup_{i\in L} U_i$ και επομένως το F είναι συμπαγές. □

Θεώρημα 6.1.5 *Δείξτε ότι αν (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι συνεχής τότε το σύνολο $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη: Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του $f(X)$. Τότε τα σύνολα $f^{-1}(U_i)$, $i \in I$ είναι ανοικτά και $X \subset \cup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$. Επειδή X συμπαγής έχουμε ότι υπάρχει F πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $X \subset \cup_{i\in F} f^{-1}(U_i) \Rightarrow f(X) \subset \cup_{i\in F} U_i$. Επομένως η $(U_i)_{i\in F}$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ και άρα $f(X)$ συμπαγές υποσύνολο του Y. □

Ορισμός 6.1.6 *Έστω (X, d) ο μετρικός χώρος. Μια οικογένεια υποσυνόλων $(F_i)_{i\in I}$ του X έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο G του I ισχύει ότι $\cap_{i\in G} F_i \neq \emptyset$.*

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1.7 *Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{R}^2$ είναι συμπαγή.*

$$i) A = [0, 1), \qquad ii) A = [0, +\infty)$$
$$iii) A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \qquad iv) A = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 1\}$$
$$v) A = \{x, y) : |x| + |y| \leq 1\} \qquad vi) A = \{x, y) : x^2 + 2y^2 > 1\}$$
$$vii) A = \{(x, y) : x \geq 1, 0 \leq y \leq 1/x\}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 6.1.8 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία που συγκλίνει στο $x \in X$. Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.* **Υπόδειξη-Λύση**

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
➤ Σύνορο συνόλου, Απόσταση από σύνολο
➤ Σημεία Συσσώρευσης
➤ Ισοδύναμες μετρικές
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 30 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 6.1.9 *Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) με την ιδιότητα το $A \cap K$ να είναι κλειστό για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.10 *Δείξτε ότι αν A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του (X, d) και $B \subset A$ τότε το B είναι ολικά φραγμένο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.11 *Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο (X, d) και $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

α) Δείξτε ότι αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy τότε το σύνολο A είναι ολικά φραγμένο.

β) Εάν το A είναι ολικά φραγμένο δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει Cauchy υπακολουθία. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.12 *Δείξτε ότι ένας ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.13 *Έστω K υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d) με την ιδιότητα κάθε ακολουθία στοιχειών του K να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δείξτε ότι το K είναι ολικά φραγμένο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.14 *Δείξτε ότι για ένα μετρικό χώρο (X, d) τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

1. *Ο (X, d) είναι συμπαγής.*
2. *Κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*
3. *Ο (X, d) είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 6.1.15 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $\{F_i : i \in I\}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ισχύει ότι $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.16 *Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε για κάθε $F \subset X$ συμπαγές ισχύει ότι η $f_{|F}$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.17 *Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 6.1.14 δώστε μια διαφορετική απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος:*

Αν (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι συνεχής τότε το σύνολο $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.18 *Δείξτε ότι αν (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ ώστε*

$$f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in X\}, \quad f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Στην επόμενη άσκηση θα δείξουμε ότι κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές σύνολο.

Άσκηση 6.1.19 *Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών και $(U_i)_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$. Δείξτε ότι*

α) Εάν $[a, b] = I_{0,1} \cup I_{0,2}$ όπου $I_{0,1} = [a, c]$, $c = \frac{a+b}{2}$ και $I_{0,2} = [c, b]$ τότε δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα $I_{0,1}, I_{0,2}$.

β) Έστω I_1 το διάστημα του α) ερωτήματος για το οποίο η $(U_i)_{i\in I}$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη και c_1 είναι το μέσο του.

Δείξτε ότι αν $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2}$ όπου $I_{1,1} = [\min I_1, c_1]$, $I_{1,2} = [c_1, \max I_1]$ τότε δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα $I_{1,1}, I_{1,2}$. Ονομάστε I_2 αυτό το διάστημα.

γ) *Επαναλάβετε επαγωγικά τα βήματα α), β) ώστε να παράγεται μια ακολουθία διαστημάτων* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *έτσι ώστε*

γ1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$

γ2) *αν* $I_n = [a_n, b_n]$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

γ3) *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της* $(U_i)_{i\in I}$ *για κανένα από τα* I_n.

δ) *Δείξτε ότι υπάρχει* $x_0 \in [a, b]$ *ώστε* $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

ε) *Δείξτε ότι υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *και* U_i *ώστε* $[a_n, b_n] \subset U_i$ *για κάθε* $n \geq n_0$ *και συμπεράνετε ότι έτσι έχουμε άτοπο.*

Από τα βήματα α)-ε) συμπεράνετε ότι κάθε διάστημα $[a, b]$ *είναι συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.20 *Δείξτε ότι αν* A *είναι μη-συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *τότε υπάρχει* $f : A \to \mathbb{R}$ *συνεχής και μη φραγμένη συνάρτηση.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.21 *Δείξτε ότι αν* A *είναι μη-συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *τότε υπάρχει* $f : A \to \mathbb{R}$ *συνεχής και φραγμένη τέτοια ώστε δεν υπάρχουν* $x_1, x_2 \in A$ *ώστε* $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in A\}$ *και* $f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in A\}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.22 *Έστω* (X, d) *συμπαγής μετρικός χώρος και* $f : X \to X$ *συνεχής ώστε* $f(x) \neq x$ *για κάθε* $x \in X$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *ώστε* $d(f(x), x) \geq \varepsilon$ *για κάθε* $x \in X$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.23 *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος. Για κάθε* $H, K \subset X$ *θέτουμε*

$$d(K, H) = \inf\{\mathrm{dist}(x, H) : x \in K\}.$$

α) Δείξτε ότι αν K συμπαγές υποσύνολο του X και H κλειστό σύνολο τότε

$$d(K, H) = 0 \text{ αν και μόνο αν } H \cap K \neq \emptyset.$$

β) Εάν τα H, K είναι συμπαγή και ξένα δείξτε ότι υπάρχουν U, V ανοικτά και ξένα σύνολα ώστε $K \subset U$ και $H \subset V$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.24 Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος $f : X \to X$ συνάρτηση ώστε $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Αποδείξτε ότι η f είναι επί. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.25 Έστω $(F_a)_{a\in I}$ μια οικογένεια από κλειστά υποσύνολα σε ένα μετρικό χώρο, με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής ώστε ένα από αυτά να είναι συμπαγές. Δείξτε ότι η τομή τους $\cap_{a\in I} F_a$, είναι μη κενό σύνολο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.26 Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων στον X. Εάν το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ δείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.27 Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος.

α) Δείξτε ότι μια συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχείς δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x, y \in \text{ με } d(x, y) < \delta \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 6.1.28 Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων από τον X στο $\mathbb{R}$. Εάν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον $(C(X), d_\infty(,\cdot,))$ δείξτε ότι οι συναρτήσεις f_n, $n = 1, \ldots$ είναι ισοσυνεχείς και ομοιόμορφα φραγμένες. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 6.1.29 *Έστω* (X, d) *συμπαγής μετρικός χώρος και* f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ *συναρτήσεις με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Εάν η f *είναι συνεχής δείξτε ότι η ακολουθία* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f. ***Υπόδειξη-Λύση***

Κεφάλαιο 7

Συνεκτικότητα

7.1. Στοιχεία Θεωρίας

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $Y \subset X$. Διαμέριση του Y είναι ένα ζεύγος ξένων υποσυνόλων A, B του X ώστε $A \cup B = Y$, $A \cap Y \neq \emptyset$ και $B \cap Y \neq \emptyset$.

Ορισμός 7.1.1 *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται συνεκτικός αν δεν υπάρχει διαμέριση U_1, U_2 του X με U_1, U_2 ανοικτά μη κενά υποσύνολα του.*

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) ονομάζεται συνεκτικό είναι συνεκτικός χώρος στη σχετική μετρική.

Ισοδύναμα το A είναι συνεκτικό αν δεν υπάρχουν δύο ανοικτά και ξένα μεταξύ τους σύνολα U_1, U_2 ώστε

$$U_1 \cap A \neq \emptyset,\ U_2 \cap A \neq \emptyset \text{ και } A \subset U_1 \cup U_2.$$

Αποδεικνύεται ότι τα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα διαστήματα του, δες Άσκηση 7.2.9

Θεώρημα 7.1.2 *Έστω (X, d) συνεκτικός μετρικός χώρος και $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής απεικόνιση. Δείξτε ότι το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y.*

Απόδειξη:ποθέτουμε ότι το $f(X)$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y. Τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 του Y ώστε

$$f(X) \subset U_1 \cup U_2, f(X) \cap U_1 \neq \text{και} \, f(X) \cap U_2 \neq \emptyset.$$

Επειδή f συνεχής τα σύνολα $f^{-1}(U_1)$,$f^{-1}(U_2)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του X. Επίσης $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$ και επειδή X συνεκτικός έχουμε ότι $f^{-1}(U_1) = \emptyset$ ή $f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $f(X) \cap U_1 = \emptyset$ άτοπο, ενώ στη δεύτερη $f(X) \cap U_2 = \emptyset$ άτοπο.

Έτσι έχουμε ότι $f(X)$ συνεκτικό υποσύνολο του Y. □

Ορισμός 7.1.3 *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται τοπικά συνεκτικός αν για κάθε $x \in X$, κάθε περιοχή του x περιέχει περιοχή του x που είναι συνεκτικό σύνολο.*

Ορισμός 7.1.4 *Εάν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, συνεκτική συνιστώσα του $x \in X$ ονομάζουμε το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το x.*

Ορισμός 7.1.5 *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται ολικά μη-συνεκτικός αν για κάθε $x \in X$ η συνεκτική συνιστώσα του είναι το $\{x\}$.*

Ορισμός 7.1.6 *Ένας μετρικός χώρος (X, d) ονομάζεται κατά τόξα συνεκτικός αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to X$ με $f(0) = x$ και $f(1) = y$.*

Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου είναι κατά τόξα συνεκτικό αν για κάθε $x, y \in A$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to A$ με $f(0) = x$ και $f(1) = y$.

7.2. Ασκήσεις

Άσκηση 7.2.1 *Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχει διαμέριση F_1, F_2 του X ώστε F_1, F_2 να είναι κλειστά και μη κενά* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.2 *Δείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την απόλυτη τιμή το υποσύνολο $\Delta = [0, 1] \cup (2, 4]$ είναι μη συνεκτικό.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.3 *Εάν $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι συνεχής απεικόνιση και $A \subset X$ συνεκτικό σύνολο τότε $f(A)$ συνεκτικό σύνολο.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.4 *Δείξτε ότι το υποσύνολο $A = \{(x, y) : x^2 - y^2 \geq 10\}$ του $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδεια μετρική είναι μη συνεκτικό.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.5 *Εάν U ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) και $f : U \to \mathbb{Z}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.6 *Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 1/x\}$$

είναι μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.7 *α) Εάν A είναι συνεκτικό σύνολο και $A \subset B \subset \overline{A}$ δείξτε ότι το B είναι συνεκτικό σύνολο.*

β) Έστω A, B συνεκτικά σύνολα ώστε $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Δείξτε ότι το $A \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.8 *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι μη συνεκτικός αν και μόνο αν υπάρχει μια $f : (X, d) \to \{0, 1\}$ η οποία είναι συνεχής και επί.* **Υπόδειξη-Λύση**

Στις παρακάτω δύο άσκησεις θα δείξουμε ότι τα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι τα διάστηματα $[a,b]$, (a,b), $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ και το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 7.2.9 *Έστω I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ και K_1, K_2 κλειστά και ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε $I \subset K_1 \cup K_2$ και $K_i \cap I \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $a_1 \in I \cap K_1$ και $b_1 \in I \cap K_2$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1 < b_1$. Εάν μ_1 το μέσο του του διαστήματος (a_1, b_1) τότε $\mu_1 \in K_1$ ή $\mu_1 \in K_2$. Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $I_2 = (\mu_1, b_1)$ ενώ στην δεύτερη θέτουμε $I_2 = (a_1, \mu_1)$.*

α) Επαναλάβετε αυτό το επιχείρημα ώστε να κατασκευάσετε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = (a_n, b_n)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες

1. *$I_n \subset I_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα*

3. *$b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

β) Δείξτε ότι οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν κοινό όριο x_0.

γ) Δείξτε ότι $x_0 \in I \cap (K_1 \cap K_2)$.

Δείξτε ότι τα παραπάνω οδηγούν σε άτοπο και άρα το I είναι συνεκτικό σύνολο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.10 *Αποδείξτε ότι κάθε μη κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μη συνεκτικό.*

Συμπεράνετε ότι ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι διάστημα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.11 *Δείξτε ότι ένας κατά τόξα συνεκτικός μετρικός χώρος είναι συνεκτικός.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.12 *Εάν $A = \{(0,y) : y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \eta\mu(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ δείξτε ότι*

α) το A είναι συνεκτικό σύνολο

β) το A δεν είναι κατά τόξα συνεκτικό **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.13 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συνεκτικών συνόλων.*

α) Εάν $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι η ένωση $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο.

β) Εάν $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ δείξτε ότι η ένωση $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.14 *Εξετάστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά*

ι) $A_1 = \{(x, x/n) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$.

ιι) $A_2 = \{(x, y) : x \neq 0\}$

ιιι) $A_3 = \{(x, y) : y \neq 2\} \cup \{(0, 2)\}$.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 7.2.15 *Έστω (X, d) συνεκτικός μετρικός χώρος και A με κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Δείξτε ότι $Bd(A) \neq \emptyset$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.16 *Έστω (X, d) μετρικός χώρος, C συνεκτικό υποσύνολο του X και $A \subset X$ ώστε $C \cap A \neq \emptyset$ και $C \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Δείξτε ότι $C \cap Bd(A) \neq \emptyset$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.17 *Εάν κάθε δύο σημεία σε ένα μετρικό χώρο (X, d) περιέχονται σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του X δείξτε ότι ο X είναι συνεκτικός.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.18 *Έστω (X, d) συνεκτικός μετρικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία. Δείξτε ότι ο X είναι υπεραριθμήσιμος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.19 *Δείξτε ότι κάθε σύνολο X εφοδιασμένο με την διακριτή μετρική είναι ολικά μη-συνεκτικός μετρικός χώρος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 7.2.20 *Δείξτε ότι το σύνολο των ρητών με την επαγόμενη μετρική των πραγματικών αριθμών είναι ολικά μη-συνεκτικός μετρικός χώρος.* **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 8

Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

8.1. Στοιχεία Θεωρίας

Θεώρημα 8.1.1 (Arzela-Ascoli) *Έστω K συμπαγές υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το K. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

α) Η $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(K)$.

β) Η $\mathcal{F}$ είναι κλειστό φραγμένο και ισοσυνεχές.

Μια γενικότερη εκδοχή του Θεωρήματος Arzela-Ascoli είναι η ακόλουθη

Θεώρημα 8.1.2 (Arzela-Ascoli (II)) *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και (Y, ρ) πλήρης μετρικός χώρος. Τότε ένα κλειστό υποσύνολο $\mathcal{F}$ συναρτήσεων από τον X από στον Y είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι ισοσυνεχές και για κάθε $x \in X$ η κλειστότητα του συνόλου $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Θεώρημα 8.1.3 (Stone-Weierstrass) *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα πραγματικών και συνεχών συναρτήσεων, ορισμένων σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο (X, d). Εάν η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του X και δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του X, τότε η ομοιόμορφη κλειστή θήκη της $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλες τις πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις στο X.*

8.2. Ασκήσεις

Άσκηση 8.2.1 *Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία από ομοιόμορφα φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Τότε υπάρχει υπακολουθία της $(f_n)_n$ που συγκλίνει ομοιόμορφα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 8.2.2 *Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία παραγωγήσιμων συναρτήσεων με την ιδιότητα $|f_n'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $n \in \mathbb{N}$ Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 8.2.3 *Θέτουμε*

$$M = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f(0) = 0, f(1) = 1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq 1, f \text{ συνεχής}\} \subset C([0, 1])$$

και στον $C([0, 1])$ θεωρούμε την μετρική $d_\infty(f, g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : M \to [0, 1]$ με $F(f) = \int_0^1 f^2(t)dt$ συνεχής και ότι ο M δεν είναι συμπαγής υποσύνολο του $C([0, 1])$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 8.2.4 *Θεωρούμε τη συνάρτηση $T : (C([a, b]), d_\infty) \to (C([a, b]), d_\infty)$ με $Tf(x) = \int_a^x f(t)dt$.*

α) Δείξτε ότι η T απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε ισοσυνεχή.

β) Δείξτε ότι για κάθε ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $C([a, b])$ η ακολουθία $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ περιέχει μια ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία στο $[a, b]$. **Υπόδειξη-Λύση**

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
➤ Σύνορο συνόλου, Απόσταση από σύνολο
➤ Σημεία Συσσώρευσης
➤ Ισοδύναμες μετρικές
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◂◂ ▸▸
◂ ▸
Σελίδα 42 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Άσκηση 8.2.5 *Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Εάν $\mathcal{F}$ το σύνολο των ισομετριών από τον (X, d) στον (X, d) δείξτε ότι το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 8.2.6 *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)x^k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f = 0$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 8.2.7 *Δείξτε ότι η άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $1, x^2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $C([0, 1])$ αλλά δεν είναι πυκνό υποσύνολο του $C([-1, 1])$.* **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 8.2.8 *Έστω $f \in C([0, 1])$ με την ιδιότητα $\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.*

Ισχύει το συμπέρασμα αν υποθέσουμε ότι η f είναι ορισμένη στο $[-1, 1]$;. **Υπόδειξη-Λύση**

Αποδείξεις

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλα την τριγωνική ανισότητα. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.1

Υπόδειξη: Για την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιείστε την ανισότητα Minkowski. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Υπόδειξη: Για την τριγωνική ανισότητα στο β) ερώτημα δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi(x+y) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)$ είναι φθίνουσα για κάθε $y, x \in [, +\infty)$ $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Υπόδειξη: Για να δείξετε την τριγωνική ανισότητα για την $d_3(\cdot,\cdot)$ χρησιμοποιήστε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+x}$ είναι αύξουσα για $x \geq 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι κάθε φυσικός αριθμός γράφεται ως γινόμενο των πρώτων αριθμών που τον διαιρούν. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

Απόδειξη: α) Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y) \tag{8.1}$$

και

$$d(y,z) \le d(x,y) + d(x,z) \Rightarrow -d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z). \tag{8.2}$$

Από τις (8.1),(8.2) έχουμε ότι

$$-d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y) \Rightarrow |d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y).$$

β) Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x,z) &\le d(x,y) + d(y,z) \\ &\le d(x,y) + d(y,u) + d(u,z) \text{ από τριγωνική ανισότητα για } y,z,u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(x,z) - d(y,u) \le d(x,y) + d(z,u).$$

Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} d(y,u) &\le d(x,y) + d(x,u) \\ &\le d(x,y) + d(x,z) + d(u,z) \text{ από τριγωνική ανισότητα για } x,u,z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -d(x,y) - d(z,u) \le d(x,z) - d(y,u).$$

Από τις παραπάνω δύο ανισότητες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -(d(x,y) + d(z,u)) \le d(x,z) - d(y,u) &\le d(x,y) + d(z,u) \\ \Rightarrow |d(x,z) - d(y,u)| &\le d(x,y) + d(z,u). \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Απόδειξη: Εάν θέσουμε $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ και $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$. Επίσης

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \max_{i \leq n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ για κάθε } i \leq n \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}.$$

Μένει να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Έστω $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Από την τριγωνική ανισότητα για την συνάρτηση απόλυτη τιμή έχουμε ότι για κάθε $i \leq n$,

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$$

Επομένως $\max_{i \leq n} |x_i - y_i| \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ και άρα $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.2

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 51 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Εάν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ τότε είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $d_p(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ και $d_p(\vec{x}, \vec{y}) = d_p(\vec{y}, \vec{x})$.

Επίσης

$$\begin{aligned} d_p(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} &= 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i|^p = 0 \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \text{ για κάθε } i \leq n \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}. \end{aligned}$$

Για την τριγωνική ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Minkowski που λέει ότι για κάθε $p \geq 1$ και $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^n, \vec{y} = (y_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_p(\vec{x}, \vec{y}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^p \right)^{1/p} \\ &= d_p(\vec{x}, \vec{z}) + d_p(\vec{z}, \vec{y}) \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι $d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = d(y,x)$ για κάθε $x, y > 0$. Επίσης,

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ισχύει

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \\ &\leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{z}| + |\frac{1}{z} - \frac{1}{y}| \text{ από τριγωνική ανισότητα για πραγματικούς αριθμούς} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $d(x,y)$ είναι μετρική. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

• Μετρικές

• Ανοικτά-κλειστά σύνολα

• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

• Διαχωρισιμότητα

• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

• Συμπάγεια

• Συνεκτικότητα

• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 53 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Είναι άμεσο ότι $d(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$ και $d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a})$.

Επίσης από τον ορισμό της μετρική έχουμε

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα έστω $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ τρία στοιχεία του $\mathcal{N}$. Θα δείξουμε ότι

$$d(\vec{a}, \vec{b}) \leq d(\vec{a}, \vec{c}) + d(\vec{c}, \vec{b}).$$

Έστω ένα $i \leq n$ ώστε $a_i \neq b_i$. Εάν $a_i \neq c_i$ τότε $i \in A_{\vec{a},\vec{c}} = \{j \leq n : a_j \neq c_j\}$. Εάν $a_i = c_i$ τότε θα ισχύει ότι $c_i \neq b_i$ διότι αν $c_i = b_i$ τότε $a_i = c_i = b_i$ άτοπο.

Επομένως

$$\{i \leq n : a_i \neq b_i\} \subset \{i \leq n : a_i \neq c_i\} \cup \{i \leq n : b_i \neq c_i\}$$

και άρα

$$\begin{aligned} d(\vec{a}, \vec{b}) &= \#\{i \leq n : a_i \neq b_i\} \\ &\leq \#\left(\{i \leq n : a_i \neq c_i\} \cup \{i \leq n : b_i \neq c_i\}\right) \\ &\leq \#\{i \leq n : a_i \neq c_i\} + \#\{i \leq n : b_i \neq c_i\} = d(\vec{a}, \vec{c}) + d(\vec{c}, \vec{b}). \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Απόδειξη: Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $d(A, B) = d(B, A) \geq 0$ για κάθε $A, B \in F(S)$.

Επίσης από τον ορισμό της μετρικής,

$$\begin{aligned} d(A, B) = 0 &\Leftrightarrow \#((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 0 \\ &\Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset \text{ και } B \setminus A = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \; A \subset B \text{ και } B \subset A \Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

Για την τριγωνική ανισότητα έστω A, B, C τρία πεπερασμένα υποσύνολα του S.

Έστω ένα $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Εάν $x \in A \setminus B$ τότε αν $x \in C$ έχουμε ότι $x \in C \setminus B$. Αν $x \notin C$ τότε $x \in A \setminus C$. Επομένως ισχύει $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

Εάν $x \in B \setminus A$ τότε αν $x \in C$ έχουμε ότι $x \in C \setminus A$. Αν $x \notin C$ τότε $x \in B \setminus C$. Επομένως ισχύει $B \setminus A \subset (C \setminus A) \cup (B \setminus C)$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B) \cup (C \setminus A) \cup (B \setminus C)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \#(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &\leq \#((A \setminus C) \cup (C \setminus B) \cup (C \setminus A) \cup (B \setminus C)) \\ &\leq \#((A \setminus C) \cup (C \setminus A)) + \#((C \setminus B) \cup (B \setminus C)) \\ &= d(A, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.4.2

Απόδειξη: Είναι άμεσο ότι $d(f,f) = 0$ και $d(f,g) = d(g,f) \geq 0$. Θα δείξουμε ότι αν $d(f,g) = 0$ τότε $f = g$.

Ας υποθέσουμε ότι $d(f,g) = 0$ και ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) \neq g(x_0)$. Τότε $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Επειδή η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής υπάρχει μια περιοχή $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ του x_0 ώστε

$$|f(x) - g(x)| > \frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{2} \text{ για κάθε } x \in U.$$

Τότε όμως

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x) - g(x)| dx \\ &\geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} |f(x_0) - g(x_0)|/2 dx \geq |f(x_0) - g(x_0)|\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Άρα $f = g$.

Για να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα παρατηρούμε ότι για κάθε $f, g, h \in C([0,1])$ ισχύει ότι

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

και επομένως από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \leq \int_0^1 (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)| dx \\ &= d(f,h) + d(g,h). \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\tau o\xi\varepsilon\varphi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα εφόσον $\tau o\xi\varepsilon\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, και επομένως είναι $1-1$. Επίσης $\tau o\xi\varepsilon\varphi(0) = 0$.

α) Η συνάρτηση $d(x,y) = |\tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)|$ είναι άμεσο ότι ικανοποιεί $d(x,y0 = d(y,x) \geq 0$. Επίσης επειδή η $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)$ είναι $1-1$,

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow \tau o\xi\varepsilon\varphi(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi(y) \Rightarrow x = y$$

άρα ισχύει και η M2). Για την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)| = |\tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(z) + \tau o\xi\varepsilon\varphi(z) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)| \\ &\leq |\tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(z)| + |\tau o\xi\varepsilon\varphi(z) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

β) Για την $d(x,y) = \tau o\xi\varepsilon\varphi|x-y|$ είναι άμεσο ότι $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$. Επίσης επειδή η $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x)$ είναι $1-1$,

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \tau o\xi\varepsilon\varphi|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

άρα ισχύει και η M3). Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε την συνάρτηση $f_y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \geq 0$, με τύπο $f_y(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi(x+y) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y)$. Τότε έχουμε ότι $f(0) = 0$ και $f_y'(x) = \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{1}{1+x^2} \leq 0$. Επομένως η $f(x)$ είναι φθίνουσα και άρα $f(x) \leq f(0) = 0$ για κάθε $x \geq 0$. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \tau o\xi\varepsilon\varphi(|x-y|) \\ &\leq \tau o\xi\varepsilon\varphi(|x-z| + |z-y|), \text{ εφόσον η } \tau o\xi\varepsilon\varphi \text{ είναι αύξουσα} \\ &\leq \tau o\xi\varepsilon\varphi(|x-z|) + \tau o\xi\varepsilon\varphi(|z-y|), \text{ από την μονοτονία της } f(x) \\ &\leq d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας ότι η $d(x,y)$ είναι μετρική είναι άμεσο να δούμε ότι για κάθε $i = 1, 2, 3$ ισχύει

$$d_i(x,y) = d_i(y,x) \geq 0 \text{ και } d_i(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Μένει να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα για κάθε μία από τις μετρικές.

Για την $d_1(x,y)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_1(x,z) + d_1(z,y) &= \sqrt{d(x,z)} + \sqrt{d(z,y)} \\ &\geq \sqrt{d(x,z) + d(y,z)} \\ &\geq \sqrt{d(x,y)} = d_1(x,y) \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για τη $d(x,y)$ και ότι η συνάρτηση $\sqrt{x}$ είναι αύξουσα.

Για την $d_2(x,y)$ έστω $x, y, z \in X$. Εάν $d(x,z) \geq 1$ τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \min\{1, d(x,y)\} \leq 1 = \min\{1, d(x,z)\} \\ &\leq \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(y,z)\} = d_2(x,z) + d_2(z,y). \end{aligned}$$

Εάν $d(z,y) \geq 1$ με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε την τριγωνική ανισότητα.

Έστω τώρα ότι $d(x,z) < 1$ και $d(z,y) < 1$. Τότε

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \min\{1, d(x,y)\} \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \\ &= \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\} = d_2(x,z) + d_2(z,y). \end{aligned}$$

Για την d_3 θα χρησιμοποιήσουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+x}$ είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$ εφόσον $f'(x) = 1/(1+x)^2 > 0$.

Από την τριγωνική ανισότητα για την $d(x, y)$ έχουμε ότι $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ και επομένως

$$\begin{aligned}
d_3(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = f(d(x, y)) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \\
&= \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\
&\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} \\
&= d_3(x, z) + d_3(z, y).
\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Απόδειξη: Έχουμε δει στην Άσκηση 1.2.3 ότι η

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

είναι μια μετρική στον $\mathbb{R}^2$.

Θα δείξουμε ότι η $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2$ δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα και επομένως δεν είναι μετρική στον $\mathbb{R}^2$.

Παίρνουμε τα σημεία $(x_1,y_1)=(1,1)$, $(x_2,y_2)=(0,1)$ και $(x_3,y_3)=(1/2,1)$. Τότε έχουμε ότι $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2=(1-0)^2+(1-1)^2=1$,

$$d((x_1,y_1),(x_3,y_3))^2=(1-\frac{1}{2})^2+(1-1)^2=1/4,$$

και

$$d((x_3,y_3),(x_2,y_2))^2=(\frac{1}{2}-0)^2+(1-1)^2=1/4.$$

Επομένως

$$d((x_1,y_1),(x_3,y_3))^2+d((x_3,y_3),(x_2,y_2))^2=\frac{1}{2}<1=d((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2$$

και άρα δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Απόδειξη: Επειδή m, n είναι ακέραιοι έχουμε ότι αν

$$m - n = p^{r-1}k \text{ τότε } r - 1 \geq 0.$$

Πράγματι αν ο p διαιρεί τον $m - n$ τότε $r - 1 \geq 1$ ενώ αν δεν τον διαιρεί τότε $r - 1 = 0$.

Επομένως $d(m, n) \geq 0$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$.

Αν $d(m, n) = 0$ τότε $m = n$. Πράγματι αν $m \neq n$ τότε από τα παραπάνω έχουμε ότι $r \geq 1$ και επομένως $d(m, n) = \frac{1}{r} > 0$ άτοπο.

Επίσης αν $m - n = p^{r-1}k \Rightarrow n - m = p^{r-1}(-k)$ και έτσι έχουμε ότι $d(m, n) = d(n, m)$ για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}$.

Θα δείξουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή για κάθε $m, n, q \in \mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$d(n, q) \leq d(n, m) + d(m, q).$$

Έστω $m - n = p^{r-1}k_1$ και $m - q = p^{i-1}k_2$.

Εάν $r = i$ τότε $n - q = p^{r-1}(k_2 - k_1)$ και άρα

$$d(n, q) \leq \frac{1}{r} \leq d(n, m) \leq\leq d(n, m) + d(m, q).$$

Έστω $r \neq i$. Θέτουμε $t_0 = \min\{r, i\}$. Τότε

$$n - q = p^{i-1}k_2 - p^{r-1}k_1 = p^{t_0-1}(k_2p^{i-t_0} - p^{r-t_0}k_1)$$

Επειδή ο p δεν διαιρεί τους k_1, k_2 και $\max\{r - t_0, i - t_0\} \geq 1$, έχουμε ότι ο p δεν διαιρεί και τον $k_1p^{t_0} - p^{r-t_0}k_2$. Επομένως

$$d(q, n) = \frac{1}{t_0} = \max\{d(q, m), d(m, n)\} \leq d(q, m) + d(m, n).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 1.2.11

- Μετρικές
- Ανοικτά-κλειστά σύνολα
- Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
- Διαχωρισιμότητα
- Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
- Συμπάγεια
- Συνεκτικότητα
- Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Για την μια κατεύθυνση χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ανοικτού συνόλου. Για την αντίθετη κατεύθυνση χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Υπόδειξη: Για το β) ερώτημα βρείτε μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων U_n του $\mathbb{R}$ ώστε $U_{n+1} \subset U_n$ και $\cap U_n = \{0\}$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την προηγούμενη άσκηση $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.5.3

Απόδειξη: α) Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοικτό. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

Τότε $x_0 \neq 2$ και επιλέγουμε $\varepsilon < |x_0 - 2|/2$.

Θα δείξουμε ότι $B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Πράγματι αν $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$ τότε

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$|2 - x| \geq |2 - x_0| - |x - x_0| \geq 2\varepsilon - \varepsilon > 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Επομένως $B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ και άρα A κλειστό.

β) Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό. Έστω $(x_0, y_0) \in A$. Τότε $x_0^2 + y_0^2 > 1$. Θέτουμε $\varepsilon_0 = (x_0^2 + y_0^2) - 1$. Αρχικά θα υποθέσουμε ότι $x_0, y_0 \neq 0$. Επιλέγουμε $\varepsilon < \min\{|x_0|, |y_0|, \frac{\varepsilon_0}{2(|x_0|+|y_0|)}\}$.

Θα δείξουμε ότι $B = B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset A$. Πράγματι αν $(x, y) \in B$ έχουμε ότι

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon \text{ και } |y - y_0| < \varepsilon.$$

Επομένως $|x| \geq |x_0| - \varepsilon > 0$ και $|y| \geq |y_0| - \varepsilon > 0$. Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq (|x_0| - \varepsilon)^2 + (|y_0| - \varepsilon)^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon(|x_0| + |y_0|) \\ &\geq x_0^2 + y_0^2 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon_0 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2\varepsilon^2 - (x_0^2 + y_0^2 - 1) = 1 + 2\varepsilon^2 > 1. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $x_0 = 0$ ή $y_0 = 0$. Τότε επιλέγουμε $\varepsilon < \min\{|y_0|, \frac{\varepsilon_0}{2(|x_0|+|y_0|)}\}$ στην πρώτη περίπτωση και $\varepsilon < \min\{|x_0|, \frac{\varepsilon_0}{2(|x_0|+|y_0|)}\}$ στην δεύτερη. Τότε αν $x_0 = 0$ έχουμε ότι $x^2 + y^2 \geq (|y_0| - \varepsilon)^2$. θέτοντας $x_0 = 0$ στην (8.3) βρίσκουμε ότι $B = B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset A$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $B = B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset A$ αν $y_0 = 0$.

Έτσι έχουμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο.

γ) Θα δείξουμε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοικτό. Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Τότε έχουμε ότι $x_0 \neq y_0^2$.

Θέτουμε $\varepsilon_0 = |x_0 - y_0^2|/4$. Επίσης επιλέγουμε ένα $\delta > 0$ ώστε αν $|y - y_0| < \delta$ τότε $|y^2 - y_0^2| < \varepsilon_0$. Αυτή η επιλογή είναι δυνατή εφόσον η συνάρτηση $f(y) = y^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \delta\}$. Εάν πάρουμε την μπάλα $B = B((x_0, y_0), \varepsilon)$ τότε ισχύει ότι $B((x_0, y_0), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Πράγματι αν $(x, y) \in B$ έχουμε ότι

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \Rightarrow \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} < \varepsilon.$$

Ιδιαίτερα $|x - x_0| < \varepsilon_0$ και $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |y^2 - y_0^2| < \varepsilon$.

Επομένως

$$\begin{aligned} |x - y^2| &= |x - x_0 + x_0 - y_0^2 + y_0^2 - y^2| \\ &\geq |x_0 - y_0^2| - |x - x_0| - |y^2 - y_0^2| \\ &\geq 4\varepsilon_0 - \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 > 0. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι το $\mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοικτό και άρα το A είναι κλειστό. $\square$

Πίσω στην Άσκηση ;;

Απόδειξη: Έστω $a \in X$ και $x \in B(a,\rho)$. Τότε $d(x,a) < \rho$. Για να δείξουμε ότι $B(x,\rho - d(x,a)) \subset B(a,\rho)$ θα χρησιμοποιήσουμε ότι για κάθε $y \in B(x,\rho - d(x,a))$ ισχύει $d(x,y) < \rho - d(x,a)$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(y,x) < d(a,x) + \rho - d(x,a) = \rho,$$

επομένως $y \in B(a,\rho)$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.2

• Μετρικές

• Ανοικτά-κλειστά σύνολα

• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

• Διαχωρισιμότητα

• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

• Συμπάγεια

• Συνεκτικότητα

• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω U ανοικτό σύνολο. Τότε για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon_x) \subset U$. Έτσι έχουμε ότι

$$U \subset \cup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x) \subset U$$

και επομένως $U = \cup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x)$.

Αντιστρόφως έστω ότι το $U = \cup_{i \in I} B(z_i, \varepsilon_i)$ και $x \in U$. Τότε υπάρχει $i \in I$ ώστε $x \in B(z_i, \varepsilon_i)$. Από την Άσκηση 2.2.2 έχουμε ότι

$$B(x, \varepsilon_i - d(x, z_i)) \subset B(z_i, \varepsilon_i) \subset U,$$

και άρα το U είναι ανοικτό σύνολο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.3

Απόδειξη: Από τα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού γνωρίζουμε ότι ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς υπάρχει ένα άρρητος καθώς και ένας ρητός.

α) Αν $\mathbb{Q}^o \neq \emptyset$ τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(q, \varepsilon) \subset \mathbb{Q} \Rightarrow (q - \varepsilon, q + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$, το οποίο από τα παραπάνω είναι άτοπο αφού ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς υπάρχει ένας άρρητος. Επομένως $\mathbb{Q}^o = \emptyset$.

β) Αν $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^o \neq \emptyset$ τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς υπάρχει ένας ρητός.

γ) Εάν το $\mathbb{Q}$ ήταν κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ θα ήταν ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και επομένως $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^o \neq \emptyset$. Από το β) έχουμε ότι $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^o = \emptyset$ που είναι άτοπο. Άρα $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.4

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι το A δεν είναι ανοικτό σύνολο. Εάν $x = 1/n_0 \in A$ τότε δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subset A$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι

$$B(x, \varepsilon) \subset A \Rightarrow (\frac{1}{n_0} - \varepsilon, \frac{1}{n_0} + \varepsilon) \subset A$$

που είναι άτοπο, εφόσον ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμός υπάρχει ένα άρρητος και προφανώς το A δεν περιέχει ρητούς αριθμούς

Θα δείξουμε τώρα ότι το A δεν είναι κλειστό σύνολο. Αν το A είναι κλειστό τότε το $\mathbb{R} \setminus A$ θα ήταν ανοικτό σύνολο. Έχουμε ότι $0 \in \mathbb{R} \setminus A$ και επομένως θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $B(0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ που είναι άτοπο. Έτσι έχουμε ότι το A δεν είναι κλειστό. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.5

Απόδειξη: α) Εάν $\cap_{i=1}^{k} U_i = \emptyset$ τότε από τους ορισμούς είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω $\cap_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$ και $x \in \cap_{i=1}^{k} U_i$. Τότε $x \in U_i$ για κάθε $i \leq k$ και επειδή U_i είναι ανοικτό υπάρχει $d_i > 0$ ώστε η μπάλα $B(x, d_i) \subset U_i$. Θέτουμε $d = \min\{d_1, \ldots, d_k\}$ Τότε έχουμε ότι $d > 0$ και $B(x, d) \subset B(x, d_i) \subset U_i$ για κάθε $i \leq k$. Επομένως

$$B(x, d) \subset \bigcap_{i=1}^{k} B(x, d_i) \subset \bigcap_{i=1}^{k} U$$

και αυτό αποδεικνύει ότι η πεπερασμένη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

β) Η $\cup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό σύνολο εάν το σύνολο $X \setminus (\cup_{i=1}^{n} F_i)$ είναι ανοικτό σύνολο. Όμως

$$X \setminus \cup_{i=1}^{n} F_i = X \cap (\cup_{i=1}^{n} F_i)^c = X \cap F_1^c \cap \cdots \cap F_k^c$$

Επειδή F_i είναι κλειστό το F_i^c είναι ανοικτό και επομένως από το α) ερώτημα το σύνολο $X \setminus \cup_{i=1}^{n} F_i$ είναι ανοικτό και άρα η $\cup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό.

γ) Στο σύνολο των πραγματικών παίρνουμε τα σύνολα $U_n = (-1/n, 1/n)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε U_n είναι ανοικτό σύνολο και $\cap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$.

Πράγματι, $0 \in \cap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n)$ ενώ αν $x \in \cap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n)$ τότε $|x| < 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα

$$|x| \leq \inf_{n \in N}(1/n) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Επειδή το $\{0\}$ δεν είναι ανοικτό σύνολο έχουμε ότι η άπειρη τομή ανοικτών συνόλων δεν είναι κατανάγκη ανοικτό σύνολο. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.6

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 71 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: α) Έστω $a \in A$. Εφόσον το A είναι ανοικτό υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(a, r) \subset A \subset \overline{A}$ και επομένως $a \in (\overline{A})^o$.

β) Επειδή $C^o \subset C$ έχουμε ότι $\overline{C^o} \subset \overline{C} = C$ εφόσον C κλειστό. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Απόδειξη: α) Έστω F κλειστό και $x \in X$ με $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Αν $x \notin F$ τότε $x \in X \setminus F$. Επειδή F κλειστό το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus F \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ που είναι άτοπο. Επομένως $x \in F$.

Αντιστρόφως ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in X$ με $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $x \in F$. Θα δείξουμε ότι το $X \setminus F$ είναι ανοικτό και έτσι θα έχουμε ότι το F είναι κλειστό.

Έστω $x \in X \setminus F$. Αν δεν υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus F$ τότε έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ και άρα από την υπόθεση $x \in F$ που είναι άτοπο.

Αν $x \notin \overline{F}$ έχουμε ότι $x \in X \setminus \overline{F}$. Το σύνολο $X \setminus \overline{F}$ ανοικτό εφόσον το $\overline{F}$ είναι κλειστό και επομένως υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{F} \subset X \setminus F \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ που είναι άτοπο. Επομένως $x \in \overline{F}$.

β) Έστω $x \in \overline{F}$. Από το α) ερώτημα έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap \overline{F} \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$ τότε έχουμε $F \subset \overline{F} \cap (X \setminus B(x,\varepsilon))$. Το σύνολο $\overline{F} \cap (X \setminus B(x,\varepsilon))$ είναι κλειστό και επομένως από το ορισμό του $\overline{F}$ θα είχαμε ότι $\overline{F} \subset \overline{F} \cap (X \setminus B(x,\varepsilon))$ που είναι άτοπο εφόσον $x \in \overline{F}$.

Αντιστρόφως έστω $x \in F$ με $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Τότε $B(x,\varepsilon) \cap \overline{F} \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επειδή $\overline{F}$ είναι κλειστό από το α) ερώτημα έχουμε ότι $x \in \overline{F}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Απόδειξη: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $F = \{x_1, \ldots, x_k\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι $F = \overline{F}$.

Έστω $x \in \overline{F}$. Εάν $x \notin F$ θέτουμε $d_0 = \min\{d(x, x_i) : i = 1, \ldots, k\}$. Επειδή το σύνολο $F = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ είναι πεπερασμένο έχουμε ότι $d_0 > 0$.

Επειδή $x \in \overline{F}$ έχουμε ότι $B(x, d_0/2) \cap F \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει $x_i \in F$ ώστε $d(x, x_i) < d_0/2$ που είναι άτοπο από τον ορισμό του d_0. Επομένως $x \in F$ και άρα $F = \overline{F}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 74 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για κάθε $x \in C$ επιλέγουμε ένα ρητό αριθμό $r_x \in (x, x+\varepsilon)$. Τότε έχουμε ότι $(x, r_x) \cap A = \emptyset$. Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in B$ και $x \neq y$ τότε $r_x \neq r_y$. Πράγματι έστω $x < y \in C$ και $r_x = r_y$. Τότε το διάστημα (x, r_x) είναι μια περιοχή του y. Επειδή $y \in \overline{A}$ έχουμε ότι $A \cap (x, r_x) \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του r_x.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η απεικόνιση $f : C \to \mathbb{Q}, f(x) = r_x$ είναι $1-1$ και επειδή $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο έχουμε ότι και το C είναι αριθμήσιμο σύνολο. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.10

Απόδειξη: α) Επειδή το I_x είναι ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Θα δείξουμε ότι είναι και διάστημα. Έστω $a, b \in I_x$ και $a < z < b$.

Υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα (x_1, y_1) ώστε $a, x \in (x_1, y_1)$ και ένα διάστημα (x_2, y_2) ώστε $b, x \in (x_2, y_2)$. Τότε έχουμε ότι

$$x < y_1 \text{ και } x_2 < x \Rightarrow x_2 < x < y_1$$

και επομένως $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) \neq \emptyset$. Έτσι έχουμε ότι η ένωση $(x_1, y_1) \cup (x_2, y_2)$ είναι ανοικτό διάστημα και άρα για κάθε z με $a < z < b$ έχουμε ότι $z \in (x_1, y_1) \cup (x_2, y_2)$. Επειδή $(x_1, y_1) \cup (x_2, y_2)$ είναι ανοικτό διάστημα που περιέχει το x έχουμε ότι είναι υποσύνολο του I_x, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του α).

β) Εάν $x \neq y$ και $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ τότε έχουμε ότι $I_x \cup I_y$ είναι ανοικτό διάστημα που περιέχει το I_x και το I_y. Επειδή τα I_x, I_y είναι τα μεγαλύτερα ανοικτά διάστημα που περιέχουν τα x, y έχουμε ότι $I_x = I_x \cup I_y = I_y$.

γ) Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό σύνολο έχουμε ότι $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Έστω $\{x_i, i \in I\} = \mathbb{Q} \cap U$. Τότε το σύνολο $\mathbb{Q} \cap U$ είναι αριθμήσιμο, εφόσον το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και ισχύει ότι $\cup_{i \in I} I_{x_i} = U$.

Πράγματι αν $x \in U$ τότε επειδή το I_x είναι ανοικτό σύνολο έχουμε ότι $I_x \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Έστω $q \in I_x \cap \mathbb{Q} \subset U \cap \mathbb{Q} = \{x_i : i \in I\}$. Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $I_q = I_x$ και άρα $U = \bigcup_{i \in I} I_{x_i}$.
□

Πίσω στην Άσκηση 2.2.11

Απόδειξη: Το σύνολο $\overline{A}$ είναι κλειστό και άρα το σύνολο $X \setminus \overline{A}$ είναι ανοικτό. Επειδή $X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$ έχουμε ότι $X \setminus \overline{A} \subset (X \setminus A)^o$.

Έστω τώρα $x \in (X \setminus A)^o$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subset (X \setminus A) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ και άρα από την Άσκηση 2.2.8 $x \in X \setminus \overline{A}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Απόδειξη: 1) $\Rightarrow$ 2). Επειδή το A είναι πουθενά πυκνό έχουμε ότι $\overline{A}^{o} = \emptyset$. Έστω $x \in X$ Επειδή $(\overline{A})^{o} = \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$.

Πράγματι αν $B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$ τότε θα είχαμε ότι $B(x,\varepsilon) \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A}^{o} \neq \emptyset$.

Έτσι έχουμε ότι το $X \setminus \overline{A}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X και επειδή $(X \setminus A)^{o} = X \setminus \overline{A}$ έχουμε το ζητούμενο.

2) $\Rightarrow$ 3). Επειδή το $(X \setminus A)^{o} = X \setminus \overline{A}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap X \setminus \overline{A}$. Επειδή το $B(x,\varepsilon) \cap X \setminus \overline{A}$ είναι ανοικτό σύνολο υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subset B(x,\varepsilon) \cap X \setminus \overline{A} \Rightarrow B(y,\delta) \cap A = \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 1). Έστω ότι κάθε ανοικτό σύνολο περιέχει μια μπάλα που δεν τέμνει το A. Τότε έχουμε ότι $(\overline{A})^{o} = \emptyset$, διαφορετικά αν $B(x,\varepsilon) \subset \overline{A}$ τότε θα υπήρχαν $y \in B(x,\varepsilon)$ και $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \cap A = \emptyset$, που είναι άτοπο εφόσον $B(x,\varepsilon) \subset \overline{A}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.12

Απόδειξη: α) Έστω $x \in \operatorname{Bd} B$. Τότε για κάθε περιοχή $U(x)$ ισχύει ότι $B \cap U(x) \neq \emptyset$ και $(X \setminus B) \cap U(x) \neq \emptyset$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\operatorname{Bd} B \subset A$ και επομένως $x \in U(x) \cap A$.

Επειδή $A \subset B$ έχουμε ότι $X \setminus B \subset X \setminus A$ και άρα $U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι $x \in \operatorname{Bd} A$.

β) Έχουμε ότι $A^o \subset A \subset \overline{A}$ και $\operatorname{Bd} A \subset \overline{A}$. Επομένως $A^o \cup \operatorname{Bd} A \subset \overline{A}$.

Έστω $x \in \overline{A}$. Τότε για κάθε περιοχή $U(x)$ του x ισχύει $U(x) \cap A \neq \emptyset$.

Αν $x \in A^o \subset A^o \cup \operatorname{Bd} A$ τότε τελειώσαμε.

Αν $x \notin A^o$ τότε δεν υπάρχει περιοχή $U(x)$ του x ώστε $U(x) \subset A$. Επομένως για κάθε περιοχή $U(x)$ του x ισχύει $U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ και άρα $x \in \overline{X \setminus A}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι αν $x \notin A^o$ τότε $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Επομένως $x \in \operatorname{Bd} A$ και αυτό αποδεικνύει ότι $\overline{A} = A^o \cup \operatorname{Bd} A$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.3.3

Απόδειξη: α) Έστω $x \in Bd(\overline{A})$. Τότε για κάθε περιοχή $U(x)$ του x ισχύει ότι $U(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ και $U(x) \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$. Εάν $y \in U(x) \cap \overline{A}$ έχουμε ότι η $U(x)$ είναι περιοχή του y και $y \in \overline{A}$ και επομένως $U(x) \cap A \neq \emptyset$. Έτσι έχουμε ότι $x \in \overline{A}$.

Επίσης επειδή $A \subset \overline{A} \Rightarrow X \setminus \overline{A}) \subset (X \setminus A)$ και έτσι έχουμε ότι $U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Άρα $x \in \overline{X \setminus A}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ και επομένως $Bd(\overline{A}) \subset Bd(A)$.

β) Έστω $x \in Bd(A^o)$. Τότε για κάθε περιοχή $U(x)$ του x ισχύει ότι $U(x) \cap A^o \neq \emptyset$ και $U(x) \cap (X \setminus A^o) \neq \emptyset$. Επειδή $A^o \subset A$ έχουμε ότι $U(x) \cap A \supset U(x) \cap A^o \neq \emptyset$

Εάν $y \in U(x) \cap (X \setminus A^o)$ έχουμε ότι $y \notin A^o$ και άρα δεν υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(y, r) \subset A$. Επειδή $y \in U(x)$ έχουμε ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $B(y, r_0) \subset U(x)$. Έτσι έχουμε ότι $B(y, r_0) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ επομένως $U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Έτσι έχουμε $x \in Bd(A)$.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που η σχέση του περιέχεται στα α) και β) είναι γνήσια.

Έστω $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι $\overline{A} = [0, 1]$ και

$$Bd([0, 1]) = \{0, 1\} \text{ ενώ } Bd(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) = [0, 1].$$

Επομένως $Bd(\overline{A}) \subsetneq Bd(A)$. Επίσης $A^o = \emptyset$ και άρα $Bd(A^o) = \emptyset \subsetneq Bd(A)$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.3.4

Απόδειξη: α) Ισχύει ότι $\mathrm{Bd}(A) \subset \overline{A} \setminus A^o$ για κάθε A και επομένως

$$\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)) \subset \overline{\mathrm{Bd}} \setminus (\mathrm{Bd}(A))^o = \mathrm{Bd}(A) \setminus (\mathrm{Bd}(A))^o \setminus \mathrm{Bd}(A).$$

β) Από το α) ερώτημα αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)) \subset \mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)))$.

Έστω $x \in \mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))$. Τότε $x \in \overline{\mathrm{Bd}(A)} \setminus (\mathrm{Bd}(A))^o)$. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)) \subset \mathrm{Bd}(A)$ και επειδή $x \notin (\mathrm{Bd}(A))^o$ παίρνουμε ότι

$$x \notin (\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)))^o.$$

Επειδή $x \in \mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)) \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))}$ και επομένως από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$x \in \overline{\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))} \setminus (\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A)))^o = \mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(\mathrm{Bd}(A))).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 2.3.5

Απόδειξη: Επειδή $A \subset \overline{A}$ είναι άμεσο ότι $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$. Ας υποθέσουμε $\operatorname{diam}(A) < \operatorname{diam}(\overline{A})$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $\operatorname{diam}(A) + \varepsilon < \operatorname{diam}(\overline{A})$.

Από τον ορισμό της διαμέτρου έχουμε ότι υπάρχουν $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{A}$ ώστε $\operatorname{diam}(\overline{A}) - \varepsilon/4 \leq d(\bar{x}, \bar{y})$.

Επειδή $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{A}$ έχουμε ότι $B(\bar{x}, \varepsilon/4) \cap A \neq \emptyset$ και $B(\bar{y}, \varepsilon/4) \cap A \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x, y \in A$ ώστε $d(\bar{x}, x) < \varepsilon/4$ και $d(\bar{y}, y) < \varepsilon/4$. Τότε από την τριγωνική ανισότητα δες Άσκηση 1.2.1,

$$\begin{aligned} |d(x,y) - d(\bar{x},\bar{y})| \leq d(x,\bar{x}) + d(\bar{y},y) &\Rightarrow \\ d(x,y) &\geq d(\bar{x},\bar{y}) - d(\bar{x},x) - d(\bar{y},y) \\ &\geq d(\bar{x},\bar{y}) - \varepsilon/2 \geq \operatorname{diam}(\overline{A}) - 3\varepsilon/4 \end{aligned}$$

και επομένως $\operatorname{diam}(A) \geq \operatorname{diam}(\overline{A}) - 3\varepsilon/4$ που είναι άτοπο. Έτσι έχουμε ότι $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.3.6

Απόδειξη: Εάν x, y δύο διαφορετικά στοιχεία του X τότε για τα σύνολα $A = \{x\}$ και $B = \{y\}$ ισχύει

$$\operatorname{diam}(A \cup B) = d(x, y) > 0 = d(x, x) + d(y, y) = \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.3.7

Απόδειξη: Επειδή $A \subset B$ είναι άμεσο ότι $\operatorname{dist}(x, B) \leq \operatorname{dist}(x, A)$.

Για κάθε $a \in A$ από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι $d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a)$ για κάθε $b \in B$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $b \in b$ ώστε $d(x, b) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \varepsilon$. Τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε

$$d(x, a) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \varepsilon + d(b, a) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \varepsilon + \operatorname{diam}(B), \quad \text{εφόσον } a, b \in B.$$

Επειδή $\varepsilon > 0$ τυχαίο παίρνουμε ότι $d(x, a) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{diam}(B)$ και άρα $\operatorname{dist}(x, A) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{diam}(B)$.

β)Εάν πάρουμε το σύνολο $X = [0, 1] \cup \{-3\}$ με μετρική την απόλυτη τιμή, $A = \{-3\}$,$B = \{-3\} \cup [0, 1/2]$ και $x = 1$ τότε έχουμε

$$\operatorname{dist}(x, A) = 4, \quad \operatorname{dist}(x, B) = 1/2 \text{ και } \operatorname{diam}(B \setminus A) = 1/2.$$

Επομένως $\operatorname{dist}(x, A) > \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{diam}(B \setminus A)$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.3.8

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathrm{acc}(A)$. Τότε για κάθε περιοχή $U(x)$ του x ισχύει ότι $U(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Εάν υποθέσουμε ότι για μια περιοχή $U(x)$ το σύνολο $U(x) \cap (A \setminus \{x\})$ είναι πεπερασμένο, τότε αν $\{x_1, \ldots, x_k\} = U(x) \cap (A \setminus \{x\})$ θέτουμε

$$d_0 = \min\{d(x, x_1), \ldots, d(x, x_k)\} > 0.$$

Τότε για την περιοχή $V(x) = B(x, d_0/2) \cap U(x)$ του x_0 έχουμε ότι $V(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$ άτοπο εφόσον $x \in \mathrm{acc}(A)$. Επομένως κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρα στοιχεία του A. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.2

Απόδειξη: Από τους ορισμούς έχουμε ότι $\text{μεμ}(A) \subset A$ ενώ αν $x \in \text{acc}(A)$, $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$. Επομένως $\text{acc}(A) \cup \text{μεμ}(A) \subset \overline{A}$.

Έστω τώρα $x \in \overline{A}$. Τότε $U(x) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε περιοχή $U(x)$ του x. Αν $x \in \text{μεμ}(A)$ τότε τελειώσαμε. Εάν $x \notin \text{μεμ}(A)$ τότε για κάθε περιοχή $U(x)$ του x έχουμε ότι

$$U(x) \cap A \supsetneq \{x\} \Rightarrow U(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Επομένως $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της ισότητας των συνόλων. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.3

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Τότε

$$\begin{aligned} x \in \text{μεμ}(A) &\iff \text{ υπάρχει περιοχή του } U(x) \text{ του } x \text{ ώστε } U(x) \cap A = \{x\} \\ &\iff x \in A \text{ και υπάρχει περιοχή του } U(x) \text{ ώστε } \; U(x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset, \\ &\iff x \notin \text{acc}(A), \;\; x \in A \end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.4

Απόδειξη: Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του (X, d) και $a \in U$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_d(a, r) \subset U$, ισοδύναμα,

$$\text{για κάθε } y \in X \text{ με } d(a, y) < r \Rightarrow y \in U. \tag{8.4}$$

Θα δείξουμε ότι $B_\rho(a, rm) \subset U$. Έστω $y \in B_\rho(a, rm)$.Τότε $\rho(a, y) < rm$ και από την (2.2) παίρνουμε ότι

$$md(a, y) \leq \rho(a, y) < rm \Rightarrow d(a, y) < r.$$

Από την (8.4) συνεπάγεται ότι $y \in U$. Έτσι έχουμε ότι $B_\rho(a, rm) \subset U$ και αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό σύνολο στον (X, ρ).

Αντιστρόφως έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του (X, ρ) και $a \in U$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_\rho(a, r) \subset U$, ισοδύναμα,

$$\text{για κάθε } y \in X \text{ με } \rho(a, y) < r \Rightarrow y \in U. \tag{8.5}$$

Θα δείξουμε ότι $B_d(a, \frac{r}{M}) \subset U$. Έστω $y \in B_d(a, \frac{r}{M})$.Τότε $d(a, y) \leq \frac{r}{M}$ και από την (2.2) παίρνουμε ότι

$$\rho(a, y) \leq Md(a, y) < M\frac{r}{M} = r \Rightarrow \rho(a, y) < r.$$

Από την (8.5) συνεπάγεται ότι $y \in U$. Έτσι έχουμε ότι $B_d(a, \frac{r}{M}) \subset U$ και αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό σύνολο στον (X, d). □

Πίσω στην Άσκηση 2.5.2

Απόδειξη: Εάν $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε έχουμε ότι για κάθε $p \in [1, \infty)$ και κάθε $i \leq n$ ισχύει,

$$|x_i - y_i| \leq \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p}.$$

Επομένως

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{i \leq n} |x_i - y_i| \leq \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p} = \rho(\vec{x}, \vec{y}).$$

Επίσης επειδή για κάθε $i \leq n$ ισχύει ότι $|x_i - y_i| \leq \max_{i \leq n} |x_i - y_i|$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p} &\leq \sqrt[p]{\max_{i \leq n} |x_i - y_i|^p + \cdots + \max_{i \leq n} |x_n - y_n|^p} \\
&= \sqrt[p]{n} \ \max_{i \leq n} |x_i - y_i| \\
&\Rightarrow \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt[p]{n} \ d(\vec{x}, \vec{y}).
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}) \leq \sqrt[p]{n} d(\vec{x}, \vec{y})$$

και από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι οι μετρικές είναι ισοδύναμες. □

Πίσω στην Άσκηση 2.5.3

Απόδειξη: Από τον ορισμό της $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ έχουμε ότι $\rho(x,y) \leq d(x,y)$. Από αυτή την σχέση προκύπτει άμεσα ότι για κάθε $a \in X$, $B_d(a,r) \subset B_\rho(a,r)$. Έτσι αν U είναι ανοικτό σύνολο στον (X,ρ) υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_\rho(a,r) \subset U$ και επομένως

$$B_d(a,r) \subset B_\rho(a,r) \subset U.$$

Από την παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι το U είναι ανοικτό στον (X,d).

Αντιστρόφως, έστω U ανοικτό σύνολο στον (X,d). Τότε για κάθε $a \in U$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_d(a,r) \subset U$. Θα δείξουμε ότι $B_\rho(x, \frac{r}{1+r}) \subset B_d(x,r)$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ορισμένη στο $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα εφόσον $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$. Επομένως

$$\rho(a,y) = \frac{d(a,y)}{1+d(a,y)} < \frac{r}{1+r} \Rightarrow d(a,y) < r.$$

Έτσι έχουμε ότι $B_\rho(a, \frac{r}{1+r}) \subset B_d(a,r)$ και επομένως το U είναι ανοικτό στον (X,ρ). $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.5.6

Απόδειξη: Έστω U ανοικτό υποσύνολο του (X, d) και $a \in U$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_d(a, r) \subset U$. Εάν $\varepsilon = \min\{r, \delta\}$ τότε από την (2.3) έχουμε ότι για κάθε $y \in X$ με $d(a, y) < \varepsilon$ ισχύει ότι $md(a, y) \leq \rho(a, y) \leq Md(a, y)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} x \in B_\rho(a, m\varepsilon) &\Rightarrow \rho(a, x) < m\varepsilon \\ &\Rightarrow d(a, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in U \end{aligned}$$

και άρα $B_\rho(a, m\varepsilon) \subset U$.Έτσι έχουμε ότι το U είναι ανοικτό σύνολο στον (X, ρ).

Αντιστρόφως, έστω U ανοικτό σύνολο στον (X, ρ) και $a \in U$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $B_\rho(a, r) \subset U$. Εάν θέσουμε $\varepsilon = \min\{\delta, \frac{r}{M}\}$ τότε ισχύει ότι $B_d(a, \varepsilon) \subset B_\rho(a, r)$.

Πράγματι αν $x \in B_d(a, \varepsilon) \Rightarrow d(a, x) < \delta$ και άρα από την (2.3), $\rho(a, x) \leq Md(x, a) \leq M\frac{r}{M} = r$. Επομένως $B_d(a, \varepsilon) \subset B_\rho(a, r) \subset U$. □

Πίσω στην Άσκηση 2.5.5

Απόδειξη: Από την άσκηση 1.2.8 έχουμε ότι η ρ είναι μετρική. Θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμες.

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $(\mathbb{R}, \rho)$ και $a \in U$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε

$$B_\rho(x, r) \subset U \Leftrightarrow \{y \in \mathbb{R} : \tau o\xi\epsilon\varphi(|x - y|) < r\} \subset U.$$

Επειδή η $\tau o\xi\epsilon\varphi : \mathbb{R} \to (-\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι συνεχής και $\tau o\xi\epsilon\varphi(0) = 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x| < \delta \Rightarrow |\tau o\xi\epsilon\varphi(x)| < \varepsilon$.

Επομένως για $\varepsilon = r$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|a - x| < \delta \Rightarrow |\tau o\xi\epsilon\varphi(a - x)| < r$. Από αυτή την σχέση έχουμε ότι $B_d(a, \delta) \subset B_\rho(a, r) \subset U$ και επομένως το U είναι επίσης $(\mathbb{R}, d)$ ανοικτό σύνολο.

Αντιστρόφως έστω U ανοικτό σύνολο στον $(\mathbb{R}, d)$, $a \in U$ και $r > 0$ ώστε $B_d(a, r) \subset U$.

Τότε αν $\tau o\xi\epsilon\varphi|a - x| < \tau o\xi\epsilon\varphi(r) \Rightarrow |a - x| < r$ εφόσον η συνάρτηση $\tau o\xi\epsilon\varphi$ είναι αύξουσα, και επομένως $B_\rho(a, \tau o\xi\epsilon\varphi(r)) \subset B_d(a, r) \subset U$. Έτσι παίρνουμε ότι το U είναι επίσης $(\mathbb{R}, \rho)$ ανοικτό σύνολο και άρα έχουμε ότι οι μετρικές d και ρ είναι ισοδύναμες.

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει $M > 0$ ώστε $d9x, y) \leq M\rho(x, y)$ για κάθε x, y.

Επειδή $\tau o\xi\epsilon\varphi|x - y| \in [0, \frac{\pi}{2})$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ενώ η $|x - y|$ παίρνει όλες τις τιμές από 0 ως $+\infty$ έχουμε ότι δεν υπάρχει $M > 0$ ώστε $|x - y| < M\tau o\xi\epsilon\varphi|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Πράγματι αν υπήρχε ένα τέτοιο M, αν $x \in \mathbb{R}$ και $y = 2\pi M + x$ τότε θα είχαμε,

$$|x - y| = 2\pi M < M\tau o\xi\epsilon\varphi|2\pi M| < M\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 < 1/2,$$

άτοπο. □

Πίσω στην Άσκηση 2.5.6

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$
και δείξτε ότι είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 93 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x) - \tau o\xi\varepsilon\varphi(y) = \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x-y}{1+xy}$ για $xy > 1$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.16

Απόδειξη: Θέτουμε $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(x_{k_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n \geq n_1.$$

Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n, m \geq n_2.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x_n, x_0) &\leq d(x_n, x_{k_{n_0}}) + d(x_{k_{n_0}}, x_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Απόδειξη: Εάν $x \in \overline{F}$ τότε για κάθε περιοχή $B(x, \varepsilon)$ του x ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, Άσκηση 2.2.8. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$. Έτσι $x_n \in F$ για κάθε n και $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Αντιστρόφως, αν υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του F με $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ τότε $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως $x \in \overline{F}$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Απόδειξη: Επαγωγικά για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θα επιλέξουμε $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $n_{k-1} < n_k$ και $d(x_{n_k}, x_0) < 1/k$ για κάθε k. Τότε θα έχουμε ότι η υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x_0.

Για $n = 1$ από την υπόθεση μπορούμε να επιλέξουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_{n_1}, x_0) < 1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε $d(x_{n_i}, x_0) < 1/i$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Από την υπόθεση για $\varepsilon = 1/(k+1)$ και $n = n_k$ υπάρχει $m > n_k$ ώστε $d(x_m, x_0) < /(k+1)$. Θέτουμε $n_{k+1} = m$.

Αυτό ολοκληρώνει την επαγωγική επιλογή της υπακολουθίας $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Απόδειξη: α)⇒β) Έστω d, ρ ισοδύναμες και $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Έστω $r > 0$ και $B_\rho(x, r)$ μια περιοχή του x στον (X, ρ). Επειδή d, ρ ισοδύναμες υπάρχει $s > 0$ ώστε $B_d(x, s) \subset B_\rho(x, r)$.

Επειδή $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B_d(x, s)$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $B_d(x, s) \subset B_\rho(x, r) \Rightarrow x_n \in B_\rho(x, r)$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ και έτσι αποδεικνύεται το α)⇒β).

β)⇒α) Θα δείξουμε ότι οι μετρικοί χώροι $(X, d), (X, \rho)$ έχουν τα ίδια κλειστά σύνολα, που αυτό συνεπάγεται άμεσα ότι έχουν και τα ίδια ανοικτά.

Έστω F κλειστό υποσύνολο του (X, d). Εάν $\overline{F}^\rho$ είναι η κλειστότητα του F στον μετρικό χώρο (X, ρ) θα δείξουμε ότι $\overline{F}^\rho = F$ και έτσι θα έχουμε ότι F κλειστό και στον (X, ρ).

Εάν $x \in \overline{F}^\rho$ υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων του F ώστε $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Από τις υποθέσεις παίρνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ και άρα $x \in \overline{F}^d = F$ επειδή F κλειστό στον (X, d). Επομένως $\overline{F}^\rho \subset F \subset \overline{F}^\rho$ και άρα $F = \overline{F}^\rho$.

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε αν F κλειστό υποσύνολο του (X, ρ) τότε F κλειστό υποσύνολο του (X, d). □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Απόδειξη: Αρχικά θα δείξουμε ότι οι τρεις υπακολουθίες έχουν κοινό όριο.

Ας παρατηρήσουμε ότι η $(x_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κοινή υπακολουθία των $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και της $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως οι υπακολουθίες $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ έχουν το ίδιο όριο.

Επίσης επειδή $3(2n+1) = 2(3n+1)+1$, η υπακολουθία $(x_{3(2n+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κοινή υπακολουθία των $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ και της $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως αυτές οι υπακολουθίες έχουν κοινό όριο. Έστω x_0 το κοινό όριο των υπακολουθιών $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή οι υπακολουθίες $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο x_0 έχουμε υπάρχουν $n_i, i = 1,2$ ώστε

$$d(x_{2n}, x_0) < \varepsilon \ \text{ για κάθε } \ n \geq n_1, \tag{8.6}$$

$$d(x_{2n+1}, x_0) < \varepsilon \ \text{ για κάθε } \ n \geq n_2. \tag{8.7}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2+1\}$. Έστω $n \geq n_0$. Αν $n = 2k$ είναι άρτιος τότε $n = 2k \geq n_0 \geq 2n_1 \Rightarrow k \geq n_1$ και άρα από (8.6) έχουμε ότι $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Αν $n = 2k+1$ είναι περιττός τότε $n = 2k+1 \geq n_0 \geq 2n_2+1 \Rightarrow k \geq n_2$ και άρα από (8.7) έχουμε ότι $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Επειδή οι ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_1$ και $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε από την τριγωνική ανισότητα, δες Άσκηση 1.2.1 έχουμε ότι για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_n| = |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Επομένως η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία πραγματικών αριθμών. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος έχουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. □

Πίσω στην Άσκηση ;;

Απόδειξη: Έστω (X, d) είναι πλήρης και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του X με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$. Θα δείξουμε ότι είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n\geq n_0} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Τότε για κάθε $m > n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \text{ τριγωνική ανισότητα για } x_n, x_{n+1}, x_m \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m) \text{ τριγωνική ανισότητα για } x_{n+1}, x_{n+2}, x_m \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-n} d(x_{n+i-1}, x_{n+i}) \leq \sum_{n\geq n_0} d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και επειδή (X, d) πλήρης η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$ συγκλίνει. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Cauchy ακολουθία του X. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $p_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(x_k, x_m) < 2^{-n} \text{ για κάθε } k, m \geq p_n.$$

Είναι άμεσο ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_{n+1} > p_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε ότι $d(x_{p_n}, x_{p_{n+1}}) < 2^{-n}$ και επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{p_n}, x_{p_{n+1}}) < +\infty$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = x_0$. Από την Άσκηση 3.2.1 έχουμε ότι και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ και έτσι έχουμε ότι ο X είναι πλήρης. $\square$

Πίσω στην Άσκηση ;;

Απόδειξη: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Cauchy ακολουθία στον X. Επειδή $\overline{D} = X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n \in D$ ώστε $d(x_n, y_n) < 1/n$.

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ώστε

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/3 \text{ για κάθε } n, m \geq n_0 \text{ και } 1/n_0 < \varepsilon/3.$$

Τότε για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία από στοιχεία του D και άρα συγκλίνει. Εάν $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y) = 0$ τότε επειδή $d(x_n, y_n) < 1/n$ για κάθε n έχουμε ότι και $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$.
$\square$

Πίσω στην Άσκηση ;;

Απόδειξη: 1) $\Rightarrow$ 2) Έστω ότι ο (X, d) είναι πλήρης. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in F_n$. Τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Επειδή $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, $x_n \in F_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως

$$d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon \text{ για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Έτσι έχουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και επειδή ο X είναι πλήρης υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Επίσης $x_0 \in F_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ εφόσον $x_n \in F_k$ για κάθε $n \geq k$ και F_k κλειστό. Έτσι έχουμε ότι $x \in \cap_k F_k$.

Θα δείξουμε ότι η $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ είναι μονοσύνολο. Εάν $x, y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ τότε $d(x, y) \leq \operatorname{diam} F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως $d(x, y) \leq \inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Έτσι έχουμε ότι $d(x, y) = 0$ και άρα $x = y$.

2) $\Rightarrow$ 1) Αντιστρόφως έστω ότι για κάθε φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών συνόλων $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$ ισχύει ότι $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Cauchy ακολουθία. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $D_n = \{x_k : k \geq n\}$ Τότε έχουμε ότι $D_{n+1} \subset D_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy έχουμε ότι

$$\operatorname{diam} D_n = \sup\{d(x_k, x_m) : k, m \geq n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Εάν θέσουμε $F_n = \overline{D_n}$ τότε έχουμε ότι $F_{n+1} \subset F_n$ και $\operatorname{diam} F_n = \operatorname{diam} D_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Επαγωγικά επιλέγουμε μια υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $d(x_{n_k}, x_0) < 1/k$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $(x_{n_i})_{i=1}^{k}$ ώστε $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Για να επιλέξουμε το n_{k+1} θα χρησιμοποιήσουμε ότι $x_0 \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ και επομένως

$$x_0 \in F_{n_k+1} = \overline{\{x_m : m \geq n_k + 1\}}.$$

Άρα $B(x_0, 1/(k+1)) \cap \{x_m : m \geq n_k + 1\} \neq \emptyset$ και επομένως υπάρχει $m \geq n_k + 1$ με $d(x_0, x_m) < 1/(k+1)$. Θέτουμε $x_{n_{k+1}} = x_m$.

Έτσι έχουμε ότι η υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x_0 και επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy έχουμε ότι και η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x_0. $\square$

Πίσω στην Άσκηση ;;

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup_{x\in X} \rho(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3 \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{8.8}$$

Επειδή η συνάρτηση $f_{n_0}(x)$ είναι συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\rho(f_{n_0}(y), f_{n_0}(x)) < \varepsilon/2 \text{ για κάθε } y \in X \text{ με } d(x, y) < \delta. \tag{8.9}$$

Τότε για κάθε $y \in X$ με $d(x, y) < \delta$, από τις (8.8),(8.9) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) &\leq \rho(f(x), f_{n_0}(x)) + \rho(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + \rho(f_{n_0}(y), f(y))\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

και άρα f συνεχής. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.11

Απόδειξη: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Cauchy ακολουθία. Τότε έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{8.10}$$

Σταθεροποιούμε ένα $x \in X$ και θεωρούμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| = d_\infty(f_n, f_m).$$

Επειδή η $(f_n)_n$ είναι Cauchy στον $C(X)$ έχουμε ότι και η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy πραγματικών αριθμών. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος έχουμε ότι το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ και f συνεχής.

Έστω $x \in X$. Επειδή $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, έχουμε ότι υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$, $n(x) \geq n_0$ ώστε

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{8.11}$$

Από την (8.10) έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f_m(x)| &\leq |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_m(x)| \qquad (8.12) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως

$$d_\infty(f, f_n) = \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0$$

και άρα $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$. Για να δείξουμε την πληρότητα μένει να δείξουμε ότι η f είναι και συνεχής. Από την Άσκηση 3.2.11 έχουμε ότι η f είναι συνεχής και έτσι έχουμε ότι ο $(C(X), d_\infty)$ είναι πλήρης. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.12

Απόδειξη: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια Cauchy ακολουθία. Από τον ορισμό της μετρικής έχουμε ότι

$$\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \leq d(f_n, f_m) \tag{8.13}$$

και

$$\sup_{t\in[0,1]} |f_n'(t) - f_m'(t)| \leq d(f_n, f_m) \tag{8.14}$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε ότι οι $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθίες στον $(C([0,1]), d_\infty)$. Από την Άσκηση 3.2.12 έχουμε ότι ο $(C([0,1]), d_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και επομένως υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$
$$\text{και } \lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n', g) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x) - g(x)| = 0.$$

Θα δείξουμε ότι $f' = g$ και έτσι θα έχουμε ότι $f \in C^1([0,1])$ και $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ έχουμε ότι

$$\left|\int_0^x f_n'(t) - g(t)dt\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f_n'(x) - g(x)| \int_0^x dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n'(t)dt = \int_0^x g(t)dt.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού έχουμε ότι

$$f_n(x) - f_n(0) = \int_0^x f_n'(t)dt.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ έχουμε ότι

$$f(x) - f(0) = \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(0)) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n'(t)dt = \int_0^x g(t)dt. \tag{8.15}$$

Επειδή η g είναι συνεχής, η συνάρτηση $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και $G'(x) = g(x)$. Έτσι από την (8.15) παίρνουμε ότι $f'(x) = g(x) \ \forall x$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.13

• Μετρικές

• Ανοικτά-κλειστά σύνολα

• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

• Διαχωρισιμότητα

• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

• Συμπάγεια

• Συνεκτικότητα

• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 108 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

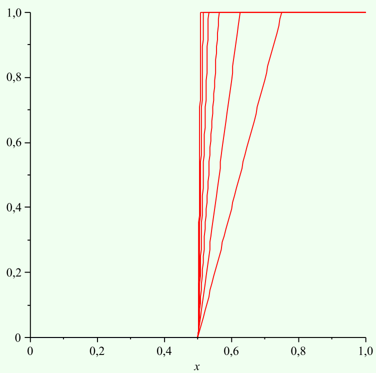
Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία. Πράγματι αν $n > m$,



Σχήμα 8.1: οι συναρτήσεις, $f_2, f_{32}, f_{64}, f_{128}$

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 109 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

$$
\begin{aligned}
d(f_n,f_m) &= \int_0^1 |f_n(x)-f_m(x)|dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |f_n(x)-f_m(x)|dx, \text{ εφόσον } f_n(x)=f_m(x) \text{ για κάθε } x\in[0,\tfrac{1}{2}]\cup[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{m},1] \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} f_n(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} f_m(x)dx \\
&= \frac{1}{2n}+(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})-\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})
\end{aligned}
$$

Επειδή η ακολουθία $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και άρα Cauchy από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει άμεσα ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $f\in C([0,1])$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f\in C([0,1])$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$.

Τότε θα είχαμε ότι

$$
d(f_n,f) = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f_n(x)-f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1-f(x)|dx \longrightarrow 0. \qquad (8.16)
$$

Από τα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού γνωρίζουμε ότι αν f συνεχής, $f(x)\geq 0$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έτσι από την (8.16) προκύπτει ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0$ και επομένως $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,\frac{1}{2}]$. Επίσης επειδή $\lim_n \frac{1}{n}=0$ για τον ίδιο λόγο ισχύει $1-f(x)=0$ για κάθε $x>1/2$. Επειδή f συνεχής θα έχουμε ότι $f(\frac{1}{2})=1$ το οποίο είναι άτοπο. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.14

Απόδειξη: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $d(m,n)$ είναι μετρική, δες Άσκηση 1.2.4 Θα δείξουμε ότι ο $(\mathbb{N}, d(\cdot,\cdot))$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Για κάθε $m < n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}. \tag{8.17}$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε ότι η ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Πράγματι από την (8.17) παίρνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι $d(m,n) < \varepsilon$ για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ με $m,n > n_0 = [1/\varepsilon]+1$, όπου $[1/\varepsilon]$ είναι το ακέραιο μέρος του $1/\varepsilon$. Έτσι έχουμε ότι η $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} d(n,n_0) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\lim_{n\to\infty} d(n,n_0) = 0$. Τότε για κάθε $n \geq 2n_0$,

$$d(n,n_0) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}\right| = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2n_0}$$

και άρα $d(n,n_0) > \frac{1}{2n_0}$ για κάθε $n \geq 2n_0$, επομένως $\lim_{n\to\infty} d(n,n_0) \neq 0$ άτοπο. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.15

Απόδειξη: Η $\tau o\xi \epsilon \varphi : \mathbb{R} \to (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση. Για $m < n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\tau o\xi \epsilon \varphi(n) - \tau o\xi \epsilon \varphi(m) = \tau o\xi \epsilon \varphi \frac{n-m}{1+nm}$$

Επειδή η $\tau o\xi \epsilon \varphi$ είναι συνεχής συνάρτηση και $\tau o\xi \epsilon \varphi(0) = 0$ έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|\tau o\xi \epsilon \varphi(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x \text{ με } |x| < \delta. \tag{8.18}$$

Επειδή για $m < n$

$$\frac{n-m}{1+nm} = \frac{1-\frac{m}{n}}{m+\frac{1}{n}} < \frac{1}{m} \tag{8.19}$$

από τις (8.18),(8.19) έχουμε ότι αν $\frac{1}{\delta} < m < n$

$$d(n, m) = |\tau o\xi \epsilon \varphi(n) - \tau o\xi \epsilon \varphi(m)| < \varepsilon$$

και επομένως η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι Cauchy ακολουθία.

Θα δείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Εάν υπήρχε τότε

$$d(x_n, x_0) = |\tau o\xi \epsilon \varphi(n) - \tau o\xi \epsilon \varphi(x_0)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Όμως $\lim_{n\to\infty} \tau o\xi \epsilon \varphi(n) = \frac{\pi}{2}$ και άρα θα πρέπει $\frac{\pi}{2} = \tau o\xi \epsilon \varphi(x_0)$, το οποίο είναι αδύνατον εφόσον δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $\tau o\xi \epsilon \varphi(x_0) = \frac{\pi}{2}$. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.16

Υπόδειξη: Εάν D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X δείξτε ότι τα σύνολα $\{B(x,r) : x \in D, r \in \mathbb{Q}\}$ ικανοποιούν το συμπέρασμα της Άσκησης. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.1.7

Υπόδειξη: Δείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ το πλήθος των στοιχείων του X με απόσταση ανά δύο μεγαλύτερη ή ίση του δ είναι πεπερασμένο το πλήθος. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.1.9

Υπόδειξη: για το α) ερώτημα χρησιμοποιείστε την Άσκηση 4.1.7

για το β) ερώτημα χρησιμοποιείστε ότι $A = (A \setminus Ac(A)) \cup (A \cap Ac(A))$ και τα ερωτήματα α) και την Άσκηση 4.1.7 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.1.11

Απόδειξη: Επειδή $D \cap U \subset U$ είναι άμεσο ότι $\overline{U \cap D} \subset \overline{U}$.

Έστω $x \in \overline{U}$. Τότε για κάθε περιοχή $B(x)$ του x ισχύει $B(x) \cap U \neq \emptyset$. Επειδή D πυκνό και $B(x) \cap U$ περιοχή του x,

$$(B(x) \cap U) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow B(x) \cap (U \cap D) \neq \emptyset.$$

Επομένως $x \in \overline{U \cap D}$ και άρα $\overline{U} \subset \overline{U \cap D}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.1.4

Απόδειξη: Έστω D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Επειδή $U_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$ έχουμε ότι $D \cap U_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$. Επιλέγουμε ένα $d_i \in U_i \cap D$ για κάθε $i \in I$. Επειδή $U_i \cap U_j = \emptyset$ έχουμε ότι $d_i \neq d_j$ για κάθε $i \neq j \in I$. Τότε η απεικόνιση $f : I \to D$, $f(i) = d_i$ είναι $1-1$. Επειδή D αριθμήσιμο έχουμε ότι το σύνολο I είναι αριθμήσιμο και επομένως τα σύνολα U_i, $i \in I$, είναι αριθμήσιμα το πολύ το πλήθος. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.1.5

Απόδειξη: Αρκεί να βρούμε ένα $\varepsilon > 0$ και ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο $(f_i)_{i\in I}$ από στοιχεία του $\mathcal{B}$ ώστε $d(f_t, f_s) \geq \varepsilon$ για κάθε $s \neq t$.

Για κάθε $t \in [\alpha,\beta]$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_t : [\alpha,\beta] \to \{0,1\}$ με $f_t(x) = 1$ αν $x \in [\alpha, t]$ και $f_t(x) = 0$ διαφορετικά. Για κάθε $t_1 \neq t_2 \in [\alpha,\beta]$ με $t_1 < t_2$ επιλέγουμε ένα $s \in (t_1, t_2]$. Τότε έχουμε ότι $f_{t_1}(s) = 0$, $f_{t_2}(s) = 1$ και άρα

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| : x \in [\alpha,\beta]\} \geq |f_{t_1}(s) - f_{t_2}(s)| = 1.$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $t_1 \neq t_2$, $d(f_{t_1}, f_{t_2}) \geq 1$. Οι συναρτήσεις $f_t, t \in [\alpha,\beta]$ είναι υπεραριθμήσιμες, εφόσον το $[\alpha,\beta]$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, και απέχουν ανά δύο απόσταση 1. Επομένως ο $(\mathcal{B}, d_\infty)$ δεν είναι διαχωρίσιμος μετρικός. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.1.6

Απόδειξη: Έστω D αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X και $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in D, r \in \mathbb{Q}\}$. Το σύνολο $\mathcal{B}$ έχει αριθμήσιμο το πλήθος στοιχεία Εάν G ανοικτό σύνολο και $y \in G$ τότε υπάρχει $r \in \mathbb{R}, r > 0$ ώστε $B(y, r) \subset G$. Εάν πάρουμε έναν οποιοδήποτε ρητό $s \in (0, r/2)$, επειδή D πυκνό υπάρχει $a \in D$ ώστε $a \in B(y, s)$. Τότε έχουμε ότι

$$y \in B(a, s) \subset B(y, r) \subset G.$$

Πράγματι εφόσον $a \in B(y, s) \Rightarrow d(y, a) < s \Rightarrow y \in B(a, s)$. Επίσης αν $x \in B(a, s)$,

$$d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) < s + s < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Rightarrow x \in B(y, r) \subset G.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.1.7

Απόδειξη: Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Από την Άσκηση 4.1.7 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία ανοικτών συνόλων $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ώστε για κάθε ανοικτό σύνολο G και κάθε $x \in G$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_n \subset G$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : X \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ με

$$f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ όπου } f_n(x) = 1 \text{ αν } x \in B_n \text{ και } f_n(x) = 0 \text{ αν } x \notin B_n.$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι $1-1$ και έτσι θα έχουμε ότι ο πληθάριθμος του X είναι μικρότερος ή ίσος του πληθάριθμου του $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Έστω $x \neq y$. Τότε $d(x, y) = \varepsilon > 0$ και $B(x, \varepsilon/4) \cap B(y, \varepsilon/4) = \emptyset$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $x \in B_n \subset B(x, \frac{\varepsilon}{4})$. Τότε έχουμε ότι $f_n(x) = 1$ ενώ $f_n(y) = 0$. Έτσι έχουμε ότι $f(x) \neq f(y)$ και άρα η f είναι $1-1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.1.8

Απόδειξη: Έστω ένα $\delta > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X με την ιδιότητα $x_n \neq x_m$ και $d(x_n, x_m) \geq \delta$ για κάθε $n \neq m$.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια ακολουθία. Από τη υπόθεση έχουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει ένα οριακό σημείο x. Άρα για $\varepsilon = \delta/10$ η περιοχή $B(x, \varepsilon)$ θα περιέχει άπειρα σημεία της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως θα έχουμε ότι

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq 2\varepsilon < \delta/5$$

για άπειρα n, m που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν F_δ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και $G_\delta = \{x_i^\delta : i \in F_\delta\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του X με την ιδιότητα

$$\text{για κάθε } x \in X \text{ υπάρχει } x_i^\delta \in G_\delta \text{ ώστε } d(x, x_i^\delta) < \delta. \ (**).$$

Επομένως η $\cup_{i\in F_\delta} B(x_i^\delta, \delta)$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του X.

Το σύνολο $D = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_{1/n} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \{x_i^{1/n} : i \in F_{1/n}\}$ είναι αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων και άρα είναι αριθμήσιμο σύνολο. Επίσης από την $(**)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_i^{1/n} \in G_{\frac{1}{n}} \subset G$ με $d(x, x_i^{1/n}) < 1/n$. Έτσι έχουμε ότι το G είναι πυκνό υποσύνολο του X. □

Πίσω στην Άσκηση 4.1.9

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 121 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: α) Έστω $Ac(A)$ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου A. Θα δείξουμε ότι το $X \setminus Ac(A)$ είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in X \setminus Ac(A)$. Τότε υπάρχει μια περιοχή $B(x, r)$ του x που περιέχει το πολύ αριθμήσιμα το πολύ το πλήθος στοιχεία του A. Θα δείξουμε ότι $B(x, r) \subset X \setminus Ac(A)$.

Για $y \in B(x, r)$ υπάρχει $r_y > 0$ ώστε $B(y, r_y) \subset B(x, r)$, δες Άσκηση 2.2.2. Επομένως η $B(y, r_y)$ περιέχει αριθμήσιμο το πολύ το πλήθος στοιχεία του A. Έτσι παίρνουμε ότι $y \in X \setminus Ac(A)$ και άρα $B(x, r) \subset X \setminus Ac(A)$.

Έτσι έχουμε ότι $X \setminus Ac(A)$ ανοικτό και άρα $Ac(A)$ κλειστό.

β) Για το β) ερώτημα,

$x \in Ac(A \cup B) \Leftrightarrow$ κάθε περιοχή του x περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία του $A \cup B$

$\Leftrightarrow$ κάθε περιοχή του x περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία του A ή του B

$\Leftrightarrow x \in Ac(A) \cup Ac(B)$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.1.10

Απόδειξη: Επειδή (X, d) διαχωρίσιμος από την Άσκηση 4.1.7 έχουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από ανοικτά υποσύνολα του X ώστε για κάθε G ανοικτό σύνολο και $y \in G$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $y \in B_n \subset G$.

Εάν το $A \subset X$ δεν έχει σημεία συμπύκνωσης, για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r_a > 0$ ώστε το σύνολο $B(a, r_a) \cap A$ να είναι αριθμήσιμο. Από τα παραπάνω έχουμε υπάρχει ένα $n(a) \in \mathbb{N}$ ώστε $a \in B_{n(a)} \subset B(a, r_a)$. Τα σύνολα $B_n \cap A$ είναι αριθμήσιμο το πλήθος. Επομένως το σύνολο

$$\mathcal{B} = \cup\{B_{n(a)} \cap A : B_{n(a)} \cap A \subset B(a, r_a) \cap A, a \in A\}$$

είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Έτσι έχουμε ότι $A \subset \mathcal{B}$ και άρα A αριθμήσιμο.

β) Ας παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $A\backslash Ac(A)$ δεν έχει σημεία συμπύκνωσης. Πράγματι, αν $x \in A\backslash Ac(A)$ τότε υπάρχει μια περιοχή του που περιέχει το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία του A και άρα x δεν είναι σημείο συμπύκνωσης του $A \setminus Ac(A)$.

Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το σύνολο $A \setminus Ac(A)$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Έτσι έχουμε ότι $A = (A \setminus Ac(A)) \cup (A \cap Ac(A))$ και άρα από το β) της Άσκησης 4.1.10 παίρνουμε

$$Ac(A) = Ac(A \cap Ac(A)) \subset Ac(Ac(A)).$$

Επίσης προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι $Ac(B) \subset \overline{B}$ για κάθε $B \subset X$ και άρα $Ac(Ac(A)) \subset \overline{Ac(A)} = Ac(A)$ από το α) ερώτημα της Άσκησης 4.1.10.

Έτσι από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$Ac(A) \subset Ac(Ac(A)) \subset Ac(A) \Rightarrow Ac(A) = Ac(Ac(A)).$$

□

Πίσω στην Άσκηση 4.1.11

Απόδειξη: Επειδή (X, d) διαχωρίσιμος από την Άσκηση 4.1.7 έχουμε ότι υπάρχει ένα αριθμήσιμο το πλήθος ανοικτών συνόλων $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ ώστε για κάθε ανοικτό σύνολο U και κάθε $x \in U$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_n \subset U$. Έστω x_0 ένα σημείο στο οποίο η f έχει αυστηρό τοπικό και U μια περιοχή του ώστε $f(x_0) > f(x)$ για κάθε $x \in U, x \neq x_0$. Τότε επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 \in B_n \subset U$. Έτσι έχουμε ότι $f(x_0) > f(x)$ για κάθε $x \in B_n, x \neq x_0$.

Για κάθε $x \in M$ θέτουμε $B_{n(x)}$ να είναι το μεγαλύτερο ως προς τη σχέση του περιέχεστε σύνολο από τα B_n που περιέχει το x και η f έχει τοπικό μέγιστο στην περιοχή $B_n(x)$ του x, δηλαδή

$$\text{αν } f(x) > f(y) \text{ για κάθε } y \in B_n \text{ και } x \in B_n \text{ τότε } B_n \subset B_{n(x)}.$$

Τότε έχουμε ότι η απεικόνιση $g : M \to \mathbb{N}, g(x) = n(x)$ είναι $1-1$ και επομένως το M είναι αριθμήσιμο. Πράγματι αν $n(x) = n(y)$ τότε έχουμε ότι η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο x στην $B_{n(x)}$ και επίσης έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο y στην $B_{n(x)}$. Από τον ορισμό του συνόλου $B_{n(x)}$ έχουμε ότι $x = y$. □

Πίσω στην Άσκηση 4.1.13

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εάν $G = \{0\}$ τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Έστω $G \neq \{0\}$ και θέτουμε

$$a = \inf(G \cap (0, \infty)).$$

Εάν $a > 0$ τότε ισχύει ότι $a \in G$. Πράγματι, αν $a \notin G$ από τον ορισμό του infimum για $0 < \varepsilon < a$ υπάρχουν $g_1 < g_2 \in G$ ώστε $a < g_1 < g_2 < a + \varepsilon$. Τότε όμως $0 < g_2 - g_1 < \varepsilon < a$ το οποίο είναι άτοπο εφόσον $g_2 - g_1 \in G$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $G = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\beta \in G$ με $\beta \neq na$ επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{Z}$ ώστε $n_0 a < \beta < (n_0 + 1)a$. Τότε

$$0 < \beta - n_0 a < a$$

άτοπο από τον ορισμό του a.

Εάν $a = 0$ τότε το G είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Πράγματι έστω $x < y \in \mathbb{R}$. Επειδή το G είναι συμμετρικό μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < x < y$. Θέτουμε $\delta = \min\{x, y - x\}$ και επιλέγουμε $g \in G$ με $0 < g < \delta$. Επίσης παίρνουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 g < y \leq (n_0 + 1)g$.

Από την επιλογή του δ έχουμε ότι $n_0 \geq 2$ εφόσον $2\delta < x + y - x = y$.

Επίσης ισχύει ότι $x \leq n_0 g < y$ διότι διαφορετικά $n_0 g < x < y < n_0 g + g \Rightarrow y - x < g < \delta$, άτοπο.

β) Θα δείξουμε ότι για κάθε $a \in [-1, 1]$ υπάρχει $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία των φυσικών αριθμών ώστε $\lim_{k\to\infty} \text{συν}(n_k) = a$.

Έστω $a \in [-1, 1]$. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\text{συν}(x) = a$.

Παίρνουμε το σύνολο των αριθμών $G = \{2\pi n + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι το σύνολο G είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $n_k, m_k \in \mathbb{Z}$ ώστε $x < z_k = 2\pi n_k + m_k < x + 1/k$ Τότε

$$|\text{συν}(x) - \text{συν}(z_k)| \leq |x - z_k| \leq 1/k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Επειδή $\text{συν}(2\pi n_k + m_k) = \text{συν}(m_k)$ και $\text{συν}(x) = \text{συν}(-x)$ έχουμε το αποτέλεσμα. □

Πίσω στην Άσκηση 4.1.13

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 5.1.12 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.13

Υπόδειξη: Για $x \in X$, Θεωρήστε την ακολουθία $x_1 = f(x)$ και $x_{n+1} = f(x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι συγκλίνει σ' ένα σημείο x_0 και $f(x_0) = x_0$ □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.33

Απόδειξη: Έστω $f \in C([0,1])$. Τότε για κάθε $g \in C([0,1])$ έχουμε ότι

$$|F(f) - F(g)| \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \int_0^1 dx = d_\infty(f,g).$$

Επομένως αν $\varepsilon > 0$ τότε για κάθε $g \in C([0,1])$ με $d_\infty(f,g) < \varepsilon$ έχουμε ότι $|F(f) - F(g)| < \varepsilon$. Έτσι έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.7

Απόδειξη: Έστω $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ συνεχής στο x_0 και $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0$.Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f(x_n),f(x_0))=0$ Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή f συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon \text{ για κάθε } x\in X \text{ με } d(x,x_0)<\delta. \tag{8.20}$$

Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $d(x_n,x_0)<\delta$ για κάθε $n\geq n_0$. Έτσι από την (8.20) έχουμε ότι για κάθε $n\geq n_0$, $\rho(f(x_n),f(x_0))<\varepsilon$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$. Εάν f δεν είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε

$$\text{για κάθε } \delta>0 \text{ υπάρχει } x_\delta\in X \text{ με } d(x_\delta,x_0)<\delta \text{ και } \rho(f(x_\delta),f(x_0))\geq\varepsilon.$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\delta=1/n$ επιλέγουμε $x_n\in X$ με $d(x_n,x_0)<1/n$ και $\rho(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$. Τότε έχουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x_0 ενώ η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$, που είναι άτοπο. Έτσι παίρνουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.8

Απόδειξη: Εάν η f είναι συνεχής τότε έχουμε ότι το $f^{-1}(\overline{f(A)})$ είναι κλειστό σύνολο ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου. Επειδή $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ έχουμε ότι

$$\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Αντιστρόφως έστω ότι κάθε $A \subset X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Τότε για κάθε κλειστό υποσύνολο F του Y,

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F \Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$$

και επομένως $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$. Άρα $f^{-1}(F)$ κλειστό και έτσι έχουμε ότι f είναι συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.9

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 5.1.8 Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ που συγκλίνει στο διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Εάν $x_k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ και $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ από τον ορισμό της μετρικής έχουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^k - x_i|^p\right)^{1/p} = 0.$$

Επειδή $|x_j^k - x_j| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^k - x_i|^p\right)^{1/p}$ έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j$. Έτσι έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} p_j(x_k) = p_j(x_0)$ και άρα η p_j είναι συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.10

Απόδειξη: Έστω D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του (X, d). Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής από την Άσκηση 5.1.9 έχουμε ότι $f(X) = f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$. Επίσης

$$f(D) \subset f(X) \subset \overline{f(D)} \Rightarrow f(X) = \overline{f(D)}.$$

Επομένως το $f(D)$ είναι αριθμήσιμο,πυκνό υποσύνολο του $f(X)$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.11

• Μετρικές

• Ανοικτά-κλειστά σύνολα

• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

• Διαχωρισιμότητα

• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

• Συμπάγεια

• Συνεκτικότητα

• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: α) Έστω $x, z \in X$. Τότε για κάθε $y \in K$,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \Rightarrow \operatorname{dist}(x,K) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $y_\varepsilon \in K$ με $d(z, y_\varepsilon) \leq \operatorname{dist}(z,K) + \varepsilon$. Τότε από την παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι

$$\operatorname{dist}(x,K) \leq d(x,z) + \operatorname{dist}(z,K) + \varepsilon.$$

Επειδή η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι $\operatorname{dist}(x,K) \leq d(x,z) + \operatorname{dist}(z,K)$. Όμοια $\operatorname{dist}(z,K) \leq d(z,x) + \operatorname{dist}(x,K)$. Επομένως

$$|\operatorname{dist}(x,K) - \operatorname{dist}(z,K)| \leq d(x,z).$$

Από την παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι

$$|\operatorname{dist}(x,K) - \operatorname{dist}(z,K)| \leq \varepsilon \ \text{ για κάθε } x, z \text{ με } d(x,z) < \varepsilon$$

και επομένως η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{dist}(x,K)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Έστω K είναι κλειστό. Τότε αν $\operatorname{dist}(x,K) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k \in K$ με $d(x,k) < \varepsilon \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap K \neq \emptyset$. Επομένως $x \in \overline{K} = K$.

Αντιστρόφως έστω ότι για κάθε $x \in X$ με $\operatorname{dist}(x,K) = 0$ ισχύει ότι $x \in K$. Εάν $x \in \overline{K}$ τότε έχουμε ότι $B(x,\varepsilon) \cap K \neq \emptyset$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και επομένως $\operatorname{dist}(x,K) = 0 \Rightarrow \overline{K} \subset K$. Έτσι έχουμε ότι $K = \overline{K}$ και άρα K είναι κλειστό. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.12

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 133 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: α) Έστω F κλειστό υποσύνολο του (X, d). Από την Άσκηση 5.1.12 έχουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, F)$$

είναι συνεχής. Επομένως για κάθε $n \in N$ το σύνολο $G_n = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, F) < 1/n\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι

$$F = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Είναι άμεσο ότι $F \subset G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εάν $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in F$ με $d(x, x_n) < 1/n$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ και επειδή F κλειστό σύνολο έχουμε ότι $x \in F$. Έτσι έχουμε ότι $F = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$..

β) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του X. Τότε το $F = X \setminus G$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $X \setminus G = \cup G_n$ όπου G_n ανοικτά υποσύνολα του X. Επομένως

$$G = X \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus G_n).$$

Τα σύνολα $F_n = X \setminus G_n$ είναι κλειστά και έτσι έχουμε $G = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.13

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 134 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $d(x, A) + d(x, B) > 0$. Πράγματι αν $d(x, A) + d(x, B) = 0 \Rightarrow d(x, A) = 0$ και $d(x, B) = 0$ και επειδή A, B κλειστά θα είχαμε $x \in A$ και $x \in B$, άτοπο εφόσον $A \cap B = 0$. Από την Άσκηση 5.1.12 έχουμε ότι οι συναρτήσεις $d(x, A)$, $d(x, B)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και επομένως η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Από τον ορισμό της $f(x)$ έχουμε ότι $f(x) \in [0, 1]$ για κάθε $x \in X$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $d(x, A) = 0$ και άρα $f(x) = 0$, ενώ αν $x \in B$, $d(x, B) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.14

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $y \in X$ με $d(x, y) < \delta$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ για κάθε $y \in B(x, \varepsilon)$.

Επιλέγουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_1$. Εάν $y \in B(x, \delta)$ επιλέγουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ με $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_2$. Τότε για κάθε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$ και άρα f συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.15

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset F_n$ και επομένως $f(\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n) \subset f(F_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n) \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$.

Έστω τώρα $y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in F_n$ ώστε $y = f(x_n)$. Εφόσον $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία από κλειστά υποσύνολα του X με $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ έχουμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy .
Πράγματι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$. Επειδή $x_n \in F_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι έχουμε ότι η ακολουθία είναι Cauchy .

Επειδή (X, d) πλήρης υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Από αυτή τη σχέση έχουμε ότι $x_0 \in \overline{F_n} = F_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $x_0 \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Επίσης επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ το x_0 είναι το μοναδικό σημείο που ανήκει στο σύνολο $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Πράγματι αν $z \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ τότε $d(x_0, z) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως $d(x_0, z) = 0 \Rightarrow x_0 = z$.

Επειδή η f είναι συνεχής έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f(x_n), f(x_0)) = 0 \Rightarrow y = f(x_0) \in f(\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n)$.
□

Πίσω στην Άσκηση 5.1.16

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in D$ και $\varepsilon > 0$. Τότε

$$|f(x_0) - f(x)| = |\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}| = |\frac{x - x_0}{x x_0}| \tag{8.21}$$

Εάν ισχύει ότι $|x| \geq |x_0|/2 \Rightarrow \frac{1}{|x|} \leq \frac{2}{|x_0|}$ και από την (8.21) έχουμε ότι

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \frac{2}{|x_0|^2}|x - x_0|. \tag{8.22}$$

Εάν επιπλέον ισχύει ότι $|x - x_0| \leq \varepsilon\frac{|x_0|^2}{2}$ από την (8.22) έχουμε ότι

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Επομένως αν $|x - x_0| \leq \min\{\frac{|x_0|}{2}, \varepsilon\frac{|x_0|^2}{2}\}$ τότε $|f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$ και έτσι έχουμε ότι η f είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αρκεί αν βρούμε ένα $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχουν $x, y \in D$ με $|x - y| < \delta$ και $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \geq \varepsilon$.

Για $\varepsilon = 1$ και για $\delta > 0$ εάν πάρουμε $x = \min\{\frac{1}{2}, \delta\}$ και $y = \frac{x}{2}$ έχουμε ότι

$$|x - y| = \frac{x}{2} < \delta \text{ και } |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \geq 1$$

Έτσι έχουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο D. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.17

Απόδειξη: Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy ακολουθία του X. Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον Y. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή f ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ για κάθε } x, y \in X \text{ με } d(x, y) < \delta. \tag{8.23}$$

Επειδή $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία, για $\varepsilon = \delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x_m) < \delta$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Από την (8.23) παίρνουμε

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

και έτσι έχουμε ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον Y. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.18

Απόδειξη: Έστω $(\widehat{X}, \tilde{d})$ η πλήρωση του X. Θα δείξουμε ότι $X = \widehat{X}$. Έστω $x_o \in \widehat{X} \setminus X$. Τότε $\tilde{d}(x_o, x) > 0$ για κάθε $x \in X$ και επομένως η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{\tilde{d}(x_0, x)}$ είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επειδή ο X είναι πυκνό υποσύνολο του $\widehat{X}$ έχουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του X που συγκλίνει στο x_0 στον $(\widehat{X}, \tilde{d})$. Τότε όμως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία και επειδή f ομοιόμορφα συνεχής έχουμε ότι και η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία του $\mathbb{R}$. Επειδή $\mathbb{R}$ πλήρης μετρικός η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ θα συγκλίνει σ' ένα $a \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι άτοπο εφόσον $\tilde{d}(x_0, x_n) \to 0 \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{\tilde{d}(x_n, x_0)} \to +\infty$.

Επομένως $X = \widehat{X}$ και άρα X είναι πλήρης. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.19

Απόδειξη: α) Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| = \left|\frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \\ &= \left|\frac{(x-y)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq |x-y|\frac{|x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &\leq |x-y|\frac{2\max\{|x|,|y|\}}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 2|x-y| \end{aligned}$$

εφόσον $\frac{\max\{|x|,|y|\}}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 1$.

ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

β) Έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| = \frac{|y^4 - x^4|}{(1+x^4)(1+y^4)} = \frac{|x-y|\,|x+y|\,(x^2+y^2)}{(1+x^4)(1+y^4)}$.

Επίσης

$$\begin{aligned} |x+y|(x^2+y^2) &\leq (|x| + |y|)(x^2+y^2) \\ &\leq 2\max\{|x|,|y|\}2\max\{|x|,|y|\}^2 = 4\max\{|x|,|y|\}^3. \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω ανισότητες,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|\frac{4\max\{|x|,|y|\}^3}{(1+x^4)(1+y^4)}. \tag{8.24}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $|z|^3 \leq 1 + |z|^4$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$. Πράγματι αν $|z| \leq 1$ τότε $|z|^3 \leq 1 \leq 1 + |z|^4$ ενώ αν $|z| > 1$ τότε $|z|^3 \leq |z|^4 \leq 1 + |z|^4$. Έτσι για $|z| = \max\{|x|,|y|\}$ από την (8.24) έχουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|\frac{4\max\{|x|,|y|\}^3}{(1+x^4)(1+y^4)} \leq 4|x-y|.$$

Έτσι για $\varepsilon > 0$ αν πάρουμε $\delta = \varepsilon/4$ έχουμε ότι $|f(x) - |(y)| < \varepsilon$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ και επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

γ) Εάν για $n = 1, 2, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{n}$ τότε για κάθε $n \neq m$,

$$|f(1+\frac{1}{n}) - f(1+\frac{1}{m})| = |\frac{1+\frac{1}{n}}{(1-1-\frac{1}{n})^2} - \frac{1+\frac{1}{m}}{(1-1-\frac{1}{m})^2}| = |n(n+1) - m(m+1)| > 1.$$

Επίσης $x_n - x_m = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \to 0$ καθώς $n, m \to \infty$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ενώ η $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι είναι. Από τη Άσκηση 5.1.18 έχουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.21

• Μετρικές

• Ανοικτά-κλειστά σύνολα

• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

• Διαχωρισιμότητα

• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

• Συμπάγεια

• Συνεκτικότητα

• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 142 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: α) Από το Θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $\eta\mu(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$\eta\mu(x) - \eta\mu(y) = \eta\mu'(z)(x-y) = \sigma\upsilon\nu(z)(x-y)$$

για κάποιο z μεταξύ x και y. Επομένως $|\eta\mu(x)-\eta\mu(y)| \leq |x-y|$. Επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|\eta\mu(x) - \eta\mu(y)| < \varepsilon$, και αυτό αποδεικνύει ότι η $\eta\mu(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Η ακολουθία $(x_n)_n = (\frac{2}{n\pi})_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ είναι Cauchy ενώ

$$|f(x_{2n}) - f(x_{2n+1})| = |\eta\mu(\pi n) - \eta\mu(\pi n + \frac{\pi}{2}))| = 1$$

και άρα η $f(x_n)$ δεν είναι Cauchy. Από την Άσκηση 5.1.18 έχουμε ότι f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.21

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } |x| \geq M. \tag{8.25}$$

Η συνάρτηση f περιορισμένη στο διάστημα $[-M, M]$, $f : [-M, M] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ για κάθε } x, y \in [-M, M] \text{ με } |x - y| < \delta. \tag{8.26}$$

Θα δείξουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ με } |x - y| < \delta. \tag{8.27}$$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta_0 = \min\{\delta, 2M\}$. Αν $x, y \in [-M, M]$ τότε από την(8.26) έχουμε το συμπέρασμα. Εάν $x, y \geq M$ ή $x, y \leq -M$ τότε από την (8.25) έχουμε το συμπέρασμα. Έστω $x < M < y$ και $y - x < \delta_0$. Τότε έχουμε ότι $M - x \leq y - x < \delta$, $x \in [-M, M]$ και

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f(M)| + |f(M) - f(x)| \\ &\leq |f(y)| + |f(M)| + |f(M) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ από τις (8.25),(8.26).} \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ αν $y < -M < x$ και $|x - y| < \delta_0$. Έτσι παίρνουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.22

- Μετρικές
- Ανοικτά-κλειστά σύνολα
- Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
- Διαχωρισιμότητα
- Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
- Συμπάγεια
- Συνεκτικότητα
- Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Εάν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και άρα από την Άσκηση 5.1.18 η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος το $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός a.

Θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ με $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a$.

Όπως προηγουμένως έχουμε ότι το $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ υπάρχει. Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = b \neq a$. Έστω $\varepsilon = |a-b| > 0$. Επειδή f ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/5 \;\text{ για κάθε } x, y \in (0,1) \text{ με } |x-y| < \delta.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$x_n < \tfrac{\delta}{2} \text{ και } y_n < \tfrac{\delta}{2} \text{ για κάθε } n \geq n_1.$$

Επίσης υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f(x_n) - a| < \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ και } |f(y_n) - b| < \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ για κάθε } n \geq n_2.$$

Τότε για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon}{5}$ εφόσον $|x_n - y_n| < \delta$ και

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= |f(x_n) - a + a - f(y_n) - b + b| \\ &\geq |a-b| - |f(x_n) - a| - |f(y_n) - b| \\ &\geq |a-b| - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

που είναι άτοπο.

Επομένως ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = a$ και έτσι έχουμε ότι το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχει $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.23

Απόδειξη: Ας παρατηρήσουμε ότι η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιομορφισμός. Ας παρατηρήσουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{αν } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Επίσης $|f(x)| = |\frac{x}{1+|x|}| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση, αν $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x} = y \in [0,1) \Rightarrow x = y + yx \Rightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Έτσι έχουμε ότι $f(\frac{y}{1-y}) = y$ για $y \in [0,1)$.

Αν $x < 0$,

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = y \in (-1,0) \Rightarrow x = y - yx \Rightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Έτσι έχουμε ότι $f(\frac{y}{1+y}) = y$ για $y \in (-1,0)$.

Επομένως αν $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{αν } x \in [0,1) \\ \frac{x}{1+x} & \text{αν } x \in (-1,0] \end{cases}$ τότε $f(g(x)) = x$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Επίσης αν $x \geq 0$, τότε $f(x) = x/(1+x) \in [0,1)$ και

$$g(f(x)) = g(\frac{1}{1+x}) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = x$$

και όμοια $g(f(x)) = x$ για $x \leq 0$. Επομένως $g = f^{-1}$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης $g(x)$ είναι άμεσο ότι είναι συνεχής και άρα επειδή f συνεχής έχουμε ότι f είναι ομοιομορφισμός.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}| = \frac{|x + x|y| - y - y|x||}{(1+|x|)(1+|y|)} \qquad (8.28)$$
$$\leq |x - y| + |x|y| - y|x||$$

Εάν $x = 0$ τότε $|f(0) - f(y)| \le |y|$.

Έστω $x \neq 0$. Παρατηρούμε ότι αν x, y ομόσημοι τότε $x|y| - y|x| = 0$, και από την (8.28) έχουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|.$$

Έστω x, y ετερόσημοι και $|x - y| < \delta$. Σε αυτή την περίπτωση

$$|x|y| - |x|y| = 2|xy|.$$

Εάν $x > 0$ και $y < 0$, $|y| = -y \le -y + x = |x - y| < \delta$ και $|x| = x \le x - y = |x - y| < \delta$. Από την (8.28) έχουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y| + 2|xy| \le \delta + 2\delta^2. \tag{8.29}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι ισχύει η (8.29) αν $x < 0$, $y > 0$ και $|x - y| < \delta$. Επομένως αν για $\varepsilon > 0$ επιλέξουμε δ ώστε $\delta + 2\delta^2 < \varepsilon$ από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon \quad \forall x, y \text{ με } |x - y| < \delta,$$

και άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.24

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι το $\overline{D} \subset D$. Έστω $x \in \overline{D}$. Από την ισοσυνέχεια της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ για κάθε $y \in B(x, \delta)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή $x \in \overline{D}$ μπορούμε να επιλέξουμε $y \in D$ με $d(x, y) < \delta$. Εφόσον η ακολουθία $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f_n(y) - f_m(y)| < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Τότε έχουμε ότι για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Επειδή $\varepsilon > 0$ τυχαίο έχουμε ότι η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Έτσι έχουμε ότι $x \in D$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.25

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

α) $a_n - a < \varepsilon$ και $b - b_n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

β) $d_\infty(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Από την Άσκηση 3.2.11 έχουμε ότι η f είναι συνεχής. Επειδή είναι ορισμένη στο σύνολο $[a, b]$ από τα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού γνωρίζουμε ότι είναι φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έτσι για κάθε $n \geq n_0$,

$$
\begin{aligned}
&|\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \\
&\leq |\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx - \int_a^{a_n} f(x)dx - \int_{b_n}^{b} f(x)dx| \\
&\leq |\int_{a_n}^{b_n} f_n(x) - f(x)dx| + \int_a^{a_n} |f(x)|dx + \int_{b_n}^{b} |f(x)|dx \\
&\leq d_\infty(f_n, f) \int_{a_n}^{b_n} dx + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^{a_n} dx + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_{b_n}^{b} dx \\
&\leq \varepsilon(b_n - a_n) + M(a_n - a) + M(b - b_n) < \varepsilon(b - a + 2M)
\end{aligned}
$$

για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.26

Απόδειξη: α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ για κάθε } n \geq n_1 \text{ και κάθε } x \in X \tag{8.30}$$

Από την Άσκηση 3.2.11 έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ και f συνεχής από την Άσκηση 5.1.8 υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ για κάθε } n \geq n_2. \tag{8.31}$$

Τότε για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ από τις (8.30),(8.31) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

και άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

β) Έστω $x \in [0,1]$. Εάν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εάν $x > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ $\frac{2}{n_0} \leq x$ και επομένως $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι συνεχείς. Πράγματι από τον τύπο των συναρτήσεων αρκεί να ελέγξουμε ότι η f_n είναι συνεχής στα σημεία $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}$. Εάν $\lim_{k\to\infty} x_k = 1/n$ τότε $\lim_{k\to\infty} n^2 x_k = n$ και $\lim_{k\to\infty} -n^2 x_k + 2n = n$. Επομένως $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = n = f_n(1/n)$ και άρα f_n συνεχής στο $1/n$.

Εάν $\lim_{k\to\infty} x_k = 2/n$ τότε $\lim_{k\to\infty} -n^2 x_k + 2n = 0$. Επομένως $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = 0 = f_n(1/n)$, και άρα f_n συνεχής στο $2/n$.

Η ακολουθία $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ τείνει στο 0 και $f_n(1/n) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = +\infty \neq 0$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.27

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\varepsilon n_0 < 1$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - \frac{[nf(x)]}{n}| = |f(x) - \frac{nf(x) + (-nf(x) + [nf(x)])}{n}|$$
$$= |\frac{nf(x) - [nf(x)])}{n}| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Έτσι έχουμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη f. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.28

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 152 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Από τα μαθήματα Απειροστικού γνωρίζουμε ότι η $\tau o\xi \varepsilon \varphi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι συνεχής, $\tau o\xi \varepsilon \varphi(0) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \tau o\xi \varepsilon \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \tau o\xi \varepsilon \varphi(nx) = \frac{\pi}{2}$ εφόσον $\lim\limits_{n\to\infty} nx = +\infty$.

Εάν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Έτσι έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα $[a, +\infty)$, $a > 0$.

Για $x > 0$ ισχύει

$$|f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = |\tau o\xi \varepsilon \varphi(nx) - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - \tau o\xi \varepsilon \varphi(nx)$$

Επίσης

$$\frac{\pi}{2} - \tau o\xi \varepsilon \varphi(nx) = u \iff nx = \varepsilon \phi(\frac{\pi}{2} - u) = \sigma \varphi(u) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \tau o\xi \varepsilon \varphi(nx) = \tau o\xi \sigma \varphi(nx).$$

Η συνάρτηση $\tau o\xi \sigma \varphi : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ είναι φθίνουσα και $\lim_{x\to\infty} \tau o\xi \sigma \varphi(x) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $0 \le \tau o\xi \sigma \varphi(x) < \varepsilon$ για κάθε $x > M$. Εάν $a > 0$ τότε επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $na \ge M$ για κάθε $n \ge n_0$ Τότε για κάθε

$$x > a \Rightarrow nx > na > M \text{ και άρα } \tau o\xi \sigma \varphi(nx) \le \tau o\xi \sigma \varphi(na) < \varepsilon.$$

Επομένως

$$|f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \tau o\xi \sigma \varphi(nx) \le \varepsilon \text{ για κάθε } x \ge a \text{ και κάθε } n \ge n_0$$

και έτσι έχουμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$.

Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στο $[0, +\infty)$. Εάν η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη θα είχαμε ότι θα υπήρχε ένα $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_n(x) - f(0)| = \tau o\xi \varepsilon \varphi(nx) < 1 \text{ για κάθε } x \in [0, \delta) \text{ και κάθε } n \ge n_0. \tag{8.32}$$

Όμως $f_n(\frac{1}{n^2}) = \tau o\xi\epsilon\varphi(n) \to \infty$ και έτσι έχουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η (8.32). $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.29

Απόδειξη: α)Από τον ορισμό των f_n έχουμε ότι $f_n(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εάν $x > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-n} < x$ για κάθε $n \geq n_0$ και επομένως $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

β) Έστω $n < m$ Τότε για $x = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{n+2}}$ έχουμε ότι $f_n(x) = 1$ ενώ $f_m(x) = 0$ εφόσον $2^{-m} < 3/2^{n+2}$. Έτσι έχουμε ότι

$$d(f_n, f_m) = \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [0, 1]\} \geq 1.$$

Επίσης αν $\operatorname{supp} f_n = \{x \in [0, 1] : f(x) \neq 0\}$, ισχύει ότι $\operatorname{supp} f_n = [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ και άρα $\operatorname{supp} f_n \cap \operatorname{supp} f_m = \emptyset$ για κάθε $n \neq m$. Έτσι έχουμε ότι $d_\infty(f_n, f_m) = 1$ εφόσον $\sup\{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι $d_\infty(f_n, f_m) = 1$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Εάν $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n, 0) = 0$ θα είχαμε ότι θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d_\infty(f_n, 0) < \frac{1}{4}\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow d_\infty(f_n, f_m) < \frac{1}{2}\ \forall n, m \geq n_0$$

που είναι άτοπο. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.30

Απόδειξη: α) Θα δείξουμε ότι για κάθε $t \in (0,1)$ ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} n^2 t(1-t)^n = 0$, εφόσον $f_n(0) = 0 = f_n(1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ένας τρόπος να το δείξουμε είναι να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t(1-t)^n$. Αν θέσουμε $a_n = n^2 t(1-t)^n$ τότε έχουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 t(1-t)^{n+1}}{n^2 t(1-t)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}(1-t) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1-t) < 1.$$

Έτσι από το κριτήριο λόγου σειρών έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει και επομένως $\lim_{n\to\infty} n^2 t(1-t)^n = 0$.

β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$f_n(\frac{1}{n}) = n^2 \frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})^n \to \infty$$

εφόσον $\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$. Έτσι έχουμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.31

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Εφόσον f είναι ομοιόμορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| < 1 \text{ για κάθε } x, \in \mathbb{R}^n \text{ με } d(x,y) \leq \delta. \tag{8.33}$$

Έστω $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$. Θέτουμε $x_k = \frac{k\delta}{||x||}(x_i)_{i=1}^n$ για $k = 0, \ldots, n_0 = [\frac{||x||}{\delta}]$.

Τότε έχουμε ότι για $k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$

$$d(x_{k+1}, x_k) = \left(\sum_{i=1}^n |\frac{\delta}{||x||}((k+1)x_i - kx_i)|^2 \right)^{1/2} = \delta,$$

και $d(x, x_{n_0}) < \delta$.

Επομένως από την (8.33) έχουμε ότι $|f(x) - f(x_{n_0})| < 1$ και

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < 1 \text{ για κάθε } k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \\ &\leq |f(0)| + |f(x) - f(x_{n_0})| + \sum_{k=1}^{n_0} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq |f(0)| + 1 + n_0 \leq |f(0)| + \frac{||x||}{\delta} + 1. \end{aligned}$$

Επομένως αν θέσουμε $b = |f(0)| + 1$ και $a = \frac{1}{\delta}$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.32

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και παίρνουμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $x_1 = f(x)$ και $x_{n+1} = f(x_n)$. Η ακολουθία αυτή είναι Cauchy. Πράγματι ας παρατηρήσουμε ότι $x_{n+k} = f(x_{n+k-1}) = f(f(x_{n+k-2})) = \cdots = f^k(x_n)$ όπου $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$, k – φορές.

Επειδή η f είναι συστολή έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \vartheta d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq \vartheta^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \vartheta^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Τότε για κάθε $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (\vartheta^{n-1} + \vartheta^{n-2} + \cdots + \vartheta^m) d(x_1, x_0) \\ &= \vartheta^m (1 + \vartheta + \cdots + \vartheta^{n-m-1}) d(x_1, x_0) = \frac{\vartheta^n}{1-\vartheta} d(x_1, x_0) \end{aligned} \tag{8.34}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta^n = 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{\vartheta^n}{1-\vartheta} d(x_1, x_0) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Από την (8.34) έχουμε ότι $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n > m \geq n_0$ και επομένως η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Επειδή ο (X, d) είναι πλήρης υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Είναι άμεσο ότι κάθε συνάρτηση συστολής είναι και συνεχής και επομένως $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Όμως $f(x_n) = x_{n+1}$ και άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0$. Έτσι παίρνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) = x_0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι το x_0 είναι το μοναδικό σημείο με την ιδιότητα $f(x_0) = x_0$.

Έστω $y \in X$ με $f(y) = y$ Τότε έχουμε ότι

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \vartheta d(x, y) \Rightarrow d(x, y) = 0$$

εφόσον $\vartheta < 1$ και $d(x, y) \geq 0$. Επομένως $x_0 = y$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.33

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{2}(\text{συν}(x) - 2)$. Ας παρατηρήσουμε ότι $f(I) \subset I$.

Πράγματι, για κάθε x, $-1 \le \text{συν}(x) \le 1 \Rightarrow -1.5 \le \frac{\text{συν}(x)-2}{2} \le -0.5$

$$\begin{aligned}\text{Επίσης, } |f(x) - f(y)| &= \frac{1}{2}|\text{συν}(x) - \text{συν}(y)| \\ &= \frac{1}{2}|\text{ημ}(t_0)||x - y| \text{ για κάποιο } t_0 \text{ από Θεώρημα μέσης τιμής} \\ &\le \frac{|x-y|}{2}\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι η $f(x)$ είναι συνάρτηση συστολής και άρα από την Άσκηση 5.1.33 υπάρχει $x \in [-1.5, -0.5]$ με $x = f(x) = \frac{1}{2}(\text{συν}(x) - 2) \Rightarrow 2x = \text{συν}(x) - 2$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.34

- Μετρικές
- Ανοικτά-κλειστά σύνολα
- Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
- Διαχωρισιμότητα
- Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
- Συμπάγεια
- Συνεκτικότητα
- Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε ότι $f'(x) = \frac{2(3x+2)-(2x+3)3}{(3x+2)^2} = \frac{-5}{(3q+2)^2} < 0$.

Έτσι από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής,

$$|f(x) - f(y)| = |f'(t)||x - y| < \frac{1}{2}|x - y|.$$

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.1.33 και να πάρουμε ένα $x \in [2, +\infty)$ με $f(x) = x$ θα πρέπει να ελέξγγουμε ότι το $I = [2, +\infty)$ με την μετρική του $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και $f : I \to I$.

Είναι άμεσο να δούμε ότι το το $I = [2, +\infty)$ με την μετρική του $\mathbb{R}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος αλλά δεν ισχύει ότι $f(I) \subset I$. Πράγματι $f(2) = \frac{4+3}{6+2} = \frac{7}{8} < 2$.

Άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα της Άσκησης 5.1.33. Ας παρατηρήσουμε ότι αν λύσουμε την εξίσωση $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2} = x$ παίρνουμε $x = \pm 1$ που δεν είναι στο πεδίο ορισμού της f. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.35

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την Άσκηση 6.1.8 ◻

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.9

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα και βρείτε μια υπακολουθία από στοιχεία του K χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.13

Υπόδειξη: 1) $\Rightarrow$ 2) Με εις άτοπο απαγωγή 2) $\Rightarrow$ 3) Με εις άτοπο απαγωγή και Άσκηση 6.1.13 3) $\Rightarrow$ 1) Με εις άτοπο απαγωγή και Άσκηση 6.1.12 $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.14

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 6.1.8 $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.16

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο και εξετάστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις το A να είναι φραγμένο και όχι φραγμένο. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.20

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = d(f(x), x)$ και δείξτε ότι $\inf_{x \in X} g(x) > 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.22

Υπόδειξη: Δείξτε ότι $f(X)$ πυκνό υποσύνολο του X. Υποθέστε ότι $B(x_0, \varepsilon) \cap f(X) = \emptyset$ και θεωρήστε την ακολουθία $x_n = f^{(n)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{φορές}}(x)$ □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 6.1.24

Απόδειξη: *i*) Το σύνολο $[0, 1)$ δεν είναι κλειστό, εφόσον $x_n = 1 - 1/n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ και $1 \notin A$. Άρα δεν είναι συμπαγές.

ii) Το σύνολο $[0, +\infty)$ δεν είναι φραγμένο και άρα δεν είναι συμπαγές.

iii)Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ δεν είναι κλειστό σύνολο, δες Άσκηση 2.2.4, και άρα δεν είναι συμπαγές.

iv) Θα δείξουμε ότι το A είναι κλειστό και φραγμένο και άρα θα είναι και συμπαγές. Από τον ορισμό του συνόλου A έχουμε ότι για κάθε $(x, y) \in A$ ισχύει $4x^2 \le 1$ και $y^2 \le 1$ και άρα $(x, y) \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-1, 1]$. Έτσι έχουμε ότι το σύνολο A είναι φραγμένο. Επίσης η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ είναι συνεχής και επομένως το σύνολο $f^{-1}(1)$ είναι κλειστό. Αλλά $f^{-1}(1) = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = f(x, y) = 1\}$ και έτσι έχουμε ότι το A είναι επίσης και κλειστό σύνολο.

v) Θα δείξουμε ότι το A είναι κλειστό και φραγμένο και άρα θα είναι και συμπαγές. Από τον ορισμό του συνόλου A έχουμε ότι για κάθε $(x, y) \in A$ ισχύει $|x| \le 1$ και $|y| \le 1$ και επομένως $A \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$, άρα φραγμένο.

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = |x| + |y|$ είναι συνεχής και επομένως το σύνολο $f^{-1}([0, 1])$ είναι κλειστό. Αλλά $f^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\} = A$ και επομένως το A είναι και κλειστό σύνολο.

iv) το σύνολο A δεν είναι φραγμένο σύνολο εφόσον τα σημεία $(n, 1) \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα το σύνολο A δεν είναι συμπαγές.

vii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σημείο $(n, \frac{1}{n}) \in A$ και άρα το σύνολο A δεν είναι φραγμένο και άρα δεν είναι συμπαγές. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.7

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του F. Υπάρχει ένα $i_0 \in I$ ώστε $x \in U_{i_0}$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in U_{i_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Για κάθε $n = 1, \ldots, n_0$ υπάρχει $i_n \in I$ ώστε $x_i \in U_{i_n}$. Τότε έχουμε ότι $F \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_{n_0}}$ και αυτό αποδεικνύει ότι η ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.8

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι το A είναι κλειστό αρκεί να δείξουμε ότι αν μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A συγκλίνει σε ένα $x \in X$ τότε $x \in A$.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του A που συγκλίνει στο $x \in X$. Επειδή $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ από την Άσκηση 6.1.8 έχουμε ότι το σύνολο $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές. Από τις υποθέσεις της άσκησης έχουμε ότι το σύνολο $A \cap K$ είναι κλειστό. Επειδή $x_n \in A \cap K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,το $A \cap K$ κλειστό και $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ έχουμε ότι $x \in A \cap K \subset A$. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.9

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in A$ με $A \subset \cup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon/2)$ και άρα και $B \subset \cup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon/2)$.

Για κάθε $i = 1, \ldots, k$ ώστε $B \cap B(x_i, \varepsilon/2) \neq \emptyset$ επιλέγουμε $y_i \in B \cap B(x_i, \varepsilon/2)$. Τότε για $x \in B$ υπάρχει $i \leq k$ με

$$x \in B \cap B(x_i, \varepsilon/2) \Rightarrow d(x, y_i) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y_i) < \varepsilon$$

και επομένως $x \in B(y_i, \varepsilon)$. Επομένως $B \subset \cup_{i \in F} B(y_i, \varepsilon)$, όπου $F = \{i \leq k : B \cap B(x_i, \varepsilon/2) \neq \emptyset\}$ και επομένως το B είναι ολικά φραγμένο. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.10

Απόδειξη: α) Επειδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Τότε $A \subset \cup_{i=1}^{n_0} B(x_i, \varepsilon)$ και επομένως A ολικά φραγμένο.

β) Εάν υπάρχει άπειρο υποσύνολο N_1 του $\mathbb{N}$ ώστε $x_n = x_m$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}_1$ τότε είναι προφανές ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει Cauchy υπακολουθία. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει σταθερή υπακολουθία. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή A ολικά φραγμένο υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k} \in A$ ώστε $A \subset \cup_{i=1}^{k} B(x_{n_i}, \varepsilon)$.

Για $\varepsilon = 1$ υπάρχουν $k_1 \in \mathbb{N}$ και $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k_1}} \in A$ ώστε $A \subset \cup_{i=1}^{k} B(x_{n_i}, 1)$.

Επειδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρους όρους υπάρχει $n_1 \in \{1, \ldots, k_1\}$ και άπειροι όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ανήκουν στη μπάλα $B(x_{n_1}, 1)$. Αυτοί οι άπειροι όροι είναι μια υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θέτουμε $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x_{n_1}, \varepsilon)\}$. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι το N_1 είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

Από την Άσκηση 6.1.10 έχουμε ότι το σύνολο $A_1 = \{x_n : n \in N_1\}$ είναι ολικά φραγμένο. Έτσι για $\varepsilon = 1/2$ υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ και F_2 πεπερασμένο υποσύνολο του N_1 ώστε $A_1 \subset \cup_{i\in F} B(x_i, 1/2)$. Όπως πριν υπάρχει N_2 άπειρο υποσύνολο του N_1 και $i_2 \in F$ ώστε $\{x_n : n \in N_2\} \subset B(x_{i_2}, 1/2)$.

Συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο παίρνουμε $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset N_2 \supset \ldots$ όπου N_i άπειρο υποσύνολο του N_{i-1}, και $n_k \in N_k$ ώστε $\{x_n : n \in N_k\} \subset B(x_{n_k}, 1/k)$.

Επιλέγουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ $i_k \in N_k$ ώστε $i_k < i_{k+1}$. Αυτή η επιλογή είναι δυνατή διότι για κάθε k το σύνολο N_k είναι άπειρο.

Τότε υπακολουθία $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ με $2/k_0 < \varepsilon$. Τότε για κάθε $k \geq k_0, i_k \in N_k \subset N_{k_0}$ και άρα

$$\text{για κάθε } k, m \geq k_0 \;\; x_{i_k} \in B(x_{n_{k_0}}, 1/k_0) \Rightarrow d(x_{i_k}, x_{i_m}) \leq 2/k_0 < \varepsilon.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 6.1.11

- Μετρικές
- Ανοικτά-κλειστά σύνολα
- Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
- Διαχωρισιμότητα
- Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
- Συμπάγεια
- Συνεκτικότητα
- Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω (X, d) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει F πεπερασμένο υποσύνολο του X ώστε $X \subset \cup_{x \in F} B(x, \varepsilon)$.

Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει F_n πεπερασμένο υποσύνολο του X ώστε $X \subset \cup_{x \in F_n} B(x, 1/n)$. Τότε το σύνολο $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι $\overline{D} = X$.

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \varepsilon$. Τότε από τον ορισμό του F_n έχουμε ότι υπάρχει $y \in F_n \subset F$ με $d(x, y) < 1/n < \varepsilon$. Έτσι έχουμε ότι $x \in \overline{D}$ και άρα $X = \overline{D}$. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.12

• *Μετρικές*
• *Ανοικτά-κλειστά σύνολα*
• *Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι*
• *Διαχωρισιμότητα*
• *Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων*
• *Συμπάγεια*
• *Συνεκτικότητα*
• *Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass*

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 174 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το K δεν ολικά φραγμένο. Τότε υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N} \text{ και κάθε επιλογή } x_1, \ldots, x_k \in K \text{ ισχύει } \cup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon) \subsetneqq K. \tag{8.35}$$

Επιλέγουμε $x_1 \in K$. Από την (8.35) έχουμε ότι υπάρχει $x_2 \in K$ με $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει $x_1, \ldots, x_n \in K$ με

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon \text{ για κάθε } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ με } i \neq j.$$

Τότε από την (8.35) έχουμε ότι $\cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subsetneqq K$ και επομένως υπάρχει $x_{n+1} \in K \setminus \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Είναι άμεσο ότι $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Συνεχίζοντας επιλέγουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του K με $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \neq m$. Η ακολουθία αυτή δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία που είναι σε αντίθεση με την υπόθεση. Επομένως το K είναι ολικά φραγμένο. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.13

• Μετρικές

• Ανοικτά-κλειστά σύνολα

• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι

• Διαχωρισιμότητα

• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων

• Συμπάγεια

• Συνεκτικότητα

• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Σελίδα 175 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: 1) $\Rightarrow$ 2). Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι άμεσο ότι υπάρχουν πεπερασμένο το πλήθος όροι της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι ίσοι μεταξύ τους. Από την Άσκηση 3.2.3 έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε δεν υπάρχει $n > m$ με $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Επομένως για κάθε $x \in X$ υπάρχει μπάλα $B(x, \varepsilon(x))$ που περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε οι μπάλες $\{B(x, \varepsilon(x)) : x \in X\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Επειδή X συμπαγής υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του X ώστε $X = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon(x_i))$. Επειδή $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ υπάρχει ένα $i \leq n$ ώστε η μπάλα $B(x_i, \varepsilon(x_i))$ περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας που είναι άτοπο.

2) $\Rightarrow$ 3). Από την υπόθεση και την Άσκηση 3.2.1 έχουμε ότι ο (X, d) είναι πλήρης. Από την Άσκηση 6.1.13 έχουμε επίσης ότι ο X είναι ολικά φραγμένος.

3) $\Rightarrow$ 1). Έστω (X, d) πλήρης και ολικά φραγμένος. Τότε από την Άσκηση 6.1.12 έχουμε ότι ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος Εάν D ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X τότε το σύνολο $\mathcal{B} = \{B(x, q) : x \in D, q \in \mathbb{Q}\}$ έχει αριθμήσιμο το πλήθος στοιχεία. Επίσης για κάθε $x \in X$ και U ανοικτό με $x \in U$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B \subset U$.

Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του X. Από τα παραπάνω έχουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\mathcal{B}$ με $X = \cup_{i\in I} U_i = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ και για κάθε $n \in N$ $B_n \subset U_i$ για κάποιο $i \in I$.

Εάν η κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη τότε έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\cup_{n=1}^{k} B_n \subsetneqq X$.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, $X = \cup_{n=1}^{k} B_n$ τότε επειδή $B_n \subset U_{i_n}$ για κάποιο $i_n \in I$ θα είχαμε $X = \cup_{n=1}^{k} U_{i_n}$ που είναι άτοπο.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \notin \cup_{i=1}^{n-1} B_i$. Από τις υποθέσεις παίρνουμε ότι σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο και άρα από την Άσκηση 6.1.11 έχουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει Cauchy υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Επειδή X πλήρης έχουμε ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0$. Επειδή $x \in X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε $x \in B_{n_0}$. Επειδή $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_{n_k} \in B_{n_0}$ για κάθε $k \geq k_0$. Από την επιλογή της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχουμε ότι $x_n \notin B_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα $x_{n_k} \notin B_{n_0}$ για κάθε k με $n_k \geq n_0$. Έτσι έχουμε άτοπο, και επομένως η κάλυψη $(U_i)_{i \in I}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.14

Απόδειξη: Έστω (X, d) συμπαγής και $(F_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Ας υποθέσουμε ότι $\cap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Τότε έχουμε ότι $X = \cup_{i\in F} X \setminus F_i$. Επειδή F_i κλειστό έχουμε ότι $X \setminus F_i$ είναι ανοικτό για κάθε $i \in I$ και επομένως η $(X \setminus F_i)_{i\in I}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του X. Επειδή X συμπαγής υπάρχει G πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $X = \cup_{i\in G} X \setminus F_i \Rightarrow \cap_{i\in G} F_i = \emptyset$ που είναι άτοπο. Επομένως $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

Αντιστρόφως έστω ότι ο (X, d) έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής και $(G_i)_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του X. Αν δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(G_i)_{i\in I}$, έχουμε ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I ισχύει ότι $\cup_{i\in F} G_i \neq X \Rightarrow \cap_{i\in F}(X \setminus G_i) \neq \emptyset$. Έτσι παίρνουμε ότι η $(X \setminus G_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια από κλειστά υποσύνολα του X με την ιδιότητα της πεπερασμένη τομής και επομένως $\cap_{i\in I}(X \setminus G_i) \neq \emptyset \Rightarrow \cup_{i\in I} G_i \subsetneq X$ που είναι άτοπο.

Έτσι έχουμε ότι υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(G_i)_{i\in I}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.15

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Από την Άσκηση 6.1.8 έχουμε ότι το σύνολο $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές. Επομένως επειδή $f_{|F}$ συνεχής έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Έτσι έχουμε ότι η f είναι συνεχής. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.16

Απόδειξη: Από την Άσκηση 6.1.14 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $f(X)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Εάν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του $f(X)$ τότε έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n)$ όπου $x_n \in \mathbb{N}$. Επειδή ο (X, d) είναι συμπαγής η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $x = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$. Επειδή η f είναι συνεχής έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$. Έτσι έχουμε ότι η υπακολουθία $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x) \in f(X)$ και άρα το $f(X)$ συμπαγές υποσύνολο του Y. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.17

Απόδειξη: Επειδή X συμπαγής και f συνεχής από την Άσκηση 6.1.17 το σύνολο $K = f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από τη θεωρία έχουμε ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Επομένως $\sup K, \inf K \in \mathbb{R}$. Από τις ιδιότητες του sup και του inf έχουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του X ώστε $f(x_n) \to \inf K$ και $f(y_n) \to \sup K$. Επειδή K κλειστό και $f(x_n), f(y_n) \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\inf(K), \sup(K) \in K$ και αυτό ολοκληρώνει τη λύση. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.18

Απόδειξη: α) Εάν υπήρχε πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για το $I_{0,1}$ θα υπήρχε F_1 πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $I_{0,1} \subset \cup_{i\in F_1} U_i$. Επίσης αν υπήρχε πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για το $I_{0,2}$ θα υπήρχε F_2 πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $I_{0,2} \subset \cup_{i\in F_2} U_i$. Τότε το $F_1 \cup F_2$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I και $[a,b] = I_{0,1} \cup I_{0,2} \subset \cup\{U_i : i \in F_1 \cup F_2\}$ που είναι άτοπο.

Έτσι έχουμε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για τουλάχιστον ένα από τα διαστήματα $I_{0,1}, I_{0,2}$. Ονομάζουμε I_1 αυτό το διάστημα. Ας παρατηρήσουμε ότι $I_1 \subset [a,b]$ και

$$\max I_1 - \min I_1 = \frac{b-a}{2}.$$

β) Έστω I_1 το υποδιάστημα του α) ερωτήματος για το οποίο η δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$. Επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα του α) ερωτήματος. Εάν υπήρχε πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για το $I_{1,1}$ θα υπήρχε $F_{1,1}$ πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $I_{1,1} \subset \cup_{i\in F_{1,1}} U_i$. Όμοια αν υπήρχε πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για το $I_{1,2}$ θα υπήρχε $F_{1,2}$ πεπερασμένο υποσύνολο του I ώστε $I_{1,2} \subset \cup_{i\in F_{1,2}} U_i$. Τότε το $F_{1,1} \cup F_{1,2}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I και $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \subset \cup\{U_i : i \in F_{1,1} \cup F_{1,2}\}$ που είναι άτοπο.

Έστω I_2 ένα από τα υποσύνολα $I_{1,1}, I_{1,2}$ για το οποίο δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$. Ας παρατηρήσουμε ότι $I_2 \subset I_1$ και

$$\max I_2 - \min I_2 = \frac{\max I_1 - \min I_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

γ) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $I_1, \ldots, I_n$ ώστε

1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n$

2) αν $I_n = [a_n, b_n]$ τότε $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

3) Δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για κανένα από τα $I_1, \ldots, I_n$.

Θέτουμε $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Εάν θέσουμε $I_{n,1} = [a_n, c_n]$ και $I_{n,2} = [c_n, b_n]$ όπως το βήμα α) βρίσκουμε ότι δεν υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $I_{n,1}, I_{n,2}$. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_{n+1}. Ας παρατηρήσουμε ότι $I_{n+1} \subset I_n$ και

$$\max I_{n+1} - \min I_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-2}{2^{n+1}}$$

από ιδιότητα 2).

δ) Από την ιδιότητα $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ έχουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι έχουμε ότι τα $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ και $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ υπάρχουν και $A \leq B$. Επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$ έχουμε ότι $A = B$.

ε)Θέτουμε $x_0 = A = B$. Επειδή $(U_i)_{i\in I}$ ανοικτή κάλυψη του $[a, b]$ υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Επειδή U_{i_0} ανοικτό υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x_0, \varepsilon_0) \subset U_{i_0}$. Επίσης επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε $a_n, b_n \in B(x_0, \varepsilon_0)$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε έχουμε ότι $[a_n, b_n] \subset U_{i_0}$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη του $[a_n, b_n]$, που είναι άτοπο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.19

Απόδειξη: Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που το A είναι φραγμένο. Τότε το A δεν είναι κλειστό, διαφορετικά θα ήταν κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα συμπαγές. Επομένως υπάρχει $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. Θέτουμε

$$f(x) = \frac{1}{|x - x_0|} \quad \text{για κάθε } x \in A.$$

Η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη εφόσον $|x - x_0| \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Επίσης δεν είναι φραγμένη διότι εφόσον $x \in \overline{A}$ υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A ώστε $|x_n - x_0| \to 0$ και άρα $\sup_{n\in N} f(x_n) = +\infty$. Θα δείξουμε ότι f συνεχής. Από την Άσκηση 5.1.12 η συνάρτηση $g(x) = |x - x_0|$ είναι συνεχής. Επειδή $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι η συνάρτηση $1/g(x)$ είναι συνεχής.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση A όχι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε έχουμε $\inf A = -\infty$ ή $\sup A = +\infty$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ για κάθε $x \in A$. Τότε η f είναι συνεχής και μη φραγμένη. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.20

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε ότι αν A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε A είναι κλειστό και φραγμένο. Έστω ότι $A \subset \mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

Περίπτωση 1. Έστω ότι το A δεν είναι φραγμένο σύνολο.

Τότε παίρνουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$.

Επειδή $1 + |x| \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επίσης είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $0 \leq f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο τότε $\sup A = +\infty$. Επομένως υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του A ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Τότε έχουμε ότι

$$\sup\{f(x) : x \in A\} \geq \sup\{\frac{x_n}{1 + x_n} : n \in \mathbb{N}\} = 1,$$

εφόσον $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = 1$. Είναι άμεσο ότι δεν υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = 1$.

Εάν το δεν είναι κάτω φραγμένο με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι δεν υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$.

Περίπτωση 2 Το A δεν είναι κλειστό.

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. Επίσης υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του A ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x - x_0|$. Τότε για κάθε $x \in A$, $f(x) \geq \inf\{|a - x_0| : a \in A\} = 0$. Εάν υπάρχει $a \in A$ ώστε $|a - x_0| = \inf\{|x - x_0| : x \in A\} = 0$ τότε θα είχαμε ότι $x_0 \in A$ που είναι άτοπο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.21

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = d(f(x), x)$. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής εφόσον η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής.

Επειδή X συμπαγής μετρικός χώρος και $g(x)$ συνεχής από την Άσκηση 6.1.17 έχουμε ότι το σύνολο $\{d(f(x), x) : x \in X\}$ είναι συμπαγές Από την Άσκηση 6.1.18 έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε

$$g(x_0) = d(f(x_0), x_0) = \inf\{d(f(x), x) : x \in X\}.$$

Επειδή $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $d(x_0, f(x_0)) > 0$ και αυτό ολοκληρώνει τη λύση της άσκησης. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 6.1.22

Απόδειξη: α) Εάν $K \cap H \neq \emptyset$ είναι άμεσο ότι $d(K, H) = 0$.

Αντιστρόφως έστω $d(K, H) = 0$. Τότε έχουμε ότι

$$\inf\{\mathrm{dist}(x, H) : x \in K\} = 0$$

και επομένως υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του K ώστε $\mathrm{dist}(x_n, H) < 1/n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $h_n \in H$ ώστε $d(x_n, h_n) < 1/n$.Επειδή K συμπαγές η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω x_0 το όριο της υπακολουθίας $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{k_n}, x_0) = 0$ και $x_0 \in K$ εφόσον K συμπαγές. Από την τριγωνική ανισότητα

$$d(h_{k_n}, x_0) \leq d(h_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0) < \frac{1}{k_n} + d(x_{k_n}, x_0) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

και άρα $\lim\limits_{n\to\infty} d(h_{k_n}, x_0) = 0$. Επειδή H κλειστό $x_0 \in H$. Έτσι έχουμε ότι $x_0 \in H \cap K$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $d(K, H) = a > 0$. Επιλέγουμε ένα β ώστε $0 < \beta < a$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mathrm{dist}(x, H)$ Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής, δες Άσκηση 5.1.12, $K \subset f^{-1}(\beta, +\infty)$ και $H \subset f^{-1}(-\infty, \beta)$. Πράγματι εάν $x \in K$ τότε

$$f(x) = \mathrm{dist}(x, H) \geq \inf_{y\in K} \mathrm{dist}(y, H) = a > \beta \Rightarrow x \in f^{-1}(\beta, \infty).$$

Επίσης για κάθε $z \in H$, $f(z) = 0 \Rightarrow z \in f^{-1}(-\infty, \beta)$. Επειδή f συνεχής τα σύνολα $U = f^{-1}(\beta, \infty)$ και $V = f^{-1}(-\infty, \beta)$ είναι ανοικτά, και εξ ορισμού είναι ξένα. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.23

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ας παρατηρήσουμε ότι από την $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, προκύπτει άμεσα ότι η f είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι το $f(X)$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Επειδή X συμπαγής και η f είναι συνεχής έχουμε ότι $f(X)$ συμπαγές και άρα κλειστό. Εάν αποδείξουμε ότι είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{f(X)} = X$ τότε θα έχουμε ότι $f(X) = X$ και άρα f επί.

Έστω ότι $f(X)$ δεν είναι πυκνό υποσύνολο του X. Τότε υπάρχει $x_0 \in X$ και περιοχή $B(x_0, \varepsilon)$ του x_0 ώστε $B(x_0, \varepsilon) \cap f(X) = \emptyset$. Παίρνουμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $x_n = f^{(n)}(x_0) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{φορές}}(x_0)$. Για αυτή την ακολουθία έχουμε ότι για κάθε $m < n$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(f^{(n)}(x_0), f^m(x_0)) = d(f^{(n-1)}(x_0), f^{(m-1)}(x_0)) \\ &= \cdots = d(f^{(n-m)}(x_0), x_0) = d(x_{n-m}, x_0). \end{aligned} \tag{8.36}$$

Επειδή X συμπαγής υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε ένα $y \in X$. Επομένως η ακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \varepsilon$. Από την (8.36), για κάθε $k > m \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_{n_k - n_m}, x_0) = d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \varepsilon,$$

που είναι άτοπο εφόσον $x_{n_k - n_m} = f^{(n_k - n_m)}(x_0)$. Άρα $f(X)$ πυκνό υποσύνολο του X. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.24

Απόδειξη: Έστω $a_0 \in I$ ώστε το F_{a_0} να είναι συμπαγές σύνολο. Τότε η οικογένεια $(F_a \cap F_{a_0})_{a\in I}$ είναι μια οικογένεια από κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς μετρικού χώρου F_{a_0}. Επίσης έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, εφόσον αν $L \subset I$ πεπερασμένο σύνολο, το $L \cup \{a_0\}$ είναι επίσης πεπερασμένο και άρα από τις υποθέσεις της άσκησης έχουμε ότι

$$\cap_{a\in L}(F_a \cap F_{a_0}) = \cap_{a\in L}F_a \cap F_{a_0} \neq \emptyset.$$

Επομένως έχουμε ότι η τομή $\cap_{a\in I}(F_a \cap F_{a_0}) = \cap_{a\in I}F_a \neq \emptyset$. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.25

Απόδειξη: Από την υπόθεση έχουμε ότι το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in X$. Θέτουμε $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ ή ισοδύναμα

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0 \text{ και κάθε } x \in X.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ισοσυνέχεια για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta(x) > 0$ ώστε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3 \text{ για κάθε } y \in X \text{ με } d(x, y) < \delta(x) \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{8.37}$$

Επειδή X συμπαγής και $X = \cup_{x\in X} B(x, \delta(x))$ έχουμε ότι υπάρχουν $x_1, \ldots, x_d$ ώστε $X = \cup_{i=1}^{d} B(x_i, \delta(x_i))$.

Επειδή το $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_i) = f(x_i)$ έχουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, d$ υπάρχει n_i ώστε

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ για κάθε } n \geq n_i. \tag{8.38}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_d\}$.

Έστω $x \in X$. Υπάρχει ένα $i \leq d$ ώστε $x \in B(x_i, \delta(x_i))$ και άρα $d(x_i, x) < \delta(x_i)$. Τότε από τις (8.37),(8.38), για κάθε $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

εφόσον

$$|f(x_i) - f(x)| = |\lim_{n\to\infty}(f_n(x_i) - f_n(x))| \leq \lim_{n\to\infty} |f_n(x_i) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3.$$

□

Πίσω στην Άσκηση 6.1.26

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το β). Το α) είναι συνέπεια του β) αν $f_n = f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να βρούμε ένα $\delta > 0$ ώστε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x, y \in X \text{ με } d(x, y) < \delta \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f_n είναι ισοσυνεχείς για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\delta(x) > 0$ ώστε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/2 \text{ για κάθε } y \in X \text{ με } d(x, y) < \delta(x) \text{ και κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{8.39}$$

Οι μπάλες $B(x, \frac{\delta(x)}{2})$, $x \in X$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του X, δηλαδή $X = \cup_{x \in X} B(x, \frac{\delta(x)}{2})$ και επειδή X συμπαγής υπάρχουν $\{x_1, \ldots, x_n\}$ πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία του X με $X = \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$. Θέτουμε

$$\delta = \min\{\frac{\delta(x_1)}{2}, \ldots, \frac{\delta(x_n)}{2}\}.$$

Έστω $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$. Υπάρχει ένα $i \leq n$ με $x \in B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$. Τότε έχουμε επίσης ότι

$$d(x_i, y) \leq d(x_i, x) + d(x, y) < \frac{\delta(x_i)}{2} + \frac{\delta(x_i)}{2} = \delta(x_i).$$

Έτσι έχουμε ότι $x, y \in B(x_i, \delta(x_i))$ και επομένως από την (8.39)

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_n(x) - f_n(x_i)| + |f_n(x_i) - f_n(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι οι συναρτήσεις f_n είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχείς. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.27

Απόδειξη: Επειδή η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d_\infty(f_n, f_m) = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{8.40}$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_{n_0}(x)| + 1 \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{8.41}$$

Επειδή X συμπαγής έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $f_n(X)$ είναι συμπαγές και επομένως φραγμένο. Επομένως υπάρχει $M_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M_n. \tag{8.42}$$

Θέτουμε $M = \max_{n\leq n_0} M_n$. Από τις (8.41),(8.42) έχουμε ότι

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq M + 1 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και άρα η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Θα δείξουμε τώρα ότι οι f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι ισοσυνεχείς συναρτήσεις. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η (8.40). Επειδή X συμπαγής και $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχής έχουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\delta_n > 0$ ώστε

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \text{ για κάθε } x, y \text{ με } d(x, y) < \delta_n. \tag{8.43}$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_n : n = 1, \ldots, n_0\}$. Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ για κάθε x, y με $d(x, y) < \delta$. Εάν $n \leq n_0$ είναι άμεσο εφόσον $\delta \leq \delta_n$. Εάν $n > n_0$ τότε από την (8.43),

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_n(y)| \\
&< \varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + \varepsilon \text{ από την (8.40)} \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \text{ από την (8.43) για } n = n_0
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε n $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 3\varepsilon$ για κάθε x, y με $d(x, y) \leq \delta$. Επομένως οι $f_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ισοσυνεχείς. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.28

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 193 από 230
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $n_1 < n_2 < \ldots$ ώστε

$$d_\infty(f_{n_k}, f) = \sup\{|f_{n_k}(x) - f(x)| : x \in X\} \geq \varepsilon \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_{n_k} \in X$ ώστε $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon/2$.

Επειδή X συμπαγής έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ και υπακολουθία $(x_{n_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ της $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $\lim_{m\to\infty} d(x_{n_{k_m}}, x_0) = 0$.

Εάν θέσουμε $y_{n_{k_m}} = x_{n_{k_m}}$ και $y_n = x_0$ αν $n \neq n_{k_m}$ για κάποιο m τότε έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_0) = 0$

Επειδή f συνεχής έχουμε ότι υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f(x_{n_{k_m}}) - f(x_0)| < \varepsilon/5 \text{ για κάθε } m \geq m_0.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(y_n) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{m\to\infty} f_{n_{k_m}}(x_{n_{k_m}}) = f(x_0)$ και επομένως υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_{n_{k_m}}(x_{n_{k_m}}) - f(x_0)| < \varepsilon/5 \text{ για κάθε } m \geq m_1.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varepsilon/2 &\leq |f_{n_{k_m}}(x_{n_{k_m}}) - f(x_{n_{k_m}})| \\
&\leq |f_{n_{k_m}}(x_{n_{k_m}}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{n_{k_m}})| \\
&\leq \varepsilon/5 + \varepsilon/5 = 2\varepsilon/5
\end{aligned}$$

που είναι άτοπο. Επομένως $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$. □

Πίσω στην Άσκηση 6.1.29

Υπόδειξη: Με εις άτοπο απαγωγή. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 7.2.3

Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε τον ορισμό του συνεκτικού συνόλου και την συνεκτικότητα των A, B. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση ;;

Υπόδειξη: Δείξτε ότι το $B = \{(x, \text{ημ}(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ είναι συνεκτικό σύνολο και $A \subset \overline{B}$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 8.2

Απόδειξη: Έστω U_1, U_2 μια διαμέριση του X ώστε U_1, U_2 ανοικτά σύνολα. Θα δείξουμε ότι είτε $U_1 = \emptyset$ ή $U_2 = \emptyset$ και έτσι θα έχουμε ότι ο X είναι συνεκτικός.

Επειδή U_1, U_2 είναι διαμέριση του X από ανοικτά σύνολα, τα σύνολα $F_1 = X \setminus U_1$, $F_2 = X \setminus U_2$ είναι κλειστά σύνολα και είναι μια διαμέριση του X. Από την υπόθεση έχουμε ότι είτε $F_1 \cap X = \emptyset$ ή $F_2 \cap X = \emptyset$. Στην πρώτη περίπτωση $X = U_1 = F_1$ και άρα $U_2 = \emptyset$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση $X = U_2 = F_2$ και άρα $U_1 = \emptyset$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.1

Απόδειξη: Τα σύνολα $A = (-1, 3/2)$, $B = (5/3, 5)$ είναι ανοικτά, ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, $\Delta \cap A \neq \emptyset, \Delta \cap B \neq \emptyset$ και $[0, 1] \cup (2, 4] \subset A \cup B$. Επομένως το $[0, 1] \cup (2, 4]$ είναι μη συνεκτικό.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.2

Απόδειξη:

Εάν $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$ και $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}$ τότε τα σύνολα U_1, U_2 είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι αν $pr_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η προβολή της πρώτης συντεταγμένης, δηλαδή $pr_x(x,y) = x$ τότε η pr_x είναι συνεχής, Άσκηση 5.1.10, και $U_1 = pr_x^{-1}(1,\infty)$. Έτσι έχουμε ότι U_1 είναι ανοικτό σύνολο. Επίσης $U_2 = pr_x^{-1}(-\infty,-1)$ και άρα U_2 είναι ανοικτό σύνολο.

Θα δείξουμε τώρα ότι $A \subset U_1 \cup U_2$. Εάν $(x,y) \in A \Rightarrow x^2 - y^2 \geq 10 \Rightarrow x^2 \geq 10 + y^2 \geq 10$. Επομένως $x^2 \geq 10 \Rightarrow x \geq \sqrt{10}$ ή $x \leq -\sqrt{10}$. Στην πρώτη περίπτωση το $(x,y) \in U_1$ ενώ αν $x < -\sqrt{10}$, $(x,y) \in U_2$. Έτσι έχουμε ότι $A \subset U_1 \cup U_2$ με U_1, U_2 ξένα και ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Επίσης $(\sqrt{10},0) \in U_1 \cap A$ και $(-\sqrt{10},0) \in U_2 \cap A$. Έτσι έχουμε ότι το A δεν είναι συνεκτικό.

□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.4

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παίρνει τουλάχιστον δύο διαφορετικές τιμές $k, m \in \mathbb{Z}$. Τότε έχουμε ότι $U = (U \cap f^{-1}(\{k\})) \cup (U \cap f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{k\}))$. Επίσης τα σύνολα $\{k\}$ και $\mathbb{Z} \setminus \{k\}$ είναι ανοικτά και ξένα υποσύνολα του $\mathbb{Z}$. Επειδή f συνεχής τα σύνολα $f^{-1}(\{k\})$ και $f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{k\})$ είναι μη-κενά, ξένα, ανοικτά υποσύνολα του X και $U \cap f^{-1}(\{k\}) \neq \emptyset, U \cap f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \{k\}) \neq \emptyset$. Αυτό είναι άτοπο εφόσον U συνεκτικό σύνολο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.5

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι το A δεν είναι συνεκτικό θα βρούμε δυο κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα που τέμνουν το A και η ένωση τους είναι το A.

Το σύνολο $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ εφόσον $F_1 = \pi_2^{-1}(\{0\})$ και η συνάρτηση $\pi_2(x, y) = y$ είναι συνεχής, δες Άσκηση 5.1.10 Θέτουμε $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 1/x\}$. Θα δείξουμε ότι $F_1 \cap \overline{F_2} = \emptyset$ και έτσι από την Άσκηση 7.2.1 θα έχουμε ότι το A δεν είναι συνεκτικό.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ώστε $(x, y) \in F_1 \cap \overline{F_2}$. Τότε έχουμε ότι $y = 0$ και υπάρχει μια ακολουθία $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του F_2 που συγκλίνει στο $(x, 0)$. Έτσι έχουμε ότι

$$y_n = 1/x_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}, \ \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ και } \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} 1/x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$ που είναι άτοπο εφόσον $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.
□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.6

Απόδειξη:

α) Έστω $B \subset U_1 \cup U_2$ με U_1, U_2 ξένα ανοικτά σύνολα. Αν $x \in B \subset \overline{A}$ τότε για κάθε περιοχή $V(x)$ του x ισχύει $x \in V(x) \cap A \neq \emptyset$.

Έτσι αν $B \cap U_i \neq \emptyset$ για $i = 1, 2$, θα έχουμε ότι και $A \cap U_i \neq \emptyset$ για $i = 1, 2$ που είναι άτοπο εφόσον A συνεκτικό. Επομένως $B \cap U_1 = \emptyset$ ή $B \cap U_2 = \emptyset$ και έτσι έχουμε ότι το B είναι συνεκτικό.

β) Έστω $A \cup B \subset U_1 \cup U_2$ και U_1, U_2 ανοικτά ξένα σύνολα. Εφόσον A συνεκτικό θα ισχύει ότι το A περιέχεται στο U_1 ή στο U_2. Έστω ότι περιέχεται στο U_1. Θα δείξουμε ότι και $B \subset U_1$ και άρα θα έχουμε ότι $A \cup B \subset U_1$.

Επειδή $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ επιλέγουμε $x \in A \cap \overline{B}$. Τότε $x \in U_1$ και άρα $U_1 \cap B \neq \emptyset \Rightarrow B \subset U_1$ εφόσον B συνεκτικό σύνολο.

□

Πίσω στην Άσκηση ;;

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι ο (X, d) είναι μη-συνεκτικός. Τότε υπάρχουν δύο μη κενά ανοικτά και ξένα μεταξύ τους σύνολα U_1, U_2 ώστε $X = U_1 \cup U_2$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : (X, d) \to \{0, 1\}$ με

$$f(x) = 0 \text{ αν } x \in U_1 \text{ και } f(x) = 1 \text{ αν } x \in U_2.$$

Η f είναι καλά ορισμένη, εφόσον $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, είναι επί, εφόσον $X \cap U_j \neq \emptyset$ για $j = 1, 2$. Τέλος είναι και συνεχής εφόσον $f^{-1}(0) = U_1$, $f^{-1}(1) = U_2$ και $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$, δηλαδή αντίστροφη εικόνα ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.

Αντιστρόφως αν υπάρχει μια $f : (X, d) \to \{0, 1\}$ η οποία είναι συνεχής και επί, τότε τα σύνολα $f^{-1}(0)$ και $f^{-1}(1)$ είναι ανοικτά μη κενά. Έτσι έχουμε ότι τα $f^1(0), f^{-1}(1)$ είναι μια κάλυψη του X από δύο με κενά, ξένα ανοικτά σύνολα. Επομένως ο (X, d) είναι μη-συνεκτικός.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.8

Απόδειξη:

Έστω I ένα διαστήματα.

α) Έστω I_2 το διάστημα της εκφώνησης. Θέτουμε μ_2 το μέσο του διαστήματος I_2. Το $\mu_2 \in I$ και άρα $\mu_2 \in K_1$ ή $\mu_2 \in K_2$.

Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $I_3 = (\mu_2, \max I_2)$ ενώ στη δεύτερη $I_3 = (\min I_2, \mu_2)$. Ας παρατηρήσουμε ότι

$$I_3 \subset I_2,\ \text{μήκος}(I_3)\text{=μήκος}(I_2)/2 = (b_1 - a_1)/2^2,\ \min I_3 \in K_1 \ \text{ και } \ \max I_3 \in K_2.$$

Αν υποθέσουμε ότι επιλέξει τα διαστήματα $(I_n)_{n=1}^k$ ώστε

A) $I_k \subset I_{k-1} \subset \ldots I_1$.

B) $I_n = (a_n, b_n)$, $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ για κάθε $n = 1, \ldots, k$.

Γ) $a_n \in K_1$ και $b_n \in K_2$ για κάθε $n = 1, \ldots, k$.

Εάν μ_k είναι το μέσο του I_k τότε έχουμε ότι $\mu_k \in K_1$ ή $\mu_k \in K_2$. Στην πρώτη θέτουμε $I_{k+1} = (\mu_k, b_k)$ ενώ στη δεύτερη θέτουμε $I_{k+1} = (a_k, \mu_k)$.

Είναι άμεσο να δούμε ότι το I_{k+1} έχει τις ιδιότητες 1) – 2) και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της ύπαρξης της ακολουθίας $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

β) Εφόσον $I_{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n) = I_n$ είναι άμεσο ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Επίσης επειδή $I_n \subset I_1 = (a_1, b_1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι οι ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης και φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Επομένως είναι συγκλίνουσες. Επειδή $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$ έχουμε ότι οι αυτές ακολουθίες έχουν το ίδιο όριο. Θέτουμε x_0 το κοινό όριο.

γ) Επειδή K_1 κλειστό και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K_1$ έχουμε ότι $x_0 \in K_1$. Όμοια έχουμε ότι $x_0 \in K_2$

Έτσι έχουμε ότι $x_0 \in K_1 \cap K_2$ που είναι άτοπο εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Επομένως έχουμε ότι για κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν κλειστά και ξένα μεταξύ υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που τέμνουν το I και $I \subset K_1 \cup K_2$ και άρα από Άσκηση 7.2.1 το I είναι συνεκτικό σύνολο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.9

Απόδειξη:

Έστω A μη κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν δύο σημεία του a, b και $\lambda \in (0,1)$ ώστε το σημείο $x_0 = \lambda a + (1-\lambda)b \notin A$, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό σημείο x_0 του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα a, b που δεν ανήκει στο σύνολο A. Τότε αν $U_1 = (-\infty, x_0)$ και $U_2 = (x_0, +\infty)$ έχουμε ότι τα U_1, U_2 είναι ανοικτά ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$ και $A \subset U_1 \cup U_2$. Επομένως το A είναι μη συνεκτικό.

Έστω A συνεκτικό υποσύνο του $\mathbb{R}$. Εάν δεν είναι διάστημα τότε υπάρχουν $a, b \in I$ και c ώστε $a < c < b$ και $c \notin I$. Επομένως το A είναι μη κυρτό και άρα δεν είναι συνεκτικό, άτοπο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.10

Απόδειξη:

Έστω (X, d) κατά τόξα συνεκτικός μετρικός χώρος. Έστω U_1, U_2 δύο ανοικτά και ξένα μεταξύ τους σύνολα ώστε $X = U_1 \cup U_2$. Για να δείξουμε ότι X συνεκτικός αρκεί να δείξουμε ότι $U_1 = \emptyset$ ή $U_2 = \emptyset$.

Εάν $U_1 \neq \emptyset$ και $U_2 \neq \emptyset$ επιλέγουμε $x \in U_1$ και $y \in U_2$. Επειδή (X, d) κατά τόξα συνεκτικός υπάρχει $f : [a, b] \to X$ συνεχής με $f(0) = x$ και $f(1) = y$. Τότε έχουμε $f([0, 1]) \subset U_1 \cup U_2$. Επειδή $f([0, 1])$ συνεκτικό σύνολο, Άσκηση 7.2.3, θα έχουμε ότι $f([0, 1]) \cap U_1 = \emptyset$ ή $f([0, 1]) \cap U_2 = \emptyset$ που είναι άτοπο.

Έτσι έχουμε ότι $U_1 = \emptyset$ ή $U_2 = \emptyset$.

□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.11

Απόδειξη:

α) Εάν $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ τότε το $\mathbb{R}^+$ είναι συνεκτικό σύνολο. Επίσης η $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ με $f(x) = (x, \eta\mu(1/x))$, είναι άμεσο ότι είναι συνεχής και άρα το σύνολο $B = f(\mathbb{R}^+) = \{(x, \eta\mu(1/x) : x > 0\}$ είναι συνεκτικό ως συνεχή εικόνα συνεκτικού. Θα δείξουμε ότι

$$A = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \eta\mu(\frac{1}{x})) : x > 0\} \subset \overline{B} \tag{8.44}$$

και έτσι από την Άσκηση 7.2.7 θα έχουμε ότι το σύνολο A θα είναι συνεκτικό. Από τον ορισμό του συνόλου B αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία $(0, y)$, $y \in [-1, 1]$ ανήκουν στην κλειστότητα του B.

Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $y \in [-1, 1]$ υπάρχει $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ ώστε $\eta\mu(t) = y$. Εάν θέσουμε $t_n = \frac{1}{t+2n\pi}$ τότε έχουμε ότι $t_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ και

$$\lim_{n\to\infty} \eta\mu(1/t_n) = \lim_{n\to\infty} \eta\mu(t + 2n\pi) = \lim_{n\to\infty} \eta\mu(t) = y.$$

Έτσι έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(t_n, \eta\mu(1/t_n)) = (0, y)$ και αυτό αποδεικνύει την (8.44).

β)Θα δείξουμε τώρα ότι δεν υπάρχει συνεχής καμπύλη που να συνδέει το σημείο $(\frac{1}{\pi}, 0) = (\frac{1}{\pi}, \eta\mu(\pi))$ με το σημείο $(0, 0)$ και να βρίσκεται μέσα στο σύνολο A. Έστω $f(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$ μια καμπύλη που ενώνει τα σημεία $(\frac{1}{\pi}, 0)$, $(0, 0)$ με $f(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ και $f(0) = (0, 0)$. Τότε η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής και από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής επιλέγουμε $t_1 \in (0, 1)$ με $x(t_1) = \frac{2}{3\pi}$. Στη συνέχεια από Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής επιλέγουμε $t_2 \in (0, t_1)$ με $x(t_1) = \frac{2}{5\pi}$. Συνεχίζοντας με αυτό το τρόπο επιλέγουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$$t_n \in (0, t_{n-1}) \text{ και } x(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi} > 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη το $\lim_{n\to\infty} t_n$ υπάρχει. Επειδή $f(t_n) = (x(t_n), y(t_n)) \subset A$ και $x(t_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$(x(t_n), y(t_n)) \subset \{(x, \eta\mu(\frac{1}{x})) : x > 0\} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$f(t_n) = (x(t_n), \text{ημ}(2n+1)\frac{\pi}{2}) = (x(t_n), (-1)^n) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

και άρα το $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$ δεν υπάρχει, άτοπο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

α) Έστω U_1, U_2 δύο ανοικτά και ξένα σύνολα ώστε $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset U_1 \cup U_2$. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το A_n είναι συνεκτικό θα ισχύει ότι $A_n \subset U_1$ ή $A_n \subset U_2$. Ας υποθέσουμε ότι $A_n \subset U_j$. $j \in \{0, 1\}$.

Τότε επειδή $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ και $A_n \subset U_j$ θα έχουμε ότι $A_{n+1} \subset U_j$.

Έτσι αν

$$A_1 \subset U_j \Rightarrow A_2 \subset U_j \Rightarrow A_3 \subset U_j \Rightarrow \dots$$

και έτσι παίρνουμε ότι $A_n \subset U_j$ για κάθε $n \in N$. Επομένως $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset U_j$ και αυτό μας δείχνει ότι η $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο.

β) Εφόσον $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ έχουμε ότι $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως από το α) ερώτημα η $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.13

Απόδειξη:

ι) Εάν θέσουμε $B_n = \{(x, x/n) : x \in \mathbb{R}\}$ τότε έχουμε ότι $A_1 = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Επίσης $(0,0) \in B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε από τη Άσκηση 7.2.13 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε B_n είναι συνεκτικό σύνολο. Ας παρατηρήσουμε ότι το σύνολο B_n είναι η ευθεία $y = x/n$ και ιδιαίτερα $B_n = f_n(\mathbb{R})$ όπου $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $f(x) = (x, x/n)$. Η συνάρτηση f_n είναι συνεχής. Πράγματι αν $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to x_0$ τότε $\lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{n} = \frac{x_0}{n}$ και επομένως $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = f(x_0)$. Επίσης επειδή $\mathbb{R}$ συνεκτικό σύνολο έχουμε ότι το $B_n = f_n(\mathbb{R})$ είναι συνεκτικό σύνολο. Από τη Άσκηση 7.2.13 έχουμε ότι το A_1 είναι συνεκτικό σύνολο.

ιι) Αν $B_1 = \{(x, y) : x > 0\}$ και $B_2 = \{(x, y) : x < 0\}$ τότε έχουμε ότι $A_2 = B_1 \cup B_2$. Θα δείξουμε ότι τα B_1, B_2 είναι ανοικτά σύνολα και έτσι θα έχουμε ότι το A_2 δεν είναι συνεκτικό σύνολο.

Εάν $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\pi_1(x, y) = x$ από την Άσκηση 5.1.10 έχουμε ότι π_1 είναι συνεχής και $B_1 = \pi_1^{-1}(0, +\infty)$. Επειδή $(0, +\infty)$ είναι ανοικτό σύνολο έχουμε ότι και το B_1 είναι ανοικτό σύνολο. Όμοια έχουμε ότι B_2 είναι ανοικτό σύνολο εφόσον $B_2 = \pi_2^{-1}(-\infty, 0)$ όπου $\pi_2(x, y) = y$.

ιιι) Θα δείξουμε ότι το A_3 είναι συνεκτικό σύνολο. Από την Άσκηση 7.2.11 αρκεί να δείξουμε ότι είναι κατά τόξα συνεκτικό. Έστω $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A_3$. Εάν $y_1, y_2 > 2$ τότε η

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \text{ με } f(t) = t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2)$$

είναι συνεχής συνάρτηση με $f(0) = (x_2, y_2)$ και $f(1) = (x_1, y_1)$. Επίσης $f([0, 1]) \subset A_3$ εφόσον $ty_1 + (1 - t)y_2 > 2$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Ας παρατηρήσουμε ότι η $f(t)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία (x_2, y_2) και (x_1, y_1). Όμοια αν $y_1, y_2 < 2$ τότε η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ με $f(t) = t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2)$ είναι συνεχής καμπύλη που ενώνει τα σημεία (x_2, y_2) και (y_1, y_1) και βρίσκεται στο A_3.

Εάν $y_1 < 2 < y_2$ τότε παίρνουμε τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία (x_1, y_1) και $(0, 2)$, και τα σημεία $(0, 2)$ και (x_2, y_2). Πιο συγκεκριμένα η

$$f(t) = \begin{cases} (1 - t)(x_1, y_1) + t(0, 2), & \text{αν } t \in [0, 1] \\ (2 - t)(0, 2) + (t - 1)(x_2, y_2) & \text{αν } t \in [1, 2] \end{cases}$$

• Μετρικές
• Ανοικτά-κλειστά σύνολα
• Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
• Διαχωρισιμότητα
• Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
• Συμπάγεια
• Συνεκτικότητα
• Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

είναι μια συνεχής συνάρτηση που ενώνει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) και περιέχεται στο A_3. Έτσι έχουμε ότι το A_3 είναι συνεκτικό.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.14

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \emptyset$. Τότε έχουμε ότι $X = \overline{A} \cup \overline{X \setminus A}$ και άρα ο X είναι η ένωση δύο ξένων κλειστών συνόλων, άτοπο εφόσον X συνεκτικός.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.15

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $C \cap Bd(A) = \emptyset$. Από την υπόθεση τα σύνολα $(X \setminus A) \cap C$, $A \cap C$ είναι μη κενά. Επίσης $C \cap \overline{A} \cap (C \cap \overline{X \setminus A}) = \emptyset$ διαφορετικά αν

$$x \in C \cap \overline{A} \cap (C \cap \overline{X \setminus A}) \Rightarrow x \in C \cap Bd(A)$$

που είναι άτοπο.

Έτσι έχουμε ότι τα σύνολα $C \cap \overline{A}$, $(C \cap \overline{X \setminus A})$ είναι μια διαμέριση του C από μη κενά, κλειστά σύνολα που είναι άτοπο εφόσον C συνεκτικό σύνολο.

□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.16

Απόδειξη:

Έστω ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε $X = U \cup V$ όπου U, V ανοικτά, ξένα μη-κενά υποσύνολα του X. Επιλέγουμε ένα $u \in U$ και $v \in V$. Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει G συνεκτικό σύνολο που περιέχει τα u, v. Επειδή G συνεκτικό και τα σύνολα $G \cap U, G \cap V$ είναι μια διαμέριση του G από ανοικτά σύνολα, έχουμε ότι είτε $G \subset U$ είτε $G \subset V$, άτοπο. Έτσι έχουμε ότι ο X είναι συνεκτικός.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.17

Απόδειξη:

Έστω $x \neq y$ δύο διαφορετικά σημεία του X. Τότε τα σύνολα $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ είναι κλειστά και ξένα υποσύνολα του X και επομένως υπάρχει $f : X \to [0, 1]$ συνεχής συνάρτηση με $f_{|A} = 0$ και $f_{|B} = 1$, δες Άσκηση 5.1.14. Επειδή X συνεκτικός και f συνεχής από Άσκηση 7.2.3 το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από την Άσκηση 7.2.10 το $f(X)$ είναι κυρτό σύνολο. Επειδή $0, 1 \in f(X) \Rightarrow [0, 1] \subset f(X)$. Επομένως ο X είναι υπεραριθμήσιμος εφόσον το $[0, 1]$ είναι.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.18

Απόδειξη:

Έστω ο μετρικός χώρος (X, d) όπου $d(\cdot,\cdot)$ είναι διακριτή μετρική. Θα δείξουμε ότι τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του X είναι τα μονοσύνολα. Έστω C ένα μη κενό συνεκτικό υποσύνολο του X. Αν το $x \in C$ τότε έχουμε ότι τα σύνολα $\{x\}$ και $C \setminus \{x\}$ είναι ανοικτά, εφόσον στη διακριτή τοπολογία κάθε σύνολο είναι ανοικτό και κλειστό. Τότε έχουμε ότι $C \subset \{x\} \cup (C \setminus \{x\})$, και επειδή C συνεκτικό έχουμε ότι $C \subset \{x\}$. Επομένως $C = \{x\}$.

□

Πίσω στην Άσκηση 7.2.19

Απόδειξη:

Έστω $q \in \mathbb{Q}$ και C_q η συνεκτική συνιστώσα του q. Θα δείξουμε ότι κάθε μη κενό συνεκτικό σύνολο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ είναι μονοσύνολο και αυτό θα λύση την άσκηση.

Έστω C συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ και $q_1 < q_2$ δύο διαφορετικά στοιχεία του. Επιλέγουμε $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ με $q_1 < x_0 < q_2$. Εάν $A_1 = (-\infty, x_0)$, $A_2 = (x_0, \infty)$ τότε A_1, A_2 ξένα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τα $U_j = \mathbb{Q} \cap A_j, j = 1, 2$ είναι μη κενά ανοικτά, ξένα υποσύνολα του $\mathbb{Q}$ ώστε $C \subset U_1 \cup U_2$ και $C \cap U_j \neq \emptyset$ για $j = 1, 2$, το οποίο είναι άτοπο εφόσον C συνεκτικό. Επομένως το C είναι μονοσύνολο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.20

Απόδειξη: Εάν το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό σύνολο υπάρχουν B, C ανοικτά υποσύνολα του (Y, ρ) ώστε $f(A) \subset B \cup C$ και $B \cap f(X) \neq \emptyset$, $C \cap f(X) \neq \emptyset$. Επειδή f συνεχής έχουμε ότι $f^{-1}(B), f^{-1}(C)$ είναι ανοικτά σύνολα και $A \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$. Επειδή A συνεκτικό σύνολο θα έχουμε ότι $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ ή $A \cap f^{-1}(C) \neq \emptyset$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε ότι $f(A) \cap B = \emptyset$ που είναι άτοπο ενώ στη δεύτερη $f(A) \cap C = \emptyset$ επίσης άτοπο.

Έτσι έχουμε ότι $f(A)$ είναι συνεκτικό σύνολο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 7.2.3

Υπόδειξη: Δείξτε ότι η T είναι Lipschitz με σταθερά $\|f\|_\infty$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 8.2.4

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Arzela-Ascoli (II) και την Άσκηση 6.1.24. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 8.2.5

Απόδειξη: Έστω $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα Arzela-Ascoli αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$F_M = \{f \in C[a,b] : \text{ ομοιόμορφα συνεχής και } \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le M\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $C([a,b])$. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_M$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Από την Άσκηση 5.1.15 έχουμε ότι f είναι συνεχής. Επειδή η f είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. Επίσης επειδή $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε ότι $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le M$ Έτσι έχουμε ότι κάθε $f \in \overline{F_M}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη από M και άρα $f \in F_M$. Έτσι έχουμε ότι F_M είναι κλειστό και άρα από το θεώρημα Arzela-Ascoli F συμπαγές. Επομένως η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2.1

- Μετρικές
- Ανοικτά-κλειστά σύνολα
- Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
- Διαχωρισιμότητα
- Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
- Συμπάγεια
- Συνεκτικότητα
- Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 223 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in [a, b]$ από θεώρημα μέσης τιμής έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| = |f'(z)(x-y)| \leq |x-y|$. Έτσι έχουμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής εφόσον για $\varepsilon > 0$ αν πάρουμε $\delta = \varepsilon$ έχουμε ότι

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| < \varepsilon \ \text{ για κάθε } x, y \in [a, b] \text{ με } |x-y| < \delta.$$

Επίσης εάν πάρουμε $y = a$ τότε για κάθε $x > a$ έχουμε ότι

$$|f(x) - f(a)| \leq |A| \Rightarrow |f(x)| \leq f(a)| + |x-a| \leq |f(a)| + |b-a|$$

και επομένως η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Εάν πάρουμε το σύνολο F_1 της προηγούμενης άσκησης έχουμε ότι $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_1$ και επειδή το F_1 είναι συμπαγές έχουμε ότι η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2.2

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής,

$$\begin{aligned}|F(f) - F(g)| &= |\int_0^1 f^2(t) - g^2(t)dt| = |\int_0^1 (f(t) - g(t))(f(t) + g(t)dt| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|\,|f(t) + g(t)| \leq 2d_\infty(f, g)\end{aligned}$$

εφόσον $f, g \in M$, επομένως $\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq 1, \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| \leq 1$ και άρα $|f(t)+g(t)| \leq 2$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Επομένως $|F(f) - F(g)| \leq 2d_\infty(f, g)$ και αυτό αποδεικνύει ότι F συνεχής.

Για να δείξουμε ότι M δεν είναι συμπαγές θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n \in M$ και επίσης $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ για κάθε $x \in X$. Επίσης $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$ και $f_n(1) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. και άρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ κατά σημείο. Εάν ο M ήταν συμπαγές τότε η (f_n) θα είχε μια συγκλίνουσα υπακολουθία σε ένα στοιχείο $f \in M$. Εάν $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$ τότε έχουμε ότι και $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ για κάθε t Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f(1) = 1$ και $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 1)$ και άρα f όχι συνεχής άτοπο. Επομένως ο M δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $C([0, 1])$.

□

Πίσω στην Άσκηση 8.2.3

Απόδειξη: α) Έστω A ένα φραγμένο υποσύνολο του $C([a,b])$ και $M > 0$ με $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq M$ για κάθε $f \in A$. Τότε για κάθε $f \in A$

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq \|f\|_\infty |x-y| \leq M|x-y|.$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ αν $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ τότε για κάθε $f \in A$ και κάθε $x, y \in [a,b]$ με $|x-y| \leq \delta$ ισχύει

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq M|x-y| \leq \varepsilon$$

και αυτό αποδεικνύει ότι η T απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε ισοσυνεχή.

Έστω B ένα φραγμένο υποσύνολο του $C([0,1])$. Για να δείξουμε ότι το $T(B)$ είναι συμπαγές υποσύνολο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του B η ακολουθία $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το σύνολο $F = \{Tf_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχές Επομένως το σύνολο $\overline{F}$ είναι κλειστό φραγμένο και ισοσυνεχές υποσύνολο του $C([a,b])$. Από το Θεώρημα Arzela-Ascoli έχουμε ότι η ακολουθία $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2.4

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο των ισομετριών από τον (X, d) στον (X, d). Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό και ισοσυνεχές σύνολο συναρτήσεων. Τότε από το Θεώρημα Arzela-Ascoli θα έχουμε ότι είναι συμπαγές.

Επειδή κάθε $f \in \mathcal{F}$ είναι ισομετρία έχουμε ότι $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ και άρα είναι άμεσο ότι το $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχές σύνολο συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι είναι κλειστό. Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ισομετριών που συγκλίνει σε μια $f : (X, d) \to (X, d)$. Τότε έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Έτσι έχουμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x)$ και επομένως από τριγωνική ανισότητα,

$$|d(f(x), f(y)) - d(f_n(x), f_n(y))| \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(y), f(y)) \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(y)) = d(f(x), f(y)).$$

Επειδή f_n είναι ισομετρία για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $d(f_n(x), f_n(y)) = d(x, y)$ και έτσι έχουμε ότι $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Από την Άσκηση 6.1.24 έχουμε ότι η f είναι ισομετρία και άρα το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό υποσύνολο.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2.5

Απόδειξη: Από τη θεωρία έχουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f(x) - p_n(x)| : x \in [0,1]\} = 0.$$

Επίσης επειδή $[0,1]$ συμπαγές σύνολο έχουμε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε έχουμε ότι

$$|\int_0^1 f^2(x) - f(x)p_n(x)dx| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)(f(x) - p_n(x))| \int_0^1 dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

και άρα $\int_0^1 f^2(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)p_n(x)dx$.

Επειδή $\int_0^1 f(x)x^k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο και άρα $\int_0^1 f(x)p_n(x)dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι έχουμε ότι $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$ και επειδή f συνεχής παίρνουμε $f = 0$.

□

Πίσω στην Άσκηση 8.2.6

Απόδειξη: Η συνάρτηση x^2 διαχωρίζει τα σημεία του $[0,1]$., εφόσον αν $0 \leq x \neq y \leq 1$ $x^2 \neq y^2$. Έτσι έχουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ που παράγεται από τις συναρτήσεις $1, x^2$ διαχωρίζει τα σημεία του $[0,1]$. Από το θεώρημα Stone-Weiestrass η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι πυκνό στο $C([0,1])$.

Για να δείξουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ που παράγεται από τις συναρτήσεις $1, x^2$ δεν είναι πυκνό υποσύνολο του $C([-1,1])$ παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in \overline{\mathcal{A}}$ ισχύει ότι $f(-1) = f(1)$. επομένως η άλγεβρα δεν είναι πυκνό υποσύνολο του $C([-1,1])$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2.7

Απόδειξη:

Εάν $\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})dx = 0$ τότε με την αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt[2n+1]{x}$ έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(\sqrt[2n+1]{x})dx = 0 \overset{u=\sqrt[2n+1]{x}}{\Rightarrow} (2n+1)\int_0^1 u^{2n} f(u)du = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή η άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $1, x^2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $C([0,1]$ έχουμε ότι $f = 0$.

Η $f(x) = x$ ικανοποιεί την υπόθεση αλλά δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 8.2.8

- Μετρικές
- Ανοικτά-κλειστά σύνολα
- Ακολουθίες, Πλήρεις Μετρικοί χώροι
- Διαχωρισιμότητα
- Συναρτήσεις μεταξύ μετρικών χώρων
- Συμπάγεια
- Συνεκτικότητα
- Θεωρήματα Arzela-Ascoli και Stone-Weierstrass

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 230 από 230

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος