Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Σύνολα και Αριθμοί

Αριστείδης Κοντογεώργης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Καρλόβασι
Σάμος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2ο Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Κεφάλαιο 1

Βασική Θεωρία Συνόλων

1.1. Βασικές έννοιες

Η έννοια του συνόλου ως *πρωταρχική* έννοια της γλώσσας μας, δεν είναι δυνατόν να οριστεί με απόλυτη μαθηματική ακρίβεια. Λέμε απλά -διαισθητικά- ότι σύνολο είναι μία «συλλογή» αντικειμένων. Η συλλογή αυτή μπορεί να μην περιέχει κανένα αντικείμενο οπότε έχουμε την έννοια του *κενού* συνόλου. Για το κενό σύνολο χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\emptyset$.

Όταν ένα σύνολο έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία θα λέγεται πεπερασμένο, και μπορεί να παρασταθεί περιγράφοντας τα στοιχεία του. Έτσι για παράδειγμα το

$$A := \{1, 2, 5, 7, 9, 74\} \tag{1.1}$$

είναι ένα σύνολο με 6 το πλήθος στοιχεία. Ακολουθώντας αυτό τον συμβολισμό πολλοί συγγραφείς συμβολίζουν το κενό σύμβολο με άδεια άγκιστρα δηλαδή με $\{\}$. Άλλες φορές ένα σύνολο περιγράφεται από μία ιδιότητα. Ο κύκλος για παράδειγμα μπορεί να περιγραφεί

• Βασική Θεωρία Συνόλων
Βασικές έννοιες
Συνολοθεωρητικές Πράξεις
Προτάσεις
Σχέσεις
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 2 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ικανοποιούν

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}. \tag{1.2}$$

Το παρακάτω παράδοξο που οφείλεται στο Μαθηματικό και Φιλόσοφο B. Russel, έδειξε ότι πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με την έννοια του συνόλου, όταν αυτό ορίζεται με βάση μία ιδιότητα.

Σε μία επαρχιακή πόλη ο κουρέας ξυρίζει μόνο όλους όσοι δεν ξυρίζονται μόνοι τους. Θέλουμε να μελετήσουμε την «συλογή» A, των ανθρώπων που ξυρίζει ο κουρέας.

Το πρόβλημα είναι αν ο κουρέας ξυρίζεται ή όχι μόνος του. Αν ο κουρέας ξυρίζεται μόνος του τότε δεν πρέπει να ξυρίζει τον ευατό του, άτοπο. Αν πάλι δεν ξυρίζεται μόνος του, τότε θα πρέπει να ξυρίζει τον εαυτό του, άτοπο.

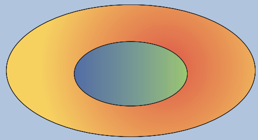
Το παραπάνω παράδοξο έχει αρκετές διατυπώσεις με την «ποιό μαθηματική» την παρακάτω:

Θεωρούμε το «σύνολο»

$$S := \{x : x \notin x\}.$$

Η προβληματική ερώτηση είναι αν $S \in S$. Πράγματι, αν $S \in S$, τότε εξ ορισμού $S \notin S$,άτοπο. Αν πάλι $S \notin S$, τότε εξ ορισμού του συνόλου S θα πρέπει να έχουμε $S \in S$, το οποίο είναι και πάλι άτοπο.

Οι μαθηματικοί αντιμετωπίζουν τα προβλήματα αυτά με το να θεωρούν ένα συγκεκριμένο *σύμπαν* στοιχείων $\mathcal{A}$, δηλαδή μία ευρύτερη δυνατή συλλογή αντικειμένων μέσα στην οποία ορίζονται όλα τα σύνολα. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε υποσύνολα του $\mathcal{A}$ περιγράφοντας τα με βάση τις ιδιότητες τους. Για παράδειγμα, στην (1.2) το σύμπαν μας είναι το $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το παράδοξο του Russel θα εμφανιστεί και πάλι αν θεωρήσουμε ως σύμπαν την «συλλογή» όλων των δυνατών συνόλων. Παρόλα αυτά μπορεί να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει ένα σύνολο που να περιέχει όλα τα σύνολα ως στοιχεία. (Περιέχει τον ευατό του;) Δεν θα επιμείνουμε περισσότερο στις παραπάνω έννοιες σε αυτή την φάση των μαθηματικών σπουδών σας.



Σχήμα 1.1: Υποσύνολο Συνόλου

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για κάθε σύνολο απαιτούμε να μπορούμε να απαντήσουμε ή με άρνηση ή με κατάφαση, στο ερώτημα: Είναι το x στοιχείο του συνόλου A;

Έστω A σύνολο. Αν το x είναι στοιχείο του A, τότε θα λέμε ότι το x *ανήκει* στο σύνολο A, και θα το συμβολίζουμε με $x \in A$. Αν το x δεν είναι στοιχείο του A, τότε θα λέμε ότι το x *δεν ανήκει* στο σύνολο A, και θα το συμβολίζουμε με $x \notin A$.

Έτσι στο παράδειγμα (1.1) έχουμε $1 \in A$ και $55 \notin A$, ενώ στο παράδειγμα (1.2) έχουμε $(1, 0) \in B$ ενώ $(34, 56) \notin B$.

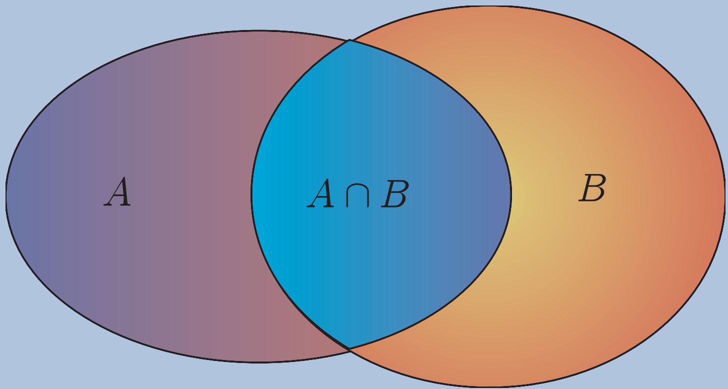
Ορισμός 1.1.1 *Θα λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B και θα το συμβολίζουμε με $A \subset B$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x \in B$. Αν το $A \subset B$ και υπάρχει $x \in B$ ώστε $x \notin A$, τότε θα λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και θα το συμβολίζουμε με $A \subsetneq B$*

Ορισμός 1.1.2 *Θα λέμε ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subset B$ και $B \subset A$.*

1.2. Συνολοθεωρητικές Πράξεις

Έστω $A, B \subset X$. Θα συμβολίζουμε με $A \cup B$, το σύνολο

$$A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ ή } x \in B\},$$



Σχήμα 1.2: Τομή Συνόλων

και θα το ονομάζουμε *ένωση* των συνόλων A και B. Διαισθητικά η ένωση των συνόλων A, B περιέχει όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων.

Θα συμβολίζουμε με $A \cap B$, το σύνολο

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ και } x \in B\},$$

και θα το ονομάζουμε *τομή* των συνόλων A και B. Διαισθητικά η τομή περιέχει τα στοιχεία που είναι κοινά και στα δύο σύνολα.

Θα συμβολίζουμε με $A \backslash B$, το σύνολο

$$A \backslash B : \{x \in X : x \in A, x \notin B\},$$

και θα το ονομάζουμε *διαφορά* των συνόλων A, B. Διαισθητικά η διαφορά περιέχει τα στοιχεία του συνόλου A που δεν περιέχονται στο σύνολο B.

Το σύνολο $X \backslash A$ θα το ονομάζουμε συμπλήρωμα του A στο X, και αν είναι σαφές ποιό είναι το σύνολο X, τότε θα συμβολίζουμε $X \backslash A = A^C$.

Πρόταση 1.2.1 **[Τύποι De Morgan]** *Ισχύουν τα παρακάτω:*

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \qquad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Απόδειξη

Ορισμός 1.2.2 *Έστω ένα σύνολο A. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(A)$, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του.*

Παραδείγματα Έστω $A = \emptyset$, τότε $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Έστω $A = \{1, 2, 3\}$, τότε

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Άσκηση Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά;

1. $\{\emptyset\} = \emptyset$

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

2. $\emptyset \subseteq \emptyset$

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

3. $\emptyset \in \emptyset$

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

4. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

5. $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \supset \emptyset$

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

6. Έστω $A = \{1, 2\}$. Ισχύει ότι $A = \mathcal{P}(A)$.

(α') Σωστό (β') Λάθος

7. Αν το A έχει n το πλήθος στοιχεία και το B έχει m το πλήθος στοιχεία, τότε το $A \cup B$ έχει $m + n$ το πλήθος στοιχεία.

(α') Σωστό (β') Λάθος

8. Αν $x \in \mathcal{P}(A)$ τότε $x \subset \mathcal{P}(A)$.

(α') Σωστό (β') Λάθος

9. Αν $x \in \mathcal{P}(A)$, τότε ισχύει πάντα ότι το x δεν είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(A)$.

(α') Σωστό (β') Λάθος

10. Έστω X σύνολο και έστω $A \subset X$. Ισχύει $A = \emptyset$ αν και μόνο αν $A^C = X$.

(α') Σωστό (β') Λάθος

11. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

(α') Σωστό (β') Λάθος

Άσκηση 1.2.3 Να αποδειχτεί ότι $A \cup B = A \cup B$ και ότι $B \cap A = A \cap B$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.4 Αποδείξτε ότι $A \subset A \cup B$ και ότι $A \cap B \subset A$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.5 Αποδείξτε ότι $A \cap A = A \cup A = A$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.6 Αποδείξτε ότι $\emptyset \cap A = \emptyset$ και $\emptyset \cup A = A$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.7 Να αποδειχτεί ότι αν $A \cap B = B$ τότε $A \subseteq B$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.8 Να αποδειχτεί ότι αν $A \cup B = A$, τότε $B \subseteq A$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.9 Να αποδειχτεί ότι $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.2.10 Να αποδειχτεί ότι $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **Υπόδειξη-Λύση**

1.3. Προτάσεις

Μία πρόταση στα μαθηματικά είναι κάθε φράση η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί με απόλυτη ακρίβεια και αντικειμενικά ως αληθής ή ψευδής. Φράσεις οι οποίες περιέχουν υποκειμενικές κρίσεις ή εσωτερικές αντιφάσεις δεν είναι προτάσεις. Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε τα παρακάτω σαφή με παραδείγματα. Η φράση:

«Το Καρλόβασι είναι μία όμορφη πόλη»

δεν είναι πρόταση γιατί η απάντηση είναι υποκειμενική. Διαφορετικοί άνθρωποι θα δώσουν διαφορετικές απαντήσεις, αλλά ακόμα και ο ίδιος άνθρωπος μπορεί να βρει θετικά και αρνητικά στοιχεία που να μην του επιτρέψουν να απαντήσει.

Οι προτάσεις μπορούν να συνδιαστούν και να δώσουν νέες προτάσεις. Έστω p, q προτάσεις. Η πρόταση $p \vee q$, που διαβάζεται «p ή q», είναι αληθής αν μία από τις p,q είναι αληθείς. Η πρόταση $p \wedge q$, που διαβάζεται «p και q», είναι αληθής αν και οι δύο προτάσεις p,q είναι αληθείς. Η πρόταση $\bar{p}$ που διαβάζεται «άρνηση p», είναι αληθής αν και μόνο αν η p είναι ψευδής.

Αν p, q προτάσεις μπορώ να σχηματίσω την πρόταση $p \Rightarrow q$, η οποία είναι αληθής αν

$$p \text{ αληθής, τότε και } q \text{ αληθής.}$$

Για τις σχέσεις μεταξύ προτάσεων ισχύει η παρακάτω

Πρόταση 1.3.1 *1.* $p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}$

2. $p \Leftrightarrow p \vee p$

3. $p \Leftrightarrow p \wedge p$

4. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

5. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

6. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

7. $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

8. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ *Τύποι De Morgan*

9. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$

10. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

11. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ *Αντιθετοαντιστροφή*

Απόδειξη

Άσκηση Ποιές από τις παρακάτω φράσεις είναι προτάσεις;

1. Το Καρλόβασι είναι η προτεύουσα της Σάμου.

(α') Πρόταση (β') Όχι πρόταση

Άνοιξε την ντουλάπα Λάκη!

(α') Πρόταση (β') Όχι πρόταση

2. $30 + 90 < 23$

(α') Πρόταση (β') Όχι πρόταση

3. Τα πορτοκάλια είναι το πιο εύγευστο φρούτο.

(α') Πρόταση (β') Όχι πρόταση

Άσκηση 1.3.2 Να γραφεί η άρνηση κάθε μιας από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η Αθήνα είναι η πρωτεύουσα της Ελλάδας

2. $3 + 5 = 8$

3. Για κάθε $\ > 0$ υπάρχει $n_0()$ ώστε για $n > n_0()$ $- < a_n < .$

4. Τα μανταρίνια είναι κίτρινα και έχουν κουκούτσια

5. Υπάρχει φοιτητής που είναι ψηλότερος από 2 μέτρα.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.3.3 Ας είναι p, q οι προτάσεις:

p: Το αυτοκίνητο σου δεν έχει βενζίνη

q: Δεν μπορείς να οδηγήσεις το αυτοκίνητό σου.

Να γραφούν οι παρακάτω προτάσεις σαν συναρτήσεις των p, q με τη βοήθεια λογικών συνδέσμων.

1. Το αυτοκίνητο σου έχει βενζίνη.

2. Δεν μπορείς να οδηγήσεις το αυτοκίνητο σου αν δεν έχει βενζίνη.

3. Το αυτοκίνητο σου έχει βενζίνη αν μπορείς να το οδηγήσεις

4. Αν δεν μπορείς να οδηγήσεις το αυτοκίνητο σου τότε δεν έχει βενζίνη.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.3.4 Να διατυπωθεί αντιθετοαντίστροφη κάθε μίας από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Αν βρέχει αύριο θα μείνω σπίτι.

• Βασική Θεωρία Συνόλων
Βασικές έννοιες
Συνολοθεωρητικές Πράξεις
Προτάσεις
Σχέσεις
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 10 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

2. Θα παίξουμε μπάλα αύριο αν έχει λιακάδα.

3. Αν ένας θετικός ακεραίος είναι πρώτος τότε δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και τον ευατό του.

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 1.3.5 Σε μία διασταύρωση είναι δύο αδέλφια. Ο ένας λέει πάντα αλήθεια και ο άλλος λέει πάντα ψέματα. Τι πρέπει να τους ρωτήσουμε για να καταλάβουμε ποιός είναι ο δρόμος μας; **Υπόδειξη-Λύση**

1.4. Σχέσεις

Ορισμός 1.4.1 *Θεωρούμε δύο σύνολα A, B. Θα λέμε διατεταγμένο ζεύγος με στοιχεία από τα A, B κάθε στοιχείο της μορφής (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών με στοιχεία από τα A, B θα το συμβολίζουμε με $A \times B$ και θα το ονομάζουμε καρτεσιανό γινόμενο των A, B.*

Παρατήρηση: Στον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους έχει σημασία η σειρά που τα στοιχεία εμφανίζονται εντός των παρενθέσεων. Έτσι το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) είναι διαφορετικό από το διατεταγμένο ζεύγος (b, a).
Παραδείγματα:

1. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 5\}$. Το γινόμενο $A \times B$ είναι το σύνολο $\{(1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$ ενώ το $B \times A$ είναι το σύνολο $\{(2, 1), (5, 1), (2, 2), (5, 2), (2, 3), (5, 3)\}$. Παρατηρήστε ότι $A \times B \neq B \times A$.

2. Αν $A = B = \mathbb{R}$ τότε το σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τα σημεία του επιπέδου, αν θεωρήσουμε ότι το ζευγάρι $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, περιγράφει τις συντεταγμένες ενός σημείου του επιπέδου.

Πρόταση 1.4.2 *Για τα καρτεσιανά γινόμενα συνόλων ισχύουν οι σχέσεις*

1. $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$
2. $A \times B = B \times A$ *αν και μόνο αν* $A = \emptyset$ *ή* $B = \emptyset$ *ή* $A = B$.

Απόδειξη

Ορισμός 1.4.3 *Μία διμελής σχέση από το σύνολο A στο σύνολο B είναι ένα υποσύνολο $\Sigma \subseteq A \times B$.*

Παρατήρηση: Ένα υποσύνολο του γινομένου $A \times B$, περιγράφεται από ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και ότι $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Μία σχέση είναι το σύνολο

$$\Sigma = \{(1, 1), (2, 4), (5, 1), (1, 3)\} \subseteq A \times B.$$

Μία σχέση μπορεί να ερμηνευτεί σαν «συνδέσεις» μεταξύ στοιχείων του συνόλου A με αυτά του συνόλου B.

Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι παρακάτω τύποι σχέσεων:

Ορισμός 1.4.4 *Μία σχέση $\Sigma \subseteq A \times A$ θα λέγεται συμμετρική αν $(a, b) \in \Sigma$ τότε $(b, a) \in \Sigma$.*

Ορισμός 1.4.5 *Μία σχέση $\Sigma \subseteq A \times A$ θα λέγεται ανακλαστική αν και μόνο αν $(a, a) \in \Sigma$ για κάθε $a \in A$.*

Ορισμός 1.4.6 *Μία σχέση $\Sigma \subseteq A \times A$ θα λέγεται μεταβατική αν και μόνο αν $(a, b) \in \Sigma$ και αν $(b, c) \in \Sigma$ τότε και $(a, c) \in \Sigma$.*

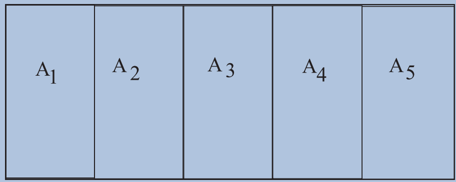
Ορισμός 1.4.7 *Μία σχέση $\Sigma \subseteq A \times A$ θα λέγεται αντισυμμετρική αν και μόνο αν $(a, b) \in \Sigma$ και $(b, a) \in \Sigma$ τότε $a = b$.*

Ορισμός 1.4.8 *Μία σχέση θα λέγεται σχέση ισοδυναμίας αν είναι συμμετρική, ανακλαστική και μεταβατική, ενώ μία σχέση λέγεται σχέση διάταξης αν είναι αντισυμμετρική, ανακλαστική και μεταβατική.*

Παράδειγμα

1. Στο σύνολο των φοιτητών που είναι γραμμένοι στο μάθημα η σχέση ο/η φοιτητής/τρια x έχει το ίδιο φύλο με τον με τον/την φοιτητή/τρια y είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, κάθε φοιτητής έχει το ίδιο φύλο με τον ευατό του άρα η σχέση είναι ανακλαστική. Αν ο x έχει το ίδιο φύλο με την y τότε και η y έχει το ίδιο φύλο με τον x, άρα η σχέση είναι συμμετρική. Τέλος αν ο x έχει το ίδιο φύλο με τον y και ο y το ίδιο φύλο με τον z, τότε και όλοι έχουν το ίδιο φύλο, άρα και ο x έχει το ίδιο φύλο με τον z, δηλαδή ισχύει και η μεταβατική ιδιότητα.

2. Στο σύνολο (x, y, z) των διατεταγμένων τριάδων στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{(0,0,0)\}$, θεωρούμε την σχέση $(x, y, z) \equiv (x', y', z')$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ώστε
$$(x, y, z) = \lambda(x', y', z').$$
Θα δείξουμε ότι η παραπάνω είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, $(x, y, z) \equiv (x, y, z)$, αρκεί να πάρουμε για $\lambda = 1$. αν $(x, y, z) \equiv (x', y', z')$ τότε υπάρχει $\lambda \neq 0$, ώστε
$$(x, y, z) = \lambda(x', y', z') \Rightarrow (x', y', z') = \frac{1}{\lambda}(x, y, z) \quad \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$
άρα η σχέση είναι συμμετρική. Τέλος αν $(x, y, z) \equiv (x_1, y_1, z_1)$ και $(x_1, y_1, z_1) \equiv (x_2, y_2, z_2)$ τότε
$$((x, y, z) = \lambda_1(x_1, y_1, z_1) \text{ και } (x_1, y_1, z_1) \equiv \lambda_2(x_2, y_2, z_2)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x, y, z) = \lambda_1\lambda_2(x_2, y_2, z_2),$$
δηλαδή $(x, y, z) \equiv (x_2, y_2, z_2)$ και η σχέση είναι και μεταβατική.



Σχήμα 1.3: Διαμέριση συνόλου

Ορισμός 1.4.9 *Ας θεωρήσουμε μία σχέση $\Sigma \subset A \times B$. Η αντίστροφη σχέση $\Sigma^{-1} \subset B \times A$ είναι η σχέση που ορίζεται από την ιδιότητα $(b, a) \in \Sigma^{-1}$ αν και μόνο αν $(a, b) \in \Sigma$.*

Παράδειγμα Ας θεωρήσουμε την σχέση $\Sigma \subset \{a, b, c\} \times \{1, 2\}$ που ορίζεται ως $\Sigma = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$. Η αντίστροφη σχέση $\Sigma^{-1} \subset \{1, 2\} \times \{a, b, c\}$ είναι η $\Sigma^{-1} = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$.

Ορισμός 1.4.10 *Θα λέμε ότι τα σύνολα A_i, $i \in I$ αποτελούν μία διαμέριση του συνόλου X, αν και μόνο αν $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ ή $A_i = A_j$.*

Πρόταση 1.4.11 *Κάθε σχέση ισοδυναμίας $\Sigma \subseteq A \times A$ ορίζει διαμέριση του A σε ξένα σύνολα, τα οποία θα ονομάζουμε κλασεις ισοδυναμίας. Αντιστρόφως κάθε διαμέριση $\{A_i\}_{i \in I}$ του συνόλου A ορίζει σχέση ισοδυναμίας όπου $(a, b) \in \Sigma$ αν και μόνο αν $x, y \in A_i$ για τον ίδιο δείκτη i.* ***Απόδειξη***

Ορισμός 1.4.12 *Θεωρούμε μία σχέση ισοδυναμίας Σ σε ένα σύνολο A. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζει η Σ θα το λέμε το σύνολο πηλίκο της Σ.*

Παράδειγμα Έστω A το σύνολο των φοιτητών του τμήματος. Ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας Σ με

$$(x, y) \in \Sigma \text{ αν και μόνο αν } x, y \text{ έχουν το ίδιο φύλο .}$$

• Βασική Θεωρία Συνόλων
Βασικές έννοιες
Συνολοθεωρητικές Πράξεις
Προτάσεις
Σχέσεις
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 14 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Εύκολα βλέπουμε ότι η Σ είναι μία σχέση ισοδυναμίας (γιατι;), και διαμερίζει το σύνολο των φοιτητών σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας το υποσύνολο A_1 των *αρσενικών φοιτητών* και το υποσύνολο A_2 των *θηλυκών φοιτητριών*. Το σύνολο πηλίκο είναι το $\{A_1, A_2\}$.

1.4.1. Σχέσεις Διάταξης

Ορισμός 1.4.13 *Μία σχέση στο σύνολο $A \times A$ η οποία είναι ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική θα λέγεται σχέση διάταξης.*

Παραδείγματα:

1. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζουμε την σχέση $\Sigma_{\leq} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ως εξής: $(x, y) \in \Sigma$ αν και μόνο αν $x \leq y$. Η $\Sigma_{\leq}$ είναι σχέση διάταξης. Πράγματι, $x \leq x$ άρα $(x, x) \in \Sigma_{\leq}$ (ανακλαστική ιδιότητα). Επίσης αν $(x, y) \in \Sigma_{\leq}$ και $(y, z) \in \Sigma_{\leq}$ τότε εξ ορισμού $x \leq y$ και $y \leq z$, άρα $x \leq z$ δηλαδή $(x, z) \in \Sigma_{\leq}$ (μεταβατική ιδιότητα). Τέλος αν $(x, y) \in \Sigma_{\leq}$ και $(y, x) \in \Sigma_{\leq}$ τότε εξ ορισμού $x \leq y$ και $y \leq x$, άρα $x = y$ δηλαδή ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα.

2. Θεωρούμε ένα σύνολο A, και το σύνολο των υποσυνόλων του A, $\mathcal{P}(A)$. Στο σύνολο $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ ορίζουμε την σχέση $\Sigma_{\subset}$ ως εξής: $(X, Y) \in \Sigma_{\subset}$ αν και μόνο αν $X \subset Y$. Η $\Sigma_{\subset}$ είναι μία σχέση διάταξης. Πράγματι, $X \subset X$ άρα $(X, X) \in \Sigma_{\subset}$ και συνεπώς ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Αν $(X, Y) \in \Sigma_{\subset}$ και $(Y, Z) \in \Sigma_{\subset}$ τότε $X \subset Y$ και $Y \subset Z$ άρα $X \subset Z$ οπότε $(X, Z) \in \Sigma_{\subset}$ και συνεπώς ισχύει η μεταβατική ιδιότητα. Τέλος αν $(X, Y) \in \Sigma_{\subset}$ και $(Y, X) \in \Sigma_{\subset}$ τότε $X \subset Y$ και $Y \subset X$ άρα $X = Y$ και ισχύει και η αντισυμμετρική ιδιότητα.

3. Έστω a, b δύο φυσικοί αριθμοί. Θα λέμε ότι a διαιρεί τον b και θα το συμβολίζουμε με $a \mid b$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ ώστε $b = \lambda a$. Στο σύνολο των φυσικών ορίζουμε την σχέση $\Sigma_{|} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως εξής: $(a, b) \in \Sigma_{|}$ αν και μόνο αν $a \mid b$. Θα δείξουμε ότι είναι μία σχέση διάταξης. Πράγματι, $a \mid a$ αφού για $\lambda = 1$ έχουμε

$a = \lambda a$. Άρα $(a, a) \in \Sigma_{|}$. Έστω $(a, b) \in \Sigma_{|}$ και $(b, c) \in \Sigma_{|}$. Άρα εξ ορισμού $a \mid b$ και $b \mid c$. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $b = \lambda_1 a$ και $c = \lambda_2 b$. Συνεπώς $c = \lambda_2 \lambda_1 a$ με $\lambda_2 \lambda_1 \in \mathbb{N}$ και $a \mid c$ οπότε $(a, c) \in \Sigma_{|}$ και ισχύει η μεταβατική ιδιότητα. Τέλος, αν $(a, b) \in \Sigma_{|}$ και $(b, a) \in \Sigma_{|}$ τότε $a \mid b$ και $b \mid a$, άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $a = \lambda_1 b$ και $b = \lambda_2 a$, οπότε $a = \lambda_1 \lambda_2 a$, άρα $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ και αφού τα λ_1, λ_2 είναι φυσικοί έχουμε ότι $\lambda_1 = \lambda_2$ και συνεπώς $a = b$, άρα ισχύει και η αντισυμμετρική ιδιότητα.

Άσκηση 1.4.14 Θεωρήστε το σύνολο $A := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$. Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μία σχέση ως εξής:

$$(a, b) \equiv (a', b') \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. **Υπόδειξη-Λύση**

1.4.2. Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις αποτελούν μία ειδική κατηγορία σχέσεων οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

Ορισμός 1.4.15 *Μια διμελής σχέση $\Sigma \subset A \times B$, θα λέγεται συνάρτηση αν ισχύουν*

1. *Για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $(a, b) \in \Sigma$*
2. *Αν $(a, b) \in \Sigma$ και $(a, b') \in \Sigma$, τότε $b = b'$.*

Για κάθε $a \in A$ το μοναδικό $b \in B$ ώστε $(a, b) \in \Sigma$ θα το συμβολίζουμε με $f(a)$. Ένας συνηθισμένος τρόπος να συμβολίζουμε μία συνάρτηση είναι με $f : A \to B$. Το A λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης ενώ το B σύνολο τιμών.

Για παράδειγμα η σχέση $\Sigma \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$, όπου $\Sigma = \{(1, 2), (2, 1)\}$ δεν ορίζει συνάρτηση γιατί το 3 δεν σχετίζεται με κανένα στοιχείο του $\{1, 2\}$. Αν θεωρήσουμε την $\Sigma' \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$ με $\Sigma' = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$ τότε η σχέση αυτή ορίζει συνάρτηση γιατί ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του ορισμού. Αν μάλιστα θέλουμε μπορούμε να γράψουμε την συνάρτηση ως $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$, με $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1$.

Ορισμός 1.4.16 *Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \to B$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι επί αν για κάθε $b \in B$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $a \in A$, ώστε $f(a) = b$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση είναι ένα προς ένα αν $f(a_1) = f(a_2)$ τότε $a_1 = a_2$.*

Για παράδειγμα η συνάρτηση που ορίσαμε προηγουμενως είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα αφού $f(3) = f(2) = 1$ αλλά $3 \neq 2$.

Κάθε συνάρτηση $f : A \to B$, ορίζεται και ορίζει μία σχέση $\Sigma_f \subset A \times B$, όπου το Σ_f αποτελείται από τα ζευγάρια $(a, f(a))$. Το Σ_f θα το λέμε και γράφημα της συνάρτησης f. Αν μάλιστα δούμε τα σύνολα A, B μπορούμε να τα «ζωγραφίσουμε» (για παράδειγμα στην περίπτωση $A = B = \mathbb{R}$, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, μπορούμε να το παραστήσουμε ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου, ενώ το υποσύνολο που αντιστοιχεί στο Σ_f θα το ονομάζουμε γραφική παράσταση της f.

Στην συνάρτηση f αντιστοιχεί ένα γράφημα Σ_f. Το γράφημα αυτό έχει πάντα μία καλά ορισμένη αντίστροφη σχέση. Είναι αυτή η σχέση συνάρτηση;

Πρόταση 1.4.17 *Η αντίστροφη σχέση του γραφήματος μίας συνάρτησης είναι συνάρτηση αν και μόνο αν η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και επί.* ***Απόδειξη***

Παράδειγμα Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία στέλνει το x στο x^2, δηλαδή $f(x) = x^2$ δεν είναι ούτε ένα προς ένα ούτε επί. Πράγματι, δεν μπορεί να είναι ένα προς ένα αφού τα $1^2 = 1 = (-1)^2$ ενώ $1 \neq -1$. Για το επί παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνο του να είναι αρνητικός. Άρα η αντίστροφη σχέση του γραφήματος της x^2 δεν είναι συνάρτηση.

Ορισμός 1.4.18 *Μία συνάρτηση της οποίας το γράφημα S_f έχει αντίστροφη σχέση S_f^{-1} που αντιστοιχεί σε συνάρτηση θα λέγεται αντιστρέψιμη. Η δε συνάρτηση που αντιστοιχεί στην σχέση S_f^{-1} θα λέγεται αντίστροφη της f και θα την συμβολίζουμε με f^{-1}.*

Ορισμός 1.4.19 *Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι δύο συναρτήσεις, θα συμβολίζουμε με $g \circ f$ και θα την ονομάζουμε σύνθεση των συναρτήσεων f, g, την συνάρτηση $g \circ f : A \to C$, η οποία στέλνει το x στο $g(f(x))$.*

Ορισμός 1.4.20 *Η συνάρτηση $\mathbb{I}_A : A \to A$ η οποία στέλνει το $x \in A$ στο $\mathbb{I}_A(x) = x$ θα λέγεται η ταυτοτική συνάρτηση του A.*

Πρόταση 1.4.21 *Έστω $f : A \to B$ μία αντιστρέψιμη συνάρτηση. Η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ ικανοποιεί:*

$$f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_B, \quad f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_A.$$

Απόδειξη

Ορισμός 1.4.22 *Έστω $A, \leq, B, \leq$, σύνολα στα οποία έχουν οριστεί σχέσεις διάταξης και έστω $f : A \to B$. Θα λέμε ότι η f είναι:*

1. *Αύξουσα Αν $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$*
2. *Γνήσια Αύξουσα Αν $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$*
3. *Φθίνουσα Αν $a \leq b \Rightarrow f(b) \leq f(a)$*
4. *Γνήσια Φθίνουσα Αν $a < b \Rightarrow f(b) < f(a)$*

Παράδειγμα Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, με τύπο $f(x) = x^3$ είναι γνήσια αύξουσα αφού αν $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$.

Ορισμός 1.4.23 *Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \to B$ και έστω $A_1 \subset A$. Μπορούμε να ορίσουμε μία νέα συνάρτηση $f|_{A_1} : A_1 \to B$ την οποία θα ονομάζουμε περιορισμό της f και η οποία θα στέλνει το $x \in A_1 \subseteq A$ στο $f|_{A_1}(x) := f(x)$. Η συνάρτηση f θα λέγεται επέκταση της $f|_{A_1}$.*

Παραδείγματα Θεωρούμε την συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$. Είναι σαφές ότι η f δεν είναι ένα προς ένα (γιατί;). Ο περιορισμός $f|_{x \in \mathbb{R}, x \geq 0}$ της f στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών είναι ένα προς ένα, αφού αν $x_1^2 = x_2^2$ τότε $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Άρα $x_1 = -x_2$ ή $x_1 = x_2$. Η πρώτη περίπτωση όμως πρέπει να αποκλειστεί αφού $x_1, x_2 \geq 0$.

• Βασική Θεωρία Συνόλων
Βασικές έννοιες
Συνολοθεωρητικές Πράξεις
Προτάσεις
Σχέσεις
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 18 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ορισμός 1.4.24 *Θα λέμε ότι δύο συναρτήσεις $f_i : A_i \to B_i$, $i = 1, 2$ είναι ίσες αν και μόνο αν τα αντίστοιχα γραφήματα είναι ίσα. Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με το ότι $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ και $f_1(x) = f_2(x)$ για όλα τα $x \in A_1 = A_2$.*

Παρατήρηση Πολλοί συγγραφείς ορίζουν δύο συναρτήσεις f_1, f_2 να είναι ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in A$, χωρίς να ελέγξουν το σύνολο άφιξης. Ο ορισμός αυτός είναι προβληματικός γιατί αν μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι επί, και $f_1 : A \to B'$ είναι μία συνάρτηση με σύνολο άφιξης το $B \subset B'$ και $f(x) = f_1(x)$ για κάθε $x \in A$ τότε θα θεωρούσαμε τις f, f_1 ίσες αλλά η μία θα ήταν επί και η άλλη όχι. Δηλαδή η ιδιότητα του επί δεν θα ήταν καλά ορισμένη.

Άσκηση Ποιά από τα παρακάτω είναι σωστά;

1. Η σχέση $\Sigma \subseteq \{1, 2\} \times \{a, b\}$ με $\Sigma = \{(1, a)\}$ είναι γράφημα συνάρτησης.
(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

2. Η σχέση $\Sigma \subseteq \{1, 2\} \times \{a, b\}$ με $\Sigma = \{(1, a), (2, b), (1, b)\}$ είναι γράφημα συνάρτησης.
(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

3. Η σχέση $\Sigma \subseteq \{1, 2\} \times \{a, b\}$ με $\Sigma = \{(1, a), (2, b)\}$ είναι γράφημα συνάρτησης.
(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

4. Κάθε συνάρτηση $f : A \to A$ που είναι 1-1 είναι και επί.
(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

5. Κάθε συνάρτηση $f : A \to A$ που είναι επί είναι και 1-1.
(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

Άσκηση 1.4.25 Αν το A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $f : A \to A$ είναι μία συνάρτηση ένα προς ένα τότε είναι κατανάγκην και επί. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.4.26 Αν το A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $f : A \to A$ είναι μία συνάρτηση επί τότε είναι κατανάγκην και ένα προς ένα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 1.4.27 Θεωρούμε δύο αύξουσες συναρτήσεις $f : A \to B$, $g : B \to C$. Αποδείξτε ότι η $f \circ g$ είναι και αυτή αύξουσα. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 2

Σύνολα Αριθμών

2.1. Στοιχειώδης θεωρία Αριθμών

Το πρώτο σύνολο το οποίο θεωρούμε είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι δημιούργημα της ανάγκης για αρίθμηση διαφόρων αντικειμένων της καθημερινής ζωής. Γενικά έχει απασχολήσει αρκετά τους μαθηματικούς αλλά και τους φιλόσοφους τι ακριβώς είναι οι φυσικοί αριθμοί και πως μπορεί το σύνολο των φυσικών αριθμών να θεμελιωθεί αξιωματικά.

Οι προβληματισμοί αυτοί δεν θα μας απασχολήσουν σε αυτό το πρώτο μάθημα.

Αξιώματα

Για δύο τυχαίους φυσικούς αριθμούς, n, m η διαφορά τους $n-m$ είναι φυσικός αριθμός μόνο αν $n > m$. Προκειμένου η αφαίρεση να είναι καλά ορισμένη, ορίζουμε το σύνολο των $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, δηλαδή το σύνολο

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Στην πραγματικότητα προκειμένου να ορίσουμε τους ακεραίους για κάθε $n \in \mathbb{N}$ «επισυνάπτουμε» στο σύνολο των φυσικών αριθμών ένα στοιχείο $-n$ ώστε $n + (-n) = 0$.

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

- Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ισχύει $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- Για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$, ισχύει $x + y = y + z$,
- Το $0 \in \mathbb{Z}$, ικανοποιεί $x + 0 = x$.
- Για κάθε $x \in \mathbb{Z}$, υπάρχει μοναδικά ορισμένο $-x$ ώστε $x + (-x) = 0$.
- Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ισχύει $x(yz) = (xy)z$.
- Για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$, ισχύει $xy = yx$.
- Το $1 \in \mathbb{Z}$ ικανοποιεί $1x = x$. [1]

Επιπλέον στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ισχύει ότι

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } y = 0.$$

Στο σύνολο $\mathbb{Z}$, αναζητούμε μία λύση της εξίσωσης

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Στην περίπτωση που η παραπάνω εξίσωση έχει μία λύση $x \in \mathbb{Z}$, θα λέμε ότι το b διαιρεί το a και θα γράφουμε $b|a$.

Είναι σαφές ότι η εξίσωση (2.1) δεν έχει πάντα λύση, για παράδειγμα για $a = 2, b = 1$, δεν υπαρχεί $x \in \mathbb{Z}$ ώστε $2x = 1$. Πράγματι, ένα τέτοιο x θα έπρεπε να είναι θετικό και τότε $2x > 2 > 1$.

[1] Στο μάθημα της άλγεβρας θα δείτε ότι ένα σύνολο το οποίο ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις λέγεται αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

Ορισμός 2.1.1 *Θα συμβολίζουμε με $n!$ το γινόμενο των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το n, δηλαδή*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

2.1.1. Επαγωγή

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται ο «επόμενος» φυσικός $n+1$. Όταν κατασκευάσουμε το σύνολο των Ρητών αριθμών θα δούμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό για τους ρητούς, δεν υπάρχει δηλαδή ένα ελάχιστο «βήμα» που να το προσθέσουμε σε ένα ρητό και να πάρουμε τον «επόμενο» ρητό.

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να αποδεικνύουμε προτάσεις για το σύνολο των φυσικών αριθμών. Έχουμε μία ιδιότητα η οποία εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό n. Δηλαδή έχουμε μια ακολουθία προτάσεων μία για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα έχουμε την πρόταση

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Αυτό που εννοούμε στην παραπάνω πρόταση είναι ότι για οποιοδήποτε φυσικό $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα των n πρώτων φυσικών δίνεται από τον τύπο $\frac{n(n+1}{2}$. Δηλαδή έχουμε

$$\begin{array}{lll}
n = 1, & 1 & \frac{1(1+1)}{2} = 1 \\
n = 2, & 1 + 2 = 3 & \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \\
n = 3, & 1 + 2 + 3 = 6 & \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \\
n = 4, & 1 + 2 + 3 + 4 = 10 & \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Μπορούμε να πιστοποιήσουμε την αλήθεια της εξίσωσης (2.2) για όσους φυσικούς αριθμούς θέλουμε αλλά για όσους φυσικούς αντέξουμε να δοκιμάσουμε πάντα θα έχουμε αφήσει έξω τους υπόλοιπους φυσικούς που είναι άπειροι.

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
Στοιχειώδης θεωρία...
Πραγματικοί αριθμοί
Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 23 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Για να δώσουμε μία απόδειξη για όλους τους φυσικούς η ιδέα είναι να αποδείξουμε την αλήθεια της ιδιότητας $p(n+1)$ κάνοντας χρήση της προηγούμενης $p(n)$. Δηλαδή αν δείξουμε ότι «η αλήθεια της πρότασης $p(n)$ έχει σαν συνέπεια την αλήθεια της πρότασης $p(n+1)$ και πιστοποιήσουμε την αλήθεια της $p(1)$ τότε έχουμε ότι: Η πρόταση $p(1)$ είναι αληθής άρα και η πρόταση $p(2)$ είναι αληθής άρα και η πρόταση $p(3)$ είναι αληθής άρα και η πρόταση $p(3)$ είναι αληθής και με αυτό τον τρόπο εξαντλούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Ας δούμε πως μπορούμε να χρησημοποιήσουμε αυτή την κατασκευή για να αποδείξουμε την ιδιότητα (2.2) για όλους τους φυσικούς. Η $p(1)$ είναι αληθής αφού $1 = 1 \cdot 2/2$. Υποθέτουμε ότι για ένα $k \in \mathbb{N}$ η πρόταση $p(k)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdot + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι είναι αληθής η πρόταση και για $k+1$, χρησημοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος για τους πρώτους k φυσικούς. Έχουμε

$$1 + 2 + \cdot + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

δηλαδή η πρόταση που θέλαμε να αποδείξουμε.

Η ακριβής διατύπωση του αξιώματος της επαγωγής είναι η παρακάτω

Αξίωμα 2.1.2 *Έστω ένα σύνολο $S \subset \mathbb{N}$ το οποίο ικανοποιεί:*

1. $1 \in S$
2. $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$.

Τότε $S = \mathbb{N}$

Τέλος παραθέτουμε την επόμενη πρόταση η οποία μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επαγωγής

Αξίωμα 2.1.3 *Κάθε μη κενό υποσύνολο φυσικών έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Πρόταση 2.1.4 *Το αξίωμα της επαγωγής είναι ισοδύναμο με το αξίωμα 2.1.3.* **Απόδειξη**

Πολύ συχνά είναι χρήσιμη και η εξής μορφή της επαγωγής η οποία μοιάζει ισχυρότερη:

Πρόταση 2.1.5 *Θεωρούμε ένα σύνολο $S \subset \mathbb{N}$ το οποίο ικανοποιεί:*

1. $1 \in S$

2. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$

$$(\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subset S) \Rightarrow n + 1 \in S.$$

Τότε $S = \mathbb{N}$. **Απόδειξη**

2.1.2. Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.6 Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.1.7 Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.1.8 Για δύο φυσικούς αριθμούς n, m, $n \geq m$ ορίζουμε το σύμβολο $\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Αποδείξτε ότι $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Στην συνέχεια δείξτε ότι οι δυονιμικοί συντελεστές μπορούν να υπολογιστούν με την βοήθεια του τριγώνου του Pascal:

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}.$$

Ο τρόπος με τον οποίο σχηματίσαμε το τρίγωνο του Pascal είναι να υπολογίζουμε τους συντελεστές της κάθε γραμμής ως το άθροισμα των δύο προηγουμένων. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.9 Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^m b^{n-m}.$$

Στην συνέχεια δικαιολογείστε γιατί το $\binom{n}{m}$ είναι φυσικός. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.10 Αποδείξτε ότι για όλους τους φυσικούς ισχύει:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 2.1.11 Θεωρήστε μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η f είναι αύξουσα τότε $f(n) \geq n$ **Υπόδειξη-Λύση**

2.1.3. Διαιρετότητα

Στην καθημερινή ζωή αντιμετωπίζουμε συχνά το πρόβλημα της *διαίρεσης* ενός ακέραιου αριθμού με ένα άλλο. Η διαίρεση του n με το m προκύπτει είτε από την ανάγκη μοιράσματος n το πλήθος αντικειμένων σε m θέσεις, είτε από την ανάγκη διαδοχικών αφαιρέσεων του m από το n.

Για παράδειγμα για να διαιρέσουμε 10 βόλους σε 2 κουτάκια θα βάλουμε 4 βόλους σε κάθε κουτί και θα περισσέψουν και 2 βόλοι. Διαφορετικά μπορούμε να προσεγγίσουμε το ίδιο πρόβλημα ως διαδοχικές αφαιρέσεις, αφαιρούμε 2 φορές το 4 από το 10 και περισσεύουν και 2.

Θεώρημα 2.1.12 *Για κάθε δύο φυσικούς n, m, υπάρχει $p \in \mathbb{Z}$ και $u \in \mathbb{N}$, ώστε $n = m\pi + u$, ώστε $0 \leq u < 0$. Οι αριθμοί π, u είναι μονοσήμαντα ορισμένοι και λέγονται πηλίκο και υπόλοιπο της διαίρεσης του n με το m.* ***Απόδειξη***

Ορισμός 2.1.13 *Θα λέμε ότι το m διαιρεί το n όταν στην διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο, το υπόλοιπο είναι μηδενικό, όταν δηλαδή υπάρχει $\pi \in \mathbb{Z}$, ώστε $n = \pi m$. Αν το m διαιρεί το n θα γράφουμε $m \mid n$, διαφορετικά θα γράφουμε $m \nmid n$.*

Για παράδειγμα $3 \mid 9$ ενώ $3 \nmid 10$.

Πρόταση 2.1.14 *Για την διαίρεση ισχύουν τα παρακάτω ($a, b, c, \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$):*

1. $a \mid a$.
2. *Αν* $a \mid b$ *και* $b \mid c$ *τότε* $a \mid c$.
3. *Αν* $c \mid a$ *και* $c \mid b$ *τότε* $c \mid \kappa a + \lambda b$.
4. *Αν* $a \mid b$ *τότε* $a\kappa \mid b\kappa$.
5. *Αν* $a\kappa \mid b\kappa$ *τότε* $a \mid b$.

6. $\pm 1 \mid a$, και $\pm a \mid 0$.

Απόδειξη

Ορισμός 2.1.15 *Ένας αριθμός $p > 1$ θα λέγεται πρώτος αν και μόνο αν οι μοναδικοί του φυσικοί διαιρέτες είναι το $1, p$.*

Παρατηρούμε ότι το 3 είναι πρώτος γιατί μοναδικοί διαιρέτες του 3 είναι οι $\{1, 3\}$, ενώ το 10 δεν είναι πρώτος, αφού οι διαιρέτες του 10 είναι οι $\{1, 2, 5, 10\}$.

Πρόταση 2.1.16 *Κάθε φυσικός αριθμός έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη.* **Απόδειξη**

Θεώρημα 2.1.17 *[Ευκλείδης] Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.* **Απόδειξη**

Θεώρημα 2.1.18 *Κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο πρώτων, δηλαδή $n = p_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$.* **Απόδειξη**

Πόρισμα 2.1.19 *Αν ο πρώτος p διαιρεί ένα γινόμενο ab, τότε $p \mid a$ ή $p \mid b$.* **Απόδειξη**

Ορισμός 2.1.20 *Έστω a, b δύο φυσικοί αριθμοί με $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ και $b = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ οι αναλύσεις τους σε πρώτους παράγοντες, όπου αν ένας πρώτος αριθμός δεν εμφανίζεται στην ανάλυση του a ή του b τότε ο αντίστοιχος εκθέτης είναι 0. Οι φυσικοί αριθμοί*

$$[a, b] = p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdots p_r^{\max(a_r, b_r)}$$

και

$$(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdots p_r^{\min(a_r, b_r)}$$

θα λέγονται αντίστοιχα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και μέγιστος κοινός διαιρέτης των a, b.

Δύο αριθμοί a, b θα λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν δεν έχουν κανένα πρώτο κοινό στην ανάλυσή τους, αν δηλαδή $(a, b) = 1$.

Παρατήρηση: Ο Hardy δήλωνε ευτυχής που η έρευνα του είναι πάνω στην θεωρία αριθμών η οποία δεν έχει εφαρμογές στην πράξη και κυρίως σε μιλιταριστικές εφαρμογές. Μισό αιώνα μετά η άποψη του Hardy αποδείχθηκε λανθασμένη! Η θεωρία αριθμών και οι πρώτοι αριθμοί αποτελούν την βάση των αλγορίθμων κρυπτογραφίας με πολλές εμπορικές και στρατιωτικές εφαρμογές.

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή αναφέροντας το λεγόμενο τελευταίο θεώρημα του Fermat, το οποίο αναφέρει ότι για $n \geq 3$ δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y, z ώστε

$$x^n + y^n = z^n.$$

Την εικασία αυτή την διατύπωσε ο Fermat τον 16ο αιώνα και ισχυρίστηκε ότι έχει μία θαυμάσια απόδειξη αλλά δεν του φτάνει το περιθώριο του βιβλίου που σημείωνε για να την καταγράψει. Πολλοί μαθηματικοί αγωνίστηκαν να βρουν την «θαυμάσια» αυτή απόδειξη του Fermat, χωρίς αποτέλεσμα. Η εικασία αποδείχτηκε το 1994 από τον A. Wiles με χρήση προχωρημένων εργαλείων της αριθμητικής αλγεβρικής γεωμετρίας.

2.1.4. Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.21 Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z}$, $\Sigma \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με

$$(x, y) \in \Sigma \text{ αν και μόνο αν } n \mid x - y.$$

Αποδείξτε ότι η Σ είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Αποδείξτε ότι το σύνολο πηλίκο έχει ακριβώς n το πλήθος στοιχεία. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.22 Θεωρούμε το σύνολο $n\mathbb{Z} = \{x : x = nk, k \in \mathbb{Z}\}$. Αποδείξτε ότι $n \mid m$ αν και μόνο αν $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.23 Αποδείξτε ότι για τους διονυμικούς συντελεστές $p \mid \binom{p}{m} = \frac{p!}{m!(p-m)!}$ για $0 < m < p$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.24 Αποδείξτε ότι $[a, b] = ab/(a, b)$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.25 Να αποδειχτεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n > 0$, υπάρχουν n το πλήθος διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί κανένας από τους οποίους δεν είναι πρώτος. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.26 Αν ο αριθμός $a^n - 1$ είναι πρώτος, $n > 1$ και $a > 1$, τότε $a = 2$ και ο n είναι πρώτος. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.27 Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών αριθμών διαιρείται δια του 24. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.28 Έστω $n \in \mathbb{N}$, και έστω $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Αν u_1, u_2 είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης του a_i με το n να αποδειχτεί ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $a_1 + a_2$ με το n είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $u_1 + u_2$ με το n και ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $a_1 \cdot a_2$ με το n είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $u_1 \cdot u_2$ με το n. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.29 Να αποδειχτεί ότι ένας αριθμός διαιρείται δια του 3 ή του 9, αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται δια του 3 ή του 9, αντίστοιχα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.30 Να αποδειχτεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{Z}$, $p|a^p - a$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.31 Θεωρούμε την παρακάτω ακολουθία αριθμών

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

όπου $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, δηλαδή κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων τους. Η ακολουθία αυτοί στην βιβλιογραφία ονομάζεται ακολουθία του Fibonaci. Αποδείξτε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο όρων της ακολουθίας είναι η μονάδα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.1.32 Έστω p πρώτος. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$ δεν είναι ακέραιος. **Υπόδειξη-Λύση**

2.1.5. Κατασκευή των ρητών

Στην παράγραφο αυτή θα κατασκευάσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$, των ρητών αριθμών.

Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{0\},$$

δηλαδή το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών (a, b) με $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Στο σύνολο αυτό ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας

$$(a, b) \equiv (a', b') \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

Το ότι η παραπάνω σχέση αποτελεί σχέση ισοδυναμίας το είδαμε στην άσκηση 1.4.14 του πρώτου κεφαλαίου.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ θα το ορίσουμε να είναι το σύνολο πηλίκο της παραπάνω σχέσης ισοδυναμίας, δηλαδή το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q}$ περιέχει το σύνολο $\mathbb{Z}$ και ότι κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ έχει αντίστροφο.

Καταρχάς ας ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στο σύνολο $\mathbb{Q}$.

$$(a, b) + (a', b') = (ab' + a'b, bb'), (a, b)(a', b') = (aa', bb').$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητες του αντιπροσώπου. Δηλαδή αν $(a, b) \cong (a_1, b_1)$ και $(a', b') \cong (a'_1, b'_1)$, θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$(a, b) + (a', b') \cong (a_1, b_1) + (a'_1, b'_1),$$

και

$$(a, b)(a', b') \cong (a_1, b_1)(a'_1, b'_1).$$

Θα αφήσουμε την απόδειξη του καλά ορισμένου των πράξεων ως άσκηση.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, ταυτίζοντας το $n \in \mathbb{Z}$ με την κλάση ισοδυναμίας του $(n, 1)$ στο $\mathbb{Q}$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι πράξεις στο $\mathbb{Q}$ περιοριζόμενες στο $\mathbb{Z}$, δίνουν τις συνηθησμένες πράξεις στους ακαίρεους.

Ο συνηθισμένος συμβολισμός για την κλάση ισοδυναμίας του (a, b) στο $\mathbb{Q}$ είναι a/b.

2.2. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Η ανάγκη κατασκευής των πραγματικών αριθμών δεν ήταν αλγεβρική. Οι πραγματικοί αριθμοί κατασκευάστηκαν προκειμένου να ικανοποιηθεί το λεγόμενο *αξίωμα της πληρότητας* δηλαδή

Αξίωμα 2.2.1 *Κάθε άνω φραγμένο σύνολο έχει* supremum.

Παρατηρούμε ότι το υποσύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\},$$

των ρητών αριθμών είναι άνω φραγμένο από το 2. Το supremum του παραπάνω συνόλου θα είναι η τετραγωνική ρίζα του 2. Πράγματι αν $a \in \mathbb{R}$, ώστε a άνω φράγμα του A τότε $x \leq a$ για κάθε $x \in A$ και συνεπώς $x^2 \leq a^2$, το μικρότερο τετράγωνο που φράσει από πάνω το x^2 είναι το $\sqrt{2}$.

2.2.1. Αριθμοί που δεν είναι ρητοί

Θα συμβολίζουμε με $\sqrt{2}$ τον θετικό πραγματικό αριθμό ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει 2. Σε ένα σώμα που ισχύει το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει και είναι ίσος με το supremum του παραπάνω συνόλου. Γεωμετρικά ένας τέτοιος αριθμός αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλεύρες ίσες με την μονάδα.

Πρόταση 2.2.2 *Ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός.* ***Απόδειξη***

2.2.2. Κατασκευή των Πραγματικών Αριθμών

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε την κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών ακολουθώντας τις ιδέες του Dedekind. Αργότερα θα δώσουμε και άλλη μία εναλλακτική κατασκευή.

Ορισμός 2.2.3 *Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{Q}$ θα λέγεται αρχικό τμήμα του $\mathbb{Q}$ αν ικανοποιεί:*

$$\text{Αν } p \in A \text{ και } q < p \text{ τότε } q \in A.$$

Δηλαδή αν το αρχικό τμήμα περιέχει ένα ρητό αριθμό τότε περιέχει και όλους τους μικρότερούς του. Το A θα λέγεται ανοιχτό αρχικό τμήμα του $\mathbb{Q}$ αν δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Επιπλέον ορίζουμε το (αντ. ανοιχτό) τελικό τμήμα του $\mathbb{Q}$ να είναι το συμπλήρωμα ενός (αντ. ανοιχτού) αρχικού τμήματος του $\mathbb{Q}$.

Ορισμός 2.2.4 *Το σύνολο όλων των αρχικών ανοιχτών τμημάτων του $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.*

Ο παραπάνω ορισμός αφήνει πολλά ερωτήματα. Καταρχάς θα πρέπει να καταλάβουμε πως μπορούμε να θεωρήσουμε τους ρητούς αριθμούς ως υποσύνολο των πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο: Οι ρητοί αποτελούνται από τα αρχικά τμήματα της μορφής:

$$A_q := \{x \in \mathbb{Q} : x < q\},$$

με $q \in \mathbb{Q}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

$$q \mapsto A_q$$

είναι μία συνάρτηση ένα προς ένα (γιατί;)

Το επόμενο θέμα είναι πως θα ορίσουμε πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς. Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή δύο αρχικά τμήματα A, B του $\mathbb{Q}$ τότε ορίζουμε σαν άθροισμα τους το σύνολο

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, b \in B\}$$

και σα γινόμενό τους το σύνολο

$$A \cdot B := \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι παραπάνω πράξεις είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ότι τα $A + B, A \cdot B$ είναι όντως ανοιχτά αρχικά τμήματα του $\mathbb{Q}$.

Για παράδειγμα αν $x \in A + B$ τότε εξ ορισμού $x = a + b$, με $a \in A$ και $b \in B$. Αν λοιπόν $\mathbb{Q} \ni y < x$ τότε $y - a < b$, άρα $y - a \in B$ οπότε εξ ορισμού του $A + B$, έχουμε ότι $y = a + (y - a) \in A + B$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι και το $A \cdot B$ είναι αρχικό τμήμα του $\mathbb{Q}$.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι παραπάνω ορισμένες πράξεις έχουν όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες των πράξεων όπως προσεταιριστική, ύπαρξη αντίστροφου, ουδετέρου κτλ. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο στον έλεγχο αυτό, θα αρκεστούμε στο να παρατηρήσουμε ότι όλες οι αναμενόμενες πράξεις, ανάγονται στις αντίστοιχες ιδιότητες πράξεων των ρητών.

Τέλος θα λέμε ότι $A \leq B$ αν και μόνο αν $A \subset B$. Γνωρίζουμε ότι ο εγκλεισμός συνόλων δίνει μία σχέση διάταξης. Ο προσεκτικός αναγνώστης θα πρέπει να δείξει ότι η σχέση αυτή διάταξης είναι συμβατή με τις πράξεις.

Παράδειγμα Ο $\sqrt{2}$ που δείξαμε ότι δεν είναι ρητός, είναι το σύνολο

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

Πράγματι, το σύνολο A είναι ένα αρχικό τμήμα αφού αν $x \in A$ και $y < x$ τότε αν $x < 0$ τότε προφανώς $y \in A$ αφού $y < x < 0$. Αν πάλι $0 \leq y < x$ τότε αν $y < x$ έχουμε και

$y^2 < x^2 < 2$ οπότε $y \in A$ ενώ αν $y < 0$ πάλι εξ ορισμού $y \in A$. Τέλος παρατηρούμε ότι

$$A \cdot A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\},$$

δηλαδή το τετράγωνο του A είναι το αρχικό τμήμα που έχουμε ταυτίσει με τον ρητό αριθμό 2. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $A \cdot A \subset \{x\mathbb{Q} : x < 2\}$. Πράγματι, αν $0 < x \in A \cdot A$, τότε υπάρχουν $a, b \in A$ ώστε $x = ab$ και $a^2 < 2$, $b^2 < 2$ συνεπώς $x^2 = aabb < 4$ άρα $x < 2$. Η περίπτωση $x < 0$ είναι προφανής.

Αντιστρόφως θα πρέπει να δείξουμε ότι $\{x\mathbb{Q} : x < 2\} \subset A \cdot A$. Έστω $y \in \{y\mathbb{Q} : y < 2\}$, θεωρούμε το ανοιχτό τμήμα $A_{y/2} := \{c \in \mathbb{Q} : c^2 < y/2\}$. Παρατηρούμε ότι $y/2 < 2$ συνεπώς $A_{y/2} < A$ (γιατί;) άρα $A^C_{y/2} \cap A \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $a \in \mathbb{Q}$ ώστε $y^2/2 < a^2 < 2$, και $y/a := b \in A$. Άρα καταφέραμε να γράψουμε το y ως γινόμενο στοιχείων του A.

Θεώρημα 2.2.5 *Κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.* ***Απόδειξη***

Για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η αρχή του *Αρχιμήδη*

Πρόταση 2.2.6 *Από κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \leq n$.* ***Απόδειξη***

Άσκηση 2.2.7 Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει ρητός **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.8 Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς υπάρχει ρητός. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.2.9 Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. **Υπόδειξη-Λύση**

2.3. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν έχει λύση, αφού το γινόμενο δύο θετικών αριθμών έχει σαν αποτέλεσμα θετικό αριθμό (Βλέπε άσκηση 2.2.9). Θα προσπαθήσουμε να «διευρύνουμε» το σύνολο των πραγματικών αριθμών και να κατασκευάσουμε ένα νέο σύνολο όπου η εξίσωση $x^2 = -1$ να έχει λύση.

Ορισμός 2.3.1 *Ορίζουμε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ να είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (a, b), όπου προσθέτουμε δύο ζεύγη με τον παρακάτω τρόπο:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

και πολλαπλασιάζουμε δύο ζεύγη ως εξής:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Θα πρέπει κανείς τώρα να ελέγξει ότι το παραπάνω σύνολο με τις δύο πράξεις έχει παρόμοιες ιδιότητες με αυτές των πραγματικών αριθμών δηλαδή ότι

- Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{C}$, ισχύει $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$, ισχύει $a + b = b + a$.
- Υπάρχει στοιχείο $\mathbb{C} \ni \mathbf{0} := (0, 0)$, ώστε για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $\mathbf{0} + a = a$.
- Για κάθε $a \in \mathbb{C}$, υπάρχει $-a \in \mathbb{C}$, ώστε $a + (-a) = 0$.
- Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$, ισχύει $ab = ba$.
- Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{C}$, ισχύει $a(b + c) = ab + ac$.
- Υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbb{C} \ni \mathbf{1} := (1, 0)$, ώστε για κάθε $a \in \mathbb{C}$, $\mathbf{1}a = a$.

- Για κάθε $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, υπάρχει ένα στοιχείο $a^{-1} \in \mathbb{C}$ ώστε $a \cdot a^{-1} = \mathbf{1}$.

Στο μάθημα της *Άλγεβρας* σύνολα που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες θα τα ονομάζουμε «σώματα».[2] Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto (x, 0) \end{cases},$$

είναι ένα προς ένα και επιπλέον «σέβεται» τις πράξεις του $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$, δηλαδή $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί είναι υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών και ο περιορισμός των πράξεων των μιγαδικών αριθμών στους πραγματικούς αριθμούς δίνουν τις συνηθισμένες πράξεις των πραγματικών. Τα στοιχεία της μορφής $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ θα τα συμβολίζουμε χάρην συντομίας απλά με x.

Θέτουμε $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ και τον αριθμό αυτό θα τον ονομάζουμε μιγαδική μονάδα. Με βάση τον ορισμό του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών μπορούμε να αποδείξουμε

---

[2]Θα λέμε ότι ένα σύνολο k εφοδιαμένο με δύο «πράξεις», δηλαδή δύο συναρτήσεις

$$+ : k \times k \to k \text{ και } \cdot : k \times k \to k$$

είναι σώμα αν και μόνο αν

- Για κάθε $a, b, c \in k$, ισχύει $(a+b)+c = a+(b+c)$.
- Για κάθε $a, b \in k$, ισχύει $a + b = b + a$.
- Υπάρχει στοιχείο $k \ni \mathbf{0}$, ώστε για κάθε $a \in k$, $\mathbf{0} + a = a$.
- Για κάθε $a \in k$, υπάρχει $-a \in k$, ώστε $a + (-a) = 0$.
- Για κάθε $a, b \in k$, ισχύει $ab = ba$.
- Για κάθε $a, b, c \in k$, ισχύει $a(b+c) = ab + ac$.
- Υπάρχει ένα στοιχείο $k \ni \mathbf{1} := (1, 0)$, ώστε για κάθε $a \in k$, $\mathbf{1}a = a$.
- Για κάθε $a \in k\setminus\{0\}$, υπάρχει ένα στοιχείο $a^{-1} \in k$ ώστε $a \cdot a^{-1} = \mathbf{1}$.

ότι $i^2 = -1$. Πράγματι,

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi.$$

2.3.1. Γεωμετρική Αναπαράσταση Μιγαδικών αριθμών.

Ορίσαμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Γεωμετρικά ένα τέτοιο ζευγάρι αντιστοιχεί στις συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο.

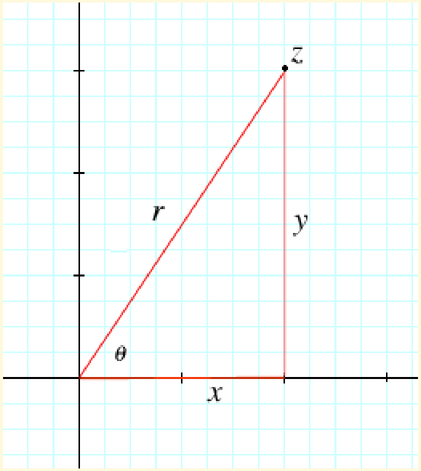
Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = a + ib$ να παρίσταται ως σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Ορίζουμε ως μέτρο του μιγαδικού αριθμού το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει την αρχή $(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων με το μιγαδικό αριθμό (a,b). Το μέτρο του μιγαδικού z θα το συμβολίζουμε με $|z|$ και προκύπτει ότι

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Επίσης ορίζουμε σαν όρισμα του μιγαδικού αριθμού z την γωνία ϑ που σχηματίζει ο άξονας των πραγματικών αριθμών με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την αρχή $(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων με τον μιγαδικό αριθμό (a,b) μετρημένη αντίστροφα με την φορά των δεικτών του ρολογίου. Τη γωνία ϑ θα την ονομάζουμε όρισμα του μιγαδικού αριθμού. Παρατηρούμε ότι αν ϑ είναι ένα όρισμα του μιγαδικού αριθμού τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και το $\vartheta + 2k\pi$ είναι ένα όρισμα. Το μοναδικά ορισμένο όρισμα ϑ του z το οποίο ικανοποιεί $0 \le \vartheta < 2\pi$ θα λέγεται πρωτεύον.

Έτσι ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ μπορεί να γραφεί σε τριγωνομετρική μορφή ως:

$$z = a + bi = |z|\big(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)\big).$$



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
Στοιχειώδης θεωρία...
Πραγματικοί αριθμοί
Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 39 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Ορισμός 2.3.2 *Έστω $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Θα συμβολίζουμε με $\bar{z}$, τον μιγαδικό αριθμό $a - ib$ και θα τον καλούμε συζυγή του z.*

Πρόταση 2.3.3 *Ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
2. $\bar{\bar{z}} = z$.
3. $z\bar{z} = |z|^2$.
4. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Πρόταση 2.3.4 *Για το μέτρο μιγαδικού αριθμού ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z| \geq 0$ και $|z| = 0$ αν και μόνο αν $z = 0$.*
2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, *για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.*

Απόδειξη

Πρόταση 2.3.5 [De' Moivre] *Ας υποθέσουμε ότι $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, και $w = |w|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$, είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί γραμμένοι σε τριγωνομετρική μορφή. Ισχύει:*

$$zw = |z||w|\big(\cos(\varphi + \vartheta) + i\sin(\varphi + \vartheta)\big).$$

Απόδειξη

Θεώρημα 2.3.6 *Κάθε πολυωνυμική εξίσωση*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C},$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Παρόλο που το παραπάνω θεώρημα έχει την ονομασία «το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας», η απόδειξη του βασίζεται σε καθαρά αναλυτικά εργαλεία αφού το αξίωμα της πληρότητας που χαρακτηρίζει τους πραγματικούς αριθμούς θα πρέπει να παίξει ρόλο στην απόδειξη.

Πιθανότατα θα δείτε μια απόδειξη σε ένα πρώτο μάθημα μιγαδικής ανάλυσης, διαφορισίμων πολλαπλοτήτων ή αλγεβρικής τοπολογίας.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν το $n \leq 4$, τότε οι ρίζες του πολυωνύμου μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή, σαν συναρτήσεις των συντελεστών a_i, με την βοήθεια ριζικών. Η περίπτωση $n = 2$ σας είναι γνωστή από τα λυκειακά μαθηματικά. Πράγματι οι ρίζες $\rho_{1,2}$ του

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

δίνονται από τους τύπους

$$\rho_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Παρόμοιοι αλλά πιο πολύπλοκοι τύποι είναι γνωστοί για τις περιπτώσεις $n = 3, 4$. Η περίπτωση $n \geq 5$, ήταν ένα από τα μεγάλα άλυτα πρόβληματα των μαθηματικών του 19 αιώνα. Πρώτος ο N. Abel απόδειξε ότι οι ρίζες της εξίσωσης πέμπτου βαθμού δεν εκφράζονται κατ' ανάγκην με την βοήθεια ριζικών, ενώ ο E. Galois έδωσε κριτήρια για το πότε οι ρίζες μίας πολυωνυμικής εξίσωσης n βαθμού μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια ριζικών.

Θεώρημα 2.3.7 *Κάθε πολυωνυμική εξίσωση*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C},$$

έχει ακριβώς n-ρίζες στο $\mathbb{C}$. **Απόδειξη**

2.3.2. N-ρίζες μιγαδικών αριθμών.

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε πως να υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης $x^n = a$, όπου $a \in \mathbb{C}$. Η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς n το πλήθος ρίζες σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.7. Μπορούμε να τις υπολογίσουμε ακριβώς.

Πρόταση 2.3.8 *Οι n το πλήθος λύσεις της εξίσωσης*

$$x^n = 1,$$

δίνονται από τον τύπο

$$x_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k}{n}).$$

Απόδειξη

Λήμμα 2.3.9 *Αν* z_0 *είναι μία ρίζα της* $x^n = a$, *τότε οι υπόλοιπες ρίζες δίνονται από τον τύπο* $z_i = \zeta_i z_0$, *όπου το* ζ_i *διατρέχει τις n-ρίζες της μονάδας.* **Απόδειξη**

Πρόταση 2.3.10 *Έστω* $a = |a|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$. *Οι n-ρίζες του a δίνονται από τον τύπο*

$$z_i = \sqrt[n]{|a|}(\cos(\frac{2\pi k + \vartheta}{n}) + i\sin(\frac{2\pi k + \vartheta}{n})),$$

$k = 0, \ldots n-1$. **Απόδειξη**

2.4. Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1 Αποδείξτε ότι αν $a+ib \in \mathbb{C} \neq 0$, τότε $(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.4.2 Να υπολογιστούν οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + x + 3$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.4.3 Να υπολογιστούν οι 10 ρίζες του $1 + i$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.4.4 Θεωρήστε το σύνολο $\mu(n)$ των n-ριζών της μονάδας. Αποδείξτε ότι αν $x, y \in \mu(n)$ τότε $xy \in \mu(n)$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα στοιχείο $e \in \mu(n)$ ώστε $ex = x$ για κάθε $x \in \mu(n)$ και ότι αν $x \in \mu(n)$, τότε υπάρχει $x^{-1} \in \mu(n)$ ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.4.5 Θεωρήστε τον μοναδίαιο δίσκο D κέντρου 0 και ακτίνας 1, δηλαδή $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Θεωρήστε την συνάρτηση $z^n : D \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε, ότι η εικόνα της z^n είναι το D. Είναι η z^n ένα προς ένα; Περιγράψτε την z^n γεωμετρικά. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 2.4.6 Αποδείξτε ότι το άθροισμα των n-οστών ριζών του 1 είναι 0. **Υπόδειξη-Λύση**

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
Στοιχειώδης θεωρία...
Πραγματικοί αριθμοί
Μιγαδικοί αριθμοί
Ασκήσεις
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 43 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Κεφάλαιο 3

Ακολουθίες και Σύγκλιση

3.1. Πρώτη ενότητα

3.1.1. Ακολουθίες

Μια ακολουθία είναι μία συνάρτηση από το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Θα συμβολίζουμε με a_n την τιμή της συνάρτησης (ακολουθίας) στο $n \in \mathbb{N}$. Την ακολουθία σαν συνάρτηση θα την συμβολίζουμε με (a_n).

Παραδείγματα

1. Η σταθερή ακολουθία $a_n = 1$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
2. $a_n = 1/n$, $b_n = n^3 + 4/n$, $c_n = n \sin(n)$
3. $$a_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος} \\ 1/n & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η έννοια της μονοτονίας έχει οριστεί για συναρτήσεις $f : A \to B$. Συνεπώς και για τις ακολουθίες, που είναι συναρτήσεις $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, μπορούμε να μιλήσουμε για μονότονες, αύξουσες και φθίνουσες ακολουθίες. Περισσότερο συγκεκριμένα θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα αν και μόνο αν

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq a_n.$$

Θα λέμε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα αν και μόνο αν

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n.$$

Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) είναι *γνήσια αύξουσα* αν και μόνο αν

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n.$$

Θα λέμε ότι η ακολουθία είναι *γνήσια φθίνουσα* αν και μόνο αν

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n.$$

Άσκηση Να ελεγθούν οι παρακάτω ακολουθίες ως προς την μονοτονία τους

1. $a_n = n$

(α′) Αύξουσα (β′) Φθίνουσα (γ′) Τίποτα απο τα δύο

2. $a_n = n^3$

(α′) Αύξουσα (β′) Φθίνουσα (γ′) Τίποτα απο τα δύο

3. $a_n = (-1)^n$

(α′) Αύξουσα (β′) Φθίνουσα (γ′) Τίποτα απο τα δύο

4. Η (a_n) είναι άύξουσα αν και μόνο αν η $(-a_n)$ είναι φθίνουσα.

(α′) Σωστό (β′) Λάθος

3.1.2. Φραγμένες ακολουθίες

Θα λέμε, ακριβώς όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων από ένα σύνολο σε ένα διατεταγμένο σύνολο, ότι μία ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, ώστε για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $m < a_n < M$.

Λήμμα 3.1.1 *Μία ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|a_n| < M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.* ***Απόδειξη***

Άσκηση Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες;

1. $a_n = 4$

(α′) Φραγμένη (β′) Μη φραγμένη

2. $a_n = 1/n$

(α′) Φραγμένη (β′) Μη φραγμένη

3. $a_n = n^3$

(α′) Φραγμένη (β′) Μη Φραγμένη

3.1.3. Σύγκλιση ακολουθίας

Ορισμός 3.1.2 *Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό ℓ αν και μόνο αν*

$$\text{Για κάθε } > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < .$$

Στην περίπτωση που η ακολουθία συγκλίνει στον πραγματικό ℓ, θα γράφουμε $\lim a_n = \ell$ ή $a_n \to \ell$.

Ο παραπάνω ορισμός σημαίνει ότι για οσοδήποτε μικρό, αλλά θετικό αριθμό υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0()$ ο οποίος εξαρτάται από το , ώστε όλοι οι όροι της ακολουθίας μετά από αυτόν να ικανοποιούν

$$|a_n - \ell| < \ \Leftrightarrow \ell - \ < a_n < \ell +$$

δηλαδή να βρίσκονται μέσα στην οριζόντια «ταινία» με πλάτος γύρω από το ℓ. Το τι εννοούμε με την παραπάνω ερμηνεία θα γίνει σαφές με το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα Η ακολουθία $a_n = 1/n$ συγκλίνει στο 0. Ας δοκιμάσουμε με μερικές διαφορετικές επιλογές για το . Ξεκινάμε με $= 3$. Τότε αρκεί να πάρουμε για $n_0(3) = 1$ (ή οποιοδήποτε άλλο μεγαλύτερό του), προκειμένου να έχουμε $|1/n| = 1/n < 3$, αφού η τελευταία ανισότητα ισχύει πάντα. Τα πράγματα γίνονται ποιό δύσκολα (και ενδιαφέροντα) για μικρές επιλογές του . Ας πάρουμε $= 1/10$. Τότε για τα

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{6}, a_7 = \frac{1}{7}, a_8 = \frac{1}{8}, a_9 = \frac{1}{9}, a_{10} = \frac{1}{10}$$

δεν ισχύει $|a_n| < 1/10$. Αν όμως αγνοήσουμε τους δέκα πρώτους όρους της (a_n), δηλαδή θεωρήσουμε τους όρους a_n για $n > n_0(1/10)$, με $n_0(1/10) = 11$, τότε ισχύει ότι $|a_n| < 1/10$.

Δεν είναι και πολύ δύσκολο να δείξουμε γενικά ότι για κάθε > 0, οσοδήποτε μικρό και αν είναι, υπάρχει $n_0() \in \mathbb{N}$ ώστε $n > n_0() \Rightarrow |1/n| <$.

Ξεκινάμε από την ανισότητα που θέλουμε να ισχύει

$$\frac{1}{n} < \tag{3.1}$$

και προσπαθούμε να «λύσουμε» ως προς n. Έτσι η (3.1) γράφεται ισοδύναμα στην μορφή

$$\frac{1}{} < n,$$

δηλαδή για τα n που είναι μεγαλύτερα του $1/$, η ζητούμενη ανισότητα (3.1) είναι αληθής. Θέλουμε το $n_0()$ να είναι φυσικός αριθμός, οπότε αρκεί να πάρουμε ως $n_0()$ το

$$n_0() = \left[\frac{1}{}\right] + 1$$

ή οποιοδήποτε μεγαλύτερο του (γιατί;).

Παρατηρήστε την εξάρτηση του $n_0()$ στο προηγούμενο παράδειγμα από το , όπως και το γεγονός ότι όσο ποιό μικρό είναι το , τόσο ποιό μεγάλο είναι το $n_0()$.

Παράδειγμα Στο παράδειγμα αυτό που είναι ποιό σύνθετο θα αποδείξουμε ότι

$$\lim \frac{3n-4}{4n+2} = \frac{3}{4}.$$

Έστω ένα οσοδήποτε μικρό το οποίο στην συνέχεια παραμένει σταθερό. Ξεκινάμε από την ανισότητα

$$\left|\frac{3n-4}{4n+2} - \frac{3}{4}\right| < , \tag{3.2}$$

την οποία προσπαθούμε να λύσουμε ως προς n. Η (3.2) γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{11}{8n+4} < \Leftrightarrow \frac{1}{8}\left(\frac{11}{} - 4\right) < n,$$

οπότε αρκεί να πάρουμε σαν $n_0() = \left[\frac{1}{8}\left(\frac{11}{} - 4\right)\right] + 1$, η οποιοδήποτε μεγαλύτερο του.

Πρόταση 3.1.3 *Το όριο μίας ακολουθίας όταν υπάρχει είναι μοναδικό.* ***Απόδειξη***

Ορισμός 3.1.4 *Θα λέμε ότι η ακολουθία (b_n) είναι υποακολουθία της ακολουθίας (a_n), αν υπάρχει μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ώστε $b_n = a_n \circ f$.*

Παράδειγμα Έστω (a_n) η ακολουθία με τύπο $a_n = (-1)^n$, και έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία στέλνει το $n \mapsto 2n$. Τότε η σύνθεση $a_n \circ f$ την οποία θα συμβολίζουμε και σαν $a_{f(n)} = a_{2n}$ είναι η ακολουθία με τύπο $a_{2n} = 1$.

Θεώρημα 3.1.5 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.* **Απόδειξη**

Θεώρημα 3.1.6 *Κάθε ακολουθία έχει γνήσια μονότονη υποακολουθία.* **Απόδειξη**

Θεώρημα 3.1.7 **[Heine-Borel]** *Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μία τουλάχιστον συγκλίνουσα υποακολουθία.* **Απόδειξη**

Έκτος από το όριο σε πεπερασμένο αριθμό, μία ακολουθία μπορεί να συγκλίνει στο $\pm\infty$.

Ορισμός 3.1.8 *Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $+\infty$ και θα το συμβολίζουμε με $\lim a_n = +\infty$ ή με $a_n \to +\infty$, αν και μόνο αν*

$$\text{για κάθε } M > 0, \text{ υπάρχει } n_0(M) \in \mathbb{N}, \text{ ώστε για } n > n_0 \;\; a_n > M.$$

Ομοίως, θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $-\infty$ και θα το συμβολίζουμε με $\lim a_n = -\infty$ ή με $a_n \to -\infty$, αν και μόνο αν

$$\text{για κάθε } M < 0, \text{ υπάρχει } n_0(M) \in \mathbb{N}, \text{ ώστε για } n > n_0 \;\; a_n < M.$$

Παρατήρηση Υπάρχουν ακολουθίες που δεν είναι φραγμένες αλλά δεν συγκλίνουν ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$ για παράδειγμα η

$$a_n = (-1)^n n.$$

Άσκηση Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες με τον ορισμό της σύκλισης ακολουθίας (a_n) στο a;

1.

$$\text{Για κάθε } \ \geq 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < .$$

(α′) Ισοδύναμο (β′) Μη ισοδυναμο

2.

$$\text{Για κάθε } > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq .$$

(α') Ισοδύναμο (β') Μη ισοδύναμο

3.

$$\text{Για κάθε } > 0, \in \mathbb{Q}, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| \leq .$$

(α') Ισοδύναμο (β') Μη ισοδύναμο

Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς

1. Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα

(α') Σωστό (β') Λάθος

2. Αν μία ακολουθία είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει.

(α') Σωστό (β') Λάθος

3.2. Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.1 Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.2 Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον a και η ακολουθία (b_n) συγκίνει στον b, δείξτε ότι η ακολουθία $(a_n + b_n)$ συγκλίνει στον $a + b$ και ότι η ακολουθία $(a_n b_n)$ συγκλινει στο ab. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.3 Αποδείξτε ότι αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο a, τότε κάθε υποακολουθία της (a_n) συγκλίνει στο a. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.4 Θεωρούμε τις συγκλίνουσες ακολουθίες (a_n) και (b_n) με αντίστοιχα όρια a, b και $a_n \leq b_n$, τότε $a < b$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι μπορεί να έχουμε $a_n < b_n$ αλλά $a = b$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 3.2.5 Έστω $a > 0$ αποδείξτε ότι $\lim a^{1/n} = 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

3.2.1. Εναλακτικός ορισμός των πραγματικών αριθμών

Ορίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο τους πραγματικούς αριθμούς με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν το αξίωμα της πληρότητας, δηλαδή κάθε φραγμένο υποσύνολο να έχει supremum.

Θα δώσουμε σε αυτό το κεφάλαιο μία διαφορετική, αλλά ισοδύναμη περιγραφή του αξιώματος της πληρότητας, βασισμένο στην έννοια των συγκλινουσών ακολουθίων.

Ξεκινάμε με την έννοια της ακολουθίας Cauchy. Μια ακολουθία (a_n) θα λέγεται Cauchy αν οι όροι της από κάποιο n_0 και μετά πλησιάζουν μεταξύ τους όσο κοντά θέλουμε.

Ορισμός 3.2.6 *Μία ακολουθία (a_n) είναι Cauchy αν και μόνο αν*

$$\text{Για κάθε } > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < .$$

Είναι σαφές ότι αν μία ακολουθία συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό ℓ αφού οι όροι πλησιάζουν στο ℓ θα πλησιάζουν και μεταξύ τους. Δηλαδή

Πρόταση 3.2.7 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία με όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ είναι Cauchy.* ***Απόδειξη***

Είναι οι ακολουθίες Cauchy συγκλίνουσες; Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα, θεωρούμε τον αριθμό $\sqrt{2}$. Αποδείξαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι είναι άρρητος. Η ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του που ορίζεται ως:

$$a_n = \frac{[10^n\sqrt{2}]}{10^n},$$

δηλαδή

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\cdots$
1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421	$\cdots$

είναι μία ακολουθία (a_n) με όρους στο $\mathbb{Q}$, η οποία συγκλίνει στον $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι μία ακολουθία Cauchy από το $\mathbb{Q}$ δεν έχει όριο κατ' ανάγκη στο $\mathbb{Q}$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε όπως θα δούμε στην συνέχεια τους πραγματικούς αριθμους από το $\mathbb{Q}$, επισυνάπτοντας στους ρητούς όλα τα όρια ακολουθιών από το $\mathbb{Q}$.

Ξεκινάμε με το

Θεώρημα 3.2.8 *Κάθε ακολουθία Cauchy έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$.* ***Απόδειξη***

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε κάνοντας χρήση ακολουθιών Cauchy $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ να ορίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς. Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθίων Cauchy $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ στο οποίο θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow a_n - b_n \to 0.$$

(Γιατί είναι σχέση ισοδυναμίας;) Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας με την παραπάνω σχέση «ταυτίζεται» με τους πραγματικούς αριθμούς!

Η απόδειξη γιατί το παραπάνω σύνολο «ταυτίζεται» με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, αν και δεν είναι πολύ δύσκολη προϋποθέτει γνώσεις μερικών βασικών στοιχείων αφηρημένης *άλγεβρας*, κυρίως για να εξηγήσουμε τι εννούμε ακριβώς γράφοντας «ταυτίζεται» στις παραπάνω προτάσεις.

Άσκηση 3.2.9 Θεωρούμε το σύνολο A το οποίο περιέχει όλες τις ακολουθίες Cauchy. Δείξτε ότι η σχέση

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow a_n - b_n \to 0,$$

είναι μία σχέση ισοδυναμίας. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση Ποιά από τα παρακάτω είναι σωστά;

1. Το άθροισμα ρητών αριθμών είναι πάντα ρητός αριθμός

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

2. Το άθροισμα ρητού και άρρητου είναι άρρητος

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

3. Το άθροισμα δύο άρρητων είναι άρρητος.

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

4. Το άθροισμα δύο άρρητων είναι πάντα ρητός.

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

5. Το άθροισμα δύο άρρητων είναι πάντα ρητός.

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

6. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία άρρητων που να συγκλίνει στο x.

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία άρρητων που να συγκλίνει στο x

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

8. Ανάμεσα σε δύο πραγματικούς υπάρχει άρρητος

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

Άσκηση 3.2.10 Έστω A το σύνολο πηλίκο της παραπάνω σχέσης ισοδυναμίας, δηλαδή το σύνολο που σαν στοιχεία του έχει τις κλάσεις ισοδυναμίας $[(a_n)]$. Θεωρήστε δύο στοιχεία στο σύνολο πηλίκο $[(a_n)]$ και $[(b_n)]$. Ορίζουμε ως άθροισμα των κλάσεων την κλάση του αθροίσματος των αντιπροσώπων. Δηλαδή $[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n) + (b_n)]$. Ομοίως ορίζουμε ως γινόμενο των κλάσεων την κλάση του γινομένου των αντιπροσώπων, δηλαδή $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n) \cdot (b_n)]$. Αποδείξτε ότι οι παραπάνω πράξεις είναι καλά ορισμένες, δηλαδή ανεξάρτητες των αντιπροσώπων. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 4

Πραγματικές Συναρτήσεις

4.1. Η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τις έννοιες των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων. Ξεκινάμε με ένα πραγματικό αριθμό $0 < a \in \mathbb{R}$. Για n φυσικό είναι σαφής ο ορισμός του a^n ως $a^n = a \cdot a \cdots a$. Το $a^{1/n}$ είναι η n-οστή ρίζα του αριθμού, η οποία υπάρχει πάντα και είναι ίση με τον πραγματικό αριθμό που αντιστοιχεί στο σύνολο

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q}, x^n < a\}$$

όπως δείξαμε στο κεφάλαιο του ορισμού των πραγματικών αριθμών με την χρήση τομών Dedekind.

Είναι λοιπόν σαφές ότι ορίζεται μία συνάρτηση

$$a^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}.$$

Δεν είναι σαφές όμως, τι εννοούμε γράφοντας a^b, όταν ο b είναι ένας άρρητος αριθμός.

Υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα. Πολλοί συγραφείς ορίζουν την λογαριθμική συνάρτηση σαν την συνάρτηση $a \to \log a$, όπου $\log a$ είναι το εμβαδόν της γραφικής παράστασης της $1/x$ και των ευθείων $y = 0$, $x = 1$ και $x = a$.

Ένας άλλος ορισμός θα μπορούσε να δωθεί ορίζοντας σαν εκθετική συνάρτηση το όριο

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$$

Οι οικονομολόγοι θα προτιμούσαν να ορίσουν την εκθετική συνάρτηση σαν

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1/n}.$$

Οι βιολόγοι θα όριζαν την εκθετική συνάρτηση, σαν την συνάρτηση που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\frac{d}{dx} f(x) = f(x)$ και $f(0) = 1$.

Εμείς εδώ θα ακολουθήσουμε τον διαισθητικά ποιό άμεσο ορισμό: Θα προσεγγίσουμε τον πραγματικό αριθμό x με μία ακολουθία ρητών $r_n \to x$ και θα δείξουμε ότι η ακολουθία a^{r_n} συγκλίνει σε ένα όριο και το όριο αυτό θα το ονομάσουμε a^x.

Λήμμα 4.1.1 *Αν $a > 1$ τότε συνάρτηση $a^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα. Αν $a < 1$ τότε συνάρτηση $a^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια φθίνουσα.* **Απόδειξη**

Πρόταση 4.1.2 *Έστω p_n/q_n ακολουθία ρητών αριθμών η οποία να συγκλίνει στο 0, και $a \in \mathbb{R}$. Η ακολουθία a^{p_n/q_n} συγκλίνει στο 1.* **Απόδειξη**

Θεώρημα 4.1.3 *Δίνεται ένας $r \in \mathbb{R}$ και έστω $r_n = p_n/q_n$ μια ακολουθία ρητών αριθμών που να συγκλίνει στο r. Η ακολουθία a^{r_n} είναι συγκλίνουσα.* **Απόδειξη**

Θέλουμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση a^x όταν x είναι ένας άρρητος αριθμός ως το $\lim a^{r_n}$ όπου r_n ακολουθία ρητών που να συγκλίνει στο x. Προκειμένου να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να δείξουμε ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής της ακολουθίας που συγκλίνει στο x.

Πρόταση 4.1.4 *Αν $(r_n), (r'_n)$ ακολουθίες ρητών αριθμών που συγκλίνουν στον x, τότε $\lim a^{r_n} = \lim a^{r'_n}$.* **Απόδειξη**

Ορισμός 4.1.5 *Έστω $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον $a^x = \lim a^{r_n}$, όπου r_n οποιαδήποτε ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνει στον x. Αν $a = 1$, τότε $a^x = 1$, ενώ αν $a < 1$ ορίζουμε σαν $a^x = 1/a^x$.*

Πρόταση 4.1.6 *Αν $a > 1$ τότε η συνάρτηση a^x είναι γνήσια αύξουσα, ενώ αν $a < 1$ τότε η a^x είναι γνήσια φθίνουσα.* **Απόδειξη**

Θεώρημα 4.1.7 *Για $a \neq 1$ η συνάρτηση a^x είναι 1-1.* **Απόδειξη**

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση a^x είναι επί. Θα χρειαστούμε μερικές προτάσεις ακόμα.

Πρόταση 4.1.8 *Έστω $a > 1$. Η συνάρτηση a^x μπορεί να πάρει τιμές όσο μεγάλες και όσο κοντά στο 0 θέλουμε. Δηλαδή για κάθε $M > 0$ υπάρχει $x_0(M) \in \mathbb{R}$ ώστε για $x > x_0$ να ισχύει $a^x > M$ και για κάθε > 0 υπάρχει $x_0() \in \mathbb{R}$, ώστε για $x < x_0()$ να έχουμε $0 < a^x <$.*
Απόδειξη

Θεώρημα 4.1.9 *Η συνάρτηση $a^x : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ είναι επί.* **Απόδειξη**

Η συνάρτηση a^x για $a < 1$ είναι και αυτή 1-1 και επί αφού μπορεί να γραφεί σαν $a^x = (1/a)^x$ και $1/a > 1$.

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση

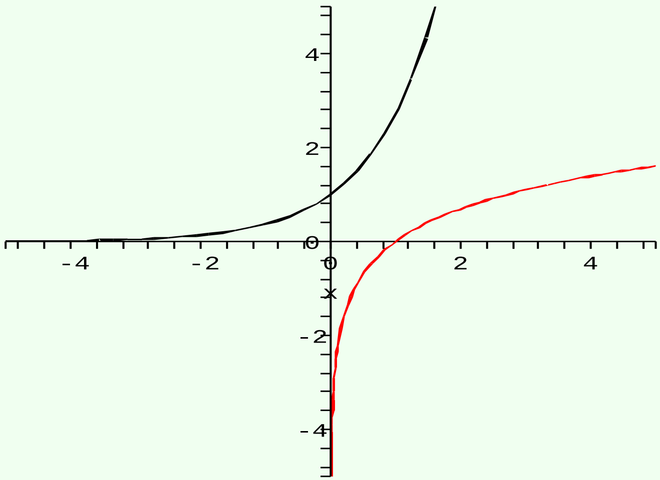
$$\log_a(x) : \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \to \mathbb{R}$$

την οποία θα ονομάζουμε λογάριθμο με βάση το a.

Παρατηρούμε ότι για $a > 1$ ($a < 1$) είναι γνήσια αύξουσα (φθίνουσα) και επί ως αντίστροφη γνήσια αύξουσας (φθίνουσας) και επί συνάρτησης.

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
Εκθετική και λογαριθμική
Πολυωνυμικές και ρητές...
Ρητές Συναρτήσεις
Τριγωνομετρικές
Αντίστρ. τριγωνομετρικών
Υπερβολικές συναρτήσεις
Ασκήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 57 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Στο παρακάτω σχήμα φένεται η γραφική παράσταση της εκθετικής (με μαύρο χρώμα) και της λογαριθμικής συνάρτησης για $a > 1$ (με κόκκινο χρώμα).



4.2. Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις

Μία πολυωνυμική συνάρτηση είναι μία συνάρτηση

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, \end{array}$$

όπου το $\mathbb{K}$ για τις ανάγκες αυτού του μαθήματος θα είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Το n λέγεται βαθμός της πολυωνυμικής συνάρτησης και θα το συμβολίζουμε με $\deg(f)$, το a_0 σταθερός όρος ενώ το a_n μεγιστοβάθμιος όρος.
Παρατηρήστε ότι μία πολυωνυμική συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι πάντα επί, αφού το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας εξασφαλίζει ότι η εξίσωση

$$f(x) = c,$$

έχει λύση για κάθε $c \in \mathbb{C}$. Για $\deg(f) \geq 2$ Το ίδιο θεώρημα αποκλείει το ότι η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι $1-1$ αφού η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς n το πλήθος ρίζες.
Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τότε μπορεί να μην είναι επί, αλλά μπορεί να είναι $1-1$ (Βλέπε ασκήσεις 4.7.3, 4.7.4).

4.3. Ρητές Συναρτήσεις

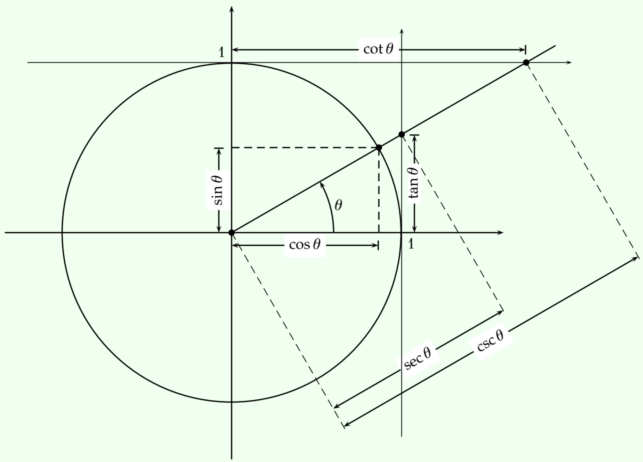
Μία συνάρτηση θα λέγεται ρητή, αν είναι πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλαδή μία συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Έστω ότι $\mathbb{K}$ να είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Μια πολυωνιμική συνάρτηση δεν ορίζεται εν γένει σε όλο το $\mathbb{K}$. Θα πρέπει να αφαιρέσουμε τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή τα οποία μπορεί να είναι το πολύ m το πλήθος αν το $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και ακριβώς m το πλήθος αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.4. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θα δώσουμε έναν ορισμό των τριγονομετρικών συναρτήσεων βασισμένο στην γεωμετρία. Στην συνέχεια των σπουδών σας θα συναντήσετε και διαφορετικούς ορισμούς βασισμένους σε ποιό προχωρημένα εργαλεία.



Σχήμα 4.1: Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος 4.1. Έστω ϑ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο A και έστω P το σημείο τομής της ευθείας με τον κύκλο ακτίνας 1. Η συντεταγμένες του σημείου P θα είναι εξ ορισμού το συνημίτονο και το ημίτονο της γωνίας ϑ, ενώ η απόσταση του σημείου τομής A της ευθείας OA με την ευθεία $x = 1$, θα είναι η εφαπτομένη της γωνίας ϑ.

Θα συμβολίζουμε με $\sin(\vartheta)$ (sine), $\cos(\vartheta)$ (cosine) και $\tan(\vartheta)$ (tangent), το ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη αντίστοιχα.

Η ευθεία OA έχει εξίσωση $y = \vartheta x$, και υπολογίζουμε ότι $\tan(\vartheta) = \sin(\vartheta)/\cos(\vartheta)$.

Μπορούμε να ορίσουμε λοιπόν τις αντίστοιχες συναρτήσεις, οι οποίες θα απεικονίζουν την γωνία ϑ στο $\sin(\vartheta), \cos(\vartheta), \tan(\vartheta)$. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Αυτό σημαίνει ότι

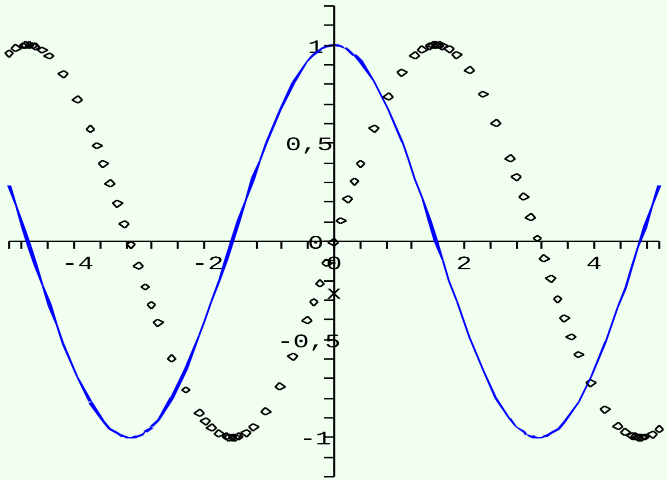
$$f(x+2\pi) = f(x), \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R},$$

όπου $f(x)$ είναι μία από τις $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$.

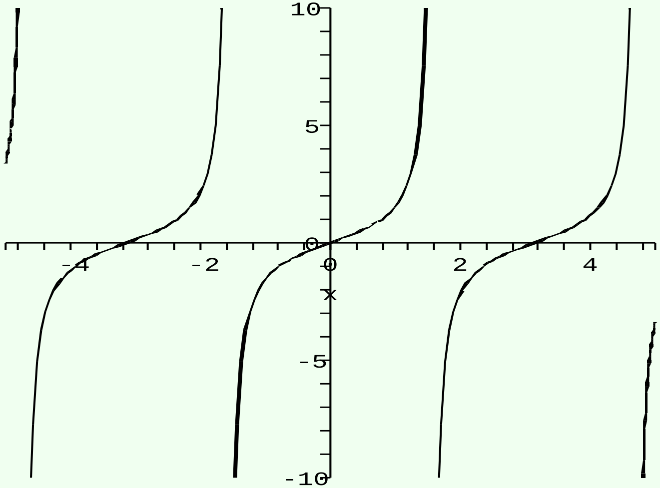
Οι συναρτήσεις $\sin(x), \cos(x)$ ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$, ενώ η συνάρτηση $\tan(x)$ δεν ορίζεται εκεί που μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή για $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του ημιτόνου και συνημιτόνου είναι και οι δύο μικρότερες της μονάδας, αφού αποτελούν προβολές της ακτίνας μήκους 1 ενώ η εφαπτομένη μπορεί να πάρει (για κατάλληλη κλίση, όσο ποιό «κάθετη» είναι η ακτίνα τόσο ποιό ψηλά κόβει η ευθεία OA την ευθεία $x = 1$) οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι τριγονομετρικές συναρτήσεις $sin(x), cos(x)$ (η συνάρτηση του ημιτόνου αναπαρίσταται με διακεκομένη γραμμή). Παρατηρήστε ότι και οι δύο συναρτήσεις παίρνουν τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$.



Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η συνάρτηση $tan(x)$



Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $tan(x)$ δεν ορίζεται για συγκεκριμένες τιμές του πεδίου ορισμού της.

Πρόταση 4.4.1 *Για τις συναρτήσεις του ημιτόνου και της εφαπτομένης ισχύει η παρακάτω ανισότητα:*

$$|\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|, \text{ για } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Απόδειξη

Παρατήρηση 4.4.2 *Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $|\sin(x)| \leq |x|$ είναι σωστή για οποιαδήποτε γωνία. Πράγματι αν $|x| \geq \pi/2 \geq 1$ τότε η ανισότητα ισχύει αφού $|\sin(x)| \leq 1$.*

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
Εκθετική και λογαριθμική
Πολυωνυμικές και ρητές...
Ρητές Συναρτήσεις
Τριγωνομετρικές
Αντίστρ. τριγωνομετρικών
Υπερβολικές συναρτήσεις
Ασκήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 63 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

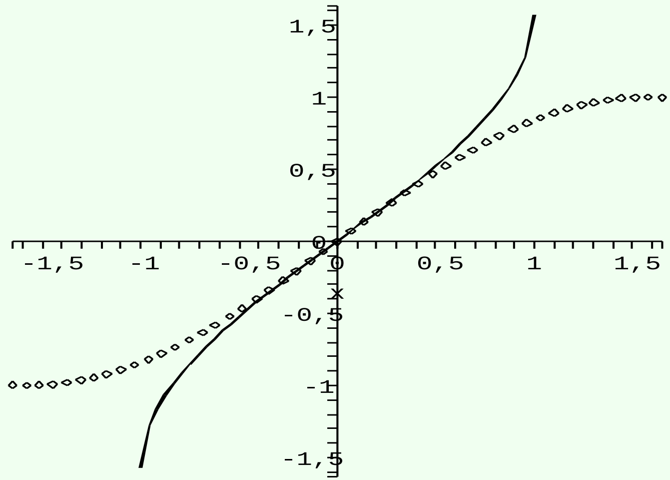
4.5. Οι Αντίστροφες συναρτήσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ δέν είναι ένα προς ένα, συνεπώς δεν έχει νόημα να ορίσουμε αντίστροφες συναρτήσεις. Αν όμως περιοριστούν σε κατάλληλα διαστήματα, τότε γίνονται ένα προς ένα, και η αντίστροφη συνάρτηση έχει νόημα.

1. Η αντίστροφη της $\sin(x)$. Περιορίζουμε την συνάρτηση $\sin(x)$ στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Η συνάρτηση του ημιτόνου σε αυτό το διάστημα είναι γνήσια αύξουσα και επί του διασηματος $[-1, 1]$. Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

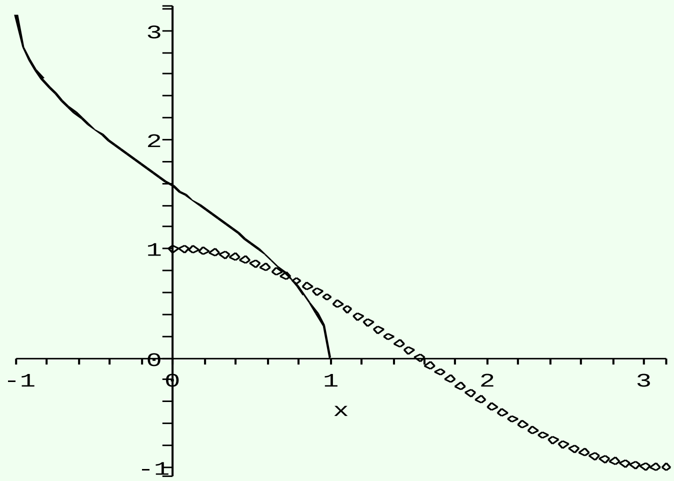
Η γραφική παράσταση της προκύπτει αν πάρουμε την «αντανάκλαση» της γραφική παράσταση της sin ως προς την ευθεία $x = y$. Στο παρακάτω σχήμα είναι ζωγραφισμένη η $\arcsin(x)$ μαζι με την $\sin(x)$, η $\sin(x)$ με διακεκομένη γραμμή.



2. Περιορίζουμε την συνάρτηση $\cos(x)$ στο διάστημα $[0, \pi]$. Στο διάστημα αυτό η $\cos(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα έχει επομένως αντίστροφο την οποία θα συμβολίζουμε με $\arccos(x)$.

   Στην περίπτωση μας ισχύει $0 \leq x \leq \pi$, οπότε $-\pi/2 \leq \pi/2 - x \leq \pi/2$, και $y = cos(x)$ αν και μόνο αν $y = \sin(\pi/2 - x)$. Συνεπώς $\arccos(x) = \pi/2 - \arcsin(x)$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής δίνεται στο παρακάτω σχήμα:

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
Εκθετική και λογαριθμική
Πολυωνυμικές και ρητές...
Ρητές Συναρτήσεις
Τριγωνομετρικές
Αντίστρ. τριγωνομετρικών
Υπερβολικές συναρτήσεις
Ασκήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 65 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος



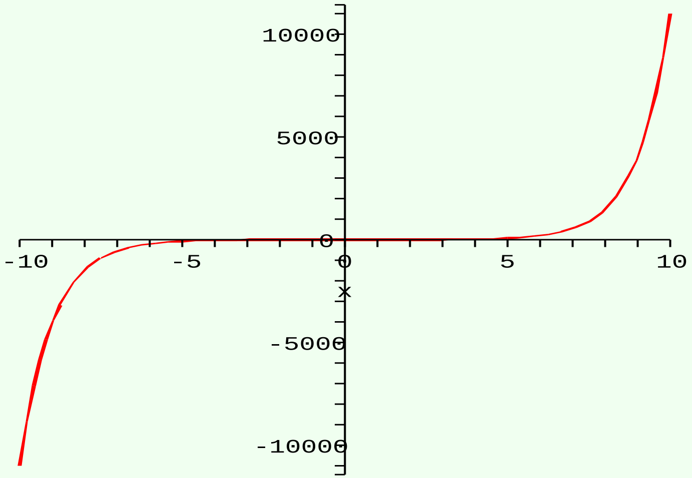
3. Προκειμένου να ορίζουμε την αντίστροφη της εφαπτομένης περιορίζουμε το x στο τόξο $-\pi/2 < x < \pi/2$. Περιοριζόμενη στο διάστημα αυτό η εφαπτομένη είναι γνήσια αυξουσα και πέρνει τιμές στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, συνεπώς η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται:

$$\arccos(x) : (-\infty, \infty) \to [-\pi/2, \pi/2].$$

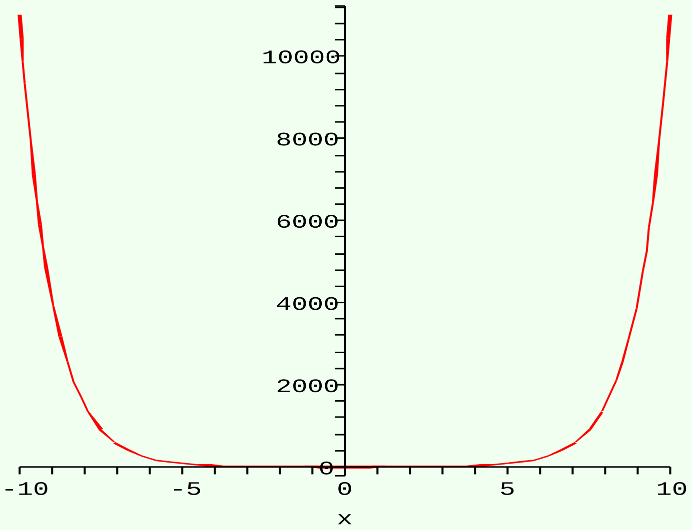
4.6. Οι υπερβολικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ορίζουμε τις υπερβολικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στο μάθημα της μιγαδικής ανάλυσης, θα δείτε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να οριστούν με παρόμοιο τρόπο με αυτό των υπερβολικών συναρτήσεων.

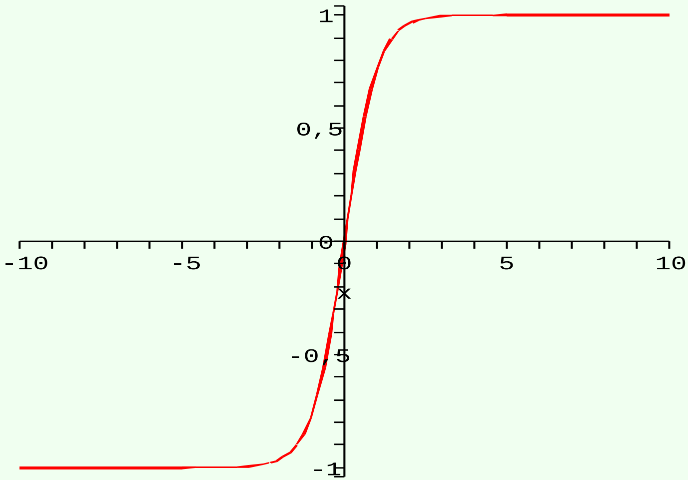
1. $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (υπερβολικό ημίτονο)



2. $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (υπερβολικό συνημίτονο)



3. $\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (υπερβολική εφαπτομένη)



4.7. Ασκήσεις

Άσκηση 4.7.1 Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = (1 + 1/n)^n$ συγκλίνει. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.7.2 Έστω e το όριο της ακολουθίας a_n της παραπάνω άσκησης. Αποδείξτε ότι για $a \geq e$ ισχύει $a^x \geq 1 + x$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.7.3 Δώστε παράδειγμα μίας πολυωνυμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία να μην είναι επί του $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.7.4 Δώστε παράδειγμα μίας πολυωνυμικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, βαθμού μεγαλύτερου του δύο, η οποία να είναι $1-1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 4.7.5 Αποδείξτε ότι $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. **Υπόδειξη-Λύση**

Κεφάλαιο 5

Βασική Γραμμική Άλγεβρα

5.1. Βασικές έννοιες

Στην ενότητα αυτή θα γενικεύσουμε τη γνωστή έννοια του διανύσματος του επιπέδου ή του χώρου. Για εμάς διάνυσμα θα είναι ένα στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 5.1.1 *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο $V \neq \emptyset$, και δύο συναρτήσεις:*

$$+ : \begin{cases} V \times V \to V \\ (v, w) \mapsto v + w \end{cases} \qquad \cdot : \begin{cases} \mathbb{R} \times V \to V \\ (\lambda, w) \mapsto \lambda \cdot v \end{cases},$$

ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. *Για κάθε $v, w, u \in V$ ισχύει $(v + w) + u = v + (w + u)$*
2. *Για κάθε $v, w \in V$ ισχύει $v + w = w + v$*
3. *Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$, ώστε $0 + v = v + 0 = v$, για κάθε $v \in V$*

4. *Για κάθε* $v \in V$*, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο* $-v$*, ώστε* $v + (-v) = (-v) + v = 0$.

5. *Για κάθε* $v, w \in V$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ *και* $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$. *Παρατηρήστε ότι η πρόσθεση* $\lambda + \mu$ *ανάγεται στην πρόσθεση πραγματικών αριθμών ενώ το* $\lambda v + \mu v$ *είναι πρόσθεση στοιχείων του διανυσματικού χώρου.*

6. *Για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $v \in V$ *ισχύει* $\lambda 0 = 0$ *και* $0\lambda v = 0$

7. *Για κάθε* $v \in V$ *ισχύει* $1v = v$ *και* $(-1)v = -v$.

Παραδείγματα:
1. Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων της μορφής
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}.$$
Ορίζουμε την πρόσθεση δύο στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ κατά συντεταγμένες, δηλαδή
$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
και τον πολλαπλασιασμό σταθεράς $\lambda \in \mathbb{R}$ με στοιχείο $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:
$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$
Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ είναι το $(0, \dots, 0)$, ενώ το αντίθετο του $(x_1, \dots, x_n)$ είναι το $(-x_1, \dots, -x_n)$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου, αφού οι περισσότερες από αυτές ανάγονται στις αντίστοιχες ιδιότητες για πραγματικούς αριθμούς.
2. Θεωρούμε το σύνολο των ακολουθιών (a_n), δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, όπου το άθροισμα των ακολουθιών $(a_n), (b_n)$ ορίζεται να είναι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n + b_n$. Ομοίως το γινόμενο πραγματικού αριθμού λ με την ακολουθία (a_n), ορίζεται να είναι η ακολουθία με γενικό όρο λa_n. Το μηδενικό στοιχείο είναι η

ακολουθία που είναι σταθερά μηδέν δηλαδή η ακολουθία (a_n), όπου $a_n = 0$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$. Και πάλι οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου επαληθεύονται με βάση τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.
3. Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε το άθροισμα δύο συναρτήσεων f, g να είναι η συνάρτηση $f + g$ ώστε $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και το γινόμενο σταθεράς $\lambda \in \mathbb{R}$ με συνάρτηση f να είναι η συνάρτηση $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Το μηδενικό στοιχείο είναι η σταθερά μηδέν συνάρτηση ενώ και πάλι οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου επαληθεύονται με βάση της γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός 5.1.2 *Κάθε έκφραση της μορφής $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu v_n$, με $\lambda_i \in \mathbb{R}$, θα λέγεται γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$. Το σύνολο των γραμμικών συνδιασμών θα λέγεται ο χώρος που παράγουν τα $v_1, \ldots, v_n$ και θα τον συμβολίζουμε με $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.*

Ορισμός 5.1.3 *Θα λέμε ότι τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν η εξίσωση*

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Διαφορετικά, αν δηλαδή η εξίσωση

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$$

επιδέχεται εκτός της μηδενικής λύσης (όλα τα $x_i = 0$) και άλλες λύσεις θα λέμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση 5.1.4 *Τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν ένα από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων.* **Απόδειξη**

Άσκηση Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

1. Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, το πλήθος n διανύσματα είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητα.

(αʹ) Σωστό (βʹ) Λάθος

είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2. Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, το πλήθος n διανύσματα είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

(αʹ) Σωστό (βʹ) Λάθος

3. Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, περισσότερα από n διανύσματα είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

(αʹ) Σωστό (βʹ) Λάθος

5.1.1. Ασκήσεις

Άσκηση 5.1.5 Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $e_1 := (1, 0, 0), e_2 := (0, 1, 0), e_3 := (0, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.6 Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $\upsilon_1 = (1, 1, 2), \upsilon_2 = (0, 3, 1), \upsilon_3 = (1, 0, 0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.7 Να αποδειχτεί ότι τα διανύσματα $w_1 = (1, 1, 2, 2), w_2 = (1, 3, 4, 5), w_3 = (2, 4, 6, 7)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα: **Υπόδειξη-Λύση**

Ορισμός 5.1.8 *Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$ παράγουν τον χώρο V, αν κάθε στοιχείο του V μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$.*

Παράδειγμα: Τα στοιχεία $e_1 = (1, 0, \ldots, 1), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ του $\mathbb{R}^n$ παράγουν τον χώρο $\mathbb{R}^n$, αφού κάθε στοιχείο $(x_1, \ldots, x_n)$ του $\mathbb{R}^n$ γράφεται ως

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n.$$

Άσκηση 5.1.9 Αποδείξτε ότι αν τα στοιχεία $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ παράγουν τον χώρο V, και αν $\upsilon \in V$, τότε τα στοιχεία $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \upsilon$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.10 Αποδείξτε ότι αν τα διανύσματα $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και παράγουν τον χώρο V τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδιασμός των $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$. **Υπόδειξη-Λύση**

Ορισμός 5.1.11 *Θα λέμε ότι τα διανύσματα $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου V, όταν*

- *Είναι γραμμικά ανεξάρτητα*
- *Παράγουν τον χώρο V.*

Παράδειγμα: Τα στοιχεία

$$e_1 := (1, 0, \ldots, 0), e_2 := (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n := (0, 0, \ldots, 1)$$

αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, το τυχαίο στοιχείο $(x_1, \ldots, x_n)$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των e_i αφού $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Από την άλλη, αν $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$ τότε $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ άρα τα $e_1, \ldots, e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόταση 5.1.12 *Όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.* ***Απόδειξη***

Ορισμός 5.1.13 *Αν ένας χώρος έχει μία βάση με n το πλήθος στοιχεία τότε τον αριθμό αυτό n θα τον λέμε διάσταση του δανυσματικού χώρου V και θα τον συμβολίζουμε με* $\dim V$. *Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον V, τότε θα λέμε ότι ο χώρος V έχει άπειρη διάσταση*

Άσκηση 5.1.14 Αν ο V, W είναι διανυσματικοί χώροι δείξτε ότι και το $V \times W$ είναι διανυσματικός χώρος. Αν επιπλέον $\dim V = n$ και $\dim W = m$ αποδείξτε ότι $\dim(V \times W) = n + m$.
Υπόδειξη-Λύση

Ορισμός 5.1.15 *Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V θα λέγεται διανυσματικός υπόχωρος αν και μόνο αν οι πράξεις του διανυσματικού χώρου V, όταν περιοριστούν στο σύνολο W, του δίνουν τη δομή διανυσματικού χώρου.*

Στον παραπάνω ορισμό θα πρέπει να εξηγήσουμε τι εννοούμε με τον όρο «περιορισμό» των πράξεων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο στοιχεία w_1, w_2 του W. Αφού $W \subset V$, μπορούμε να τα προσθέσουμε και να τα πολλαπλασιάσουμε με σταθερά σαν στοιχεία του V. Δεν είναι όμως σαφές ότι το αποτέλεσμα των παραπάνω πράξεων θα παραμείνει στο W. Για παράδειγμα το σύνολο $W = \{(1,2),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, αφού $(1,2)+(0,1) \notin W$, δηλαδή ο περιορισμός των πράξεων του $\mathbb{R}^2$ στον W, δεν δίνει καλά ορισμένες πράξεις.
Αντίθετα αν θεωρήσουμε ως

$$W = \{(x,y,0)x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

τότε παρατηρούμε ότι για δύο οποιαδήποτε στοιχεία $(x_1,y_1,0)$, $(x_2,y_2,0)$ του W και για οποιοδήποτε στοιχείο $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$(x_1,y_1,0)+(x_2,y_2,0) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0) \in W$$

και

$$\lambda(x_1,y_1,0) = (\lambda x_1, \lambda y_1, 0) \in W.$$

Δηλαδή ο περιορισμός των πράξεων του $\mathbb{R}^3$ στο W επάγει καλά ορισμένες πράξεις.
Φυσικά για να είναι ο W διανυσματικός χώρος οι παραπάνω πράξεις θα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες του διανυσματικού χώρου, αλλά δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι οι συνθήκες αυτές κληρονομούνται στον W από τον V.
Δηλαδή έχουμε την παρακάτω

Πρόταση 5.1.16 *Ένα μη κενό υποσύνολο W, ενός διανυσματικού χώρου V, είναι υπόχωρος αν και μόνο αν για κάθε $w_1, w_1 \in W$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι*

$$w_1 + w_2 \in W, \quad \lambda w_1 \in W.$$

Άσκηση 5.1.17 Αποδείξτε ότι το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των ακολουθιών. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.18 Αποδείξτε ότι το σύνολο των τελικά σταθερών ακολουθιών είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των ακολουθιών. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.19 Αποδείξτε ότι το σύνολο των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 είναι υπόχωρος του χώρου των ακολουθιών. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.20 Αποδείξτε ότι αν το W, είναι υπόχωρος του V, τότε το $0_V \in W$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.21 Θεωρήστε την ταυτοτική συνάρτηση $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, και όλες τις δυνάμεις της, δηλαδή τις συναρτήσεις $x^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι παράγουν ένα υπόχωρο άπειρης διάστασης μέσα στο διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων, το χώρο των πολυωνυμικών συναρτήσεων. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.1.22 Θα λέμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνεχή [1], αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n).$$

Αποδείξτε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του χώρου όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

5.2. Γραμμικές Απεικονίσεις

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις «φυσιολογικές» συναρτήσεις μεταξύ διανυσματικών χώρων, τις λεγόμενες γραμμικές συναρτήσεις.

Ορισμός 5.2.1 *Μία συνάρτηση $T : V \to W$, θα λέγεται γραμμική αν και μόνο αν*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

για κάθε $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.2.2 Αποδείξτε ότι μία συνάρτηση είναι γραμμική αν και μόνο αν

$$T(\lambda v + \mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w), \tag{5.1}$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και για κάθε $v, w \in V$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.3 Αποδείξτε ότι αν μία γραμμική συνάρτηση $T : V \to W$ είναι αντιστρέψιμη τότε και η αντιστροφή της είναι γραμμική. **Υπόδειξη-Λύση**

[1] Το αν αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον κλασικό ορισμό της συνέχειας είναι ένα θέμα που έχει απασχολήσει αρκετά τη μαθηματική κοινότητα. Περισσότερα σε μαθήματα ανάλυσης και λογικής!

Άσκηση 5.2.4 Βρείτε όλες τις γραμμικές συναρτήσεις από το $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.5 Αποδείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση: $T : V \to W$, στέλνει το μηδενικό στοιχείο του V στο μηδενικό στοιχείο του W. **Υπόδειξη-Λύση**

Θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$. Έστω $e_1, \ldots, e_n$ μία βάση του V. Παρατηρούμε ότι αν γνωρίζουμε την T, στα στοιχεία της βάσης, δηλαδή αν γνωρίζουμε τα $T(e_i)$, τότε γνωρίζουμε την T σε κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου V. Πράγματι, αφού τα $e_1, \ldots, e_n$ αποτελούν βάση του V, το τυχαίο στοιχείο $v \in V$, θα εκφράζεται ως $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Αν τώρα εφαρμόσουμε την T στο v έχουμε

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την συνάρτηση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, και έστω ότι $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Αν γνωρίζουμε για παράδειγμα ότι

$$T(e_1) = (3,2), T(e_2) = (1,1), T(e_3) = (0,1),$$

τότε το στοιχείο $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ μέσω της T, απεικονίζεται στο στοιχείο

$$T((1,2,3)) = T(e_1 + 2e_2 + 3e_3) = T(e_1) + 2T(e_2) + 3T(e_3) =$$

$$= (3,2) + 2(1,1) + 3(0,1) = (3,2) + (2,2) + (0,3) = (5,7).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μία βάση $w_1, \ldots, w_m$ του W. Το τυχαίο στοιχείο της βάσης e_i μέσω της T είναι ένα στοιχείο του W, άρα εκφράζεται ως γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης του W. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\
T(e_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\
&\vdots \\
T(e_n) &= a_{1n}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{nn}w_n
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω $n \times m$ αρκούν για να περιγράψουν ακριβώς την γραμμική απεικόνιση. Πράγματι, αν $v \in V$ είναι ένα στοιχείο της μορφής $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, τότε η εικόνα του γραμμένη ως γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης $w_1, \ldots, w_m$ του W, γράφεται στη μορφή:

$$T(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{v=1}^{m} a_{v,i} w_v = \tag{5.2}$$

$$= \sum_{v=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{v,i} x_i \right) w_v.$$

Μία τέτοια διάταξη αριθμών όπως η παραπάνω θα ονομάζεται πίνακας:

Ορισμός 5.2.6 *Μία ορθογώνια διάταξη αριθμών σε n γραμμές και m στήλες θα ονομάζεται πίνακας $n \times m$. Θα συμβολίζουμε ένα πίνακα A με (a_{ij}) ενώ το στοιχείο της i-γραμμής και της j-στήλης θα το συμβολίζουμε με a_{ij}.*

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ σαν πίνακες $n \times 1$ δηλαδή ως

$$\mathbb{R}^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε από την (5.2) ότι οι συντεταγμένες της εικόνας του x μέσω της T που περιγράφεται από έναν πίνακα (a_{ij}) δίνονται από τον τύπο

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} x_i \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 5.2.7 *Αν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας (a_{ij}), τότε το γινόμενο του πίνακα με τον $n \times 1$ πίνακα $x \in \mathbb{R}^n$ θα είναι ένας $m \times 1$ πίνακας που θα ταυτίζεται με την εικόνα του x μέσω της γραμμικής απεικόνισης που ορίζει ο A. Δηλαδη*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i}x_i \end{pmatrix}.$$

Αν τώρα έχουμε ένα πίνακα A $m \times n$ και ένα πίνακα B $n \times \ell$, τότε ορίζουμε ώς γινόμενο των πινάκων A, B, τον $m \times \ell$ πίνακα C ο οποίος έχει ως στήλες τις εικόνες των στηλών του πίνακα B, αν αυτές τις θεωρήσουμε ως στοιχεία του $\mathbb{R}^n$.
Το στοιχείο στην c_{ij} του C, δηλαδή το στοιχείο του C που βρίσκεται στην i-γραμμή και στην j-στήλη υπολογίζεται από τον τύπο

$$c_{ij} = \sum_{v=1}^{n} a_{iv} b_{vj}.$$

Πρόταση 5.2.8 *Θεωρούμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $T : V \to W$ και $S : W \to U$ και επιπλέον επιλέγουμε βάσεις $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $B_U = \{u_1, \ldots, u_\ell\}$ στους διανυσματικούς χώρους V, W, U αντίστοιχα. Αν (a_{ij}) είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην T, ως προς τις βάσεις B_V, B_W και (b_{ij}) είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην S ως προς τις βάσεις B_W, B_U, τότε ο πίνακας (c_{ij}) που αντιστοιχεί στην σύνθεση $S \circ T : V \to U$, ως προς τις βάσεις B_V, B_U, είναι το γινόμενο των πινάκων (b_{ij}) και (a_{ij}).* ***Απόδειξη***

Ορισμός 5.2.9 *Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $\mathbb{I} : V \to V$, η οποία στέλνει κάθε $v \in V$ στο $\mathbb{I}(v) = v$.*

- Βασική Θεωρία Συνόλων
- Σύνολα Αριθμών
- Ακολουθίες και Σύγκλιση
- Πραγματικές Συναρτήσεις
- Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Βασικές έννοιες
Γραμμικές Απεικονίσεις
Αντιστρόφος πίνακας

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 81 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Πρόταση 5.2.10 *Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην $\mathbb{I}$ ως πρός μία βάση $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ του V (ίδια βάση στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών) είναι ο ταυτοτικός πίνακας $\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})$, όπου*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ 1 & \text{αν } i = j \end{cases},$$

δηλαδή ένας πίνακας με μονάδες στην διαγώνιο ($i = j$) και 0 σε κάθε άλλο σημείο εκτός της διαγωνίου. **Απόδειξη**

Ορισμός 5.2.11 *Ένας $n \times n$ πίνακας A_{ij}, θα λέγεται αντιστρέψιμος αν και μόνο αν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B, ώστε*

$$\mathbb{I}_n = A \cdot B = B \cdot A.$$

Πρόταση 5.2.12 *Έστω V ένας n-διάστατος διανυσματικός χώρος και έστω $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ μία οποιαδήποτε βάση του. Ένας πίνακας $n \times n$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η γραμμική απεικόνιση $T_A : V \to V$ που ορίζει ως προς την βάση B είναι ένα προς ένα και επί.* **Απόδειξη**

Ορισμός 5.2.13 *Θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$ μεταξύ διανυσματικών χώρων. Σχηματίζουμε τα παρακάτω υποσύνολα:*

$$V \supset \ker(T) := \{v \in V : T(v) = 0\},$$

$$W \supset \mathrm{Im}(T) := \{w \in W, \text{ ώστε να υπάρχει } v \in V \text{ με } T(v) = w\}.$$

Λήμμα 5.2.14 *Τα σύνολα $\ker(T), \mathrm{Im}$ είναι διανυσματικοί υπόχωροι των διανυσματικών χώρων V, W αντίστοιχα.* **Απόδειξη**

Άσκηση 5.2.15 Ας υποθέσουμε ότι οι A, B είναι αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες. Αποδείξτε ότι και το γινόμενο τους είναι αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και μάλιστα ισχύει

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.2.16 Θεωρούμε τους $n \times n$ πίνακες A, B, Q για τους οποίους ισχύει $A = Q^{-1}BQ$. Να αποδειχτεί ότι $A^n = Q^{-1}B^nQ$ **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.17 Θα λέμε ότι οι $n \times n$ πίνακες A, B είναι συζυγείς αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$ πίνακας Q, ώστε

$$A = Q^{-1}BQ.$$

Να αποδειχτεί ότι η συζυγία ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας στους $n \times n$ πίνακες. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.18 Να αποδειχτεί ότι οι μοναδικοί $n \times n$ πίνακες που αντιμετατίθενται με κάθε $n \times n$ πίνακα είναι τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού πίνακα. **Υπόδειξη-Λύση**

Άσκηση 5.2.19 Να υπολογιστούν οι δυνάμεις του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη-Λύση

5.2.1. Γραμμικά συστήματα

Ορισμός 5.2.20 *Ένα γραμμικό σύστημα είναι μία εξίσωση της μορφής:*

$$Ax = b,$$

όπου ο A είναι ένας $n \times m$ πίνακας, το x είναι ένας $m \times 1$ πίνακας και το b είναι ένας $n \times 1$ πίνακας. Δηλαδή $x \in \mathbb{R}^m$ και $b \in \mathbb{R}^n$ Στην περίπτωση που το b είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε το σύστημα λέγεται ομογενές. Σε ένα γραμμικό σύστημα δίνονται τα A, b και ζητούμε να βρούμε το x.

Παρατήρηση: Σύμφωνα με την ταύτιση πινάκων - γραμμικών απεικονίσεων, μπορούμε στο A να αντιστοιχίσουμε μία γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ και στο b ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Το σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν το $b \in \operatorname{Im}(T_A)$ και το σύνολο λύσεων αποτελείται από τα στοιχεία $x \in \mathbb{R}^m$ που απεικονίζονται στο b. Αν το σύστημα είναι ομογενές τότε οι λύσεις ταυτίζονται με τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης.

Σε ότι ακολουθεί θα αναζητήσουμε μεθόδους λύσεων γραμμικών συστημάτων.

Ορισμός 5.2.21 *Θεωρούμε ένα πίνακα $n \times m$ A. Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών θα λέμε κάποιες διαδικασίες παραγωγής καινούργιου πίνακα από τον πίνακα A, και συγκεκριμμένα τις*

- *Αντιμετάθεση δύο γραμμών,*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

δηλαδή οι γραμμές i, j αλλάζουν θέση και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα παραμένουν ως είχαν.

- *Πολλαπλασιασμός μίας γραμμής με μία σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- *Πολλαπλασιασμός της i-γραμμής με μία σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και πρόσθεση στην γραμμή j-γραμμή:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & a_{j2} + \lambda a_{i3} & \dots & a_{jm} + \lambda a_{im} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Θα λέμε δύο πίνακες ότι είναι γραμμοισοδύναμοι, αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο μετά από μία σειρά στοιχειωδών πράξεων γραμμών.

Πρόταση 5.2.22 *Αν οι πίνακες A, A' είναι γραμμοισοδύναμοι, τότε τα γραμμικά συστήματα $Ax = 0$ και $A'x = 0$ έχουν τον ίδιο χώρο λύσεων.* ***Απόδειξη***

5.2.2. Η μέθοδος της απαλειφής του Gauß

Έστω ένας $m \times n$ πίνακας A που αντιστοιχεί στο ομογενές γραμμικό σύστημα

$$Ax = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Με την μέθοδο αυτή ανάγουμε το πρόβλημα της εύρεσης λύσεων σε ένα απλούστερο πρόβλημα κάνοντας μόνο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Η μέθοδος αυτή έχει δύο στάδια: Πρώτα μετασχηματίζουμε τον πίνακα A σε κάτω τριγωνικό δηλαδή μηδενίζουμε με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών όλα τα στοιχεία a_{ij} με $i > j$. Στην συνέχεια και πάλι με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών μηδενίζουμε τα στοιχεία a_{ij} με $j > i$ και $j < n$. Η παραπάνω τεχνική θα γίνει σαφής με την βοήθεια παραδειγμάτων. Η μέθοδος της απαλειφής του Gauß και παραλλαγές τους είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικές όταν υλοποιούνται σε ηλεκτρονικό υπολογιστή σε σύγκριση με την μέθοδο των οριζουσών που θα διδαχτούν στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας.

Παραδείγματα:

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 4y + 4z &= 0 \\ 5x + 7y + 8z &= 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Προσπαθούμε να μηδενίσουμε τα στοιχεία του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

που είναι κάτω από την διαγώνιο με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Πρώτα θα μηδενίσουμε όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης που είναι κάτω από την διαγώνιο. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -4 και την προσθέτουμε στη δεύτερη γραμμή οπότε ο πίνακας μας έρχεται στην μορφή:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής με -5 και τα προσθέτουμε στα στοιχεία της τρίτης γραμμής και καταλήγουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Έχουμε καταφέρει να μηδενίσουμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από την διαγώνιο. Συνεχίζουμε στην δεύτερη στήλη. Αντιμεταθέτουμε τα στοιχεία της δεύτερης με την τρίτη γραμμή και καταλήγουμε στον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Τώρα όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδέν. Μπορούμε να κάνουμε όλα τα στοιχεία της διαγωνίου μονάδες, πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή με $\frac{1}{2}$ και την τρίτη γραμμή με $-\frac{1}{8}$. Καταλήγουμε λοιπόν στον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θα μηδενίσουμε τώρα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο. Πρώτα θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης πάνω από τη διαγώνιο. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία γραμμή με $\frac{7}{2}$ και την προσθέτουμε στην δεύτερη, και επίσης πολλαπλασιάζουμε την τελευταία γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην πρώτη. Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και έχουμε καταφέρει να μηδενίζουμε τα στοιχεία του πίνακα A πάνω από την διαγώνιο στην τρίτη στήλη. Θα μηδενίζουμε και τα στοιχεία του A πάνω από την διαγώνιο και για την δεύτερη στήλη. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη. Έτσι έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο παραπάνω πίνακας αντιστοιχεί στο σύστημα

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

Και αυτή είναι η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος. Παρατηρούμε ότι η λύση του συστήματός μας είναι ισοδύναμη με τον υπολογισμό του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζει ο πίνακας A.

2. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y + 3z + w + 3t &= 0 \\ 11x + 3y + 10z + 6w + 7t &= 0 \\ 5x + 7y + 8z + 7w + 9t &= 0 \end{aligned} .$$

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Βασικές έννοιες
Γραμμικές Απεικονίσεις
Αντιστρόφος πίνακας
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 88 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 11 & 3 & 10 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ξεκινούμε και πάλι να μηδενίσουμε τα στοιχεία a_{ij} του πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 11 & 3 & 10 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

με $i > j$. Μηδενίζουμε πρώτα τα στοιχεία της πρώτης στήλης κάτω από την διαγώνιο $i = j$. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με -11 και προσθέτοντας στην δεύτερη και πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή με -5 και προσθέτοντας στην τρίτη. Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -23 & -5 & -26 \\ 0 & 2 & -7 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Στην συνέχεια μηδενίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης κάτω από την διαγώνιο πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή με $2/8$ και προσθέτοντας στην τρίτη. Καταλήγουμε στον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & -23 & -5 & -26 \\ 0 & 0 & -\frac{51}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{25}{2}. \end{pmatrix}$$

Έχουμε μηδενίσει όλα τα στοιχεία a_{ij} με $i > j$. Μπορούμε να έχουμε μονάδες στην διαγώνιο πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη γραμμή με $-\frac{1}{8}$ και την τρίτη γραμμή με $-\frac{4}{51}$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{23}{8} & \frac{5}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & \frac{50}{51} \end{pmatrix}.$$

Τώρα θα μηδενίζουμε τα στοιχεία που είναι πάνω από την διαγώνιο στις τρεις πρώτες στήλες, δηλαδή τα στοιχεία $a_{ij}\, j > i, j \leq 3$. Ξεκινάμε από την τρίτη στήλη πολλαπλασιάζοντας την τρίτη γραμμή με $-\frac{23}{8}$ και προσθέτοντας στην δεύτερη και την τρίτη γραμμή με -3 και προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{20}{17} & \frac{1}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{34} & \frac{22}{51} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & \frac{50}{51}. \end{pmatrix}$$

Συνεχίζουμε μηδενίζοντας τα στοιχεία της δεύτερης στήλης που είναι πάνω από τη διαγώνιο. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1 και προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε έχουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{34} & \frac{-19}{51} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{27}{34} & \frac{22}{51} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & \frac{50}{51}. \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός αντιστοιχεί στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{c} x + 0y + 0z + \frac{13}{34}w + \frac{-19}{51}t = 0 \\ 0x + y + 0z + \frac{27}{34}w + \frac{22}{51}t = 0 \\ 0x + 0y + z + -\frac{1}{17}w + \frac{50}{51}t = 0 \end{array},$$

δηλαδή οι μεταβλητές x, y, z, w, t θα πρέπει να ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις. Με άλλα λόγια οι μεταβλητές w, t μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$ (ελεύθερες μεταβλητές), αλλά τότε οι μεταβλητές x, y, z θα πρέπει να είναι ίσες με

$$x = -\frac{13}{34}w - \frac{-19}{51}t,\ y = -\frac{27}{34}w - \frac{22}{51}t,\ z = \frac{1}{17}w - \frac{50}{51}t, \tag{5.3}$$

(εξαρτημένες μεταβλητές).
Οι λύσεις του συστήματος σχηματίζουν διανυσματικό χώρο, τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ που ορίζει ο πίνακας A. Από την (5.3) παρατηρούμε ότι το τυχαίο στοιχείο του πυρήνα γράφεται στην μορφή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -\frac{13}{34} \\ -\frac{27}{34} \\ \frac{1}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{-19}{51} \\ -\frac{22}{51} \\ -\frac{50}{51} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα στήλες

$$v_1 = (-\frac{13}{34}, -\frac{27}{34}, \frac{1}{17}, 1, 0)^t \text{ και } v_2 = (-\frac{-19}{51}, -\frac{22}{51}, -\frac{50}{51}, 0, 1)^t$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) και παράγουν τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης.

5.2.3. Μη ομογενή γραμμικά συστήματα

Θεωρούμε και πάλι ένα $m \times n$ πίνακας A και ένα διάνυσμα $0 \neq b \in \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε το μη ομογενές γραμμικό σύστημα

$$Ax = b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Σε αντίθεση με τα ομογενή γραμμικά συστήματα οι λύσεις του παραπάνω συστήματος δεν αποτελούν διανυσματικό χώρο. Πράγματι, αν x_1, x_2 είναι δύο λύσεις τότε $x_1 + x_2$ δεν είναι λύση αφού

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 2b \neq b.$$

Πρόταση 5.2.23 *Θεωρούμε το μη ομογενές σύστημα $Ax = b$ καθώς και το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ που αντιστοιχεί στον πίνακα A. Αν x_0 είναι μία λύση του μη ομογενούς, τότε κάθε λύση x_1 του μη ομογενούς συστήματος προκύπτει ως άθροισμα $x_1 = x_0 + x$, όπου x είναι λύση του ομογενους συστήματος.* ***Απόδειξη***

Η πρόταση 5.2.23 μας δίνει μία μέθοδο επίλυσης μη ομογενών συστημάτων στην περίπτωση που μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα μια λύση του $Ax = b$. Όλες οι λύσεις του $Ax = b$ θα προκύπτουν μετά από την λύση του $Ax = 0$.

Παρατήρηση Τα ομογενή συστήματα $Ax = 0$ έχουν πάντα μία τουλάχιστον λύση την τετριμμένη $x = 0$. Τα μη ομογενή συστήματα $Ax = b$ μπορεί να έχουν αλλά μπορεί και να μην έχουν λύσεις, αφού αναζητώντας τον χώρο λύσεων του ομογενούς συστήματος, στην πραγματικότητα αναζητούμε την αντίστροφη εικόνα $T_A^{-1}(b)$ της γραμμικής απεικόνισης που αντιστοιχεί στον πίνακα A. Όμως η T_A μπορεί να μην είναι επί οπότε το $T_A^{-1}(b) = \emptyset$. Στην περίπτωση που δεν μπορούμε να βρούμε μία εύκολη λύση του μη ομογενούς γραμμικού συστήματος μπορούμε να εφαρμόσουμε μία τροποποιημένη μέθοδο απαλειφής του Gauß για μη ομογενή γραμμικά συστήματα, την μέθοδο του επαξημένου πίνακα. Στην μέθοδο αυτή αναζητούμε λύσεις του γραμμικού συστήματος που προκύπτει αν στον πίνακα $m \times n$ πίνακα A, προσθέσουμε ως τελευταία στήλη το διάνυσμα στήλη b, οπότε καταλήγουμε στον επαυξημένο πίνακα A' ο οποίος είναι $m \times (n+1)$. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις του συστήματος

$$Ax = b,$$

αντιστοιχούν στις λύσεις $\bar{x} := (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ του ομογενούς συστήματος

$$A'\bar{x} = 0,$$

με $x_{n+1} = -1$. Άρα το πρόβλημα της επίλυσης του μη ομογενούς συστήματος έχει αναχθεί στην επίλυση ενός ομογενούς συστήματος με κατά ένα περισσότερους αγνώστους.

Παραδείγματα

1. Να λυθεί το σύστημα:

$$3x + 5y + z = 17x + 6y + 3z = -16x + y + z = 9$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα αντιστοιχεί στην εξίσωση πινάκων

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Προσθέτουμε την πρώτη γραμμή στην δεύτερη πολλαπλασιασμένη με $-\frac{7}{3}$ και την πρώτη γραμμή στην τρίτη πολλαπλασιασμένη με -2 καταλήγοντας στον

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & -9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με $-\frac{3}{17}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{10}{17} \\ 0 & -9 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με 9 και την προσθέτουμε στην τρίτη και καταλήγουμε στο

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{10}{17} \\ 0 & 0 & -\frac{35}{17} & \frac{209}{17} \end{pmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με $-\frac{17}{35}$ και έχουμε

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{17} & \frac{10}{17} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{209}{35} \end{pmatrix}.$$

Τώρα όλα τα στοιχεία κάτω από την διαγώνιο είναι μηδενικά, και ξεκινούμε να μηδενίζουμε τα στοιχεία a_{ij} πάνω από την διαγώνιο και με $j \leq 3$. Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με $\frac{2}{17}$ και την προσθέτουμε στην δεύτερη, ενώ πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να καταλήξουμε στον

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & \frac{244}{35} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{35} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{209}{35} \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -5 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{264}{35} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{35} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{209}{35} \end{pmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $\frac{1}{3}$ και καταλήγουμε στον

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{88}{35} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{35} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{209}{35} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας οδηγεί στο σύστημα

$$x + \frac{88}{35}t = 0 \quad y - \frac{4}{35}t = 0 \quad z - t\frac{209}{35} = 0$$

• Βασική Θεωρία Συνόλων
• Σύνολα Αριθμών
• Ακολουθίες και Σύγκλιση
• Πραγματικές Συναρτήσεις
• Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Βασικές έννοιες
Γραμμικές Απεικονίσεις
Αντιστρόφος πίνακας
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 94 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

και θέτοντας $t = -1$ καταλήγουμε στην λύση του μη ομογενούς συστήματος

$$x = -\frac{88}{35} \quad y = \frac{4}{35} \quad z = \frac{209}{35}$$

Παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο ομογενές ($t = 0$) έχει μοναδική λύση την $x = y = z = 0$, οπότε το μη ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση.

2. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 3x + 4y + 5z &= 4 \\ 4x + 6y + 8z &= 5 \end{aligned} \; .$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύστημα για

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

γράφεται σαν εξίσωση πινάκων ως

$$Ax = b,$$

και ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Ξεκινάμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

με την μέθοδο της απαλειφής του Gauß. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και την πρώτη γραμμή με -4 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να καταλήξουμε στον

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία εξίσωση δίνει $-2t = 0$ δηλαδή $t = 0$. Άρα το επαυξημένο ομογενές σύστημα δεν έχει σαν λύση την $t = -1$ και συνεπώς το ζητούμενο αρχικό μη ομογενές σύστημα δεν έχει λύση.

3. Να λυθεί το σύστημα

$$Ax = c,$$

όπου A είναι ο πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος και c είναι το διάνυσμα στήλη $(3, 4, 7)^t$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή ο επαυξημένος πίνακας είναι ο

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Ξεκινάμε να λύσουμε το ομογενές σύστημα

$$A' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

με την μέθοδο της απαλειφής του Gauß. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και την πρώτη γραμμή με -4 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να καταλήξουμε στον

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σε αντίθεση με το παράδειγμα 3, η τελευταία εξίσωση δεν δίνει καμία πληροφορία και μπορούμε να την παραλείψουμε, οπότε έχουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με $-\frac{1}{2}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο σύστημα

$$\begin{aligned} x - z - 2t &= 0 \\ y + 2z + \tfrac{5}{2}t &= 0 \end{aligned}$$

Το οποίο για $t = -1$ έχει τις λύσεις

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από το $(-1, 2, 1)^t$, ενώ το $x_0 = (2, -\frac{5}{2}, 0)^t$ είναι μία ειδική λύση του $Ax = c$.

Άσκηση

1. Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα

$$Ax = b, \quad b \in \mathbb{R}^n,$$

έχει λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$.

(α΄) Σωστό (β΄) Λάθος

5.2.4. Βάση της εικόνας γραμμικής απεικόνισης

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε πως να χρησιμοποιήσουμε τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών για να λύσουμε γραμμικά συστήματα ή ισοδύναμα για να προσδιορίσουμε μία βάση του πυρήνα μιας γραμμικής απεικόνισης. Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε με παρόμοιο τρόπο τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών και θα δώσουμε μία μέθοδο υπολογισμού της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης.
Θεωρούμε ένα πίνακα $m \times n$ A με στοιχεία a_{ij}. Ο πίνακας αυτός ορίζει μία γραμμική απεικόνιση

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

η οποία στέλνει το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ας συμβολίσουμε με a^j το διάνυσμα της j στήλης του πίνακα A, δηλαδή

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Η εικόνα του πίνακα A είναι ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ στοιχείων της μορφής

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_n a^n,$$

δηλαδή ο διανυσματικός υπόχωρος $\langle a^1, \ldots a^n \rangle$ που παράγουν οι στήλες του πίνακα A.

Ορισμός 5.2.24 **[Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών]** *Ανάλογα με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών ορίζονται και οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών. Έστω ο πίνακας A και έστω $a^1, \ldots, a^n$ οι στήλες του. Έχουμε τους εξής μετασχηματισμούς:*

1. *Αντιμετάθεση δύο στηλών,*

$$\left(a^1 \cdots a^i \cdots a^j \cdots a^n\right) \rightsquigarrow \left(a^1 \cdots a^j \cdots a^i \cdots a^n\right)$$

δηλαδή οι στήλες i, j αλλάζουν θέση και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του πίνακα παραμένουν ως είχαν.

2. *Πολλαπλασιασμός μίας στήλης με μία σταθερά $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$:*

$$\left(a^1 \cdots a^i \cdots a^n\right) \rightsquigarrow \left(a^1 \cdots \lambda a^i \cdots a^n\right)$$

3. *Πολλαπλασιασμός της i-στήλης με μία σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και πρόσθεση στην γραμμή j-γραμμή :*

$$\left(a^1 \cdots a^i \cdots a^j \cdots a^n\right) \rightsquigarrow \left(a^1 \cdots a^i \cdots \lambda a^i + a^j \cdots a^n\right)$$

Πρόταση 5.2.25 *Δύο πίνακες που διαφέρουν κατά στοιχειώδη μετασχηματισμό στηλών ορίζουν γραμμικές απεικονίσεις που έχουν την ίδια εικόνα.* ***Απόδειξη***

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Θα ξεκινήσουμε να κάνουμε μία σειρά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών, σαν μία οριζόντια απαλειφή του Gauß για να φέρουμε τον πίνακα A σε άνω τριγωνική μορφή. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη στήλη με -1 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε, ότι τα διανύσματα στήλες του τελικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;) και είναι τρία το πλήθος, άρα η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης είναι το $\mathbb{R}^3$

2. Να υπολογιστεί η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 & 22 & 21 \\ 2 & 5 & 7 & 14 & 12 \\ 3 & 7 & 10 & 20 & 17 \end{pmatrix}$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα ξεκινάμε να κάνουμε μια σειρά από στοιχειώδεις πράξεις στηλών ώστε να φέρουμε τον πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη με -10 και την προσθέτουμε στην δεύτερη την πρώτη στήλη με -11 και την προσθέτουμε στην τρίτη την πρώτη στήλη με -22 και την προσθέτουμε στην τέταρτη και την πρώτη στήλη με -21 και την προσθέτουμε στην πέμπτη, οπότε καταλήγουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -15 & -15 & -30 & -30 \\ 3 & -23 & -23 & -46 & -46 \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη στήλη με -1 και την προσθέτουμε στην τρίτη και επίσης πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη στήλη με -2 και την προσθέτουμε στην τέταρτη και στην πέμπτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -23 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες (γιατί;) και παράγουν την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που ορίζει ο παραπάνω πίνακας. Άρα, η εικόνα είναι το επίπεδο που ορίζουν οι πρώτες δύο στήλες μέσα στον $\mathbb{R}^3$ και έχει διάσταση 2.

Άσκηση 5.2.26 Αποδείξτε ότι μία γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν είναι επί. **Υπόδειξη-Λύση**

5.3. Υπολογισμός αντιστρόφου πίνακα

Δίνεται ένας $n \times n$ πίνακας A. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} ώστε

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

Θα δώσουμε μία μέθοδο υπολογισμού βασισμένη στην μέθοδο απαλειφής του Gauß η οποία υπολογίζει τον αντίστροφο του πίνακα A αν υπάρχει. Για πρακτικές εφαρμογές η μέθοδος αυτή για πίνακες $n \geq 3$ είναι πολύ πιο εύκολο να εφαρμοστεί από την μέθοδο με τις ορίζουσες που θα διδαχτεί στο μάθημα της Γραμμικής Άλγεβρας.
Ας συμβολίσουμε τις στήλες του πίνακα A^{-1} με $x^1, \ldots, x^n$. Θα έχουμε πετύχει τον σκοπό μας αν υπολογίσουμε τις στήλες x^i. Παρατηρούμε ότι οι στήλες x^i αποτελούν λύσεις των μη ομογενών συστημάτων

$$Ax^i = e_i,$$

όπου e_i είναι το διάνυσμα στήλη που έχει παντού μηδέν εκτός από την i θέση στην οποία έχει 1. Είναι σαφές ότι με την παραπάνω παρατήρηση το πρόβλημα υπολογισμού έχει αναχθεί σε πρόβλημα εύρεσης λύσεων n το πλήθος μη ομογενών γραμμικών συστημάτων τα οποία μπορούμε να λύσουμε με την μέθοδο του επαυξημένου πίνακα. Για συντομία μπορούμε να τα λύσουμε όλα μαζί, αν σχηματίσουμε τον πίνακα B ο οποίος είναι ένας πίνακας $n \times 2n$, και οι n πρώτες στήλες είναι οι στήλες του πίνακα A ενώ οι n τελευταίες στήλες είναι οι στήλες του πίνακα $\mathbb{I}_n$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών φέρνουμε το πρώτο $n \times n$ κομμάτι του πίνακα B σε διαγώνια μορφή με μονάδες στην διαγώνιο. Ό,τι προκύψει στο δεύτερο $n \times n$ κομμάτι του πίνακα B είναι ο αντίστροφος του πίνακα A.

Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Σχηματίζουμε τον 3×6 πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην τρίτη για να καταλήξουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη, οπότε έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και την τρίτη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο ζητούμενος αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Σχηματίζουμε τον 3×6 πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ξεκινούμε την απαλειφή του Gauß στον παραπάνω πίνακα. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -3 και την προσθετουμε στην τρίτη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην τρίτη:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον αφού για παράδειγμα αν κοιτάξουμε το γραμμικό σύστημα $Ax^1 = e_1$, και $x^1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^t$ τότε η τελευταία γραμμή μας δίνει

$$0x_{11} + 0x_{21} + 0x_{31} = 1$$

το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 5.3.1 Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 10 \\ 9 & -1 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη-Λύση

Άσκηση 5.3.2 Για ποιές τιμές των a, b, c, d είναι ο παρακάτω πίνακας αντιστρέψιμος;

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Για τις τιμές των a, b, c, d που ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα.
Υπόδειξη-Λύση

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Υπόδειξη: Ζωγραφίστε το διάγραμα Venn. Στην συνέχεια δουλέψτε με τον ορισμό. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Υπόδειξη: Ζωγραφίστε το διάγραμα Venn. Στην συνέχεια δουλέψτε με τον ορισμό. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. Δείξτε ότι το αριστερό μέρος της ισότητας είναι υποσύνολο του δεξιού και αντίστροφα. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 112 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Υπόδειξη: Κοινή λογική! $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.3.2

Υπόδειξη: Κοινή λογική. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.3.3

Υπόδειξη: Κοινή λογική. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.3.4

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 116 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Αρκεί να μάθουμε ποιός δεν είναι ο δρόμος μας. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.3.5

Υπόδειξη: Με βάση τον ορισμό αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι συμμετρική, ανακλαστική μεταβατική. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.4.14

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 118 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Έστω n το πλήθος των στοιχείων του A. Αν η f δεν ήταν επί τότε θα έπρεπε να βάλω n στοιχεία σε $n-1$ θέσεις. Αυτό είναι σε αντίθεση με το 1-1. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.4.25

Υπόδειξη: Αν η συνάρτηση δεν ήταν ένα προς ένα τότε δύο στοιχεία του A θα απεικονίζονταν στο ίδιο στοιχείο άρα με τα υπόλοιπα $n-2$ θα έπρεπε να καλύψουμε $n-1$ θέσεις, άτοπο. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.4.26

Υπόδειξη: Εφαρμογή των ορισμών της μονοτονίας και της σύνθεσης συναρτήσεων. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 1.4.27

Απόδειξη: Έχουμε $x \in A \cup B$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $x \in A$ ή $x \in B$ αν και μόνο αν $x \in B$ ή $x \in A$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $x \in B \cup A$.
Εχουμε $x \in A \cap B$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in B$ αν και μόνο αν $x \in B$ και $x \in A$ το οποίο ισχύει αν και μόνο αν $x \in B \cap A$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.3

Απόδειξη: Έστω $x \in A$, τότε ισχύει η ασθενέστερη συνθήκη $x \in A$ ή $x \in B$, άρα $x \in A \cup B$. Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$ άρα ισχύει η ασθενέστερη συνθήκη $x \in A$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.4

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 123 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cap A = A$. Παρατηρούμε ότι $x \in A \cap A$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in A$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in A$.
Για να δείξουμε ότι $A \cup A = A$ παρατηρούμε ότι α $x \in A \cap A$ αν και μόνο αν $x \in A$ ή $x \in A$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in A$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.5

Απόδειξη: Είναι σαφές ότι $\emptyset \subset \emptyset \cap A$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\emptyset \cap A \subset \emptyset$. Ο πιο εύκολος τρόπος να καταλάβουμε γιατί το παραπάνω είναι σωστό, είναι να αρνηθούμε την πρόταση. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $x \in \emptyset$ με $x \notin \emptyset \cap A$. Το παραπάνω όμως είναι άτοπο αφού προϋποθέτει ότι υπάρχει $x \in \emptyset$.
Για το δεύτερο κομμάτι της άσκησης παρατηρούμε ότι $A \subset A \cup \emptyset$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $A \cup \emptyset \subset A$. Έστω $x \in A \cup \emptyset$. Τότε $x \in A$ ή $x \in \emptyset$. Αφού όμως δεν μπορεί $x \in \emptyset$ θα έχουμε $x \in A$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 1.2.6

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα στοιχείο $a \in A$, αν $a \notin B$ τότε $b \notin A \cap B = B$, άτοπο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.7

Απόδειξη: Έστω $b \in B$. Άρα $b \in A \cup B = A$ οπότε $b \in A$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.8

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα στοιχείο $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Εξ ορισμού $C \subset A \cap B$ άρα $C \subset A$ και $C \subset B$, άρα $C \in \mathcal{P}(A)$ και $C \in \mathcal{P}(B)$ από όπου έχουμε ότι $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Αντιστρόφως, αν $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, τότε $C \in \mathcal{P}(A)$ και $C \in \mathcal{P}(B)$ δηλαδή $C \subset A$ και $C \subset B$ συνεπώς $C \subset A \cap B$ από όπου προκύπτει ότι $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.9

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Έστω $x \in A \cap (B \cup C)$, δηλαδή εξ ορισμού $x \in A$ και ($x \in A$ ή $x \in B$), άρα ($x \in A$ και $x \in B$) ή ($x \in A$ και $x \in C$), δηλαδή $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Αντιστρόφως, έστω $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, δηλαδή ($x \in A$ και $x \in B$) ή ($x \in A$ και $x \in C$) άρα $x \in A$ και ($x \in A$ ή $x \in B$) από όπου έχουμε $x \in A \cap (B \cup C)$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.2.10

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 129 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

1. Η Αθήνα δεν είναι η πρωτεύουσα της Ελλάδας
2. $3 + 5 \neq 8$
3. Υπάρχει > 0 ώστε για κάθε $n_0()$ να υπάρχει $n > n_0()$ ώστε $- \geq a_n$ ή $a_n \geq$.
4. Τα μανταρίνια δεν είναι κίτρινα ή δεν έχουν κουκούτσια
5. Όλοι οι φοιτητές είναι πιο κοντοί από τα 2 μέτρα.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.3.2

Απόδειξη:

1. $\bar{p}$
2. $p \Rightarrow q$
3. $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$
4. $q \Rightarrow p$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.3.3

Απόδειξη:

1. Αν δεν μείνω σπίτι αύριο δεν θα βρέχει.
2. Αν δεν παίξουμε μπάλα αύριο τότε δεν θα έχει λιακάδα
3. Αν ένας θετικός ακεραίος έχει διαιρέτες διαφορετικούς από την μονάδα και τον ευατό του, τότε δεν είναι πρώτος.

□

Πίσω στην Άσκηση 1.3.4

Απόδειξη: Πιάνουμε τον ένα στην τύχη και τον ρωτάμε: «αν ρώταγα τον άλλο ποιον δρόμο θα μου έδειχνε;» Ακολουθούμε τον άλλο δρόμο από αυτόν που μας έδειξε (γιατί;) $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.3.5

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι συμμετρική, ανακλαστική και μεταβατική.
Για να δείξουμε ότι είναι συμμετρική παρατηρούμε ότι αν

$$(a, b) \equiv (a', b') = 0 \Rightarrow ab' - ba' = 0 \Rightarrow a'b - b'a = 0 \Rightarrow (a', b') \equiv (a, b).$$

Για να δείξουμε ότι είναι ανακλαστική παρατηρούμε ότι

$$ab - ab = 0 \Rightarrow (a, b) \equiv (a, b).$$

Τέλος για να δείξουμε ότι είναι και μεταβατική παρατηρούμε ότι αν

$$(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2) \Rightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2$$

και

$$(a_2, b_2) \equiv (a_3, b_3) \Rightarrow a_2 b_3 = b_2 a_3.$$

Άρα, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$$a_1 b_2 a_2 b_3 = b_1 a_2 b_2 a_3 \Rightarrow a_1 b_3 = b_1 a_3 \Rightarrow (a_1, b_1) \equiv (a_3, b_3).$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.4.14

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 134 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \to A$ η οποία είναι ένα προς ένα. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι επί. Άρα υπάρχει στοιχείο $x \in A$ στο οποίο δεν απεικονίζεται κανένα $a \in A$ μέσω της f. Οπότε τα n πλήθος στοιχεία του A θα πρέπει να πάνε σε $n-1$ θέσεις του $A \setminus \{x\}$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A το οποίο θα είναι εικόνα δύο στοιχείων $a_1, a_2 \in A$ μέσω της f, και συνεπώς η f δεν μπορεί να είναι ένα προς ένα, άτοπο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.4.25

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα. Συνεπώς, υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$ με $a_1 \neq a_2$ ώστε $f(a_1) = f(a_2)$. Αν από το A βγάλουμε τα a_1, a_2 τότε μας μένουν $n-2$ στοιχεία τα οποία θα πρέπει να τα στείλουμε σε $n-1$ θέσεις (για να είναι η συνάρτηση f επί) και αυτό είναι άτοπο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.4.26

Απόδειξη: Θεωρούμε τις σχέσεις διάταξης $\leq_A, \leq_B, \leq_C$ στα σύνολα A, B, C αντίστοιχα. Το ότι οι f, g είναι αύξουσες σημαίνει ότι για $a_1 \leq_A a_2$ έχουμε $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ και για $b_1 \leq_B \leq b_2$ έχουμε $g(b_1) \leq_C g(b_2)$. Άρα για $a_1 \leq a_2$ έχουμε $g \circ f(a_1) \leq_C g \circ f(a_2)$ αφού $f(a_i) \in B$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 1.4.27

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 137 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας συνόλων, ότι το ένα είναι υποσύνολο του άλλου.
Θα δείξουμε ότι $(A \cap B)^C \subseteq A^C \cup B^C$. Πράγματι έστω $x \in (A \cap B)^C$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in X$ και $x \notin (A \cap B)$, δηλαδή ισοδύναμα $x \in X$ και $x \notin A$ ή $x \notin B$. Άρα $x \in A^C$ ή $x \in B^C$, δηλαδή $x \in A^C \cup B^C$.
Αντιστρόφως θα δείξουμε ότι $A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^C$. Πράγματι αν $x \in A^C \cup B^C$ τότε $x \in X$ και $x \notin A$ ή $x \in X$ και $x \notin B$. Άρα $x \notin (A \cap B)$ δηλαδή $x \in (A \cap B)^C$.
Συνδιάζοντας τα συμπεράσματα των δύο παραπάνω παραγράφων έχουμε ότι $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
Με όμοιο τρόπο θα δείξουμε ότι $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$. Πράγματι έστω $x \in (A \cup B)^C$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in X$ ή $x \notin (A \cup B)$, δηλαδή ισοδύναμα $x \in X$ ή $x \notin A$ και $x \notin B$. Άρα $x \in A^C$ και $x \in B^C$, δηλαδή $x \in A^C \cap B^C$.
Αντιστρόφως θα δείξουμε ότι $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$. Πράγματι αν $x \in A^C \cap B^C$ τότε $x \in X$ ή $x \notin A$ και $x \in X$ ή $x \notin B$. Άρα $x \notin (A \cup B)$ δηλαδή $x \in (A \cup B)^C$.
Συνδιάζοντας τα συμπεράσματα των δύο παραπάνω παραγράφων έχουμε ότι $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

$\square$

Πίσω στην Πρόταση 1.2.1

Απόδειξη:

1. Αν η πρόταση p είναι αληθής τότε η πρόταση $\bar{p}$ είναι ψευδής, άρα η $\bar{\bar{p}}$ είναι αληθής. Αντιστρόφως, αν η πρόταση $\bar{\bar{p}}$ είναι αληθής τότε η $\bar{p}$ είναι ψευδής και η p αληθής.

2. Αν η πρόταση p είναι αληθής τότε μία τουλάχιστον από τις δύο προτάσεις εκατέρωθεν του $\vee$ είναι αληθής άρα $p \vee p$ είναι αληθής. Αντιστρόφως, αν το $p \vee p$ είναι αληθής τότε μία τουλάχιστον από τις δύο προτάσεις εκατέρωθεν του $\vee$ είναι αληθείς και επειδή και οι δύο είναι η p και η p είναι αληθής.

3. Αν η πρόταση p είναι αληθής τότε και οι δύο προτάσεις εκατέροθεν του $\wedge$ είναι αληθείς άρα και το $p \wedge p$ είναι αληθές. Αντιστρόφως αν το $p \wedge p$ είναι αληθής τότε και οι δύο προτάσεις εκατέρωθεν του $\wedge$ είναι αληθείς και αφού ταυτίζονται το p είναι αληθές.

4. Το $p \vee q$ είναι αληθές αν και μόνο αν μία τουλάχιστον από τις p, q είναι αληθής αν και μόνο αν το $q \vee p$ είναι αληθές, αφού η σειρά δεν παίζει ρόλο.

5. Ομοίως, το $p \wedge q$ είναι αληθές αν και μόνο αν και οι δύο p, q είναι αληθείς αν και μόνο αν το $q \wedge p$ είναι αληθές.

6. Το $p \wedge (q \wedge r)$ είναι αληθές αν και μόνο αν (και το p και το $q \wedge r$ είναι αληθή) το οποίο ισχύει αν και μόνο αν (και το p και το q και το r είναι αληθή) αν και μόνο αν ($(p \wedge q)$ αληθές και r αληθές) αν και μόνο αν $(p \wedge q) \wedge r)$ αληθές.

7. Το $p \vee (q \vee r)$ είναι αληθές αν και μόνο αν (ένα από τα p ή $q \wedge r$ είναι αληθή) το οποίο ισχύει αν και μόνο αν (ή το p ή το q ή το r είναι αληθή) αν και μόνο αν ($(p \vee q)$ αληθές ή r αληθές) αν και μόνο αν $(p \vee q) \vee r)$ αληθές.

8. Το $\overline{p \wedge q}$ είναι αληθές αν και μόνο αν το $p \wedge q$ είναι ψευδές αν και μόνο αν ένα τουλάχιστον από τα p, q είναι ψευδή, δηλαδή αν και μόνο αν $\bar{p} \vee \bar{q}$.

9. Το $\overline{p \vee q}$ είναι αληθές αν και μόνο αν το $p \vee q$ είναι ψευδές αν και μόνο αν και τα δύο p, q είναι ψευδή, δηλαδή αν και μόνο αν $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

10. Έστω $p \vee (q \wedge r)$ είναι αληθές. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν (p αληθές ή $(q \wedge r)$ αληθής. Αν p αληθής τότε $p \vee q$ και $p \vee r$ είναι και οι δύο αληθείς, ανεξάρτητα από την αλήθεια των q, r, άρα $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ είναι αληθής. Αν πάλι p ψευδής τότε θα πρέπει να είναι αληθής η $q \wedge r$ δηλαδή και το q και το r είναι αληθή, δηλαδή $p \vee q$ και $p \vee r$ οπότε και πάλι έχουμε ότι $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ είναι αληθής.

    Αντιστρόφως αν $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ είναι αληθής τότε $p \vee q$ και $q \vee r$ είναι αληθής. Αν p αληθής τότε $p \vee (q \wedge r)$ είναι αληθής ανεξάρτητα από την αλήθεια του $(q \wedge r)$. Αν p ψευδής, τότε q, p είναι και τα δύο αληθή, άρα και το $p \wedge q$ άρα και το $p \vee (q \wedge r)$.

11. Παρατηρούμε ότι το $p \wedge (q \vee r)$ είναι αληθές αν και μόνο αν p αληθές και (q αληθές ή r αληθές), αν και μόνο αν (p και q αληθές) ή (p και r αληθές) αν και μόνο αν $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

12. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ (γιατί;) Έστω λοιπόν ότι η αλήθεια της πρότασης p έχει σαν συνέπεια την αλήθεια της πρότασης q. Θα δείξουμε ότι η αλήθεια της πρότασης $\bar{q}$ έχει σαν συνέπεια την αλήθεια της πρότασης $\bar{p}$. Πράγματι αν η πρόταση $\bar{q}$ είναι αληθής τότε η q είναι ψευδής και συνεπώς η p είναι ψευδής (αφού αν ήταν αληθής η p θα ήταν και η q). Άρα η $\bar{p}$ είναι αληθής.

□

Πίσω στην Πρόταση 1.3.1

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 140 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη:

1. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\emptyset \times A$ δεν ήταν διαφορετικό από το κενό σύνολο. Σε αυτή την περίπτωση θα υπήρχε ένα στοιχείο $(x, y) \in \emptyset \times A$ και άρα εξ ορισμού $x \in \emptyset$, άτοπο αφού το κενό σύνολο δεν περιλαμβάνει κανένα στοιχείο. Ομοίως δείχνουμε ότι $A \times \emptyset = \emptyset$.

2. Αν το A ή το B είναι κενά τότε προφανώς ισχύει το ζητούμενο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ούτε το A ούτε το B δεν είναι κενά. Έστω $x \in A$ και έστω $y \in B$. Εξ ορισμού $(x, y) \in A \times B = B \times A$, άρα $x \in B$ και $y \in A$, από όπου προκύπτει ότι $A \subset B$ και $B \subset A$, δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

□

Πίσω στην Πρόταση 1.4.2

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την σχέση ισοδυναμίας $\Sigma \in A \times A$. Αν το σύνολο A είναι κενό δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Ας υποθέσουμε ότι $x \in A$. Θέτουμε

$$A_x := \{y \in A,\ \text{ώστε } (x, y) \in \Sigma\}.$$

Θα δείξουμε ότι τα σύνολα $\{A_x\}_{x \in A} \subseteq A$ αποτελούν μία διαμέριση του συνόλου A. Πράγματι είναι σαφές ότι $\bigcup_{x \in A} A_x = A$. Επιπλέον αν $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $z \in A_x \cap A_y$, άρα $(x, z) \in \Sigma$ και $(y, z) \in \Sigma$ και λόγω της μεταβατικής ιδιότητας έχουμε ότι $(x, y) \in \Sigma$, άρα $A_x \subseteq A_y$ και $A_y \subseteq A_x$, δηλαδή $A_x = A_y$.
Αντιστρόφως αν $\{A_i\}_{i \in I}$ είναι μία διαμέριση του A, τότε ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $\Sigma \subseteq A \times A$, ως εξής:

$$(x, y) \in \Sigma \text{ αν και μόνο αν υπάρχει } i \in I,\ \text{ώστε } x, y \in A_i.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η Σ είναι πράγματι μία σχέση ισοδυναμίας. Έστω $x \in A$, υπάρχει $i \in I$ ώστε $x \in A_i$, αφού η ένωση των A_i δίνει το A. Άρα $(a, a) \in \Sigma$ και ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Η συμμετρική ιδιότητα είναι προφανής, αφού αν $x, y \in A_i$ για κάποιο $i \in I$, τότε και $y, x \in A_i$. Τέλος για την μεταβατική ιδιότητα έχουμε ότι αν $(x, y) \in \Sigma$ και $(y, z) \in \Sigma$, τότε $x, y \in A_i$ και $y, z \in A_j$ για κάποια $i, j \in A$. Όμως $y \in A_i \cap A_j$ άρα $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, άρα $A_i = A_j$, δηλαδή $x, z \in A_i$ και τελικά $(x, z) \in \Sigma$. □

Πίσω στην Πρόταση 1.4.11

Απόδειξη: Το γράφημα της συνάρτησης αποτελείται από τα ζευγάρια $(a, f(a))$ άρα η αντίστροφη σχέση θα αποτελείται από τα ζευγάρια

$$\Sigma_f^{-1} := \{(f(a), a) : a \in A\} \subset B \times A.$$

Οι πρώτη προϋπόθεση του ορισμού της συνάρτησης μεταφράζεται στο ότι για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $(b, a) \in \Sigma^{-1}$ ή ισοδύναμα $b = f(a)$ για κάποιο a, δηλαδή η f πρέπει και αρκεί να είναι επί.

Από την άλλη η δεύτερη προϋπόθεση μεταφράζεται ότι αν $(b, a_1), (b, a_2) \in \Sigma_f^{-1}$ τότε $a_1 = a_2$, δηλαδή αν $f(a_1) = f(a_2)$ τότε $a_1 = a_2$. Δηλαδή για να ικανοποιεί η Σ_f^{-1} την δεύτερη προϋπόθεση του ορισμού της συνάρτησης πρέπει και αρκεί να είναι ένα προς ένα. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 1.4.17

Απόδειξη: Πράγματι, παρατηρούμε ότι η η συνάρτηση f^{-1} είναι η συνάρτηση που προέρχεται από την σχέση Σ_f^{-1}, τα στοιχεία της οποίας είναι διατεταγμένα ζεύγη της μορφής $(f(a), a) = (b, f^{-1}(b))$. Έστω $b \in B$. Αφού η f είναι αντιστρέψιμη είναι επί, άρα υπάρχει $a \in A$, με $b = f(a)$. Άρα η παραπάνω σχέση γράφεται ως $(f(a), a) = (b, f^{-1}(f(a)))$, άρα $a = f^{-1}(f(a))$ και $f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_A$. Για να αποδείξουμε την ισότητα $f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_B$, εργαζόμαστε ομοίως, αντικαθιστόντας την f με την f^{-1} (παρατηρήστε ότι $(f^{-1})^{-1} = f$. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 1.4.21

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε επαγωγή. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.6

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε επαγωγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.7

Υπόδειξη: Ο πρώτος τύπος μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας πράξεις. Η κατασκευή του τριγώνου του Pascal προκύπτει από τον προηγούμενο τύπο. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.8

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή. Θα χρειαστεί να χρησημοποιήσετε το $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ της προηγούμενης άσκησης. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.9

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε επαγωγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.10

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.11

Υπόδειξη: Για το πρώτο σκέλος της άσκησης ελέγξτε τις ιδιότητες του ορισμού. Για το δεύτερο σκέλος της άσκησης αποδείξτε ότι δύο στοιχεία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας αν και μόνο αν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το n. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.21

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ορισμό. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.6

Υπόδειξη: Ο αριθμητής του διονυμικού συντελεστή διαιρείται με p. Δείξτε ότι ο παρονομαστής δεν διαιρείται με p. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.23

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της ανάλυσης σε πρώτους παράγοντες. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.24

Υπόδειξη: Θεωρήστε τους αριθμούς $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+(n+1)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.25

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της ταυτότητας $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots a + 1)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.26

Υπόδειξη: Θεωρήστε πρώτα το πιο απλό πρόβλημα: Το γινόμενο δύο διαδοχικών αριθμών είναι πάντα διαιρετό με το 2, και το γινόμενο τριών διαδοχικών αριθμών είναι πάντα διαιρετό με το 3. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.27

Υπόδειξη: Κάντε την διαίρεση των a_1, a_2 με n και στην συνέχεια προσθέστε και πολλαπλασιάστε. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.28

Υπόδειξη: Γράψτε τον αριθμό n σε δεκαδική μορφή:

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots 10^r a_r,$$

με $0 \leq a_i < 10$. Στην συνέχεια κάντε χρήση της άσκησης 2.1.28. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.29

Υπόδειξη: Κάντε χρήση της 2.1.28. ☐

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.30

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.31

Υπόδειξη: Κάντε τα κλάσματα ομώνυμα και αποδείξτε ότι ο παρονομαστής δεν διαιρεί τον αριθμητή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.1.32

Υπόδειξη: Θεωρήστε το μέσον των δύο ρητών. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Υπόδειξη: Κάνοντας χρήση της αρχής του Αρχιμήδη δείξτε ότι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς a, b με κατάλληλο φυσικό n ώστε η απόσταση τους να γίνει μεγαλύτερη της μονάδας. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 164 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Να γίνει χρήση της παράστασεις των πραγματικών αριθμών ως αρχικά ανοιχτά τμήματα καθώς και του ορισμού του γινομένου αρχικών τμημάτων. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.4.1

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε γνωστό τύπο. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.4.2

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 167 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Εκφράστε το $1 + i$ σε τριγωνομετρική μορφή. Στην συνέχεια κάντε χρήση γνωστού τύπου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.4.3

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Υπόδειξη: Κάντε πράξεις. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.4.4

Υπόδειξη: Κάντε πράξεις με μιγαδικούς στην τριγωνομετρική τους μορφή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.4.5

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο του αθροίσματος γεωμετρικής προόδου. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 2.4.6

Απόδειξη: Η ζητούμενη πρόταση ισχύει για $k = 1$ αφού $1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = n$ και κάνοντας χρήση της υπόθεσης αυτής θα αποδείξουμε την αλήθεια της πρότασης για $k = n + 1$. Έχουμε

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Στην παραπάνω ισότητα κάναμε χρήση της αλήθειας της πρότασης για $k = n$ προκειμένου να υπολογίσουμε το άθροισμα των k-πρώτων τετραγώνων. Τώρα το δεύτερο μέρος της ισότητας υπολογίζεται σε

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6},$$

και η αλήθεια της πρότασης για $n = k + 1$ έχει αποδειχτεί. □

Πίσω στην Άσκηση 2.1.6

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $k = 1$ αφού

$$1 = 1 \cdot 1 = (1 + 1)! - 1.$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για $n = k$ και κάνοντας χρήση αυτού θα δείξουμε την αλήθεια της πρότασης για $n = k + 1$. Πράγματι,

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k+1)! \cdot (k+1) = (k+1)! - 1 + (k+1)! \cdot (k+1).$$

Παρατηρήστε ότι στην παραπάνω πρόταση κάναμε χρήση της επαγωγικής υπόθεσης για να υπολογίσουμε το άθροισμα των k-πρώτων προσθετέων. Το δεύτερο μέρος της παραπάνω ισότητας είναι ίσο με

$$(k+1)! - 1 + (k+1)! \cdot (k+1) = (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = (k+2)! - 1,$$

δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.7

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}=$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k},$$

δηλαδή το ζητούμενο. Το δεύτερο κομμάτι της ασκήσης είναι άμεση εφαρμογή του πρώτου. □

Πίσω στην Άσκηση 2.1.8

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 174 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι για $n = 1$ ο τύπος ισχύει:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a + \binom{n}{n}b = a + b.$$

Στον παραπάνω τύπο παρατηρήστε ότι $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = k$ και βάση αυτού θα αποδείξουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n = k + 1$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b) = \\
&= \left(\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}a^m b^{n-m}\right)(a-b) = \\
&= a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-2}a^3 b^{k-2} + \binom{k}{k-1}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k + \\
&\quad + a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-2}a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} = \\
&= a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k}\left(\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1}\right) + a^{k+1-m}b^m + b^{k+1} = \\
&= \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}a^{k+1-m}b^m. \qquad (5.4)
\end{aligned}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.9

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 175 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη ισότητα ισχύει για $k = 1$ αφού

$$1^2 = (-1)^0 \frac{1(1+1)}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι είναι αληθής για $n = k$ και κάνοντας χρήση αυτού θα δείξουμε την αλήθεια της πρότασης για $n = k+1$. Παρατηρούμε ότι

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2.$$

Στην παραπάνω ισότητα κάναμε χρήση της επαγωγικής υπόθεσης για να υπολογίσουμε το άθροισμα των k-πρώτων προσθετέων. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέρος της ισότητας είναι ίσο με

$$(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k\left(-\frac{k^2+k}{2} + \frac{2k^2+4k+2}{2}\right) =$$

$$= (-1)^k\frac{k^2+3k+2}{2} = (-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.10

Απόδειξη: Για $n = 1$ έχουμε ότι $f(1) \geq 1$, αφού το $f(1) \in \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι για $n = k$ έχουμε $f(k) \geq k$. Έχουμε ότι $f(k+1) > f(k) \geq k$, άρα $f(k+1) \geq k$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.11

Απόδειξη: Για την ανακλαστική ιδιότητα έχουμε ότι $n \mid 0 = x - x$, άρα $(x, x) \in \Sigma$. Για την συμμετρική ιδιότητα έχουμε ότι αν $(x, y) \in \Sigma$ τότε $n \mid x - y$ άρα $n \mid y - x$ άρα $(y, x) \in \Sigma$. Τέλος για την μεταβατική ιδιότητα έχουμε ότι αν $(x, y) \in \Sigma$ και $(y, z) \in \Sigma$, τότε $n \mid x - y$ και $n \mid y - z$. Συνεπώς $n \mid (x - y) + (y - z)$, δηλαδή $n \mid x - z$, άρα $(x, z) \in \Sigma$.
Παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathbb{Z}$, τότε $x = \pi n + u$, με $0 \leq u < n$. Άρα $n \mid u - x$. Δηλαδή κάθε ακέραιος έχει στοιχείο $u \in \{0, 1, \ldots, n-1\} := I$, με το οποίο να είναι ισοδύναμος. Έστω

$$\mathbb{Z}(i) = \{x \in \mathbb{Z}, \text{ ώστε } (x, i) \in \Sigma\}.$$

Για $i, j \in I$, $i \neq j$ έχουμε ότι $\mathbb{Z}(i) \cap \mathbb{Z}(j) = \emptyset$, και επιπλέον $\bigcup_{i \in I} \mathbb{Z}(i) = \mathbb{Z}$. Συνεπώς τα $\{\mathbb{Z}(i)\}_{i \in I}$ αποτελούν μία διαμέριση του $\mathbb{Z}$ με n το πλήθος στοιχεία. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.21

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $n \mid m$, δηλαδή $m = n\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$. Αν $x \in m\mathbb{Z}$, τότε εξ' ορισμού $x = mk$ και λόγω της διαιρετότητας $x = nk\ell$, άρα $x \in n\mathbb{Z}$. Αντιστρόφως αν $m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$, τότε και το $m \in m\mathbb{Z}$ θα ανήκει στο $n\mathbb{Z}$, άρα θα γράφεται στην μορφή $m = n\ell$ για κάποιο $\ell \in \mathbb{Z}$, άρα $m \mid n$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.22

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ο παρονομαστής δεν είναι διαιρετός με p. Πράγματι οι αριθμοί i που εμφανίζονται σαν παράγοντες στα γινόμενα που συνθέτουν το $m!$ και το $(p-m)!$ είναι όλοι μικρότεροι του p και συνεπώς δεν μπορούν να διαιρούνται με το p. Και αν το p διαιρεί τον παρονομαστή θα πρέπει να διαιρεί κάποιον παράγοντα του. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.23

Απόδειξη: Έστω $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ και $b = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$, είναι οι αναλύσεις των a, b σε πρώτους παράγοντες με την παραδοχή ότι αν ένας πρώτος δεν εμφανίζεται στο ανάπτυγμα ο αντίστοιχος συντελεστής είναι μηδέν.
Από τους τύπους οι συντελεστές της ανάλυσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη και του ελάχιστου κοινού πολλαπλασίου στον πρώτο p_i είναι $\max(a_i, b_i)$ και $\min(a_i, b_i)$. Για δύο φυσικούς r, s ισχύει (γιατί;) $\max(r, s) = r + s - \min(r, s)$ από όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.24

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 181 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+(n+1)$, είναι n το πλήθος, και δεν είναι κανείς τους πρώτος αφού για $i = 2, \ldots n+1$, έχουμε $1 < i \mid (n+1)! + i$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.25

Απόδειξη: Γράφουμε

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots a + 1).$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος παράγοντας είναι πάντα μεγαλύτερος της μονάδας, άρα θα πρέπει $a - 1 = 1$, δηλαδή $a = 2$. Ας υποθέσουμε ότι ο n δεν είναι πρώτος, δηλαδή $n = ab$ με $a > 1, b > 1$. Τότε

$$2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + \cdots + 2^a + 1).$$

Σε αυτή την περίπτωση και οι δύο παράγοντες του δεξιού μέλους είναι μεγαλύτεροι της μονάδας, άτοπο, άρα θα πρέπει ο n να είναι πρώτος. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.26

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 183 από 322

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι από δύο διαδοχικούς αριθμούς ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός, άρα το γινόμενο τους διαιρείται με το 2. Το γινόμενο τριών διαδοχικών αριθμών είναι πάντα διαιρετό με το 3, αφού αν συμβολίσουμε με k τον πρώτο από τους τρεις διαδοχικούς αριθμούς, τότε μπορούμε να τον γράψουμε $k = 3q + r$, όπου $0 \leq r < 3$. Αν $r = 0$ $3 \mid k$, οπότε $3 \mid k(k+1)(k+2)$. Αν $r = 1$ τότε $3 \mid k+2$ οπότε και πάλι $3 \mid k(k+1)(k+2)$, ενώ αν $r = 2$ τότε $3 \mid k+1$ οπότε και πάλι $3 \mid k(k+1)(k+2)$.
Θα αποδείξουμε ότι ανάμεσα σε τέσσερις διαδοχικούς αριθμούς ένας είναι διαιρετός με 4 και άλλος ένας είναι διαιρετός με 2. Πράγματι, έστω k ο πρώτος από τους διαδοχικούς αριθμούς. Διαιρούμε το k με το 4, και έχουμε $k = 4q + r$, όπου $0 \leq r < 4$. Αν $r = 0$, τότε $4 \mid k$ και $2 \mid k+2$. Αν $r = 1$, τότε $2 \mid k+1$ και $4 \mid k+3$. Αν $r = 2$, τότε $2 \mid k$ και $4 \mid k+2$. Τέλος αν $r = 3$, τότε $4 \mid k+1$ και $2 \mid k+3$.
Άρα το γινόμενο $k(k+1)(k+2)(k+3)$ διαιρείται από 3 και από 8 από όπου προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.27

Απόδειξη: Γράφουμε $a_1 = q_1 n + u_1$ και $a_2 = q_2 n + u_2$. Έχουμε

$$a_1 + a_2 = (q_1 + q_2)n + u_1 + u_2.$$

Αν $u_1 + u_2 = q_3 n + u$, $0 \leq u < n$ τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$a_1 + a_2 = (q_1 + q_2 + q_3)n + u.$$

Το ζητούμενο προκύπτει από την μοναδικότητα της έκφρασης στην διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο. Για τον πολλαπλασιασμό, έχουμε

$$a_1 a_2 = (q_1 n + u_1)(q_2 n + u_2) = (q_1 u_2 + q_2 u_1)n + u_1 u_2.$$

Και πάλι αν $u_1 u_2 = q_4 n + u'$ με $0 \leq u' < n$, τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$a_1 a_2 = (q_1 u_2 + q_2 u_1 + q_4)n + u'.$$

Και πάλι το ζητούμενο προκύπτει από την μοναδικότητα της έκφρασης στην διαίρεση με πηλίκο και υπόλοιπο. □

Πίσω στην Άσκηση 2.1.28

Απόδειξη: Έστω n ένας φυσικός αριθμός ο οποίος γράφεται σε δεκαδικό ανάπτυγμα ως

$$n = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots 10^r a_r,$$

με $0 \leq a_i < 10$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 10^i με το 3 ή με το 9 είναι πάντα 1. Άρα σύμφωνα με την άσκηση 2.1.28 ο αριθμός n διαιρείται με το 3 ή με το 9 αν και μόνο αν $a_0 + a_1 + \cdot a_r$ αφήνει υπόλοιπο 0 στην διαίρεση του με το 3 ή με το 9. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.29

Απόδειξη: Αν ο a διαιρείται με p το αποτέλεσμα είναι προφανές. Θεωρούμε όλα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του a με p, τα διαφορετικά από το 0, δηλαδή τα $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Στην συνέχεια θεωρούμε όλα τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ με p, και παρατηρούμε ότι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων αυτών είναι και πάλι τα $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ με διαφορετική σειρά (γιατί;). Άρα

$$p \mid 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) - a \cdot 2a \cdot 3a \cdots a(p-1) = (1 - a^{p-1}) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1).$$

Το p δεν διαιρεί κανένα αριθμό στο $1 < i < p-1$, άρα $p \mid a^{p-1} - 1$ και άρα $p \mid a^p - a$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.30

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $a_1 = a_2 = 1$ και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι η μονάδα. Θα υποθέσουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών a_n, a_{n-1} είναι η μονάδα και θα αποδείξουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a_{n+1}, a_n είναι επίσης η μονάδα. Πράγματι αν p είναι ένας κοινός διαιρέτης των a_{n+1}, a_n τότε αφού $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ θα πρέπει $p \mid a_{n-1}$, άτοπο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.31

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{p!},$$

όπου $a_i = \frac{p!}{i}$. Παρατηρούμε ότι το p διερεί τον παρονομαστή αλλά το p δεν διερεί τον αριθμητή αφού το $p \mid a_i$ για $i \leq p - 1$ και $p \nmid a_p$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.1.32

Απόδειξη: Αν a, b είναι ρητοί αριθμοί τότε ο $(a+b)/2$ είναι ρητός και επιπλέον

$$a \le \frac{a+b}{2} \le b.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.7

Απόδειξη: Η αρχή του Αρχιμήδη 2.2.6 εξασφαλίζει ότι υπάρχει φυσικός αριθμός ώστε $n(b-a) \geq 1$. Άρα αφού οι αριθμοί na, nb απέχουν περισσότερο από 1 υπάρχει ανάμεσα τους ένας ακέραιος k. Τέλος έχουμε

$$a \leq \frac{k}{n} \leq b,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 2.2.8

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο αρχικά ανοιχτά τμήματα A_1, A_2 τα οποία είναι μή κενά και είναι θετικοί αριθμοί δηλαδή

$$\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \subsetneq A_i$$

Δηλαδή υπάρχουν $a_1 \in A_1$ και $a_2 \in A_2$ με $a_i > 0$. Άρα στο γινόμενο $A_1 A_2$ υπάρχει το θετικό στοιχείο $a_1 a_2 > 0$. Επιπλέον $\{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \subset A_1 A_2$ από όπου προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.2.9

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 192 από 322

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έχουμε

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.1

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 193 από 322

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Θέτουμε $\Delta = 1^2 - 12 = -11$, οπότε $\sqrt{-11} = \sqrt{11}i$. Οι ρίζες δίνονται από τους τύπους

$$\rho_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.2

Απόδειξη: Έχουμε ότι $|1+i| = \sqrt{2}$. Άρα

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Συνεπώς οι 10-ες ρίζες του $1+i$ δίνονται από τον τύπο

$$z_i = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{10}\right) + \sin\left(\frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{10}\right)i\right),$$

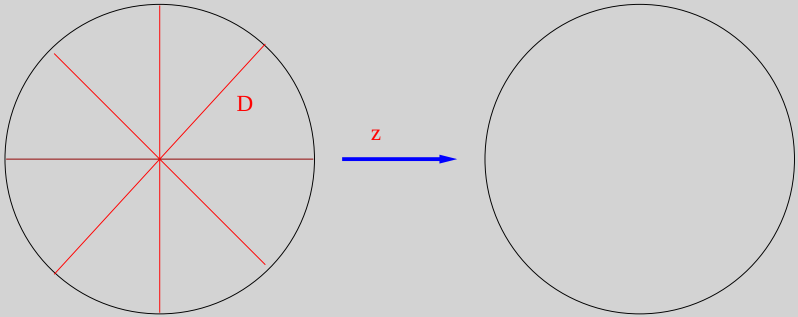
όπου $k = 0, \ldots 9$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.3

Απόδειξη: Αν $x, y \in \mu(n)$ τότε $x^n = y^n = 1 \Rightarrow (xy)^n = x^n y^n = 1$. Η μονάδα 1 είναι σαφώς n-ρίζα της μονάδας, δηλαδή $e = 1 \in \mu(n)$. Τέλος αν $x^n = 1$ τότε και $(1/x)^n = 1/x^n = 1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.4

Απόδειξη: Η z^n απεικονίζει το D εντός του D, αφού αν $|z| < 1$ τότε και $|z^n| = |z|^n < 1$. Αν $a \in D$, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει n-το πλήθος ρίζες στο $\mathbb{C}$ και όλες είναι εντός του D, αφού αν $|z| \geq 1$ τότε και $|a| = |z^n| = |z|^n \geq 1$. Δηλαδή η z^n είναι επί του D. Αφού για κάθε $a \neq 0$ υπάρχουν n το πλήθος στοιχεία z_i εντός του D ώστε $z_i^n = a$ δεν είναι δυνατόν να είναι η συνάρτηση ένα πρός ένα.
Γεωμετρικά η z^n χωρίζει τον δίσκο D σε n φέτες της μορφής $D_j = \{z \in D, 2\pi(j-1) \leq Arg(z) < 2\pi j\}$ και η συνάρτηση $z^n|_{D_j}$ είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή η z^n απλώνει την φέτα D_j πάνω σε ολόκληρο το δίσκο.



$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.5

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 197 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Οι n-ρίζες της μονάδας είναι οι ζ_1^k, όπου $\zeta_1 = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ και $k = 0, \ldots n-1$. Έτσι

$$1 + \zeta_1 + \zeta_1^2 + \cdots + \zeta_1^{n-1} = \frac{\zeta_1^n - 1}{\zeta_1 - 1} = 0.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 2.4.6

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την ιδιότητα του ελαχίστου στοιχείου με βάση το αξίωμα της επαγωγής. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο φυσικών αριθμών S. Υποθέτουμε ότι το σύνολο S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από τους φυσικούς που είναι μικρότεροι από όλα τα στοιχεία του S δηλαδή

$$k \in A \Leftrightarrow \text{ για κάθε } s \in S k < s.$$

Παρατηρούμε ότι $1 \in A$, διαφορετικά θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του S. Έστω ότι $n \in A$, τότε για κάθε $s \in S$ έχουμε $n < s$. Από την υπόθεση ότι το S δεν έχει ελάχιστο στοιχείο έχουμε ότι $n+1 \notin S$. Γιατί διαφορετικά το $n+1$ θα ήταν το ελάχιστο του S (γιατί;) Σε αυτή την περίπτωση όμως βλέπουμε ότι $n+1 \in A$ και από το αξίωμα της επαγωγής έχουμε ότι $A = \mathbb{N}$ οπότε $S = \emptyset$, άτοπο.
Αντιστρόφως θα δείξουμε ότι το αξίωμα του ελαχίστου στοιχείου έχει ως συνέπεια το αξίωμα της επαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο S το οποίο ικανοποιεί τις δύο προϋποθέσεις του αξιώματος 2.1.2. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbb{N} \neq S$ άρα το σύνολο $\mathbb{N} \setminus S$ δεν είναι κενό. Από το αξίωμα του ελαχίστου έχουμε ότι το σύνολο $\mathbb{N} \setminus S$ έχει ελάχιστο στοιχείο έστω m_0. Αφού $1 \in S$ έχουμε ότι $m_0 > 1$, άρα υπάρχει $m > 0$ ώστε $m_0 = 1 + m$, με $m \in \mathbb{N}$. Το στοιχείο $m \in S$, γιατί διαφορετικά θα ήταν το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N} \setminus S$. Όμως η δεύτερη συνθήκη του αξιώματος της επιλογής δίνει ότι $m + 1 = m_0 \in S$, άτοπο. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 2.1.4

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι η δεύτερη μορφή της επαγωγής είναι ισοδύναμη με την πρώτη θα δείξουμε ότι είναι και αυτή ισοδύναμη με το αξίωμα του ελαχίστου στοιχείου.
Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η δεύτερη μορφή της επαγωγής και βάσει αυτής θα δείξουμε ότι ισχύει το αξίωμα του ελαχίστου στοιχείου. Πράγματι, έστω $S \subset \mathbb{N}$ και ας υποθέσουμε ότι δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Θέτουμε $A = \mathbb{N} \backslash S$ και έχουμε $1 \in A$ γιατί διαφορετικά θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του S.

$$\{1, 2, \dots, n\} \subset A \Rightarrow n + 1 \subset A,$$

γιατί διαφορετικά το $n+1$ θα ήταν ελάχιστο στοιχείο. Άρα η δεύτερη μορφή της επαγωγής δίνει ότι $A = \mathbb{N}$, συνεπώς $S = \emptyset$. Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει το αξίωμα του ελαχίστου στοιχείου θα δείξουμε ότι ισχύει η δεύτερη αρχή της επαγωγής. Έστω $S \subset \mathbb{N}$ και ικανοποιεί της δύο ιδιότητες της δεύτερης μορφής της επαγωγής. Αν $S \neq \mathbb{N}$ τότε το $\mathbb{N} \backslash S \neq \emptyset$ και συνεπώς έχει ελάχιστο στοιχείο m_0. Αφού $1 \in S$ έχουμε ότι $m_0 > 1$. Αφού όμως το m_0 είναι ελάχιστο έχουμε ότι $\{1, 2, \dots, m_0 - 1\} \subset S$ άρα $m_0 \in S$, άτοπο. □

Πίσω στην Πρόταση 2.1.5

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 200 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{n - km, k \text{ διατρέχει το } \mathbb{Z}, \text{ ώστε } n - km \geq 0\}.$$

Το σύνολο A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών άρα έχει ένα ελάχιστο στοιχείο το $0 \leq u = n - \pi m$. Είναι σαφές ότι $u < m$ γιατί διαφορετικά $0 \leq u - m = n - (k+1)m \in A$ και επιπλέον $u - m < u$ άρα δεν είναι το u, το ελάχιστο στοιχείο του A, άτοπο.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι μπορούμε να γράψουμε

$$n = m\pi_1 + u_1 = m\pi_2 + u_2, \qquad 0 \leq u_i < m, \tag{5.5}$$

με δύο διαφορετικούς τρόπους. Τότε $m(\pi_1 - \pi_2) = u_2 - u_1$ και $-m < u_2 - u_1 < m$. Άρα και $-m < m(\pi_1 - \pi_2) < m$ το οποίο είναι σωστό μόνο αν $\pi_1 = \pi_2$ (γιατί;). Αντικαθιστώντας στην (5.5) έχουμε και ότι $u_1 = u_2$, δηλαδή η γραφή είναι μοναδική. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 2.1.12

Απόδειξη:

1. Το a διαιρεί τον εαυτό του αφού $a = 1 \cdot a$.
2. Υποθέτουμε ότι $a \mid b$ και $b \mid c$, άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε $b = \lambda_1 a$ και $c = \lambda_2 b$, άρα μετά από αντικατάσταση έχουμε $c = \lambda_2 \lambda_1 a$, δηλαδή το $a \mid c$.
3. Υποθέτουμε ότι $c \mid a$ και $c \mid b$, άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε $a = \lambda_1 c$ και $b = \lambda_2 c$. Άρα $\kappa a + \lambda b = (\kappa\lambda_1 + \lambda\lambda_2)c$, συνεπώς $c \mid \kappa a + \lambda b$.
4. Υποθέτουμε ότι $a \mid b$, άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Z}$, ώστε $b = \lambda a$. Πολλαπλασιάζουμε με κ και έχουμε $b\kappa = \kappa\lambda a$, άρα $a\kappa \mid b\kappa$.
5. Υποθέτουμε ότι $a\kappa \mid b\kappa$, συνεπώς υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Z}$, ώστε $b\kappa = \lambda\kappa a$ από όπου έχουμε $b = \lambda a$, άρα $a \mid b$.
6. Έχουμε ότι $a = 1 \cdot a = (-1)(-a)$, άρα $\pm 1 \mid a$. Επίσης $0 = a \cdot a$, άρα $a \mid 0$.

$\square$

Πίσω στην Πρόταση 2.1.14

Βασική Θεωρία Συνόλων

Σύνολα Αριθμών

Ακολουθίες και Σύγκλιση

Πραγματικές Συναρτήσεις

Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω A φυσικός αριθμός, $A > 1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{m \in \mathbb{N}, m > 1, \text{ ώστε } m \mid A\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A \in S$, άρα $S \neq \emptyset$, άρα έχει ένα ελάχιστο στοιχείο p. Το p πρέπει να είναι πρώτος, γιατί αν $p = ab$, με $a > 1, b > 1$, τότε $a \mid p \mid A$ άρα $a \in S$, και επιπλέον $a < p$. Το τελευταίο αντιφάσκει με την υπόθεση ότι το p είναι το ελάχιστο στοιχείο του S. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 2.1.16

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 203 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο S των πρώτων αριθμών και υποθέτουμε ότι είναι πεπερασμένο, δηλαδή $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το γινόμενο όλων των πρώτων (τι θα άλλαζε αν το σύνολο των πρώτων ήταν άπειρο;) και να προσθέσουμε την μονάδα

$$A = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Είναι σαφές ότι κανένας πρώτος δεν διαιρεί το A, γιατί αν ένας $p_i \mid A$, τότε $p_i \mid 1$. Αφού όμως $A > 1$, έχουμε ότι το A έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη, άτοπο. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 2.1.17

Απόδειξη: Το θεώρημα είναι σαφώς σωστό για $n = 2$, το οποίο γράφεται σαν γινόμενο ενός πρώτου, του εαυτού του. (Θα μπορούσαμε να είχαμε ξεκινήσει την επαγωγή και από το $n = 1$, κάνοντας την παραδοχή ότι γράφεται σαν γινόμενο μηδέν το πλήθος πρώτων.)
Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι σωστή για κάθε $k < n$ και θα αποδείξουμε ότι είναι σωστή και για τον $n+1$. Ο φυσικός $n+1$ έχει ένα πρώτο διαιρέτη $p \mid n+1$. Το σύνολο των πρώτων διαιρετών του $n+1$ είναι ένα υποσύνολο των φυσικών και συνεπώς έχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός p είναι ο ελάχιστος πρώτος διαιρέτης του $n+1$. Ο αριθμός $n+1/p \in \mathbb{N}$ είναι σαφώς μικρότερος του n και από την επαγωγική υπόθεση γράφεται σαν γινόμενο πρώτων αριθμών, δηλαδή $n+1/p = p_1^{s_1} \cdot p_r^{s_r}$. Έτσι και ο $n+1 = pp_1^{s_1} \cdots p_r^{s_r}$.
Απομένει να δείξουμε την μοναδικότητα της παραπάνω γραφής. Ας υποθέσουμε ότι η μονοσήμαντη ανάλυση δεν ισχύει για τον $n+1$ και έστω

$$pp_1^{s_1} \cdots P_r^{s_r} = q_1^{a_1} \cdots q_t^{a_t},$$

δύο γραφές του φυσικού αριθμού n σε γινόμενο πρώτων. Το p δεν μπορεί να είναι ίσο με κανένα από τα q_i, γιατί τότε θα διαιρούσαμε και τα δύο μέλη με p και θα κάναμε χρήση της επαγωγικής υπόθεσης για το μονοσήμαντο της ανάλυσης του $(n+1)/p$.
Αφού ο p είναι ο ελάχιστος φυσικός που διαιρεί το $n+1$, έχουμε ότι $p < q_i$. Θέτουμε $A = q_1^{a_1-1} \cdot q_t^{a_t}$, οπότε $n+1 = q_1 A$. Ισχύει ότι $A > 1$, διότι διαφορετικά ο $n+1$ είναι πρώτος και η μονοσήμαντη ανάλυση είναι δεδομένη.
Θεωρούμε τον αριθμό

$$n_0 = n - pA = \begin{cases} p(p_1^{s_1} \cdot p_r^{s_r} - A) \\ q_1 A - pA = (q_1 - p)A \end{cases}.$$

Αφού $q_1 > p$ και $\ell > 1$, έχουμε ότι ο n_0 είναι φυσικός και $1 < n_0 < n+1$. Από την επαγωγική υπόθεση ο n_0 έχει μία μονοσήμαντη ανάλυση σε γινόμενο πρώτων. Επομένως ο p σαν διαιρέτης του $n+1$ θα διαιρεί τον $q_1 - p$ ή τον A. Αν $p \mid q_1 - p$ τότε $p \mid q_1$, άτοπο. Από την άλλη $p \nmid A$ αφού δεν βρίσκεται στην ανάλυση του A, άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο αφου υποθέσαμε ότι ο $n + 1$ δεν έχει μονοσήμαντη ανάλυση. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 2.1.18

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 206 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Το p εμφανίζεται στην ανάλυση του αριθμού ab σε πρώτους παράγοντες. Ας είναι $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ και $b = q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}$ οι αναλύσεις των a, b σε πρώτους παράγοντες. Λόγω μονοσήμαντου της ανάλυσης για τον πρώτο αριθμό ab, θα έχουμε ότι η ανάλυση του είναι η $ab = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \cdots q_s^{b_s}$. Άρα το p που εμφανίζεται στην ανάλυση του ab θα εμφανίζεται στην ανάλυση του a ή στην ανάλυση του b. $\square$

Πίσω στο Πόρισμα 2.1.19

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 207 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα m/n, όπου $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κλάσμα m/n είναι ανάγωγο, δηλαδή ότι τα m, n δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2n^2 = m^2, \tag{5.6}$$

δηλαδή το τετράγωνο του m είναι άρτιος. Αυτό έχει σαν άμεση συνέπεια ότι και ο m είναι άρτιος, διότι διαφορετικά, αν δηλαδή ο m ήταν περιττός, αν δηλαδή $m = 2k + 1$ για κάποιο φυσικό αριθμό k, τότε $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ θα ήταν επίσης περιττός. Άρα $m = 2k$ για κάποιο k και συνεπώς $m^2 = 4k^2$. Αντικαθιστούμε στην (5.6) οπότε έχουμε ότι $2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, άρα και ο n^2 είναι άρτιος και συνεπώς και ο n είναι άρτιος. Σε αυτή την περίπτωση όμως το κλάσμα m/n δεν μπορεί να είναι ανάγωγο και άρα έχουμε καταλήξει σε άτοπο, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. □

Πίσω στην Πρόταση 2.2.2

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών A, το οποίο είναι άνω φραγμένο. Εξ ορισμού των πραγματικών αριθμών κατά Dedekind, το σύνολο A, έχει σαν στοιχεία του αρχικά ανοιχτά τμήματα του $\mathbb{Q}$, το ότι είναι άνω φραγμένο σημαίνει ότι υπάρχει ένα αρχικό ανοιχτό τμήμα του $\mathbb{Q}$, M, το οποίο περιέχει κάθε ανοιχτό αρχικό τμήμα $x \in A$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\cup_{x \in A} x \subset M$ δεν ταυτίζεται με το $\mathbb{Q}$ και είναι ένα ανοιχτό αρχικό τμήμα του $\mathbb{Q}$ το οποίο περιέχει κάθε άνω φράγμα του A, είναι δηλαδή το supremum του συνόλου A. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 2.2.5

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 209 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι ο πραγματικός αριθμός $x \in \mathbb{R}$ παρίσταται με το αρχικό τμήμα A. Η αρχή του Αρχιμήδη είναι ισοδύναμη με το ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $A_n = \{a \in \mathbb{Q} : a < n\}$ περιέχει το A. Αν το τελευταίο δεν ήταν αληθές τότε το $A = \mathbb{Q}$ από τις ιδιότητες διάταξης στους ρητούς. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 2.2.6

Απόδειξη:

1. Έστω $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = \\
&= a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \\
&= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = \\
&= \overline{(a_1 + ib_1)}\;\overline{(a_2 + ib_2)} = \\
&= \bar{z}_1 \bar{z}_2.
\end{aligned}$$

2. $\overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib$.

3. $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

4. Αν $a + ib \in \mathbb{R}$ τότε $b = 0$ και είναι σαφές ότι $a = a + ib = a - ib = b$. Αντιστρόφως αν $z = \bar{z}$ τότε $b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$.

$\square$

Πίσω στην Πρόταση 2.3.3

Απόδειξη:

1. Έστω $z = a + ib$, έχουμε $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Επιπλέον αν $|z| = 0$, τότε $a^2 + b^2 = 0$ δηλαδή το άθροισμα δυο μη αρνητικών πραγματικών αριθμών είναι 0, άρα $a^2 = b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

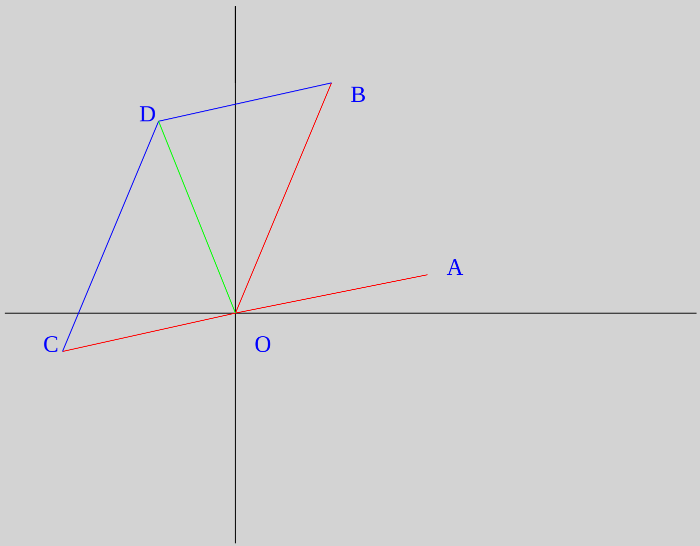
2. Προκειμένου να αποδείξουμε ότι δύο θετικοί αριθμοί είναι ίσοι αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τετράγωνα τους είναι ίσα. Αρκεί δηλαδή να αποδείξουμε ότι $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$. Όμως
$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

3. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως *τριγωνική ανισότητα* και εκφράζει την γνωστή από την ευκλείδια γεωμετρία πρόταση: *η ευθεία συνδέει με τον συντομότερο τρόπο δύο σημεία στο επίπεδο.* Πράγματι όπως βλέπουμε και στο σχήμα 5.1, ας είναι z_1 ο μιγαδικός που ορίζεται από το διάνυσμα OA, z_2 ο μιγαδικός που ορίζεται από το διανυσμα OB. Ο μιγαδικός $-z_2$ ορίζεται από το διάνυσμα OC. Παρατηρούμε ότι το μέτρο του μιγαδικού $z_1 - z_2$ ταυτίζεται με το μήκος $|OD|$ ενώ από το σχήμα έχουμε
$$|OD| + |DB| \leq |OB| \Leftrightarrow |OD| \leq |OB| - |DB| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|,$$
δηλαδή το ζητούμενο.

□

Πίσω στην Πρόταση 2.3.4

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 212 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος



Σχήμα 5.1: Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας

Απόδειξη: Στην στοιχειώδη τριγωνομετρία αποδεικνύουμε τους τύπους

$$\cos(\vartheta+\varphi)=\cos(\vartheta)\cos(\varphi)-\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$$

$$\sin(\vartheta+\varphi)=\cos(\vartheta)\sin(\varphi)+\sin(\vartheta)\cos(\varphi).$$

Άρα το γινόμενο υπολογίζεται ως

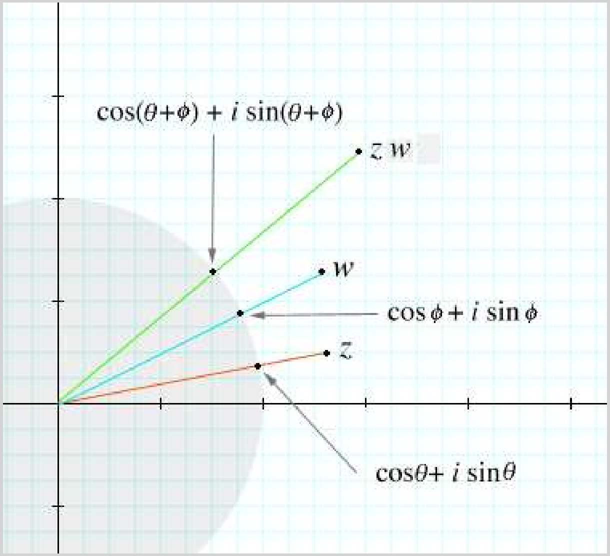
$$zw=|z|\big(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\big)|w|\big(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)\big)=$$

$$=|z||w|\big(\cos(\vartheta)\cos(\varphi)-\sin(\vartheta)\sin(\varphi)+i\big(\cos(\vartheta)\sin(\varphi)+\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\big)\big)=$$

$$=|zw|\big(\cos(\vartheta+\varphi)+i\sin(\vartheta+\varphi)\big)\big)$$

Στο μάθημα της μιγαδικής ανάλυσης θα δείτε και μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω τύπου βασισμένη στη μιγαδική εκθετική συνάρτηση. □

Πίσω στην Πρόταση 2.3.5



Σχήμα 5.2: Απόδειξη του τύπου του De' Moivre, το σύνολο $|z| \leq 1$ είναι γραμμοσκιασμένο.

Απόδειξη: Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος 2.3.6. Πράγματι η πολυωνυμική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ_1, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) = (x - \rho_1)g(x),$$

όπου το $g(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n - 1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 2.3.6 στο πολυώνυμο $g(x)$, η απόδειξη του θεωρήματος αποδεικνύεται επαγωγικά. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 2.3.7

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{C}$, ώστε $x^n = 1$. Γράφουμε $x = |x|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$. Κάνουμε χρήση της πρότασης 2.3.5 για να υπολογίσουμε

$$1 = x^n = |x|^n(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)).$$

Συνεπώς $|x| = 1$ και επιπλέον

$$\cos(n\vartheta) = 1, \quad \sin(n\vartheta) = 0,$$

από όπου έχουμε ότι $n\vartheta = 2\pi k \Rightarrow \vartheta = 2\pi k/n$. Από τα παραπάνω ϑ μόνο τα $0 \leq k < n$ δίνουν διαφορετικές ανά δύο ρίζες. □

Πίσω στην Πρόταση 2.3.8

Απόδειξη: Αφού το z_0 είναι μία ρίζα έχουμε $z_0^n = a$. Αν z είναι μία τυχαία άλλη ρίζα τότε $z_0^n = z^n$, συνεπώς $(z/z_0)^n = 1$, δηλαδή το z/z_0 είναι μία n-ρίζα της μονάδας. □

Πίσω στο Λήμμα 2.3.9

Απόδειξη: Μία ρίζα z_0 της εξίσωσης είναι η

$$z_0 = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos(\frac{\vartheta}{n}) + i \sin(\frac{\vartheta}{n})\right),$$

όπως παρατηρούμε κάνοντας χρήση του DeMoivre. Για να πάρουμε όλες τις ρίζες πολλαπλασιάζουμε την ρίζα αυτή με τις n-ρίζες της μονάδας σύμφωνα με το λήμμα 2.3.9 οι οποίες έχουν υπολογιστεί στην πρόταση 2.3.8. Το ζητούμενο προκύπτει και πάλι με χρήση του τύπου του DeMoivre. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 2.3.10

Υπόδειξη: Δικαιολογήστε γιατί η (a_n) είναι φραγμένη, δικαιολογήστε γιατί υπάρχει το $\ell := \sup\{a_n\}$ και αποδείξτε ότι η a_n συγκλίνει στο ℓ. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Υπόδειξη: Γράψτε τον ορισμό της σύγκλισης για τις ακολουθίες $(a_n), (b_n), (a_n + b_n)$ και χρησιμοποιήστε την τριγωνική ανισότητα. Για το γινόμενο προσθέστε και αφαιρέστε το όριο της μίας ακολουθίας με τον γενικό όρο της δεύτερης και χρησημοποιήστε την τριγωνική ανισότητα. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι για μία γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ισχύει $f(n) \geq n$. Δες και άσκηση 2.1.11 $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία των διαφορών $b_n - a_n$ η οποία είναι ακολουθία θετικών όρων και συγκλίνει στο $b - a$. Υποθέστε ότι συγκλίνει σε ένα γνήσια αρνητικό αριθμό και καταλήξτε σε άτοπο. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 223 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Μελετήστε πρώτα την περίπτωση $a > 1$. Γράψτε τον $a^{1/n} = 1 + b_n$, υψώστε στην n και εφαρμόστε γνωστή ανισότητα, για να δείξτε ότι $b_n \to 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι είναι ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Υπόδειξη: Θα πρέπει να αποδειχτεί ότι αν $(a_n), (a'_n)$ είναι διαφορετικοί αντιπρόσωποι της κλάσης ισοδυναμίας του $[(a_n)]$ και $(b_n), (b'_n)$ διαφορετικοί αντιπρόσωποι της κλάσης ισοδυναμίας του $[(b_n)]$, τότε τότε η ακολουθία $(a_n + b_n)$ είναι ισοδύναμη με την $(a'_n + b'_n)$ και επίσης η ακολουθία $(a_n \cdot b_n)$ είναι ισοδύναμη με την $(a'_n \cdot b'_n)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Απόδειξη: Η ακολουθία (a_n) φράσσεται από κάτω από το a_1 αφού είναι αύξουσα, ενώ είναι άνω φραγμένη εξ υποθέσεως. Το αξίωμα της πληρότητας εξασφαλίζει την ύπαρξη του $\ell := \sup\{a_n\}$. Θα αποδείξουμε ότι $a_n \to \ell$. Πράγματι, αφού το ℓ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, αν το μειώσουμε κατά οποιονδήποτε $\ > 0$ θα έχουμε ότι δεν είναι πια άνω φράγμα δηλαδή ότι υπάρχει a_{n_0} ώστε $\ell - \ < a_{n_0}$. Άρα αφού η ακολουθία είναι αύξουσα έχουμε ότι για όλους τους $n > n_0$

$$\ell - \ < a_{n_0} \leq a_n \leq \ell < \ell + \ ,$$

δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.1

Απόδειξη: Έχουμε ότι $a_n \to a$, $b_n \to b$ συνεπώς:

$$\text{Για κάθε } /2 > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < /2.$$

$$\text{Για κάθε } /2 > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_1() \text{ ώστε } n > n_1 \Rightarrow |b_n - b| < /2.$$

Έχουμε ότι για $n > \max\{n_0(), n_1()\}$

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{}{2} + \frac{}{2}.$$

Από όπου προκύπτει το ζητούμενο.
Για το γινόμενο έχουμε

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab + a_n b - a_n b| < |a_n||b_n - b| + |b||a_n - b|$$

Η ακολουθία είναι $|a_n|$ είναι συγκίνουσα, άρα φραγμένη έστω από το M, οπότε αν εφαρμόσουμε στον ορισμό της σύγκλισης της b_n την θετική ποσότητα $/2M$ και στον ορισμό της σύγκλισης της a_n την θετική ποσότητα $/2|b|$, προκύπτει το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.2

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 228 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Η ακολουθία (a_n) συγκίνει στο a, άρα

$$\text{Για κάθε } \ > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \ ,$$

Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνήσια αύξουσα συνάρτηση η οποία ορίζει την υποακολουθία $a_{f(n)}$. Από την άσκηση2.1.11 έχουμε ότι $f(n) \geq n$. Συνεπώς, αφού για κάθε $k > n_0$ έχουμε $|a_n - a| \leq$ για να ισχύει η $|a_{f(n)} - a| <$, αρκεί $f(n) > n_0$, αλλά $f(n) \geq n$ άρα για όλα τα $n > n_0$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Πίσω στην Άσκηση 3.2.3

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία $c_n := b_n - a_n$. Παρατηρούμε ότι $c_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία c_n είναι συγκλίνουσα με όριο $c = b - a$ (γιατί;) Ας υποθέσουμε ότι $c < 0$. Τότε ο ορισμός της υπάρξης του ορίου της c_n εξασφαλίζει για $\ = -c/2 > 0$, ότι υπάρχουν όροι της ακολουθίας c_n που είναι μικρότεροι του $c/2 < 0$, άτοπο, αφού οι όροι της (c_n) είναι θετικοί.
Για το ζητούμενο παράδειγμα, θεωρούμε τις ακολουθίες $a_n = -1/n$, $b_n = 1/n$. Ισχύει ότι $a_n < b_n$, αλλά τα όρια τους ταυτίζονται. □

Πίσω στην Άσκηση 3.2.4

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 230 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι $a > 1$, τότε και $a^{1/n} > 1$ (γιατί;) Θέτουμε $a^{1/n} = 1 + b_n$. Τότε $b_n \geq 0$, και η ανισότητα Bernoulli δίνει ότι

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n,$$

συνεπώς

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-n}{n} \to 0.$$

Οπότε

$$\lim a^{1/n} = 1 + \lim b_n = 1.$$

Για $0 < a < 1$, θεωρούμε την ακουθία $1/a^{1/n}$ και έχουμε ότι

$$\lim a^{1/n} = \frac{1}{\lim \frac{1}{a}^{1/n}} = 1,$$

αφού $1/a > 1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.5

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι η σχέση είναι ανακλαστική παρατηρούμε ότι για κάθε ακολουθία (a_n), ισχύει $(a_n) - (a_n) = 0$ έχουμε ότι $(a_n) \sim (a_n)$.
Για να δείξουμε ότι η σχέση είναι συμμετρική παρατηρούμε ότι

$$(a_n) \sim (b_n) \Rightarrow a_n - b_n \to 0 \Rightarrow b_n - a_n \to 0 \Rightarrow (b_n) \sim (a_n)$$

Τέλος για να δείξουμε ότι η σχέση είναι μεταβατική θεωρούμε τρείς ακολουθίες Cauchy $(a_n), (b_n), (c_n)$ με $(a_n) \sim (b_n)$ και $(b_n) \sim (c_n)$. Εξόρισμού $a_n - b_n \to 0$ και $b_n - c_n \to 0$. Άρα

$$a_n - c_n = (a_n - b_n) - (b_n - c_n) \to 0,$$

και τελικά $(a_n) \sim (c_n)$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.9

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 232 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Θα πρέπει να αποδειχτεί ότι αν $(a_n), (a'_n)$ είναι διαφορετικοί αντιπρόσωποι της κλάσης ισοδυναμίας του $[(a_n)]$ και $(b_n), (b'_n)$ διαφορετικοί αντιπρόσωποι της κλάσης ισοδυναμίας του $[(b_n)]$, τότε τότε η ακολουθία $(a_n + b_n)$ είναι ισοδύναμη με την $(a'_n + b'_n)$ και επίσης η ακολουθία $(a_n \cdot b_n)$ είναι ισοδύναμη με την $(a'_n \cdot b'_n)$.
Αφού $(a_n) \sim (a'_n)$ εξ' ορισμού $a_n - a'_n \to 0$ και ομοίως $b_n - b'_n \to 0$. Άρα

$$((a_n) + (b_n)) - (a'_n + b'_n) = (a_n - a'_n) - (b_n - b'_n) \to 0.$$

Επίσης

$$\begin{gathered}
\lim\left((a_n)\cdot(b_n) - (a'_n)\cdot(b'_n)\right) = \\
= \lim\left((a_n)\cdot(b_n) - (a'_n)\cdot(b'_n)\right) + \lim(a_n - a'_n)\cdot(b_n) = \\
= \lim(a_n)\big((b_n) - (b'_n)\big) - \lim(b_n)\big((a'_n) - (a_n)\big) = 0.
\end{gathered}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 3.2.10

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $M \in \mathbb{R}$. ισχύει $|a_n| < M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Από γνωστή ιδιότητα των απολυτών τιμών έχουμε ότι

$$|a_n| < M \Leftrightarrow -M < a_n < M.$$

Συνεπώς αρκεί να πάρουμε $m = M$ για να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Αντιστρόφως αν η ακολουθία είναι φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $m < a_n < M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει ότι

$$-\max\{|m|, |M|\} < a_n < \max\{|m|, |M|\}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και κατα συνέπεια $|a_n| < \max\{|m|, |M|\}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και το επιθυμητό αποτέλεσμα έχει αποδειχτεί. $\square$

Πίσω στο Λήμμα 3.1.1

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 234 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι ακολουθία (a_n) συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια ℓ, ℓ'. Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι μετά από ένα δείκτη όλοι οι όροι της ακολουθίας «συσωρεύονται -κοντά» στα ℓ, ℓ', και αν $|\ell - \ell'| > 0$ τότε αυτό δεν μπορεί να συμβεί για αρκετά μικρό, αφού τα ℓ, ℓ' απέχουν μεταξύ τους. Δεν είναι πολύ δύσκολο να μετατρέψουμε την παραπάνω ιδέα σε απόδειξη: Ξεκινάμε από τους ορισμούς ότι τα ℓ, ℓ' είναι όρια της (a_n).

$$\text{Για κάθε } > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < .$$

$$\text{Για κάθε } > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_1() \text{ ώστε } n > n_0' \Rightarrow |a_n - \ell'| < .$$

Υποθέτουμε ότι $\ell \neq \ell'$ το οποίο είναι ισοδύναμο με $|\ell - \ell'| > 0$. Χρησιμοποιούμε τις ανισότητες του ορισμού για $= |\ell - \ell'|/2 > 0$. Για

$$n > \max\{n_0(|\ell - \ell'|/2), n_1(|\ell - \ell'|/2)\}$$

και οι δύο παραπάνω ανισότητες ισχύουν ταυτόχρονα δηλαδή:

$$|\ell - \ell'| = |\ell - a_n + a_n - \ell'| \leq |a_n - \ell| + |a_n - \ell'| < \frac{|\ell - \ell'|}{2} + \frac{|\ell - \ell'|}{2} = |\ell - \ell'|,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πίσω στην Πρόταση 3.1.3

Απόδειξη: Η ιδέα της απόδειξης είναι απλή. Από κάποιο όρο n_0 και μετά, όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι -κοντά στο όριο ℓ. Περισσεύουν πεπερασμένοι το πλήθος όροι τους οποίους μπορούμε εύκολα να τους ελέγξουμε.
Ας προσπαθήσουμε να γράψουμε την παραπάνω ιδέα με αυστηρό τρόπο. Στον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας θέτουμε $\ = 1$ (θα μπορούσαμε να βάλουμε οποιαδήποτε άλλη πραγματική θετική τιμή θέλαμε). Ο ορισμός μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός $n_0(1)$ ώστε για κάθε $n > n_0(1)$ να έχουμε $|a_n - \ell| < 1$ ή ισοδύναμα

$$-1 < a_n - \ell < 1 \Leftrightarrow -1 + \ell < a_n < 1 + \ell \text{ για } n > n_0$$

Οι αριθμοί $m = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}, -1 + \ell\}$ και $M = \max\{a_1, \ldots, a_{n_0}, 1 + \ell\}$ αποτελούν κάτω και άνω φράγμα για την ακολουθία (a_n) αντίστοιχα. □

Πίσω στο Θεώρημα 3.1.5

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a_k > a_n \text{ για κάθε } n \geq k\}.$$

Αν το A είναι άπειρο σύνολο τότε η υποακολουθία $(a_m)_{m\in A}$ είναι φθίνουσα και τελειώσαμε. Αν το A είναι πεπερασμένο τότε έστω $k_1 = 1 + \max A$. Αν πάλι το A είναι κενό θέτουμε $k_1 = 1$. Αφού το $k_1 \notin A$ υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} \geq a_{k_1}$. Όμως $k_2 \notin A$, αφού $k_2 > k_1$, οπότε υπάρχει $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_3} \geq a_{k_2}$. Συνεχίζουμε επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε την αύξουσα υποακολουθία (a_{k_m}). $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 3.1.6

Απόδειξη: Πολύ βασικό για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού, είναι η πληρότητα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή το αξίωμα: «κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum και infimum».
Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία, η οποία έχει μία μονότονη, έστω αύξουσα, υποακολουθία (b_n). Η ακολουθία (b_n) είναι φραγμένη, και έστω $\ell = \sup\{b_n\}$. Το ℓ είναι το μικρότερο άνω φράγμα της (b_n), οπότε αν $\ > 0$, τότε ο αριθμός $\ell -\ $ δεν θα είναι άνω φράγμα της (b_n), δηλαδή θα υπάρχει $n_0() \in \mathbb{N}$ ώστε $\ell - \ < b_{n_0()}$. Όμως έχουμε υποθέσει ότι η (b_n) είναι αύξουσα, και μαζί με το γεγονός ότι η (b_n) είναι άνω φραγμένη από το ℓ έχουμε ότι

$$\ell - \ < b_{n_0} < b_n < \ell < \ell + \ \quad \text{για κάθε } n > n_0,$$

δηλαδή αποδείξαμε ότι η $(b_n) \to \ell$. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 3.1.7

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 238 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ξεκινάμε από τον ορισμό της συγκίνουσας ακολουθίας στον πραγματικό αριθμό ℓ, όπου αντί για $\ > 0$ έχουμε πάρει $/2 > 0$.

$$\text{Για κάθε } /2 > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_0() \text{ ώστε } n > n_0 \Rightarrow |a_n - \ell| < .$$

Η τριγωνική ανισότητα μας εξασφαλίζει ότι για $n, m > n_0$

$$|a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{}{2} + \frac{}{2} = ,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στην Πρόταση 3.2.7

Απόδειξη: Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε με ουσιαστικό τρόπο το αξίωμα πληρότητας. Στην πραγματικότητα θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Heine-Borel το οποίο είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος της πληρότητας.

Θα αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: θέτουμε $= 1$ στον ορισμό της ακολουθίας Cauchy, οπότε έχουμε ότι υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n, m > n_0$ $|a_n - a_m| < 1$. Σταθεροποιούμε το $m = n_0 + 1$, και έχουμε ότι

$$|a_n - a_{n_0+1}| < 1 \Leftrightarrow a_{n_0+1} - 1 < a_n < a_{n_0+1} + 1,$$

για κάθε $n > n_0$. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε $m = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0+1} - 1\}$ και $M = \min\{a_1, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0+1} + 1\}$, για να έχουμε

$$m < a_n < M \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αφού η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη, το θεώρημα Heine-Borel μας εξασφαλίζει την ύπαρξη υποακολουθίας (a_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό, έστω τον ℓ.

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνοντας, ότι ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει στο ℓ. Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy εξασφαλίζει ότι

$$\text{Για κάθε } /2 > 0, \text{ υπάρχει αριθμός } n_0() \in \mathbb{N} \text{ ώστε } n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < /2,$$

ενώ ο ορισμός της σύγκλισης της (a_{n_k}) μας εξασφαλίζει ότι

$$\text{Για κάθε } /2 > 0, \text{ υπάρχει φυσικός αριθμός } n_1() \text{ ώστε } n_k > n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - \ell| < /2.$$

Οπότε για κάθε $n > \max\{n_0(), n_1()\}$, έχουμε ότι

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \ell| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \ell| < \frac{}{2} + \frac{}{2} = ,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στο Θεώρημα 3.2.8

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.7.1

Υπόδειξη: Αποδείξτε το ζητούμενο για ρητούς της μορφής $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Στην συνέχεια κάνοντας χρήση της ανισότητας Bernoulli αποδείξτε το ζητούμενο για $x \in \mathbb{Q}$, και χρησημοποιήστε την μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης για να το δείξετε γενικά. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.7.2

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f(x) = x^2$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.7.3

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $f(x) = x^3$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.7.4

Υπόδειξη: Κάντε πράξεις με τον ορισμό. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 4.7.5

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία a_n είναι αύξουσα. Η ανισότητα Bernuli μας δίνει ότι

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \geq 1-\frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}.$$

Συνεπώς

$$(1+\frac{1}{n})^{1/n} \geq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n-1} =$$

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{1/m} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)^m} \leq \frac{1}{1-\frac{m}{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m} \leq 2.$$

Η παραπάνω ανισότητα δίνει ότι $(1+\frac{1}{2m})^{2m} \leq 4$, το οποίο μαζί με την μονοτονία της a_n, αποδυκνείει ότι η a_n είναι άνω φραγμένη από το 4.
Η ακολουθία συγκλίνει σαν αύξουσα και άνω φραγμένη. [2] $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.7.1

[2]Την μαγική αυτή απόδειξη μου την είπε ο Αντώνης Τσολομύτης

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα αριθμό $a \ge e > 1$. Αφού η ακολουθία a_n της προηγούμενης άσκησης είναι αύξουσα για το όριο της e και για κάθε $a \ge e$ θα ισχύει

$$a \ge e \ge \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

συνεπώς

$$a^{1/n} \ge \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Έστω $x = m/n$ τυχαίος ρητός αριθμός. Η παραπάνω ανισότητα όταν υψωθεί στην m δίνει

$$a^{m/n} \ge \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^m \ge 1 + \frac{m}{n},$$

δηλαδή το ζητούμενο.
Τέλος έστω $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε μία ακολουθία ρητών αριθμών b_n η οποία να συγκλίνει στο x και επίπλεον $x \ge b_n$. Αφού η εκθετική συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα για $a > 1$, ισχύει ότι

$$a^x \ge a_n^b \ge 1 + b_n \ge 1 + x.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.7.2

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι επί του $\mathbb{R}$, αφού δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = -1$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.7.3

Απόδειξη: Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $f(x) = x^3$. Έστω ότι $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή $x_1^3 = x_2^3$. Τότε

$$0 = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2).$$

Αν x_1, x_2 είναι και οι δύο γνήσια θετικοί, ή γνήσια αρνητικοί τότε η παραπάνω ισότητα δίνει $x_1 = x_2$ (γιατί;) Αν ο ένας είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός δεν μπορεί να είναι ίσοι οι κύβοι τους εκτός αν $x_1 = x_2 = 0$.

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.7.4

Απόδειξη:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} =$$

$$\frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{2} = 1.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 4.7.5

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 250 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $a > 1$. Έστω x_1, x_2 δύο ρητοί αριθμοί, $x_1 < x_2$. Μπορώ να τους γράψω σαν $x_1 = n_1/m$ και $x_2 = n_2/m$ (ομόνυμα κλάσματα) οπότε $n_1 < n_2$. Αφού $a > 1$ θα έχω ότι και $b = a^{1/m} > 1$ (γιατί;). Άρα $a^{x_1} = b^{n_1} < b^{n_2} = a^{x_2}$, δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στο Λήμμα 4.1.1

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας p_n/q_n στο 0. Για κάθε $\ > 0$ άρα και για $1/n > 0$, όπου n οποιοσδήποτε φυσικός, έχουμε ότι υπάρχει n_0, που εξαρτάται από το $1/n$, ώστε αν $k > n_0$ τότε $|p_k/q_k| < 1/n$.
Σύμφωνα με την άσκηση 3.2.5 του τρίτου κεφαλαίου, έχουμε ότι η ακολουθία $a^{1/n} - 1$ συγκλίνει στο 0, οπότε για δεδομένο μπορώ να διαλέξω $n_1()$ ώστε $|a^{1/n} - 1| <$ για όλα τα $n > n_1()$. Η συνάρτηση a^x, από το $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα για $a > 1$ και γνήσια φθίνουσα για $a < 1$ άρα (αφού $a^{p_k/q_k} < a^{1/n}$ αν $a > 0$ και $a^{p_k/q_k} > a^{1/n}$ αν $a < 0$ έχουμε

$$|a^{p_k/q_k} - 1| \leq |a^{1/n} - 1|.$$

Όμως μπορούμε για κάθε $\ > 0$ άρα και για $\ = 1/n_1$ να διαλέξουμε n_0 ώστε $k > n_0(1/n_0,$ να έχουμε $|a^{1/n} - 1| <$, από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Πίσω στην Πρόταση 4.1.2

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία (a^{r_n}) είναι ακολουθία Cauchy. Θα πρέπει για $m < n$ να ελέγξουμε την διαφορά

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}| \cdot |a^{r_n - r_m} - 1|.$$

Η ακολουθία r_n είναι συγκλίνουσα, άρα φραγμένη, και μάλιστα μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι φραγμένη από ρητούς αριθμούς (γιατί;). Συνεπώς η μονοτονία της συνάρτησης $a^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ εξασφαλίζει ότι $|a^{r_m}| \leq M$ για κατάλληλο $M \in \mathbb{R}$. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 4.1.3

Απόδειξη: Τα όρια των ακολουθιών (a^{r_n}) και $(a^{r'_n})$ υπάρχουν σύμφωνα με την πρόταση 4.1.3. Το όριο της $a^{r_n}/a^{r'_n}$ είναι ίσο με το όριο της $a^{r_n - r'_n} = 1$ σύμφωνα με την πρόταση 4.1.2. □

Πίσω στην Πρόταση 4.1.4

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση $a > 1$. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Υπάρχουν ακολουθίες ρητών αριθμών r_n και r_n' ώστε

$$x \leq r_n < r_n' \leq y,$$

και επιπλέον $r_n \to x$, $r_n' \to y$, ενώ μπορώ να διαλέξω την r_n γνήσια φθίνουσα και την r_n' γνήσια αύξουσα. Αφού ισχύει $r_n < r_n'$ έχουμε ότι $a^{r_n} < a^{r_n'}$ και συνεπώς $a^x \leq a^y$ (Παρατηρήστε ότι μια γνήσια ανισότητα στους όρους της ακουθίας δίνει εν γένει μη γνήσια ανισότητα στα όρια). Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η ανισότητα είναι γνήσια παρατηρούμε ότι

$$a^x \leq a^{r_n} < a^{r_1} < a^{r_1'} < a^{r_n'} \leq a^y.$$

$\square$

Πίσω στην Πρόταση 4.1.6

Απόδειξη: Το ότι η a^x είναι 1-1 προκύπτει άμεσα από την γνήσια μονοτονία της. $\square$

Πίσω στο Θεώρημα 4.1.7

Απόδειξη: Γράφουμε $a = 1 + \partial$, $\partial > 0$. Θεωρούμε ένα $M > 0$ οσοδήποτε μεγάλο. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $a^{x_0} > M$. Στην συνέχεια αφού η a^x είναι γνήσια αύξουσα θα έχουμε ότι $a^x > M$ για κάθε $x > x_0$.
Αν το $x \in \mathbb{N}$ η ανισότητα Bernoulli ;; μας δίνει ότι:

$$a^x = (1 + \partial)^x \geq 1 + x\partial.$$

Συνεπώς αρκεί να πάρουμε για x_0 οποιοδήποτε αριθμό y που να είναι μεγαλύτερος της ποσότητας $\left[\frac{M+1}{\partial}\right] + 1$, αφού τότε

$$a^y > a^{\left[\frac{M+1}{\partial}\right]+1} \geq 1 + (\left[\frac{M+1}{\partial}\right] + 1)\partial \geq 1 + \frac{M}{\partial}\partial = 1 + M.$$

Αν τώρα > 0 ένας αριθμός οσοδήποτε μικρός, τότε η ανισότητα $a^x <$ είναι ισοδύναμη με την $a^{-x} > 1/$ και το πρόβλημα ανάγεται στο προηγούμενο. □

Πίσω στην Πρόταση 4.1.8

Απόδειξη: Έστω $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $a^x = r$. Η πρόταση 4.1.8 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη x_0, y_0, ώστε

$$a^{x_0} \leq r \leq a^{y_0}.$$

Διχοτομούμε το διάστημα $[x_0, y_0]$ και έχουμε δύο περιπτώσεις για το r. Ή $r \in (a^{x_0}, a^{(x_0+y_0)/2}]$ ή $r \in (a^{(x_0+y_0)/2}, a^{y_0}]$. Στην πρώτη περίπτωση θέτω $x_1 = x_0, y_1 = (x_0 + y_0)/2$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση θέτω $x_1 = (x_0 + y_0)/2$, $y_1 = y_0$. Συνεχίζω διχοτομόντας, οπότε κατασκευάζω δύο ακουλουθίες

$$x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq y_1 \leq y_0$$

τις (x_n) και (y_n). Η ακολουθία (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (y_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Και οι δύο είναι συγκλίνουσες και επιπλέον $|x_n - y_n| < 2^{-n}$, οπότε η διαφορά τους συγκλίνει στο μηδέν άρα

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \ell \in \mathbb{R}.$$

Επίσης έχουμε ότι $a^{x_n} \leq r \leq a^{y_n}$ και από τον ορισμό της συνάρτησης a^x έχουμε ότι

$$a^{\ell} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = r,$$

δηλαδή η συνάρτηση a^x είναι επί. □

Πίσω στο Θεώρημα 4.1.9

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση $0 < x < \pi/2$.
Παρατηρούμε στο σχήμα **;;**, ότι το ευθύγραμμο τμήμα AA' είναι ίσο με το $2\sin(x)$, ενώ το αντίστοιχο τόξο είναι ίσο με την γωνία $2x$, και η ευθεία είναι η μικρότερη σε μήκος καμπύλη που συνδέει τα σημεία A και A'. Αυτό αποδεικνύει ότι $|sin(x)| \leq |x|$.
Για την απόδειξη της $|x| \leq |\tan(x)|$, ισχυριζόμαστε ότι η ποσότητα $x/2$ είναι ίσο με το εμβαδό του κυκλικού τομέα που σχηματίζεται από τα τις τομές της ευθειών OA και του άξωνα των x με τον τριγωνομετρικό κύκλο. Το εμβαδό αυτό είναι μικρότερο από το τρίγωνο OAB όπου B είναι η προβολή του A στον άξωνα των x και το οποίο είναι ίσο με την $\tan(x)$.
Για την απόδειξη του ισχυρισμού, παρατηρούμε ότι στην γωνία 2π αντιστοιχεί εμβαδό π, άρα στην γωνία $0 < x < \pi/2$ θα αντιστοιχεί γωνία $x/2$. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 4.4.1

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 259 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Μελετήστε τις λύσεις της εξίσωσης $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.5

Υπόδειξη: Μελετήστε τις λύσεις της εξίσωσης $x_1 \upsilon_1 + x_2 \upsilon_2 + x_3 \upsilon_3 = 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.6

Υπόδειξη: Μελετήστε τις λύσεις της εξίσωσης $x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = 0$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.7

Υπόδειξη: Σκεφτείτε με βάση την πρόταση 5.1.4. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.9

Υπόδειξη: Εκφράστε ένα στοιχείο υ με δύο διαφορετικούς τρόπους και αφαιρέστε κατά μέλη. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.10

Υπόδειξη: Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης ορίστε τις πράξεις στον χώρο $V \times W$ και δείξτε ότι οι ιδιότητες του διανυσματικού χώρου τελικά ανάγονται στις ιδιότητες των πράξεων στους χώρους V, W. Για το δεύτερο κομμάτι ξεκινήστε με βάσεις $v_1, \ldots, v_n$ και $w_1, \ldots, w_m$ των V, W αντίστοιχα και δείξτε ότι τα στοιχεία (v_i, v_j) αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $V \times W$. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.14

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του κριτηρίου 5.1.16 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.17

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του κριτηρίου 5.1.16 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.18

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του κριτηρίου 5.1.16 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.19

Υπόδειξη: Γράψτε το 0 σαν άθροισμα στοιχείων του W. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.20

Υπόδειξη: Δείξτε ότι τα στοιχεία $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.21

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του κριτηρίου 5.1.16 □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.1.22

Υπόδειξη: Δουλέψτε με τον ορισμό. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Υπόδειξη: Γράψτε τί πρέπει να ισχύει ώστε να είναι γραμμική η T^{-1} και εφαρμόστε την T. Στην συνέχεια χρησημοποιείστε το ότι η T είναι $1-1$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 273 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Δείξτε ότι για να προσδιοριστεί μία γραμμική απεικόνιση T από το $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αρκεί να γνωρίζουμε το $T(1)$. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Υπόδειξη: Γράψτε το μηδενικό στοιχείο του V σαν άθροισμα κατάλληλων στοιχείων. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε τον πίνακα AB με τον υποτιθέμενο αντίστροφό του. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.15

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.16

Υπόδειξη: Αποδείξτε, βάσει του ορισμού, ότι η σχέση της συζυγίας είναι ανακλαστική, μεταβατική συμμετρική $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.17

Υπόδειξη: Κάνοντας χρήση των πινάκων $B(i_0 j_0)$ με στοιχεία

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ αν } (i,j) \neq (i_0, j_0) \\ 1 \text{ αν } (i,j) = (i_0, j_0) \end{cases}$$

αποδείξτε οι ζητούμενοι πίνακες έχουν στοιχεία μόνο στην διαγώνιο. Στην συνέχεια να γίνει χρήση πινάκων που να αντιμεταθέτουν τα στοιχεία της βάσης για να δείτε ότι όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.18

Υπόδειξη: Κάντε μερικούς υπολογισμούς για να δείτε τι συμβαίνει και στην συνέχεια αποδείξτε ένα τύπο με επαγωγή. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.19

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 280 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Υπόδειξη: Κάντε απαλειφή του Gauß στον πίνακα A που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση, και υπολογίστε τον πυρήνα. Η συνάρτηση είναι επί αν και μόνο αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση. $\square$

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.2.26

Υπόδειξη: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας με την μέθοδο απαλειφής του Gauß. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.3.1

Υπόδειξη: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος πίνακας με την μέθοδο απαλειφής του Gauß. Χρειάζεται προσοχή για το τι αντιστρέφεται. □

Λύση

Πίσω στην Άσκηση 5.3.2

Απόδειξη: Θεωρούμε την εξίσωση $x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 = 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι δέχεται σαν μοναδική λύση το $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Πράγματι,

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) = (x_1, x_2, x_3),$$

άρα $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.5

Απόδειξη: Θεωρούμε την εξίσωση $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι δέχεται σαν μοναδική λύση το $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Πράγματι,

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = (x_1 + x_3, x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2).$$

Το τελευταίο διάνυσμα είναι το μηδενικό αν και μόνο αν

$$\begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_1 = -3x_2 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \end{array}.$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς στο παραπάνω σύστημα ότι μοναδική λύση είναι η $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.6

Απόδειξη: Υπολογίζουμε ότι

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 3x_2 + 4x_3, 2x_1 + 4x_2 + 6x_3, 2x_1 + 5x_2 + 7x_3).$$

Το παραπάνω διάνυσμα είναι μηδενικό αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Όμως το παραπάνω σύστημα εκτός της μηδενικής, έχει σαν λύση και την $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.7

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Αφού τα διανύσματα $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$ παράγουν τον χώρο V, το διάνυσμα $\upsilon \in V$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, άρα τα $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \upsilon$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.9

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών

Πρώτη Σελίδα

Σελίδα 287 από 322

Πίσω

Όλη η οθόνη

Κλείσε

Έξοδος

Απόδειξη: Έστω $v \in V$, και έστω $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$, δύο διαφορετικές εκφράσεις του v ως γραμμικός συνδιασμός των v_i. Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0,$$

οπότε η γραμμική ανεξαρτησία των v_i επιβάλει $\lambda_i = \mu_i$, δηλαδή η γραφή είναι μοναδική. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.10

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 288 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένες, δηλαδή

$$+ : \begin{cases} (V \times W) \times (V \times W) & \to & V \times W \\ ((v_1, w_1), (v_2, w_2)) & \mapsto & (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \end{cases}$$

και

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{R} \times (V \times W) & \to & V \times W \\ (\lambda, (v, w)) & \mapsto & (\lambda v, \lambda w). \end{cases}$$

Οι ιδιότητες των πράξεων που εξασφαλίζουν ότι ο $V \times W$, προκύπτουν από τις ιδιότητες των V, W. Για παράδειγμα η προσεταιριστική ιδιότητα ανάγεται στην προσεταιριστική ιδιότητα των χώρων V, W:

$$((v_1, w_1) + (v_2, w_3)) + (v_3, w_3) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) + (v_3, w_3) =$$

$$((v_1 + v_2) + v_3, (w_1 + w_2) + w_3) = (v_1 + (v_2 + v_3), w_1 + (w_2 + w_3)) =$$

$$= (v_1, w_1) + (v_2 + v_3, w_2 + w_3) = (v_1, w_1) + ((v_2, w_2) + (v_3, w_3)).$$

Επιλέγουμε μία βάση $v_1, \ldots, v_n$ του V και μια βάση $w_1, \ldots, w_m$ του W. Τα στοιχεία (v_i, w_j) $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, ..., m$ αποτελούν βάση του $V \times W$. Πράγματι, κάθε στοιχείο (v, w) γράφεται ως

$$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (v_i, w_j).$$

Επίσης τα παραπάνω στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού αν

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j (v_i, w_j) = (0, 0),$$

τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j = 0,$$

και $\lambda_i = \mu_j = 0$ για όλα τα i, j, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των v_i, w_j. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.14

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο συγκλίνουσες ακολουθίες $(a_n), (b_n)$. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα τους θα είναι συγκλίνουσα ακολουθία και επίσης η (ℓa_n) είναι συγκλίνουσα για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$. Το ζητούμενο προκύπτει από την πρόταση 5.1.16 $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.17

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι μία ακολουθία είναι τελικά σταθερή αν και μόνο αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n = a_{n_0}$. Θεωρούμε δύο τελικά σταθερές ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ δηλαδή δύο ακολουθίες $(a_n), (b_n)$, ώστε για κατάλληλους δείκτες n_0, m_0 να έχουμε

$$a_n = a_{n_0} \text{ για } n \geq n_0 \text{ και } b_n = b_{m_0} \text{ για } n \geq m_0.$$

Η ακολουθία $(a_n + b_n)$ είναι τελικά σταθερή μετά τον δείκτη $\max(n_0, m_0)$, και η ακολουθία (ℓa_n) είναι προφανώς τελικά σταθερή. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.18

Απόδειξη: Παρατηρήστε ότι το άθροισμα δύο ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 συγκλίνει στο 0, και αν $a_n \to 0$ τότε και $\ell a_n \to 0$ για κάθε $\ell \in \mathbb{R}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.19

Απόδειξη: Το W είναι μη κενό, οπότε αν $x \in W$, τότε και $-x \in W$. Άρα $0 = x + (-x) \in W$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.20

Απόδειξη: Εξ ορισμού ο χώρος που παράγουν οι συναρτήσεις x^i είναι διανυσματικός υπόχωρος του χώρου όλων των συναρτήσεων. Για να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες θεωρούμε τον γραμμικό συνδιασμό

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της παραπάνω εξίσωσης αν κάποιο $\lambda_i \neq 0$ δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν· αποτελεί μία πολυωνυμική συνάρτηση που έχει πεπερασμένες το πλήθος ρίζες. □

Πίσω στην Άσκηση 5.1.21

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι το άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και το γινόμενο συνεχούς συνάρτησης επί σταθεράς είναι συνεχής συνάρτηση. Θα κάνουμε το πρώτο που είναι και δυσκολότερο. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις, δηλαδή για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n) \text{ και } \lim g(a_n) = g(\lim a_n).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim(f + g)(a_n) = \lim \left(f(a_n) + g(a_n)\right) = \lim f(a_n) + \lim g(a_n) =$$

$$= f(\lim a_n) + g(\lim a_n) = (f + g)(\lim a_n),$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.1.22

Απόδειξη: Αν η συνάρτηση είναι γραμμική τότε

$$T(\lambda v + \mu \lambda w) = T(\lambda v) + T(\mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w).$$

Αντιστρόφως αν ισχύει η (5.1) τότε για $\lambda = \mu = 1$, έχουμε

$$T(v + w) = T(v) + T(w),$$

ενώ για $\mu = 0$ έχουμε

$$T(\lambda v) = \lambda T(v),$$

δηλαδή η T είναι γραμμική. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.2

Απόδειξη: Για να είναι γραμμική η T^{-1} θα πρέπει για κάθε $w_1, w_2 \in W$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, να ισχύει:

$$T^{-1}(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda T^{-1}(w_1) + \mu T^{-1}(w_2).$$

Αν εφαρμόσουμε την T στο πρώτο μέλος της παραπάνω ισότητας έχουμε

$$T(T^{-1}(\lambda w_1 + \mu w_2)) = \lambda w_1 + \mu w_2.$$

Αν την εφαρμόσουμε στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας έχουμε

$$T(\lambda T^{-1}(w_1) + \mu T^{-1}(w_2)) = \lambda T T^{-1}(w_1) + \mu T T^{-1}(w_2) = \lambda w_1 + \mu w_2.$$

Άρα τα δύο μέλη της ζητούμενης ισότητας απεικονίζονται στην ίδια τιμή μέσω της T, οπότε αφού η T είναι 1-1 προκύπτει το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.3

Απόδειξη: Θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η τιμή της στο $x \in \mathbb{R}$, δίνεται από

$$T(x) = T(x \cdot 1) = xT(1),$$

όπου $T(1) \in \mathbb{R}$. Άρα οι γραμμικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις τις μορφής

$$x \mapsto ax,$$

όπου το a διατρέχει το $\mathbb{R}$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.4

Απόδειξη: Έστω $x \in V$, έχουμε $T(0) = T(x - x) = T(x) - T(x) = 0$. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.5

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\mathbb{I}_n A^{-1} = AA^{-1} = \mathbb{I}_n.$$

Ομοίως

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}\mathbb{I}_n B = BB^{-1} = \mathbb{I}_n.$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.15

Απόδειξη: Για $n = 1$, αυτό που ζητούμε είναι προφανές. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n = k$ δηλαδή ότι ισχύει $A^k = Q^{-1}B^kQ$, και ας υπολογίσουμε

$$A^{k+1} = A^kA = (Q^{-1}B^kQ)Q^{-1}BQ = Q^{-1}B^k(QQ^{-1})BQ = Q^{-1}B^{k+1}Q,$$

δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.16

Απόδειξη: Για την ανακλαστική σχέση, παρατηρούμε ότι κάθε πίνακας είναι συζυγής με τον ευατό του. Πράγματι, αρκεί να πάρουμε σαν Q τον $\mathbb{I}_n$. Για να αποδείξουμε την ανακλαστική σχέση θα πρέπει να δείξουμε ότι αν ο A είναι συζυγής με τον B τότε και ο B είναι συζυγής με τον A. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Q, ώστε $A = Q^{-1}BQ$. Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση από αριστερά με Q και απο δεξιά με Q^{-1} έχουμε

$$QAQ^{-1} = Q(Q^{-1}BQ)Q^{-1} = QQ^{-1}BQQ^{-1} = B,$$

δηλαδή το ζητούμενο. Τέλος για την μεταβατική ιδιότητα, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αν ο πίνακας A είναι συζυγής με τον B και αν ο B είναι συζυγής με τον C, τότε και ο A είναι συζυγής με τον C. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν Q, R, ώστε $A = Q^{-1}BQ$ και $B = R^{-1}CR$. Αντικαθιστώντας από την μία σχέση στην άλλη έχουμε ότι

$$A = Q^{-1}R^{-1}CRQ = (RQ)^{-1}CRQ$$

(δες και άσκηση 5.2.15) άρα ο A είναι συζυγής με τον C. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.17

Απόδειξη: Έστω A ο ζητούμενος πίνακας με στοιχεία a_{ij}. Θεωρούμε τους πίνακες $B(i_0 j_0)$ με στοιχεία

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ αν } (i,j) \neq (i_0,j_0) \\ 1 \text{ αν } (i,j) = (i_0,j_0) \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$. Θεωρούμε $i_0 \neq j_0$ και υπολογίζουμε τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni_0} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = AB(i_0 j_0) =$$

$$B(i_0 j_0)A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j_0} & \cdots & a_{nj_0} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Από όπου προκύπτει ότι $a_{ij} \neq 0$ αν και μόνο αν $i = j$. Θεωρούμε τώρα τον ταυτοτικό πίνακα και αντιμεταθέτουμε την i-γραμμή με την j-γραμμή, ονομάζουμε τον πίνακα που προκύπτει $S(ij)$. Αν ο A διαγώνιος πίνακας με $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ στην διαγώνιο, δηλαδή, τότε ο πίνακας SAS^{-1} είναι ένας πίνακας που το λ_i στοιχείο έχει αλλάξει θέση με το λ_j (γιατί;) και επιπλέον είναι ίσος με τον A. Άρα όλα τα στοιχεία στην διαγώνιο είναι ίσα, δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.18

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Σελίδα 304 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Για $n = 1$ ισχύει, υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = k$ και βάσει της υπόθεσης αυτής θα αποδείξουμε τον τύπο για $n = k + 1$.

$$A^{k+1} = A^k A = A^n = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{pmatrix},$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στην Άσκηση 5.2.19

Απόδειξη: Έστω A ο $n \times n$ πίνακας που αντιστοιχεί στην γραμμική απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι για να μην είναι η γραμμική συνάρτηση ένα προς ένα πρέπει και αρκεί το σύστημα $Ax = 0$ να επιδέχεται εκτός της τετριμμένης ($x = 0$) και άλλες λύσεις. Εκτελώντας την μέθοδο της απαλειφής του Gauß παρατηρούμε ότι ο πίνακας A μπορεί να μετασχηματιστεί με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών σε ένα πίνακα A' της μορφής

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση την $x = 0$ αν και μόνο αν $d_i \neq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Σε αυτή την περίπτωση όποιο και να είναι το διάνυσμα στήλη b που θα τοποθετήσουμε στον επαυξήμενο πίνακα προκειμένου να λύσουμε το μη ομογενές σύστημα $Ax = b$ μπορούμε να δούμε ότι θα έχουμε λύση, δηλαδή η γραμμική συνάρτηση είναι επί.
Αντιστρόφως αν η συνάρτηση είναι επί τότε δεν μπορεί το d_n να είναι μηδέν γιατί τότε το σύστημα

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

δεν θα είχε λύση για $b_n \neq 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι ούτε το d_{n-1} θα μπορούσε να είναι 0 αφού τότε η εξίσωση

$$d_{n-1}x_{n-1} = b_{n-1} - x_{n-1}a'_{n-1,n}$$

δεν θα είχε λύση αν διαλέγαμε το b_{n-1} ώστε $b_{n-1} - x_{n-1}a'_{n-1,n}$. Συνεχίζοντας αναδρομικά βλέπουμε ότι όλα τα d_i είναι διαφορετικά του μηδενός και άρα το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, δηλαδή η γραμμική συνάρτηση είναι ένα προς ένα. $\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.2.26

Απόδειξη: θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 13 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -5 και την προσθέτουμε στην δεύτερη την πρώτη γραμμή με -9 και την προσθέτουμε στην τρίτη, την πρώτη γραμμή με -10 και την προσθέτουμε στην τέταρτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -24 & -25 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -28 & -45 & -60 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -30 & -37 & -69 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με $-\frac{28}{11}$ και προσθέτουμε στην τρίτη, την δεύτερη γραμμή με $-\frac{30}{11}$ και προσθέτουμε στην τέταρτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -24 & -25 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{177}{11} & \frac{40}{11} & \frac{41}{11} & -\frac{28}{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{313}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{40}{11} & -\frac{30}{11} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με $-\frac{311}{177}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -24 & -25 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{177}{11} & \frac{40}{11} & \frac{41}{11} & -\frac{28}{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1283}{177} & -\frac{523}{177} & \frac{314}{177} & -\frac{313}{177} & 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία γραμμή με $-\frac{177}{1283}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -24 & -25 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{177}{11} & \frac{40}{11} & \frac{41}{11} & -\frac{28}{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την τελευταία γραμμή με $-\frac{40}{11}$ και την προσθέτουμε στην τρίτη, την τελευταία γραμμή με 25 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και την τελευταία με -7 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & -\frac{2378}{1283} & \frac{2198}{1283} & -\frac{2191}{1283} & \frac{1239}{1283} \\ 0 & -11 & -24 & 0 & \frac{6660}{1283} & -\frac{6567}{1283} & \frac{7825}{1283} & -\frac{4425}{1283} \\ 0 & 0 & \frac{177}{11} & 0 & \frac{31683}{14113} & -\frac{2124}{1283} & \frac{1593}{14113} & \frac{7080}{14113} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με $\frac{11}{177}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & -\frac{2378}{1283} & \frac{2198}{1283} & -\frac{2191}{1283} & \frac{1239}{1283} \\ 0 & -11 & -24 & 0 & \frac{6660}{1283} & -\frac{6567}{1283} & \frac{7825}{1283} & -\frac{4425}{1283} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{179}{1283} & -\frac{132}{1283} & \frac{9}{1283} & \frac{40}{1283} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με 24 και την προσθέτουμε στην δεύτερη και την τρίτη γραμμή με -5 και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -\frac{3273}{1283} & \frac{2858}{1283} & -\frac{2236}{1283} & \frac{1039}{1283} \\ 0 & -11 & 0 & 0 & \frac{10956}{1283} & -\frac{9735}{1283} & \frac{8041}{1283} & -\frac{3465}{1283} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{179}{1283} & -\frac{132}{1283} & \frac{9}{1283} & \frac{40}{1283} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με $-\frac{1}{11}$ για να πάρουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 0 & 0 & -\frac{3273}{1283} & \frac{2858}{1283} & -\frac{2236}{1283} & \frac{1039}{1283} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{996}{1283} & \frac{885}{1283} & -\frac{731}{1283} & \frac{315}{1283} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{179}{1283} & -\frac{132}{1283} & \frac{9}{1283} & \frac{40}{1283} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{array}\right)$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με -3 και την προσθέτουμε στην πρώτη

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{285}{1283} & \frac{203}{1283} & -\frac{43}{1283} & \frac{94}{1283} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{996}{1283} & \frac{885}{1283} & -\frac{731}{1283} & \frac{315}{1283} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{179}{1283} & -\frac{132}{1283} & \frac{9}{1283} & \frac{40}{1283} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{array}\right)$$

Άρα ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$\begin{pmatrix} -\frac{285}{1283} & \frac{203}{1283} & -\frac{43}{1283} & \frac{94}{1283} \\ -\frac{996}{1283} & \frac{885}{1283} & -\frac{731}{1283} & \frac{315}{1283} \\ \frac{179}{1283} & -\frac{132}{1283} & \frac{9}{1283} & \frac{40}{1283} \\ \frac{523}{1283} & -\frac{314}{1283} & \frac{313}{1283} & -\frac{177}{1283} \end{pmatrix}$$

□

Πίσω στην Άσκηση 5.3.1

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα

Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα θα πρέπει να δουλέψουμε με τον 2×4 πίνακα

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. $a \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $-\frac{c}{a}$ και την προσθέτουμε στην δεύτερη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

Αν τώρα η ποσότητα $da - bc = 0$ τότε δεν υπάρχει αντίστροφος αφού η εξίσωση που προκύπτει από την τελευταία σειρά δεν έχει λύση. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $da-bc \neq 0$. Μπορούμε λοιπόν να πολλαπλασιάσουμε την τελευταία γραμμή με $\frac{a}{da-bc}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη γραμμή με $-b$ και την προσθέτουμε στην πρώτη για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1+\frac{bc}{da-bc} & -\frac{ba}{da-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix}$$

Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $\frac{1}{a}$ και καταλήγουμε στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{da-bc} & -\frac{b}{da-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{pmatrix}$$

Συνεπώς ο αντίστροφος πίνακας είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{da-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι $a = 0$, δηλαδή θα δουλέψουμε με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αντιμεταθέτουμε τις δύο γραμμές για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν $b = 0$ τότε η εξίσωση που προκύπτει από την τελευταία γραμμή δεν έχει λύση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $b \neq 0$. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία γραμμή με $\frac{1}{b}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} c & d & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία γραμμή με $-d$ και την προσθέτουμε στην πρώτη

$$\begin{pmatrix} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Αν $c = 0$ τότε η εξίσωση που προκύπτει από την πρώτη γραμμή δεν έχει λύση, υποθέτουμε λοιπόν ότι $c \neq 0$ και πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $\frac{1}{c}$ για να πάρουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{b}{bc} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι και σε αυτή την περίπτωση η συνθήκη αντιστρεψιμότητας είναι η $0 \neq bc = ad - bc$ και ότι και πάλι ο αντίστροφος πίνακας δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{da - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\square$

Πίσω στην Άσκηση 5.3.2

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$, άρα εξ•ορισμού υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n$, όχι όλα μηδέν, ώστε

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0.$$

Αν το $x_i \neq 0$, τότε το v_i γράφεται ως

$$v_i = \sum_{\nu=1, \nu \neq i}^{n} x_\nu v_\nu.$$

Αντιστρόφως αν το v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδιασμός των $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ στην παρακάτω μορφή

$$v_i = \sum_{\nu=1, \nu \neq i}^{n} \lambda_\nu v_\nu,$$

τότε τα $x_\nu = \lambda_\nu$ για $\nu \neq i$, και $x_i = -1$, αποτελούν μία τετριμμένη λύση της

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0.$$

$\square$

Πίσω στην Πρόταση 5.1.4

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα ότι αν ένας χώρος παράγεται από n το πλήθος στοιχεία, τότε οποιαδήποτε $n+1$ από αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Θα κάνουμε επαγωγή στο n. Έστω ένας διανυσματικός χώρος που παράγεται από ένα στοιχείο το v. Τότε αν w_1, w_2 είναι δύο διαφορετικά στοιχεία του V, μπορούμε να τα γράψουμε στην μορφή:

$$w_1 = \lambda_1 v,\ w_2 = \lambda_2 v,$$

όπου δεν είναι ταυτόχρονα $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Τότε

$$\lambda_2 w_1 + (-\lambda_1 w_2) = 0,$$

άρα w_1, w_2 γραμμικά εξαρτημένα.
Έστω ένας διανυσματικός χώρος V που παράγεται από n το πλήθος στοιχεία $v_1, \ldots, v_n$, και έστω $w_1, \ldots, w_{n+1}$ τυχαία διανύσματα στον V. Τα διανύσματα αυτά γράφονται ως

$$\begin{array}{rl} w_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{1,i} v_i + a_{1,n} v_n \\ w_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{2,i} v_i + a_{2,n} v_n \\ &\vdots \\ w_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n-1} a_{(n+1),i} v_i + a_{(n+1),n} v_n \end{array} .$$

Αν όλα τα $a_{in} = 0$, τότε τα w_i ανήκουν στον χώρο που παράγουν τα $v_1, \ldots, v_{n-1}$ και από την επαγωγική υπόθεση είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μπορούμε να υποθέσουμε λοιπόν, ότι υπάρχει ένα $a_{i,n} \neq 0$. Αναδιατάσσοντας τα w_i, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $a_{1,n} \neq 0$. Τότε τα n το πλήθος στοιχεία της μορφής,

$$w_2 - \frac{a_{2,n}}{a_{1,n}} w_1, \ldots, w_{n+1} - \frac{a_{(n+1),n}}{a_{1,n}} w_1,$$

ανήκουν στον χώρο που παράγουν τα $v_1, \ldots, v_{n-1}$ και από την επαγωγική υπόθεση είναι γραμμικά εξαρτημένα άρα υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ όχι όλα μηδέν ώστε

$$0 = \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i \Big(w_i - \frac{a_{i,n}}{a_{1,n}} w_1\Big),$$

οπότε

$$0 = \sum_{i=2}^{n+1} -\lambda_i \frac{a_{i,n}}{a_{1,n}} w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_{n+1} w_{n+1},$$

δηλαδή τα $w_1, \ldots, w_{n+1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Άμεση συνέπεια του παραπάνω είναι ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν δύο διαφορετικές βάσεις ενός διανυσματικού χώρου με διαφορετικό πλήθος στοιχείων. Πράγματι αν $v_1, \ldots, v_n$ και $w_1, \ldots, w_m$ ήταν δύο βάσεις με $n < m$, τότε αφού ο χώρος παράγεται από n στοιχεία (τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι βάση) τα $w_1, \ldots, w_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, άτοπο. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 5.1.12

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι ο πίνακας (a_{ij}) ορίστηκε από τη σχέση

$$T(v_i) = \sum_{\nu=1}^{m} w_\nu a_{\nu i},$$

ενώ ο πίνακας b_{ij} ορίστηκε από τη σχέση

$$S(w_j) = \sum_{\mu=1}^{\ell} u_\mu b_{\mu j}.$$

Συνεπώς η τιμή του $S \circ T$ στα στοιχεία της βάσης B_V, που ορίζει τον πίνακα (c_{ij}) δίνεται από:

$$S(T(v_i)) = S\left(\sum_{\nu=1}^{m} w_\nu a_{\nu i}\right) = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\nu i} S(w_\nu) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} a_{\nu i} \sum_{\mu=1}^{\ell} b_{\mu\nu} u_\mu = \sum_{\mu=1}^{\ell} \left(\sum_{\nu=1}^{m} b_{\mu\nu} a_{\nu i}\right) u_\mu = \sum_{\mu=1}^{\ell} c_{\mu i} u_\mu,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$c_{\mu i} = \sum_{\nu=1}^{m} b_{\mu\nu} a_{\nu i},$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πίσω στην Πρόταση 5.2.8

Απόδειξη: Θεωρούμε την βάση $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Έστω (δ_{ij}) ο πίνακας που αντιστοιχεί στην $\mathbb{I}$ ως προς την βάση B_V στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών. Η ταυτοτική συνάρτηση στο i στοιχείο της βάσης δίνει

$$\mathbb{I}(v_i) = v_i = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \delta_{\nu i},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 5.2.10

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $T_A : V \to V$, που αντιστοιχεί στον πίνακα A είναι ένα προς ένα και επί. Αυτό συνεπάγεται ότι η γραμμική απεικόνιση T_A είναι αντιστρέψιμη, άρα υπάρχει μία απεικόνιση T_A^{-1} (η οποία είναι και αυτή γραμμική) ώστε

$$T_A \circ T_A^{-1} = T_A^{-1} \circ T_A = \mathbb{I}_V.$$

Το ζητούμενο προκύπτει από τις προτάσεις 5.2.8,5.2.10.
Αντιστρόφως αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει πίνακας A^{-1} ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_n$, τότε ο πίνακας A^{-1} αντιστοιχεί σε γραμμική απεικόνιση T_A^{-1} που λόγω των προτάσεων 5.2.8,5.2.10 είναι η αντίστροφη της T_A. □

Πίσω στην Πρόταση 5.2.12

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 318 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι το $\ker(T)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\upsilon_1, \upsilon_2 \in V$ ισχύει ότι $\lambda \upsilon_1 \in \ker(T)$ και $\upsilon_1 + \upsilon_2 \in \ker(T)$, δηλαδή ότι $(T(\lambda \upsilon_1) = 0$ και $T(\upsilon_1 + \upsilon_2) = 0$. Όμως

$$T(\lambda \upsilon_1) = \lambda T(\upsilon_1) = \lambda 0 = 0,$$

και

$$T(\upsilon_1 + \upsilon_2) = T(\upsilon_1) + T(\upsilon_2) = 0 + 0 = 0,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Ομοίως για να δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(T)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του W θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T)$ ισχύει ότι $\lambda w_1 \in \mathrm{Im}(T)$ και $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(T)$. Όμως αφού $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}(T)$, υπάρχουν στοιχεία $\upsilon_1, \upsilon_2 \in V$ ώστε $T(\upsilon_1) = w_1$ και $T(\upsilon_2) = w_2$, άρα

$$\mathrm{Im}(T) \ni T(\lambda \upsilon_1) = \lambda T(\upsilon_1) = \lambda w_1$$

και

$$\mathrm{Im}(T) \ni T(\upsilon_1 + \upsilon_2) = T(\upsilon_1) + T(\upsilon_2) = w_1 + w_2.$$

□

Πίσω στο Λήμμα 5.2.14

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 319 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για πίνακες που προκύπτει ο ένας από τον άλλο με μία μόνο στοιχειώδη πράξη γραμμών.
Έτσι το $Ax = 0$ αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq i \leq n$ ισχύει

$$\sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu} x_{\nu} = 0,$$

από όπου βλέπουμε άμεσα ότι η πρώτη και η δεύτερη στοιχειώδης πράξη γραμμών δεν αλλάζουν τον χώρο λύσεων του ομογενούς συστήματος. Η τρίτη στοιχειώδης πράξη γραμμών αντιστοιχεί στο να πολλαπλασιάσουμε την i-εξλίσωση με $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και να την προσθέσουμε στην j-εξίσωση το οποίο επίσης δεν αλλοιώνει τον χώρο λύσεων. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 5.2.22

Απόδειξη: Έστω x_1, x_0 δύο λύσεις του μη ομογενούς συστήματος. Παρατηρούμε ότι η διαφορά τους ικανοποιεί το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ αφού:

$$A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = b - b = 0.$$

Συνεπώς η τυχαία λύση x_1 του μη ομογενούς συστήματος γράφεται ως

$$x_1 = x_0 + x, \text{ με } Ax = 0.$$

$\square$

Πίσω στην Πρόταση 5.2.23

Απόδειξη: Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A ο οποίος έχει σαν στήλες τις $a^1, \ldots, a^n$ και ορίζει γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η εικόνα της παραπάνω απεικόνισης ταυτίζεται με τον υπόχωρο V του $\mathbb{R}^m$ που παράγουν οι στήλες $a^1, \ldots, a^n$.
Είναι σαφές ότι μία αντιμετάθεση των στηλών δεν αλλάζει τον χώρο που παράγουν οι στήλες. Αν τώρα $v \in V$, δηλαδή

$$v = \sum_{v=1}^{n} x_v a^v,$$

τότε

$$v = \sum_{v=1, v \neq j}^{n} x_v a^v + \frac{x_j}{\lambda} \lambda a^j,$$

δηλαδή ο πολλαπλασιασμός της στήλης a^j με το $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, δεν αλλάζει τον υπόχωρο V. Τέλος, αν

$$v = \sum_{v=1}^{n} x_v a^v,$$

τότε το

$$v = \sum_{v=1, v \neq i, v \neq j}^{n} x_v a^v - \lambda a_i x^i + (\lambda a_i + a_j) x^j$$

δηλαδή αν αντικαταστήσουμε την στήλη a^j με την $\lambda a^i + a^j$ τότε και πάλι ο χώρος που παράγουν οι στήλες δεν αλλάζει. $\square$

Πίσω στην Πρόταση 5.2.25

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 322 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Λύσεις των Ασκήσεων

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού $\emptyset \in \{\emptyset\}$, δηλαδή το $\{\emptyset\}$ περιέχει ένα στοιχείο.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό, αφού το κενό είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού το κενό σύνολο στο δεξί κομάτι δεν περιέχει κανένα στοιχείο, ούτε το κενό.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό, το σύνολο $\{\emptyset\}$, έχει ως στοιχεία του σύνολα και περιέχει ένα μόνο σύνολο το $\emptyset$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό αφού το κενό είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. .

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού το $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, και για παράδειγμα $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, ενώ $\emptyset \notin A$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε τα στοιχεία της τομής στον παραπάνω υπολογισμό τα μετράμε δύο φορές, μια φορά σαν στοιχεία του A και μια φορά σαν στοιχεία του B. Το σωστό πλήθος των στοιχείων της ένωσης δίνεται από τον τύπο $n + m - k$, όπου k είναι το πλήθος των στοιχείων της τομής.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα: Αν $A = \{1, 2\}$ τότε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ και $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$, ενώ $\{2\}$ δεν είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(A)$ αφού $2 \in \{2\}$ αλλά $2 \notin \mathcal{P}(A)$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ και επιπλέον $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό, αφού αν $A = \emptyset$ τότε $X \backslash \emptyset = X$. Αντιστρόφως αν $X \backslash A = X$, και $A \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $x \in A$, και από τον ορισμό της διαφοράς $X \backslash A$ δεν περιέχει το x, άρα δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα $X \backslash A = X$. Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο του A, άρα ανήκει στο σύνολο $\mathcal{P}(A)$, των υποσυνόλων του A. Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Ναι είναι πρόταση και μάλιστα ψευδής.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Δεν είναι πρόταση, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής. Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Ναι είναι πρόταση και μάλιστα ψευδής.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Δεν είναι πρόταση γιατί εκφράζει υποκειμενική άποψη.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Δεν είναι γράφημα συνάρτησης αφού το 2 δεν απεικονίζεται πουθενά.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Δεν είναι γράφημα συνάρτησης αφού το 1 απεικονίζεται σε δύο στοιχεία.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Είναι γράφημα συνάρτησης, αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού συνάρτησης.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Αυτό δεν είναι σωστό αν το A είναι άπειρο σύνολο. Ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι 1-1 αλλά όχι επί θα κατασκευάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Πρόκειτε για την συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Αυτό δεν είναι σωστό αν το A είναι άπειρο σύνολο. Ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα είναι η $f : A \to A$, με $f(x) = 2x^2 - 1$, όπου $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$. Η απόδειξη ότι η συνάρτηση είναι επί χρησιμοποιεί το αξίωμα της πληρότητας και θα την δούμε σε επόμενα μαθήματα.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Παρατηρούμε ότι $a_{n+1} - a_n = 1 \geq 0$, άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Παρατηρούμε ότι $a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \geq 0$, άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Η παραπάνω ακολουθία δεν είναι ούτε άυξουσα ούτε φθίνουσα αφού $a_{2n} > a_{2n-1}$ και $a_{2n+1} < a_{2n}$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Η πρόταση είναι σωστή. Πράγματι η (a_n) είναι αύξουσα αν και μόνο αν $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow -a_{n+1} < -a_n$ το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν η $(-a_n)$ είναι φθίνουσα.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Η ακολουθία είναι σταθερά ίση με 4, οπότε είναι φραγμένη και ένα κάτω φράγμα της είναι, για παράδειγμα, το 1 ενώ ένα άνω φράγμα είναι το 5.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Η ακολουθία είναι φραγμένη αφού $0 < 1/n < 1$ (γιατί;).

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Η ακολουθία είναι φραγμένη κάτω από το 0, αλλά δεν μπορεί να είναι φραγμένη πάνω. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός M ώστε $n^3 < M$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $M < [M] + 1 < ([M] + 1)^3$, για τον φυσικό αριθμό $n = [M] + 1$, άτοπο.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Ο ορισμός αυτός δεν είναι ισοδύναμος με τον ορισμό σύγκλισης ακολουθίας γιατί επιτρέπεται στο να πάρει την τιμή = 0. Οι ακολουθίες που ικανοποιούν τον ορισμό είναι κατανάγκην «τελικά σταθερές» δηλαδή για $n > n_0$ έχουμε $a_n = a_{n_0}$. Έτσι η $(1/n)$ δεν συγκλίνει στο μηδέν με βάση τον παραπάνω ορισμό.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι! Αν μία ακολουθία ικανοποιεί τον «κανονικό» ορισμό τότε ικανοποιεί και τον παραπάνω ορισμό, ενώ αντιθέτως αν μια ακολουθία ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό και έστω > 0. Εφαρμόζουμε τον παραπάνω ορισμό για $/2$ και έχουμε $|a_n - \ell| \leq /2 <$ για κάθε $n > n_0()$.

Τέλος λύσης

Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 351 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Είναι σαφές ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει με τον «κλασικό» ορισμό τότε συγκλίνει και με τον παραπάνω. Αντιστρόφως αν μια ακολουθία συγκλίνει με τον παραπάνω ορισμό και έστω $\ > 0$ πραγματικός αριθμός. Από την άσκηση 2.2.8 υπάρχει ρητός ${}_1$ ώστε $0 < {}_1 < .$

Οπότε εφαρμόζοντας τον παραπάνω ορισμό για τον θετικό ρητό ${}_1$ έχουμε $|a_n - \ell| < {}_1 < ,$ δηλαδή το ζητούμενο.

Τέλος λύσης

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 352 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά όχι συγκλίνουσα.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία $(-a_n)$ η οποία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και άρα συγκλίνει(γιατί;).

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό, αφού αν $x = \frac{a}{b}$ και $y = \frac{c}{d}$ είναι δύο ρητοί αριθμοί ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$) τότε και το άθροισμα τους θα είναι ρητός $x + y = \frac{ad+cb}{bd}$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό. Υποθέτουμε ότι $x \in \mathbb{Q}$ και $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ και ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $x + y \mathbb{Q}$. Τότε $y = (x + y) + (-x)$ είναι το άθροισμα δύο ρητών και θα έπρεπε το y να είναι ρητός, άτοπο. Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, άλλα και ο $1 - \sqrt{2}$ είναι άρρητος (γιατί;). Το άθροισμα τους είναι όμως $1 \in \mathbb{Q}$.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, και έχουμε ότι $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ ο οποίος είναι άρρητος (γιατί;)

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, και έχουμε ότι $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ο οποίος είναι άρρητος (γιατί;)

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό, αφού αν $x \in \mathbb{R}$ μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία των ρητών προσεγγύσεων του $a_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ Παρατηρούμε ότι $a_n \in \mathbb{Q}$ και ότι

$$x - a_n < \frac{1}{10^n} \to 0.$$

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό, έστω $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το $x - \sqrt{2}$ και διαλέγουμε μία ακολουθία ρητών (a_n) με $a_n \to x - \sqrt{2}$. Η ακολουθία (b_n) με γενικό όρο $b_n = a_n + \sqrt{2}$ είναι μία ακολουθία αρρήτων η οποία συγκλίνει στο x.

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Υπάρχει ακολουθία άρρητων αριθμών (a_n) η οποία να συγκλίνει στο $(x + y)/2$ ισχύει:

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

Από τον ορισμό σύγκλισης της ακολουθίας $a_n \to \frac{x+y}{2}$ έχουμε ότι για $\quad = \frac{x+y}{4}$, όλοι οι όροι της ακολουθίας από ένα n_0 και μετά θα είναι μέσα στο διάστημα (x, y), από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος λύσης

Βασική Θεωρία Συνόλων
Σύνολα Αριθμών
Ακολουθίες και Σύγκλιση
Πραγματικές Συναρτήσεις
Βασική Γραμμική Άλγεβρα
Τμ. Μαθηματικών
Πρώτη Σελίδα
Σελίδα 362 από 322
Πίσω
Όλη η οθόνη
Κλείσε
Έξοδος

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού για παράδειγμα στον γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα

$$(1, 0, \ldots, 0), (2, 0, \ldots, 0), \ldots, (n, 0, \ldots, 0)$$

Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Λάθος, αφού από τον ορισμό της βάσης, αυτή αποτελείται από n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστό. Αν σε ένα χώρο V έχουμε m γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα με $m > n$ τότε αυτά τα διανύσματα θα παράγουν ένα υπόχωρο W, με $W \subseteq V$, και συνεπώς $\dim W \leq \dim V = n$. Όμως η διάσταση του W είναι m, αφού παράγεται από m το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άτοπο. Τέλος λύσης

Λύση της Άσκησης: Σωστά, γιατί σε αυτή την περίπτωση η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση είναι επί. Μάλιστα η λύση δίνεται από το $x = A^{-1}b$

Τέλος λύσης