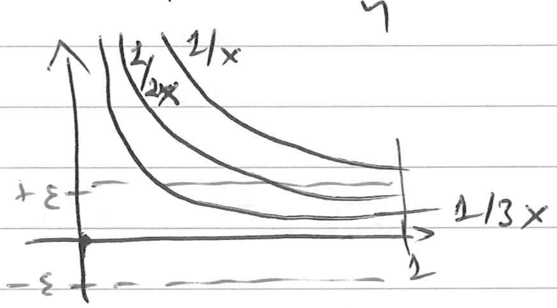
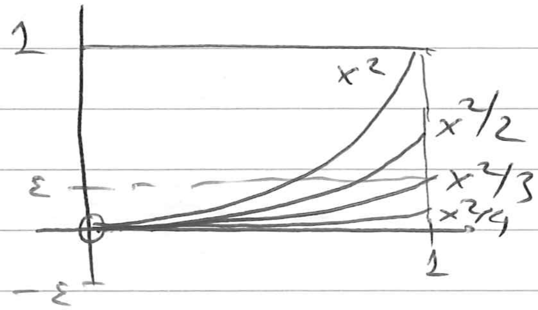
$(X\ d)$ μ.χ. $\quad f, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>Ορισμός</u> $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο εαν $\forall x \in X \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \iff \forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Πχ $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{nx} : (0\ 1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \frac{x^2}{n} : (0\ 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$





<u>Ορισμός</u> $f_n \rightrightarrows f$ (ομοιόμορφα) αν $\forall \varepsilon > 0$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

$$\left.\frac{1}{nx}\right|_{x\in(0\,1)} \not\rightrightarrows 0 \ , \quad \left.\frac{x^2}{n}\right|_{x\in(0\,1)} \rightrightarrows 0$$

<u>Παρατήρηση</u> Α $\quad f_n \rightrightarrows f \implies f_n \longrightarrow f$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $f_n \longrightarrow f$ και $n_0(x,\varepsilon)$ ο ελάχιστος στο $\mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, για να ισχύει $f_n \rightrightarrows f$ θα πρέπει να μπορεί να βρεθεί $n_0 \in \mathbb{N}$ που να συνεπάγεται $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ για κάθε $x \in X$

οπότε αν $f_n \rightrightarrows f$ θα πρέπει $\sup_{x \in X} n_0(x,\varepsilon) < \infty$

Πράγματι,

~~αν όχι τότε $\sup_{x\in X} n_0(x\,\varepsilon) = +\infty$ δηλαδή~~

οπότε αν $\exists\, n_0' \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0'$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x$

φανερά ~~sup~~ $n_0(x\,\varepsilon) \leq n_0'$ $\forall x$ άρα

$\sup_x n_0(x\,\varepsilon) < \infty$

και αντίστροφως, αν $\sup_x n_0(x\,\varepsilon) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$

θέτω $k_0 = \sup n_0(x\,\varepsilon)$ οπότε αν $n \geq k_0$

$\Rightarrow n \geq n_0(x\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Πχ $f_n(x) = \dfrac{1}{nx} : (0\,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 =: f(x)$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{nx} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon x} \Rightarrow$

$\Rightarrow n_0(x,\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon x}\right] + 1$. Αλλά $\sup_{x\in(0,1)} n_0(x\varepsilon) =$

$= +\infty$ (για $x \to 0^+$)

Άρα $f_n \not\rightrightarrows 0$.

<u>Θεώρημα</u> Θέτουμε $a_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

Τότε $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Απόδειξη</u> $f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 : \forall n \geq n_0\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x \in X \Rightarrow \sup_x |\quad| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n| < \varepsilon \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$

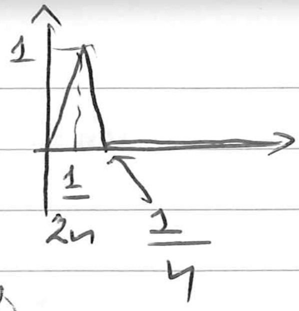
Αν $a_n \longrightarrow 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_0$

$a_n = |a_n| < \varepsilon \Rightarrow \sup |\quad| < \varepsilon$ ~~...~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ $\boxed{/\!/}$

Πχ $g_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -2nx + 2 & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$



$g_n \longrightarrow 0$ αλλα $g_n \not\rightrightarrows 0$ αφού $a_n = 1 \not\to 0$.

<u>Ορισμός</u> f_n ομοιόμορφα Cauchy $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_0 \; \forall m \ge n_0$ ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

<u>Θεώρημα</u> Η f_n ~~...~~ ~~...~~ συγκλίνει ομοιόμορφα ~~αν~~ αν ν η f_n είναι ομ. Cauchy

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" Έστω f: $f_n \rightrightarrows f$ τοτε

... $|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \ldots$$

"$\Longleftarrow$" $\forall x \in X$ η $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών η οποία είναι Cauchy, ~~Αρα~~ ~~...~~ Αρα συγκλίνει σε κάποιο αριθμό, ας τον ονομάσουμε $f(x)$. Θα δείξουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$. Έστω $\varepsilon > 0$ εφαρμόζουμε την ιδιότητα Cauchy για $\varepsilon/2$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_0 \forall m \ge n_0$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X$$

$$m \longrightarrow \infty \implies |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \; \forall x$$

$$\implies f_n \rightrightarrows f \quad \blacksquare$$

Άσκηση 4.1.5 $f_n(x) = \dfrac{1}{1-x^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(i) συγκλίνει απλά στο $(1,\infty)$
(ii) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(1,\infty)$;
(iii) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,\infty)$ για $a>1$;

Λύση (i) $x>1 \Rightarrow x^n \longrightarrow \infty$ Άρα
$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f_n \to 0 = f$

(ii) $a_n = \sup\limits_{x>1} \left| \dfrac{1}{1-x^n} - 0 \right| = \sup\limits_{x>1} \dfrac{1}{x^n-1} \overset{x\to 1^+}{=} +\infty$

$a_n \not\to 0 \Rightarrow f_n \not\rightrightarrows 0$

(iii) $a_n = \sup\limits_{x \geq a} \dfrac{1}{x^n-1} \overset{\text{μονοτονία}}{=\!=} \dfrac{1}{a^n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$ στο $[a,\infty)$.

Θεώρημα Αν f_n συνεχής στο $x_0 \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $f_n \rightrightarrows f$. Τότε f συνεχής στο x_0

Απόδειξη Έστω $\varepsilon>0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\exists\, \delta>0$ ώστε αν $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ τότε $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.
Με την ομοιόμορφη σύγκλιση βρίσκουμε πρώτα μια f_{n_0} ώστε $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ $\forall x \in X$

Βρίσκουμε $\delta>0$ για την f_{n_0} στο x_0 ώστε αν $|x-x_0| < \delta$ $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \varepsilon/3$

Ελέγχουμε ότι αυτό το δ είναι κατάλληλο: αν $|x-x_0|<\delta$ τότε

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$ $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Το παραπάνω θεώρημα χρησιμοποιείται συχνά και ως κριτήριο μή ομοιόμορφης σύγκλισης π.χ.

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1/2 & x \in \{-1,1\} \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$$

f_n συνεχείς, f οχι συνεχής άρα $f_n \not\rightrightarrows f$

$\boxed{\text{Ομοιόμορφη σύγκλιση \& ολοκληρώματα Riemann}}$

Υπενθύμιση $f : [ab] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{φραγμένη}}$ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

διαμέριση $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Αθροίσματα Darboux: $U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$

$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$

$M_i = \sup\{ f(x) : x_i \le x \le x_{i+1} \}$ $m_i = \inf\{ \quad \}$

$\overline{\int_a^b} f = \inf\{ U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [ab] \}$

$\underline{\int_a^b} f = \sup\{ L(f,P) : P \text{ —//— } \}$

Η f λέγεται R-ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f =: \int_a^b f$

ή $\int_a^b f(x)\,dx$.

Υπενθύμιση (κριτήριο Riemann)

Μια φραγμένη $f : [ab] \to \mathbb{R}$ είναι R-ολοκληρ.

αν-ν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διαμέριση P του $[ab]$

ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

"$\Rightarrow$"

__Απόδειξη__ Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του sup $\exists\, P_1$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f\,P_1) \quad (1).$$

Από τον ορισμό του inf $\exists\, P_2$ ώστε

$$U(f\,P_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Για την $P = P_1 \cup P_2$ ισχύει $L(f\,P_1) \le L(f\,P)$ και $U(f\,P) \le U(f\,P_2)$

Άρα για την P ισχύει η (1) κ η (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$U(f\,P) + \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f\,P) + \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow U(f\,P) - L(f\,P) < \varepsilon \qquad L(f\,P_1 \cup P_2) \le U(f\,P_1 \cup P_2) \le$$

"$\Leftarrow$" $\forall\, P_1\, P_2$ ισχύει $L(f\,P_1) \le U(f\,P_2)$

$$\Rightarrow \sup_{P_1} L(f\,P_1) \le U(f\,P_2) \Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le U(f\,P_2)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le \inf_{P_2} U(f\,P_2) \Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

Άρα $\forall P$

$$\underbrace{L(f\,P) \le \underline{\int_a^b} f}_{(3)} \le \underbrace{\overline{\int_a^b} f \le U(f\,P)}_{(4)} \Rightarrow$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) κ (4) $\quad L(f\,P) + \overline{\int_a^b} f \le U(f\,P) + \underline{\int_a^b} f$

$$\Rightarrow 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le U(f\,P) - L(f\,P)$$

$+++ \Rightarrow \underline{\int} = \overline{\int} \Rightarrow f$ R-ολοκλ.

<u>Θεώρημα</u> Έστω f_n συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f.
Τότε η f είναι ~~συνεχής στο [a,b]~~ R-ολοκληρώσιμη και ισχύει $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Απόδειξη</u> Από το προηγ. θεώρημα f συνεχής άρα R-ολοκλ.
Έστω $\varepsilon>0$. $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$ $|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $\forall x$ αφού $f_n \rightrightarrows f$.

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dx$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Στα επόμενα θέλουμε να επαναλάβουμε το προηγούμενο θεώρημα υποθέτοντας μόνο την R-ολοκληρωσιμότητα των f_n (και όχι ότι είναι συνεχείς)

<u>Παρατήρηση</u> Αν f, g φραγμένες στο $A \subseteq (X, d)$ τότε αν $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ τότε
$|\inf f(x) - \inf g(x)| \leq \varepsilon$ & $|\sup f(x) - \sup g(x)| \leq \varepsilon$
διότι
$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow g(x)-\varepsilon < f(x) < g(x)+\varepsilon$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \inf g(x) - \varepsilon \leq \inf f(x) \leq \inf g(x) + \varepsilon \\ \sup g(x) - \varepsilon \leq \sup f(x) \leq \sup g(x) + \varepsilon \end{cases}$$

Θεώρημα Αν $f_n:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-ολοκληρώσιμες και $f_n \rightrightarrows f$ τότε η f είναι R-ολοκληρώσιμη και $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Απόδειξη **Βήμα 1** f φραγμένη

[f_n R-ολοκλ $\Rightarrow$ f_n φραγμένη έστω $|f_n(x)| \leq M_n \ \forall x \in [a,b]$

$\exists n_0: \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq 1 + |f_n(x)| \quad \forall x \in [a,b] \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq 1 + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + M_{n_0} \quad \forall x \in [a,b]$]

Βήμα 2 f R-ολοκληρώσιμη

[Αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in [a,b]$$

άρα $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in [a,b] \quad (1)$

f_{n_0} R-ολοκλ άρα $\exists P: \ U(f_{n_0},P) - L(f_{n_0},P) < \varepsilon/3 \quad (2)$

$$U(f,P) - L(f,P) = U(f,P) - U(f_{n_0},P) + U(f_{n_0},P) - L(f_{n_0},P) + L(f_{n_0},P) - L(f,P)$$

$$< U(f,P) - U(f_{n_0},P) + \frac{\varepsilon}{3} + L(f_{n_0},P) - L(f,P) \quad (3)$$

$$U(f,P) - U(f_{n_0},P) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sup_{x\in[x_{i+1},x_i]} f - \sup_{[x_{i+1},x_i]} f_{n_0} \Big)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\overset{(1)}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{3}$$

όμοια $L(f_{n_0},P) - L(f,P) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Επιστρέφουμε στην $(3) \Rightarrow U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \Rightarrow f$ R-ολοκλ]

Βημα 3 $\lim_n \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

[$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$].

Παράδειγμα $\exists f_n$ R-ολοκλ με $f_n \to f$ η f οχι R-ολοκλ

[Εστω $A = \{q_1, q_2, \ldots\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

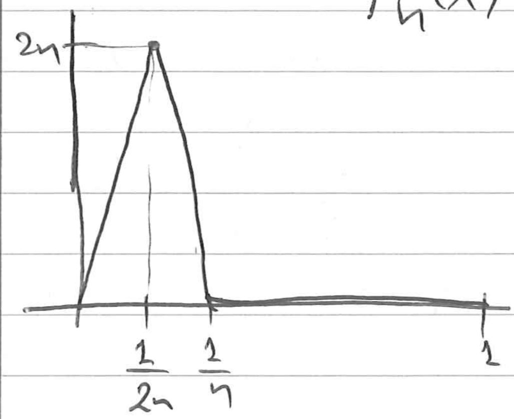
$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \{q_1 \ldots q_n\} \\ 0 & \text{αν } x \notin \{q_1 \ldots q_n\} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

f_n R-ολοκλ , f οχι R-ολοκλ]

Στην απλή σύγκλιση ακομα και αν η f είναι R-ολοκληρωσιμη μπορεί να μην ισχυει $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

πχ

$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n(-2nx+2) & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$



$\forall x \in [0,1]$ ισχυει $f_n(x) \longrightarrow 0$

Αλλα $1 = \int_0^1 f_n \not\to \int 0 = 0$

Άσκηση $p_n(x) = (n+1)(n+2)\,x^n(1-x) \quad x \in [0,1]$

Δείξτε οτι $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ αλλα $\int_0^1 p_n(x)\,dx = 1$

Δείξτε οτι $\sup_{x\in[0,1]} |p_n(x) - 0| \not\to 0$

Ομοιόμορφη σύγκλιση & παραγώγιση

Θεώρημα Θεωρούμε $f_n : [a b] \to \mathbb{R}$ ώστε
(i) f_n παραγωγίσιμη $\forall n$ σε κάθε $x \in [a b]$
(ii) f_n' συνεχής $\forall n$
(iii) $\exists\, x_0 \in [a b]$ ώστε $(f_n(x_0))_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει
(iv) η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα σε ~~κάποια~~ κάποια συνάρτηση

Τότε $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n')$

Απόδειξη παραλείπεται.

Το θεώρημα Dini

Θεώρημα (Dini) Έστω ότι ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος & $f_n : X \to \mathbb{R}$ & $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε
(i) f_n συνεχής $\forall n$
(ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ $\quad \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $f_n \longrightarrow f$
(iv) f συνεχής

Τότε $f_n \rightrightarrows f$

Απόδειξη $\forall\, n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $g_n = f - f_n \geq 0$
και $g_n \longrightarrow 0$. g_n συνεχής και $g_n \geq g_{n+1}$ $\forall n$

Αρκεί να δείξουμε ότι $g_n \rightrightarrows 0$

Θέτουμε $K = \{ x \in X \quad g_n(x) \geq \varepsilon \}$
K_n κλειστό $\subseteq X$ άρα K_n συμπαγές

$g_n \geq g_{n+1} \Rightarrow K_{n+1} \subseteq K_n$ $\left[x \in K_{n+1} \Rightarrow g_{n+1}(x) \geq \varepsilon \right.$
$\Rightarrow g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \geq \varepsilon$
$\left. \Rightarrow g_n(x) \geq \varepsilon \Rightarrow x \in K_n \right]$

<u>Ισχυρισμός 1</u> $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$

$[\ \forall\ x \in X \quad g_n(x) \longrightarrow 0$ άρα $\exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \ g_n(x) < \varepsilon$

$\Rightarrow \ x \notin K_{n_0} \supseteq \bigcap K_n$

δηλαδή κανένα σημείο του X δεν ανήκει στο $\bigcap K_n]$

<u>Ισχυρισμός 2</u> $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ K_{n_0} = \emptyset$

$[$Αν όχι, τότε $K_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$
αλλά K_n φθίνουν και είναι συμπαγή

$\xrightarrow[2.8.8]{\text{Θεώρημα}} \bigcap_1^{\infty} K_n \neq \emptyset$ άτοπο$]$

Έτσι $K_{n_0} = \emptyset$ δηλαδή κανένα $x \in X$ δεν ικανοποιεί την $g_{n_0}(x) \geq \varepsilon$, συνεπώς $g_{n_0}(x) < \varepsilon$

Αλλά $g_{n+1} \leq g_n$ οπότε $\forall n \geq n_0 \ g_n(x) < \varepsilon$ $\forall x \in X$

άρα $g_n \rightrightarrows 0$ ∎

<u>Παρατήρηση</u> Το ίδιο ισχύει αν $(f_n)\downarrow$ αντί για $\uparrow$
Τότε θα θέσουμε $g_n = f_n - f$

Παρατήρηση: Η συμπάγεια του X στο Θ. Dini είναι απαραίτητη. π.χ.

$$f_n : (0\,1) \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n \geq x^{n+1} = f_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f$$

f_n, f συνεχείς. Αλλά

$$a_n = \sup_{x\in(0\,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0\,1)} x^n = 1 \not\to 0 \quad \boxtimes$$

Άσκηση 4.5.1 Θεωρούμε τις $f_n : [0\,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
με $f_1(x) = \sqrt{x}$ $\quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$

(i) Δείξτε ότι $\quad 0 = f_n(0) < f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1+x$
$\forall x \in (0\,\infty)$

(ii) f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a\,b]$ για κάθε a, b με $0 < a < b < \infty$

(iii) f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\;1]$

Λύση (i) $f_n(0) = 0$ [$n=1$ $\; f_1(0) = \sqrt{0} = 0$ ✓
αν $f_n(0) = 0$ τότε
$f_{n+1}(0) = \sqrt{0 + f_n(0)} = \sqrt{0+0} = 0$]

Φανερά $f_n(x) > 0 = f_n(0) \quad \forall\; x \in (0\,\infty)$
[επαγωγή]

$f_n(x) < f_{n+1}(x)$ [$n=1$ $\; f_1(x) < f_2(x) \iff \sqrt{x} < \sqrt{x + \sqrt{x}}$
$\iff x < x + \sqrt{x}$ ✓ στο $(0\,\infty)$

$f_{n+1}(x) < f_{n+2}(x) \iff \sqrt{x + f_n(x)} < \sqrt{x + f_{n+1}(x)}$
$\iff f_n(x) < f_{n+1}(x)$ ✓]

$f_n(x) < 1+x$ [$n=1$ $\; \sqrt{x} < 1+x \iff x < 1 + x + x^2$ ✓ στο $(0\,\infty)$
αν $f_n(x) < 1+x$ τότε $\quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} <$

$< \sqrt{x + 1 + x} < 1 + x = \sqrt{1 + 2x + x^2}$ ✓]

(ii) Από το (i) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα και άνω φραγμένη (από το $1+x$) Άρα $\exists\ f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Για να εφαρμόσουμε το Θ. Dini στο διαστήματα $[a,b]$ $0<a<b<\infty$ πρέπει να δείξουμε f_n, f συνεχείς.

Οι f_n είναι συνεχείς [$n=1$ $f_1(x)=\sqrt{x}$ συνεχής
$f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)}$ συνεχής]

Για τη συνέχεια της f πρώτα την υπολογίζουμε

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x+f_n(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x+f(x)} \Rightarrow f^2(x)-f(x)-x=0$$

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$$
Αλλά $f_n(x)\geq 0$ $\Rightarrow f(x)=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$

εκτός αν $x=0$. γιατί τότε $f(0)=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 0}}{2}=1$
η οποία απορρίπτεται αφού $f_n(0)=0$ και
Δηλ. για $x=0$ η λύση είναι δευτεροβάθμιας
που είναι αποδεκτή είναι $\frac{1-\sqrt{1+4\cdot 0}}{2}=0$

Συνεπώς $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$

Άρα στο $[a,b]$ με $a>0$ f συνεχής + Dini
$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ στο $[a,b]$ με $a>0$

(iii) Στο $[0,1]$ f ασυνεχής στο $x=0$
άρα $f_n \not\rightrightarrows f$. στο $[0,1]$

Ασκήσεις

Άσκηση $p_n(x) = (n+1)(n+2)x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$

Εξετάστε την απλή ή ομοιόμορφη σύγκλιση. ~~Υπολογί~~ Ελέγξτε αν ισχύει $\lim \int p_n = \int \lim p_n$;

Λύση ~~...~~ $\forall x \in [0,1]$

$$\sqrt[n]{|p_n(x)|} = \sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{n+2}\; x \;\sqrt[n]{1-x} \longrightarrow x \quad \text{αν } x \in [0,1)$$

$$x<1 \Rightarrow p_n(x) \to 0$$

Αν $x=1$ $p_n(1) = 0 \longrightarrow 0$

Συνεπώς ~~...~~ $p_n \longrightarrow 0$

$$\int_0^1 p_n(x)\,dx = (n+1)(n+2)\left(\int_0^1 x^n - \int_0^1 x^{n+1}\right)$$

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 \not\to \int_0^1 0$$

Συνεπώς $p_n \not\rightrightarrows 0$. Εναλλακτικά

$$a_n = \sup_{[0,1]} |p_n(x) - 0| = (n+1)(n+2) \sup_{x \in [0,1]} x^n(1-x)$$

$$(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

$$= 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = \frac{n}{n+1}$$

$$a_n = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= (n+1)(n+2)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\,\frac{1}{n+1} \longrightarrow +\infty \quad \blacksquare$$

Άσκηση 4.7.2 $f_n(x) = 1 + \dfrac{x^n}{n!}$ στο $\mathbb{R}$, στο $[0,M]$, $M>0$.

Λύση $$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \quad \text{Άρα } f_n(x) \longrightarrow 1$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 1| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|^n}{n!} = +\infty \not\to 0 \quad \text{άρα } f_n \not\rightrightarrows 1 \text{ στο } \mathbb{R}$$

$$\sup_{x \in [0,M]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x \in [0,M]} \frac{|x|^n}{n!} = \frac{M^n}{n!} \longrightarrow 0$$

άρα $f_n \rightrightarrows 1$ στο $[0,M]$ $\blacksquare$

Άσκηση 4.7.8 Αν $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n \rightrightarrows f$ τότε $|f_n| \rightrightarrows |f|$

Λύση Επειδή $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}:$

$\forall n \geq n_0 \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \Rightarrow$

$$||f_n(x)| - |f(x)|| \leq |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

$\Rightarrow |f_n| \rightrightarrows |f|$ ∎

Άσκηση $f_n(x) = \begin{cases} e^{-nx} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ στο $[0, \infty)$

Λύση $\forall x > 0 \quad e^{-nx} = \frac{1}{e^{nx}} \to 0$, $f_n \to 0$

$a_n = \sup_{x \geq 0} |e^{-nx} - 0| = \sup_{x \geq 0} e^{-nx} \overset{e^{-nx} \downarrow}{=\!=} 1 \not\to 0$

$f_n \not\rightrightarrows 0$

Άσκηση $f_n(x) = n^4 x^n (1-x)^n$ στο $[0,1]$

$\forall x \in [0,1] \quad \sqrt[n]{|n^4 x^n (1-x)^n|} = |x| \, |1-x| < 1$

άρα $f_n \to 0$

$f_n'(x) = n^4 (n x^{n-1} (1-x)^n - x^n n (1-x)^{n-1}) =$

$= n^4 n x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-x-x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = \frac{1}{2}$

$a_n = \sup_{[0,1]} |f_n - 0| = n^4 \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

$\left(\sqrt[n]{n^4 \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^n}} = \sqrt[n]{n}^4 \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} < 1 \right)$

Ασκηση $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ $g_n(x) = (f_n(x))^2$ $x \in [0, \infty)$

$f_n(x) \longrightarrow x$ $a_n = \sup_x |f_n(x) - x| = \sup_{x \geq 0} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$

άρα $f_n(x) \rightrightarrows f(x) = x$

$g_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2 \longrightarrow x^2$

$a_n = \sup_{x \geq 0} |(x + \frac{1}{n})^2 - x^2| = \sup_{x \geq 0} (\frac{2}{n} x + \frac{1}{n^2}) = +\infty$

$g_n \not\rightrightarrows 0$

Γενικά αν $f_n, g_n \rightrightarrows f, g \not\Rightarrow f_n \cdot g_n \rightrightarrows fg$

Ασκηση $f_n(x) = \sqrt[3]{n}\, x\, (1 - x^2)^n$ $x \in [0,1]$

Λύση $\sqrt[n]{|f_n(x)|} = \sqrt[n]{\sqrt[3]{n}}\, \sqrt[n]{|x|}\, (1 - x^2)$

αν $x = 0$ $\sqrt[n]{|f_n(x)|} = 0 \to 0 < 1$

αν $x \in (0, 1]$ $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \longrightarrow 1 \cdot 1\, (1 - x^2) < 1$

άρα $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \longrightarrow 0$

$a_n = \sup_{x \in [0,1]} \sqrt[3]{n}\, x\, (1 - x^2)^n = \sqrt[3]{n} \sup_{x \in [0,1]} x (1 - x^2)^n$

$(x (1 - x^2)^n)' = (1 - x^2)^n + x n (1 - x^2)^{n-1} \cdot (-2x)$

$= (1 - x^2)^{n-1} (1 - x^2 - 2n x^2) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 1$ ή $x = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$a_n = \sqrt[3]{n} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} \right)^{1/2}$

$\longrightarrow 0 \cdot (e^{-1})^{1/2} = 0$

άρα $f_n \rightrightarrows 0$ $\boxed{}$

Άσκηση 4.7.17 $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$

f_n συνεχείς ~~θα~~ η $f_n \rightrightarrows f$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx .$$

Λύση $\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \right| =$

$$= \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(x) - f_n(x))\,dx \right| + \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx \right|$$

$$\leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x) - f_n(x)|\,dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f(x)|\,dx$$

Αλλά $f_n \rightrightarrows f$ άρα $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1$

$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$. Επίσης f_n συνεχής

η $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f$ συνεχής $\Rightarrow f$ φραγμένη

στο $[0,1]$ άρα $\exists M > 0 : \ |f(x)| \leq M \ \ \forall x \in [0,1]$

$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_2 \ \ \frac{M}{n} < \varepsilon/2$

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε $\forall n \geq n_0$

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \right| \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\varepsilon}{2}\,dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 M\,dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\blacksquare$

4.7.18 | Έστω $f_n(x) = x^n$ $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η f_n δεν συγκλίνει ομ. Έστω g συνεχής $: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι $g \cdot f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Λύση: Αν $x = 1$ $f_n(1) = 1 \longrightarrow 1$
Αν $0 \le x < 1$ $f_n(x) \longrightarrow 0$ $\Big\} \Rightarrow f_n \to f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$

Άρα $f_n \not\rightrightarrows f$ γιατί f_n συνεχής $\forall n$ & f ασυνεχής

$(g \cdot f_n)(x) = g(x) f_n(x) \longrightarrow g(x) f(x) = 0$ $\forall x$

Άρα $g f_n \longrightarrow 0$

Πρέπει $\forall \varepsilon > 0$ να βρούμε n_0 : $\forall n \geq n_0$ $|(g f_n)(x) - 0| < \varepsilon$

$\exists \delta > 0 :$ $\forall$ $x \in [1-\delta, 1]$ $|g(x) - \underset{\overset{\|}{0}}{g(1)}| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow |g(x) f_n(x) - g(1) f(1)| = |g(x)| \, |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} x^n \le \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

$\forall x \in [1-\delta, 1]$ αφού $|x^n| \le 1$

Όμως στο $[0, 1-\frac{\delta}{2}]$ $f_n \rightrightarrows 0$: Πράγματι

$a_n = \sup\limits_{x \in [0, 1-\frac{\delta}{2}]} x^n = (1-\frac{\delta}{2})^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

g συνεχής $\Rightarrow$ g φραγμένη, έστω $|g(x)| \le M$ $\forall x \in [0,1]$

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$: $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ (αφού $f_n \rightrightarrows 0$)

Άρα $\forall x \in [0,1]$ είτε $x \in [0, 1-\frac{\delta}{2}]$ οπότε

$|g(x) f_n(x) - 0| \le M \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$, είτε $x \in [1-\frac{\delta}{2}, 1]$

οπότε $|g(x) f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ από (*)

$\boxed{\text{ΟΚ}}$

$\underline{4.7.19}$ $f_n : X \to [0,1]$ $f : X \to [0,1]$ $f_n \rightrightarrows f$

Δείξτε ότι για κάθε συνεχή $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$(g \circ f_n) \rightrightarrows g \circ f$, και ότι αυτό δεν ισχύει αν

αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με το $\mathbb{R}$

__Λύση__ Η g ως συνεχής σε συμπαγές σύνολο (το $[0,1]$) είναι ομοιόμορφα συνεχής (Θεώρημα 3.4.12 σελ 85)

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ ώστε αν $|a-b| < \delta \Rightarrow |g(a)-g(b)| < \varepsilon$

Αλλά $f_n \rightrightarrows f$ άρα $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x)-f(x)| < \delta$ $\forall x$

$\Rightarrow$ $\forall n \geq n_0$ $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$

Αν αντί του $[0,1]$ έχουμε το $\mathbb{R}$ αυτό δεν ισχύει

π.χ. $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ $g(x) = x^2$

__Άσκηση__ ~~$f, g, \mathbb{R}, f_g$ συνεχείς : X → Y~~

~~Αν f_n, f~~ Αν $g, g_n : X \to Y$, X συμπαγής

και g συνεχής, και $f, f_n : Y \to Z$

και ισχύουν $g_n \rightrightarrows g$ και $f_n \rightrightarrows f$ Τότε

$g_n \circ f_n \rightrightarrows g \circ f$

__Λύση__ $|(g_n \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| = |g_n(f_n(x)) - g(f(x))|$

$$\leq \underbrace{|g_n(f_n(x)) - g(f_n(x))|}_{g_n \rightrightarrows g} + \underbrace{|g(f_n(x)) - g(f(x))|}_{g \text{ ομ. συνεχής στο } X}$$

ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$\forall f_n : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}$ θέτουμε $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$.

Η ακολουθία $(s_k(x))_{k=1}^{\infty}$ ονομάζεται σειρά της f_n

και αν συγκλίνει κατά σημείο στην $s(x)$
γράφουμε $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Αν $s_m \rightrightarrows s$ λέμε ότι η σειρά συγκλίνει

ομοιόμορφα.

<u>Θεώρημα Weierstrass</u> Θεωρούμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$, (X, d) μ.χ. και υποθέτουμε ότι $\exists\ M_n > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M_n\ \forall x \in X$

και $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

<u>Απόδειξη</u> Θα δείξουμε ότι η S_k είναι ομ. Cauchy

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{k} M_n\right)_{k=1}^{\infty} =: (t_k)_k$

είναι ακολουθία Cauchy άρα $\exists\ n_0 : \forall k, m \geq n_0$

$|t_k - t_m| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{k} M_n - \sum_{n=1}^{m} M_n\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{n=m+1}^{k} M_n < \varepsilon$

$|s_k(x) - s_m(x)| = \left|\sum_{n=m+1}^{k} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^{k} M_n < \varepsilon\ \forall x$

$\Rightarrow (S_k)$ ομ. Cauchy

Ορισμός Αν $f_n(x) = a_n x^n$ η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ονομάζεται δυναμοσειρά και αν $f_n(x) = a_n (x-a)^n$ η $\sum f_n(x) = \sum a_n (x-a)^n$ ονομάζεται δυναμοσειρά κέντρου a.

Θεώρημα Έστω ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Τότε

(i) η $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-R\ R]$ με $R < |x_0|$ και η $s(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ είναι συνεχής στο $(-|x_0|, |x_0|)$

(ii) $\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b$ για κάθε $[a\ b] \subseteq (-|x_0|\ |x_0|)$

(iii) $s'(x) = \sum_0^{\infty} (a_n x^n)' = \sum^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$

Απόδειξη (i) Έστω $R > 0$ με $R < |x_0|$ θέτω $r = \frac{R}{|x_0|} < 1$.

Έστω επίσης M φράγμα της $|a_n x_0^n|$ το οποίο υπάρχει γιατί η σύγκλιση της $\sum a_n x_0^n \Rightarrow a_n x_0^n \to 0$ άρα φραγμένη. Αλλά $\forall x \in [-R\ R]$

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left(\frac{R}{|x_0|}\right)^n$$
$$\leq M r^n$$

Άρα αν θέσουμε $M_n = M r^n$ ισχύει

$$|a_n x^n| \le M_n \quad \& \quad \sum M_n = M \sum_{0}^{\infty} r^n \overset{0<r<1}{=} \frac{M}{1-r} < \infty$$

Από το Θ. Weierstrass η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R\ R]$.

Αν $t \in (-|x_0|\ |x_0|)$ $\exists$ $R>0$: $t \in [-R\ R]$

& $[-R\ R] \subseteq (-|x_0|, |x_0|)$

Η $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ είναι συνεχής στο $[-R\ R]$

ως πολυώνυμο & $s_k \rightrightarrows \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ άρα η η σειρά είναι συνεχής στο $[-R\ R]$ άρα & στο t

(ii) προφανές: αφού η σύγκλιση είναι ομ.

$$\int_a^b s(x) = \int_a^b \lim_{k\to\infty} s_k(x) \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \overset{\text{πεπ. αθρ}}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_a^b a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx$$

γιατί η (*) λέει ότι το όριο υπάρχει & είναι το $\int_a^b s(x)dx$

~~Μάλιστα η σειρά συγκλίνει απόλυτα~~

$$\cancel{\sum_{k=0}^{\infty} \left|\int_a^b a_n x^n\right| dx \le \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b |a_n x^n|\, dx \le}$$

$$\cancel{= \sum_{0}^{\infty} \int_a^b |a_n x_0^n| \left(\frac{x}{x_0}\right)^n dx \le M(b-a) \sum_{0}^{\infty} r^n}$$

~~όπου~~ $\cancel{r = \frac{\max(|a|,|b|)}{|x_0|} < 1.}$

(iii) $|a_n x_0^n| \le M \Rightarrow |a_n x_0^{n-1}| \le \frac{M}{|x_0|} =: M'$

Άρα με $r = R/|x_0|$ $\quad 0<R<|x_0|$

$$\sum |n a_n x^{n-1}| = \sum \left| n a_n x_0^{n-1} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1} \right| \le \sum M' n r^{n-1} < \infty$$

(από κρ. λόγου, αφού $\frac{(n+1) r^n}{n r^{n-1}} = \frac{n+1}{n} r \to r < 1$)

Ασκήσεις

4.6.3 $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ σο $[0, a]$ ασο

Λύση $\frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ & $\sum \frac{1}{n(n+1)} < \infty$

4.6.2 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ συγκλίνει σο $[0, 1]$ αλλά όχι ομ.

Λύση $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \begin{cases} 0 & x=1 \\ \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x} & x \in [0, 1) \end{cases}$

$\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x} = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$

η $\begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο 1

άρα η σύγκλιση δεν είναι ομ.

Σεπ 2023 Αποδείξτε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 7^n x^n (1-2x)^n$ συγκλίνει ομ. στο $[0, 1/2]$ και εξηγήστε γιατί η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in [0, 1/2]$

Λύση Ψάχνουμε M_n ώστε $|7^n x^n (1-2x)^n| \leq M_n$ & $\sum M_n < \infty$. Άρα θέλουμε τα μικρότερα δυνατά M_n. Αυτά είναι τα $M_n = \sup_{x \in [0, 1/2]} |7^n x^n (1-2x)^n|$

$(x^n(1-2x)^n)' = n x^{n-1}(1-2x)^n + x^n n (1-2x)^{n-1}(-2)$

$= n x^{n-1}(1-2x)^{n-1}(1-2x-2x) = 0$

$\iff \begin{cases} x=0 \\ x=1/2 \end{cases}$ $x = 1/4$

Άρα $M_n = 7^n \frac{1}{4^n}\left(1-2\frac{1}{4}\right)^n$

$= 7^n \frac{1}{4^n}\frac{1}{2^n} = \left(\frac{7}{8}\right)^n$

$\sum M_n < \infty$ Άρα η σειρά συγκλίνει ομ. στο $[0, \frac{1}{2}]$

Το μερικό άθροισμα $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} 7^k x^k (1-2x)^k$

είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$

η $S_k \rightrightarrows f$. Άρα f συνεχής σε κάθε $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$

<u>Φεβ. 22</u> Δείξτε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$

είναι συνεχής στο $x_0 = e+\pi$.

<u>Υπόδ</u> Αποδείξτε πρώτα ότι $0 < 1-\cos x \leq x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

<u>Λύση</u> Έστω $g(x) = x^2 + \cos x - 1$

$g'(x) = 2x - \sin x = 0 \iff$

$\sin x = 2x \Rightarrow \boxed{x=0}$

διότι $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ οπότε $\frac{\sin x}{x} \neq 2$

$g''(x) = 2 - \cos x \geq 0$ άρα η g έχει τ. ελάχιστο στο $x=0$

$\Rightarrow \inf g(x) = \min\left\{\lim_{x\to\pm\infty} g(x), g(0)\right\}$

$= \min\{+\infty, 0\} = 0$

Άρα $g(x) \geq 0 \Rightarrow 1-\cos x \leq x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right| = 1-\cos\frac{x}{n} \leq \frac{x^2}{n^2}$

Επειδή $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{n^2} = +\infty$ δεν μπορούμε να

εφαρμόσουμε το Θ. Weierstrass σε όλο το $\mathbb{R}$

Όμως εμείς θέλουμε τη συνέχεια στο $x_0 = e+\pi < 9$

Αν λοιπόν περιοριστούμε στο [0 9]
η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη γιατί

$$M_n = \sup_{[0\ 9]} \frac{x^2}{n^2} = \frac{81}{n^2}$$

& $\sum M_n < \infty$ οπότε εφαρμόζεται το
Θ. Weierstrass στο [0 9]

Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο [0 9]
ως ομ. όριο συνεχών $\Rightarrow$ f συνεχής στο x_0 ∎

<u>Ιούνιος 2016</u>) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} x$ στο [-M M]

<u>Λύση</u> $M_n = \sup\limits_{[-M M]} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} x \right| \le \frac{M}{n^2}$

(εδώ χρησιμοποιούμε την $|\sin(nx)| \le 1$ (ή $\sin(x) \le |nx|$))

$\sum M_n < \infty$ άρα η σύγκλιση στο [-M M]

είναι ομοιόμορφη

(Ασκ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{(\log n)^2}\right)}{n} \frac{x^2}{1+x^2}$ στο $\mathbb{R}$)

Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $C(X)$
X συμπαγής μχ

Για (X,d) συμπαγή ορίζουμε

$$C(X)=\{f: X \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}\} \text{ η } \|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

(κάθε συνεχής συνάρτηση σε συμπαγή μχ έχει μέγιστο)

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα
$[\|f\|_\infty \geq 0, \quad \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f=0 \quad \|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\cdot\|f\|_\infty$
$\& \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty]$

Ο $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach δηλ πλήρης
γραμμικός χώρος με νόρμα. Πράγματι, αν $f_n \in C(X)$
$(f_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

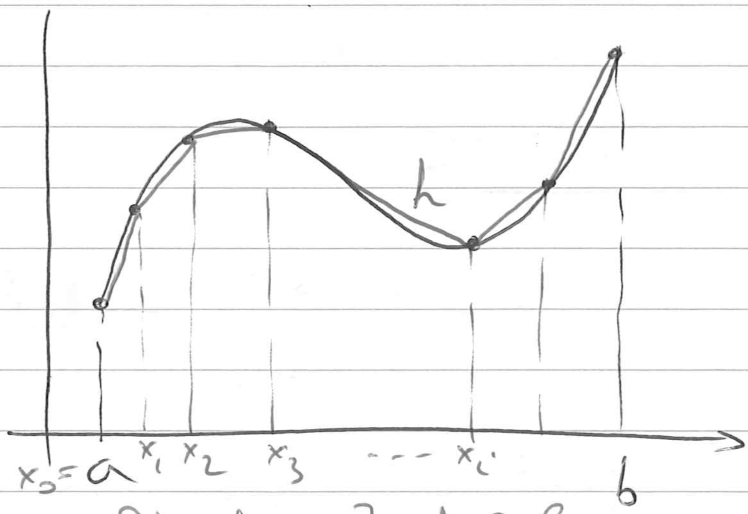
$\Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$ δηλ f_n ομ. Cauchy
Άρα $\exists f : X \to \mathbb{R}$ με $\left.\begin{array}{l} f_n \rightrightarrows f \\ f_n \text{ συνεχής } \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow f$ συνεχής

άρα $f \in C(X)$. Και $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| =$

$= a_n \to 0$. Άρα $f_n \xrightarrow{(C(X), \|\cdot\|_\infty)} f$

Θεώρημα (Προσέγγισης Weierstrass)

$\forall f \in C([a,b])$ η $\forall \varepsilon>0 \ \exists$ πολυώνυμο $p \in C([a,b])$
ώστε $\|f-p\|_\infty < \varepsilon$. Δηλ. $\exists p_n$ πολυώνυμα
ώστε $p_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow$ Το σύνολο των πολυωνύμων
είναι πυκνό στον χώρο $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.



h τεθλασμένη: $\exists\ A, B$ & c_i ώστε

$$h(x) = Ax + B + \sum_{i=0}^{n-1} c_i |x - x_i|$$

x_i οι κορυφές της τεθλασμένης

Το $Ax+B$ είναι πολυώνυμο άρα αρκεί να δείξω ότι προσεγγίζεται η $|x - x_i|$, ισοδύναμα η $|x|$ ομοιόμορφα. Αρκεί αυτό να γίνει στο $[-1\ 1]$

(αν π.χ. χρειαζόμαστε προσέγγιση της $|x|$ στο $[a,b]$ τότε αν $p_n \rightrightarrows |x|$ στο $[-1\ 1]$ ~~...~~ βρίσκουμε

$\varphi : [ab] \longrightarrow [-1\ 1]$ γραμμική, 1-1, επί. Π.χ.

$\varphi(t) = \lambda t + \mu$ με $\varphi(a) = -1$ $\varphi(b) = 1$

$$\left.\begin{aligned} \lambda a + \mu &= -1 \\ \lambda b + \mu &= 1 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda(a-b) &= -2 \\ \lambda &= \frac{2}{b-a} \end{aligned}$$

& $\mu = 1 - \lambda b = 1 - \frac{2b}{b-a} = \frac{b-a-2b}{b-a} = -\frac{a+b}{b-a}$

$\varphi(t) = \frac{2}{b-a} t - \frac{a+b}{b-a}$. Οπότε

$p(\varphi(x)) \rightrightarrows |x|$ στο $[ab]$ & $p \circ \varphi$ πάλι πολυώνυμο.)

Θέτω $p_0(x) = 0$

$$p_{n+1}(x) = \frac{p_n(x)^2 + (1-x^2)}{2}$$

Βήμα 1 $0 \le p_n(x) \le 1$

[φανερά $p_n(x) \ge 0$. $p_0(x) \le 1$, αν $p_n(x) \le 1$

τότε $p_{n+1}(x) \le \frac{1+1-x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \le 1$]

Βήμα 2 $p_n(x) \le p_{n+1}(x)$

[$p_1(x) = \frac{0 + (1-x^2)}{2} = \frac{1}{2}(1-x^2) \ge 0 = p_0(x)$

αν $p_n(x) \le p_{n+1}(x) \xRightarrow{p_n \ge 0} p_n^2(x) \le p_{n+1}^2(x)$

$$\Rightarrow \frac{p_n(x)^2 + (1-x^2)}{2} \le \frac{p_{n+1}(x)^2 + (1-x^2)}{2}$$

$$\Rightarrow p_{n+1}(x) \le p_{n+2}(x) \text{]}$$

Άρα συγκλίνει για κάθε x (αύξουσα & φρ. από το 1)

Έστω είναι $p(x) \Rightarrow p(x) = \frac{p(x)^2 + 1 - x^2}{2}$

$\Rightarrow p(x)^2 - 2p(x) + 1 - x^2 = 0$

$\Rightarrow p(x) = 1 \pm |x|$. Η $1 + |x| > 1$ απορρίπτ.

$\Rightarrow p(x) = 1 - |x|$. Άρα $p_n(x) \to 1 - |x|$

συνεχής! Από Dini $p_n \rightrightarrows 1 - |x|$

$$\Rightarrow \underbrace{1 - p_n(x)}_{\text{πολυώνυμο}} \rightrightarrows |x|$$

$\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

5.2.1 Αν $f \in C[0,1]$ και $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall n = 0,1,\dots$

$\Rightarrow f = 0$

Λύση $\int_0^1 p_n(x) f(x)\,dx = 0 \quad \forall$ πολυώνυμο p_n

άρα αν $p_n \rightrightarrows f \Rightarrow p_n(x)\cdot f(x) \rightrightarrows f^2(x)$

Πράγματι $\|p_n f - f^2\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)(p_n(x) - f_n(x))|$

$\cancel{\leq \sup|f(x)| \sup |p_n}$ $= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\cdot|p_n(x) - f(x)|$

$\underset{\text{άρα φρ}}{\overset{f\text{ συνεχής}}{=\!=}} \sup_{x\in[0,1]} (\|f\|_\infty |p_n(x) - f(x)|) =$

$= \|f\|_\infty \sup |p_n - f| = \|f\|_\infty \|p_n - f\|_\infty \to 0$

Άρα $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$ $\boxtimes$

5.2.2 $f \in C[0,1]$, $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall n = 0,2,4,6,\dots$

$\Rightarrow f = 0$

Λύση Θέτουμε $\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,1] \\ f(-x) & x \in [-1,0) \end{cases}$

$\tilde f$ άρτια άρα $\int_{-1}^1 x^n \tilde f(x)\,d = 0 \quad \forall n = 1,3,5,\dots$

λόγω $x^n \tilde f(x)$ περιττή. Αλλά και για $n = 0,2,4,\dots$ $\int_{-1}^1 x^n \tilde f(x)\,dx$

$= \int_{-1}^0 x^n \tilde f(x)\,dx + \int_0^1 x^n \tilde f(x)\,dx =$

$\overset{x=-t}{=\!=\!=} \int_1^0 (-t)^n \tilde f(-t)(-1)\,dt + 0$

$= -\int_1^0 t^n f(t)\,dt = \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0 \rightarrow$ Άσκ 5.2.1

$\boxtimes$

5.2.4) $f(x) = \sin\frac{1}{x} : (0, 1] \to \mathbb{R}$

f φραγμένη & συνεχής. Δείξτε ότι $\nexists$ πολυώνυμα p_n ώστε $p_n \rightrightarrows f$ στο $(0, 1]$.

Λύση: Αν υπήρχαν $p_n \rightrightarrows f$ στο $(0, 1]$

για $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $|p_n(x) - f(x)| \leq 1$ $\forall x \in (0, 1]$

$\Rightarrow |p_n(x)| \leq 1 + |f(x)| \leq 2$

Αλλά p_n πολυώνυμο άρα $\exists \lim_{x \to 0^+} |p_n(x)| \leq 2$

$\xRightarrow{p_n \text{ συνεχής}} |p_n(0)| \leq 2$. Άρα η $p_n(0)$ έχει συγκλίνουσα

υπακολουθία (ως φραγμένη $-2 \leq p_n(0) \leq 2$)

Έστω $p_{k_n}(0) \longrightarrow \ell \in [-2, 2]$

Θέτω $q_n(x) = p_{k_n}(x)$ πολυώνυμα & $q_n \rightrightarrows f$

αφού $\|q_n - f\|_\infty = \|p_{k_n} - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$ & $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $|q_n(0) - \ell| < \varepsilon/3$

άρα $|q_{n_0}(0) - \ell| < \varepsilon/3$, q_{n_0} συνεχής (ως πολυώνυμο)

άρα $\exists \delta > 0$: αν $0 < x < \delta \Rightarrow |q_{n_0}(x) - q_{n_0}(0)| < \varepsilon/3$

Άρα για $0 < x < \delta$ $|f(x) - \ell| \leq |f(x) - q_{n_0}(x)| + |q_{n_0}(x) - q_{n_0}(0)| +$

$+ |q_{n_0}(0) - \ell|$

$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \ell$

άτοπο $\blacksquare$

5.2.25 | Υπό τις προϋποθέσεις του Weierstrass

(i) δείξτε ότι αν $f<g$ στο $C[a,b]$ τότε $\exists$ πολυώνυμο p ώστε $f<p<g$.

(ii) Δείξτε ότι $\forall f \in C[a,b]$ $\exists$ p_n πολυώνυμα ώστε $p_n \rightrightarrows f$ & $p_n \le p_{n+1}$

Λύση (i) Θέτουμε $h = \frac{f+g}{2}$, $f<h<g$

$\Rightarrow \frac{g-f}{2} > 0$ αληθές

Θέτουμε $\varepsilon = \min\limits_{x \in [a,b]} \frac{g-f}{2}(x)$. Το min υπάρχει

αφού f, g συνεχείς. $\varepsilon > 0$ αλλιώς $\exists x_0 : g(x_0) = f(x_0)$ άτοπο

$\exists$ p πολυώνυμο $\|p-h\|_\infty < \varepsilon$ δηλ.

$\left|\frac{1}{2}(f+g) - p\right| < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$

$-\varepsilon + p < \frac{1}{2}(f+g) < \varepsilon + p$

Έχουμε $p > \frac{1}{2}(f+g) - \varepsilon \geq \frac{1}{2}(f+g) - \frac{g-f}{2}(x)$
$= f(x)$

και $p < \frac{1}{2}(f+g) + \varepsilon \leq \frac{1}{2}(f+g) + \frac{g-f}{2}(x)$
$= g(x)$

(ii) Βρίσκουμε (από το (i)) πολυώνυμο p_n ώστε $f - \frac{1}{n} < p_n < f - \frac{1}{n+1}$ $(*)$

(αφού $f - \frac{1}{n} < f - \frac{1}{n+1}$)

Οπότε $f - \frac{1}{n+1} < p_{n+1} < f - \frac{1}{n+2}$

άρα $p_n < p_{n+1}$. Φανερά από την $(*)$ $\Rightarrow$

$p_n \rightrightarrows f$

Εισαγωγή στην έννοια του μέτρου

Αναζητούμε μέθοδο να «μετράμε» το «μήκος» υποσυνόλων A του $\mathbb{R}$.

Αν $A = [a\ b)$ θέτουμε «φυσιολογικά» το μήκος του A να είναι $\ell(A) = b-a$.

και αν $A = [a_1\ b_1) \cup [a_2, b_2) \cup \cdots \cup [a_n\ b_n)$ με τα $[a_j\ b_j)$ ξένα θέτουμε

$$\left(\ell(A) =:\right) \mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} [a_j\ b_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} \ell([a_j\ b_j))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

Το «μήκος» αυτό δεν το συμβολίζουμε ακόμα με μ, αλλά με μ^* γιατί θα δούμε ότι παρουσιάζει ατέλειες.

Ο ορισμός όμως είναι καλός για πεπερασμένες ενώσεις τέτοιων διαστημάτων πχ
$\ell([0\ 5)) = 5-0=5$. Αλλά $[0\ 5) = [0\ \sqrt{2}) \cup [\sqrt{2}\ 3) \cup [3\ 5)$

και $\mu^*([\ ) \cup [\ ) \cup [\ )) = (\sqrt{2}-0) + (3-\sqrt{2}) + (5-3) = 5$

Γενικά, αν $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ τότε
$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{N} [x_{j-1}, x_j)\right) = \sum (x_j - x_{j-1}) = x_N - x_0 = b-a$$
$$= \ell([a\ b))$$

Για άπειρο πλήθος ξένων $[a_j\ b_j)$ θέτουμε

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\ b_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \quad \text{αν η σειρά συγκλίνει.}$$

Αν όχι, επειδή $b_j - a_j \geq 0$, θέτουμε $\mu^*(\cup \ldots) = +\infty$

Για τον τροπο «μετρησης» που προσπαθουμε να φτιαξουμε ειναι λογικό να θελουμε

αν $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(ότι η αν θα σημαίνει το μ^* στην γενική περίπτωση)

καθως και $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ ή $\mu^*(\bigcup A_j) \leq \sum \mu^*(A_j)$ αφού μπορουν να εχουν επικαλυψεις

Οποτε πχ αφου $\mathbb{Q} \cap [0\ 1) \subseteq [0\ 1)$

περιμένουμε $\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0\ 1)) \leq \mu^*([0\ 1)) = 1$.

Μποραμε ομως να αλλαξουμε το $[0\ 1)$ στα δεξιά.

πχ. $\mathbb{Q} \cap [0\ 1) = \{q_1, q_2 \ldots\}$ οπότε

$\forall\ \varepsilon > 0$

$$q_j \in [q_j, q_j + \frac{\varepsilon}{2^j}) \quad \text{οπότε}$$

$$\mathbb{Q} \cap [0\ 1) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [q_j\ q_j + \frac{\varepsilon}{2^j})$$

οπότε αν ισχυει $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} [q_j\ q_j + \frac{\varepsilon}{2^j})) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*[q_j\ q_j + \frac{\varepsilon}{2^j})$

κατι που φαίνεται λογικό, αφου τα διαστήματα ανά εχουν επικαλυψεις

θα πρεπει να δεχθουμε οτι $\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0\ 1)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$

Και παιρνοντας inf ως προς ε

$\Rightarrow \mu^*(\mathbb{Q} \cap [0\ 1)) = 0$.

Εστιάστε στη διαδικασία, η οποία μας δείχνει ενα τρόπο. Να καλύψουμε το συνολο A που θελουμε να μετρησουμε με διαστήματα $[a_j\ b_j)$ και να αποδώσουμε τιμή στο $\mu^*(A)$ το inf των $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$ ως προς όλες τις καλύψεις.

Ορισμός $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j) \right\}$$

Το $\mu^*(A)$ το ονομάζουμε εξωτερικό μέτρο του A.

Θα δούμε (αν προλάβουμε) ότι το μ^* ~~είναι~~ έχει την εξής ατέλεια. Υπάρχουν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ξένα μεταξύ τους ($A \cap B = \emptyset$) ώστε

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad (1)$$

κάτι που δεν θα θέλαμε να ισχύει (θα θέλαμε "=")

~~...~~ Μάλιστα, αφού $A \cap B = \emptyset$ σε αυτό το παράδειγμα, αν θέσουμε $E = A \cap B$ η (1) γράφεται

$$\mu^*(E) < \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (2)$$

Την (2) την καταλαβαίνουμε ως <u>ελάττωμα</u> του συνόλου A. Το ελάττωμα αυτό το περιγράφουμε ως εξής: το A είναι «ελαττωματικό» όταν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (2). Αν το A δεν έχει τέτοιο «ελάττωμα» το ονομάζουμε

<u>μετρήσιμο</u> («καλό»)

Ορισμός (Καραθεοδωρή) Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται μετρήσιμο αν $\forall E \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$ και ορίζουμε το μέτρο Lebesgue $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$

Δηλαδή το μέτρο μας θα «μετράει» μόνο «καλά» σύνολα.

Αν υπάρχουν! Υπάρχουν;

$\boxed{\text{Ιδιότητες εξωτερικού μέτρου}}$

Πρόταση (i) (μονοτονία): $\forall A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(ii) (υποπροσθετικότητα) $\forall A_n \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Απόδειξη (i)

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)\right\} \supseteq \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)\right\}$$

$\Rightarrow \inf \qquad \leq \inf$

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(ii) Έστω $\varepsilon>0$. $\forall A_n$ βρίσκουμε διαστήματα $(I_{nj})_{j=1}^{\infty}$ της μορφής $[a\ b)$ ώστε $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nj}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{nj}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Όμως $\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_{n=1} \bigcup_{j=1} I_{nj}$, άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{nj}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

$\boxed{}$

~~Πρόταση~~ $\cancel{\mu^*((a\ b)) = \mu^*([a\ b)) = \mu^*((a\ b]) = \mu^*([a\ b]) = b-a}$

~~Βήμα 1~~ $\cancel{\mu^*([a\ b)) = b-a}$

Λήμμα Αν $a_j < b_j$ $\forall j = 1, \dots, N$ ώστε $[a, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} [a_j\ b_j)$ τότε $\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) \ge b-a$

Απόδειξη Επαγωγή. Αν $N=1$ $[a\ b) \subseteq [a_1\ b_1)$ οπότε $a_1 \le a < b \le b_1 \Rightarrow b_1 - a_1 \ge b-a$.
Έστω ότι ισχύει όποτε καλύπτουμε το $[a\ b)$ από N διαστήματα. Έστω τώρα ότι

$$[a\ b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N+1} [a_j\ b_j). \quad a \in [a\ b) \subseteq \bigcup_{1}^{N+1} [a_j\ b_j)$$

άρα $\exists\, j_0$ ώστε $a \in [a_{j_0}\ b_{j_0})$. Αν $b_{j_0} > b$ τότε

$$\sum_{1}^{N+1} (b_j - a_j) \ge b_{j_0} - a_{j_0} > b-a$$

Έστω ότι $a < b_{j_0} < b$. Το διάστημα $[b_{j_0}\ b)$ καλύπτεται (όχι από το $[a_{j_0}\ b_{j_0})$) αλλά από τα υπόλοιπα άρα

$$[b_{j_0}\ b) \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \ne j_0}}^{N+1} [a_j\ b_j).$$ Αυτά είναι N το πολύ.

Άρα $$\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne j_0}}^{N} (b_j - a_j) \ge b - b_{j_0} \xRightarrow{+b_{j_0}-a_{j_0}} \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) \ge b - a_{j_0} > b-a$$

$\boxed{}$

Πρόταση $\mu^*([a b)) = b-a$

Απόδειξη $[a b) \subseteq [a b)$ άρα $\mu^*([a b)) \le b-a$ εξ ορισμού

Για κάθε κάλυψη $[a b) \subseteq \bigcup_1^\infty [a_j b_j)$

$\forall \varepsilon > 0$ με $0<\varepsilon<b-a$ $[a, b-\varepsilon] \subseteq [a b) \subseteq \bigcup_1^\infty [a_j b_j)$

Από συμπάγεια $\exists N \in \mathbb{N}$: $[a\ b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_1^N [a_j b_j)$

$$\Rightarrow [a\ b-\varepsilon) \subseteq \bigcup_1^N [a_j b_j) \Rightarrow \sum_1^N (b_j-a_j) \ge b-\varepsilon-a$$

$$\Rightarrow \sum_1^\infty (b_j - a_j) \ge b-\varepsilon-a \xrightarrow[\text{προς όλες τις καλύψεις}]{\inf \text{ ως}}$$

$$\mu^*([a b)) \ge b-\varepsilon-a, \quad \varepsilon \to 0^+ \quad \blacksquare$$

Πρόταση $\mu^*([a b)) = \mu^*((a b)) = \mu^*([a b]) = \mu((a b]) = b-a$

Απόδειξη, $\forall \varepsilon > 0$

$$[a+\varepsilon\ b) \subseteq (a b) \subseteq (a b] \subseteq [a b] \subseteq [a, b+\varepsilon)$$

$$\xrightarrow{\text{μονοτονία}} b-a-\varepsilon \le \mu^*(a b) \le \mu^*(a b] \le \mu^*[a b] \le b+\varepsilon-a$$

$\varepsilon \to 0^+$ $\blacksquare$

Πόρισμα Αν A αριθμήσιμο $\Longrightarrow \mu^*(A) = 0$

Αποδ. $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty [x_i\ x_i]$

$$\xrightarrow{\text{υποπρ}} 0 \le \mu^*(A) \le \sum_1^\infty \mu[x_i\ x_i] = \sum_1^\infty 0 = 0$$

$\blacksquare$

Πόρισμα: Το $[0,1]$ (και το $\mathbb{R}$) δεν είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Αν ήταν θα έπρεπε $0 = \mu^*[0,1] = 1$ άτοπο $\boxed{}$

Άσκηση 6.22| Δείξτε ότι $\forall E \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U \ \& \ U \text{ ανοικτό}\}.$$

Λύση: $E \subseteq U \Rightarrow \mu^*(E) \le \mu^*(U) \quad \forall\, U \supseteq E$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \le \inf\{\mu^*(U) : U \supseteq E\}$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $I_j = [a_j, b_j)$ ώστε $E \subseteq \bigcup_1^\infty I_j$

και $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \le \mu^*(E) + \varepsilon$,

θέτω $U = \bigcup_1^\infty (a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j) \supseteq E$

$$\mu^*(U) \underset{\text{προσθ}}{\overset{\text{υπο-}}{\le}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j - a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) = \left(\sum_1^\infty \ell(I_j)\right) + \varepsilon$$

$$\le \mu^*(E) + \varepsilon + \varepsilon, \quad \varepsilon \to 0^+ \ \boxed{}$$

Άσκηση 6.24| Αν $d(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\}$

και $d(A,B) > 0 \Rightarrow \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Λύση: Στον ορισμό του μ^* είχαμε

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)\right\}$$

Αν πάρουμε $N \in \mathbb{N}$ η θέσουμε $r = \frac{b-a}{N}$

και αντικαταστήσουμε <u>κάθε</u> $[a\ b)$ στον παραπάνω ορισμό με $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{N} [a+(k-1)r, a+kr)$

Το άθροισμα $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \ell[a_j, b_j)$ δεν αλλάζει αφού $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \ell([a+(k-1)r, a+kr)) = b-a$

Άρα μπορούμε να γράψουμε ότι $\forall\, r>0$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)\ \&\ b_j - a_j < r \right\}$$

Οπότε, αν επιλέξουμε $0 < r < d(A,B)$

στον ορισμό του $\mu^*(A\cup B) = \left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : \right.$

$\left. : A\cup B \subseteq \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j) \text{ με } b_j - a_j < r \right\}$

τα διαστήματα $[a_j, b_j)$ είτε τέμνουν το A είτε το B. Διότι για να τέμνουν και τα δύο θα πρέπει $b_j - a_j \geq d(A,B)$

Για ε βρίσκουμε κάλυψη του $A\cup B$ ώστε

$$\mu^*(A\cup B) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) \quad \text{με } b_j - a_j < r$$

$$\| $$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ [a_j, b_j)\cap B = \emptyset}}^{\infty} \ell[a_j, b_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ [a_j, b_j)\cap A = \emptyset}}^{\infty} \ell[a_j, b_j) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

$\Longrightarrow \mu^*(A\cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Η αντίστροφη είναι η υποπροσθετικότητα $\boxed{}$

Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Υπενθύμιση: A μετρήσιμο αν $\forall E \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad (*)$$

Οικογένεια μετρήσιμων $\mathcal{M}$.
Μέτρο Lebesgue: $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$.

Η $\mathcal{M}$ δεν είναι κενή γιατί φανερά η $(*)$ ισχύει αν $A = \mathbb{R}$ ή αν $A = \emptyset$, άρα $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$

Πρόταση $\mu^*(A) = 0 \implies A \in \mathcal{M}$

Απόδειξη $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $E \cap A \subseteq A \implies \mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) \implies \mu^*(E \cap A) = \emptyset$

& $E \cap A^c \subseteq E \implies \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A)$. Η αντίστροφη είναι η υποπροσθετικότητα $\boxtimes$

Η $\mathcal{M}$ έχει "πολλά" σύνολα

Ορισμός (άλγεβρα συνόλων) Μία μη κενή οικογένεια $\mathcal{A}$ λέγεται άλγεβρα συνόλων στο $\mathbb{R}$ αν (i) $\forall A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

Αν ισχύουν τα παραπάνω για μια οικογένεια $\mathcal{A}$ τότε επειδή $A\cap B = (A^c \cup B^c)^c \Rightarrow A\cap B \in \mathcal{A}$ για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$

Ή με επαγωγή $\bigcup_{j=1}^{N} A_j$, $\bigcap_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{A}$

εάν $A_j \in \mathcal{A}$ $\forall j$.

<u>Πρόταση</u> $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$

<u>Αποδ.</u>

$\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$

$= \mu^*(E\cap A^c) + \mu^*(E\cap (A^c)^c) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ $\blacksquare$

<u>Πρόταση</u> $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A\cup B \in \mathcal{M}$

<u>Απόδειξη</u> Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, αφού A μετρήσιμο

$\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$ $\xrightarrow{B \text{ μετρήσιμο}}$

$\mu^*((E\cap A)\cap B) + \mu^*((E\cap A)\cap B^c) + \mu^*((E\cap A^c)\cap B) + \mu^*((E\cap A^c)\cap B^c)$

$= \mu^*(E\cap (A\cap B)) + \mu^*(E\cap (A\cap B^c)) + \mu^*(E\cap (A^c\cap B)) +$ (*)
$+ \mu^*(E\cap (A\cup B)^c)$

όμως ~~...~~ $E\cap (A\cup B) = E\cap (A\cap B) \cup E\cap (A\cap B^c) \cup (E\cap (A^c\cap B))$

$\Rightarrow \mu^*(E\cap (A\cup B)) \le \mu^*(-\|-) + \mu^*(-\|-) + \mu^*(-\|-)$

Επιστρέφοντας στην (*)

$\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap (A\cup B)) + \mu^*(E\cap (A\cup B)^c)$

$\blacksquare$

Άρα η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα.

<u>Ορισμός</u> (σ-άλγεβρα) Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ λέγεται σ-άλγεβρα αν

(i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (ii) $\forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

<u>Πρόταση</u> Αν $\mathcal{A}$ άλγεβρα τότε

η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα $\Longleftrightarrow$ $\forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ <u>ξένα ανά δύο</u> ισχύει $\bigcup A_n \in \mathcal{A}$.

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" προφανές

"$\Longleftarrow$" Έστω $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n$ (όχι απαραίτητα ξένα)

Θέτουμε $\overset{B_1 = A_1}{}$ $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$. B_n ξένα αφού

από το B_n έχουν εξαιρεθεί όλα τα προηγούμενα

[$n < m$ και $x \in B_n \Rightarrow x \in A_n$ αλλά $B_m = A_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j$, $x \in \bigcup_{j=1}^{m-1} A_j \Rightarrow x \notin B_m$]

Άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ διότι $B_n = A_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)^c$ η $\mathcal{A}$ άλγεβρα

<u>Ισχύει</u> $\bigcup B_n = \bigcup A_n$ [$B_n \subseteq A_n \Rightarrow \bigcup B_n \subseteq \bigcup A_n$

αν $x \in \bigcup A_n$ έστω A_{n_0} το πρώτο από τα A_n που περιέχει το x. Άρα $x \in A_{n_0}$ αλλά $x \notin A_n$ για $n < n_0$. Άρα $x \in B_{n_0} = A_{n_0} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0-1} A_j$

$\Rightarrow x \in \bigcup B_n \Rightarrow \bigcup A_n \subseteq \bigcup B_n$]

Συνεπώς $\bigcup A_n = \bigcup B_n \in \mathcal{A}$ $\boxed{\text{ΟΕΔ}}$

Θεώρημα (Καραθεοδωρή) Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και το μέτρο Lebesgue μ είναι αριθμήσιμα προσθετικό, δηλ. $\forall A_n$ ξένα και μετρήσιμα ισχύει $\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι αν A_n ανά δύο ξένα και $A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$

Θέτουμε $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ και $B = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$.

Φανερά $B_n \in \mathcal{M}$ (αφού $\mathcal{M}$ άλγεβρα)

$\boxed{B_n \subseteq B_{n+1}} \subseteq B \Rightarrow \boxed{B^c \subseteq B_n^c}$

Θέλουμε $B \in \mathcal{M}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Τότε παρατηρούμε ότι $\mu^*(E \cap B_n) \overset{A_n \in \mathcal{M}}{=\!=} \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c)$

$\underset{\text{γιατί } A_n \text{ ξένα}}{\overset{B_n \cap A_n = A_n}{=\!=}} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1})$

$\overset{\text{Επαγωγή}}{=\!=} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \dots + \mu^*(E \cap A_1)$

Δηλαδή $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$.

Έτσι έχουμε

$$\mu^*(E) \overset{B_n \in \mathcal{M}}{=\!=} \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \underset{B^c \subseteq B_n^c}{\geq}$$

$$\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B^c) \geq$$

~~υποπροσθετικότητα~~

$$n \longrightarrow \infty \Longrightarrow \mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E\cap A_j) + \mu^*(E\cap B^c)$$

$$\xrightarrow{\text{υποπροσθετικότητα}} \geq \mu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(E\cap A_j)\Big) + \mu^*(E\cap B^c) \qquad (*)$$

$$= \mu^*\Big(E\cap \bigcup_{1}^{\infty} A_j\Big) + \mu^*(E\cap B^c)$$

$$= \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c)$$

$$\Longrightarrow B\in\mathcal{M}$$

Αν τα A_n είναι ξένα θέτουμε στην προηγούμενη $E=\bigcup A_n$ & παίρνουμε από την $(*)$ ότι

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(A_j) + 0$$

(η αντίστροφη είναι υποπροσθετικότητα) ∎

Πρόταση: κάθε διάστημα είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη: Αρκεί $[a,b)\in\mathcal{M}$ (πχ $(a,b)=[a,b)\cap\{a\}^c$)

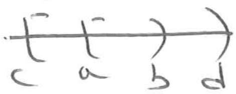
Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$ θέλουμε $\mu^*(E)=\mu^*(E\cap[a,b))+\mu^*(E\cap[a,b)^c)$

Αν E διάστημα έστω $E=[c,d)$ ισχύει

πχ αν $c<a<d<b$

$d-c=(d-a)+a-c=d-c$ ✓

$c<a<b<d$ $\quad \mu^*(E\cap[a,b))+\mu^*(E\cap[a,b)^c)=$



$= b-a+\mu^*[c,a)+\mu^*[b,d)$ από Άσκ 6.24

$= b-a+a-c+d-b=d-c$ κ.λ.π.

Παίρνουμε τώρα $\varepsilon>0$ κ $I_n=[a_n, b_n)$ ώστε

$$\mu^*(E)+\varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_n \cap [a,b)) + \mu^*(I_n \cap [a,b)^c)$$

$$\geq \mu^*(E\cap [a,b)) + \mu^*(E \cap [a,b)^c)$$

διότι τα $I_n \cap [a,b)$ είναι διαστήματα που καλύπτουν το $E\cap[a,b)$ κ τα $I_n\cap[a,b)^c$ είναι διαστήματα που καλύπτουν το $E\cap[a,b)^c$

υποπρ.

$$\geq \mu^*\left(\bigcup I_n \cap [a,b)\right) + \mu^*\left(\bigcup I_n \cap [a,b)^c\right)$$

$$\geq \mu^*(E\cap[a,b)) + \mu^*(E\cap[a,b)^c)$$

Άρα η $\mathcal{M}$ περιέχει ανοικτά κ κλειστά διαστήματα και μπορούμε να κάνουμε συνολοθεωρητικές πράξεις. ~~Δηλαδή~~ πχ. η $\mathcal{M}$ περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$, άρα κ τα κλειστά.

<u>Πρόταση</u> Αν $A, B \in \mathcal{M}$, $A\supseteq B$, $\mu(B)<\infty \Rightarrow$
$\mu(A\setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

$[\ A = (A\setminus B)\cup B \Rightarrow \mu(A) = \mu(A\setminus B)+\mu(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu(A)-\mu(B) = \mu(A\setminus B)\ ]$

Πρόταση $A_n \uparrow$ μετρήσιμα $(A_n \subseteq A_{n+1})$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

[Θέτουμε $A_0 = \emptyset$ και $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

B_n ξένα και $\bigcup B_n = \bigcup A_n$ Άρα

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left(\bigcup B_n\right) = \sum_1^\infty \mu(B_n) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_1^N \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_1^N (A_n \setminus A_{n-1})\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).]$$

Πρόταση $A_n \downarrow \in \mathcal{M}$ και $\exists n_0 : \mu(A_{n_0}) < \infty$

$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_1^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

[$\forall k > n_0$ θέλω $F_k = A_{n_0} \setminus A_k \uparrow$

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_0+1}^\infty F_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)\right)$$

διότι $A_n \subseteq A_{n_0} \Rightarrow \mu(A_n) < \infty$

$$\| $$

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_0+1}^\infty (A_{n_0} \cap A_k^c)\right) = \mu\left(A_{n_0} \cap \bigcup_{k=n_0+1}^\infty A_k^c\right) =$$

$$= \mu\left(A_{n_0} \cap \left(\bigcap_{k=n_0+1}^\infty A_k\right)^c\right) = \mu\left(A_{n_0} \setminus \left(\bigcap_{k=n_0+1}^\infty A_k\right)\right)$$

$$= \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{n_0+1}^\infty A_k\right) \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{k=n_0+1}^\infty A_k\right) = \lim \mu(A_n)$$

$$\| $$

$$\mu\left(\bigcap_1^\infty A_k\right)$$

$\boxtimes$]

6.4.1 $\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{N} \ \ |F| < \infty \text{ ή } |F^c| < \infty\}$

Είναι άλγεβρα αλλά όχι σ-άλγεβρα

[το $F = \{2n \ \ n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{A}$ αλλά $F = \bigcup_{1}^{\infty} \{2n\}$
και $\{2n\} \in \mathcal{A}$]

6.4.4 $f: X \to Y$

(i) $\mathcal{B}$ σ-αλγ υποσυνόλων του $Y \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ σ-αλγ. στο X

(ii) $\mathcal{A}$ σ-αλγ του X τότε $\mathcal{B} = \{B \in Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$
σ-αλγ στο Y.

6.4.5 $\mathcal{A}$ άλγεβρα ΤΑΕΙ

(i) $\forall A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$
(ii) $\forall A_n \in \mathcal{A}$ με A_n ξένα $\Rightarrow \bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
(iii) $\forall A_n \in \mathcal{A}$ με $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$

Λύση (i) $\Rightarrow$ (ii) προφανές
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αν $A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \Rightarrow$ τα
$A_{n+1} \setminus A_n$ είναι ξένα $\xrightarrow{(ii)} \bigcup_{1}^{\infty} (A_{n+1} \setminus A_n) \in \mathcal{A}$

$$\| \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Τα $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \uparrow$

άρα $\bigcup B_n \in \mathcal{A}$

$$\| \qquad \bigcup A_n$$

$\boxtimes$

6.4.9 Cantor

$$\mu(C^c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{2}\,\frac{2/3}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

$\Rightarrow \mu(C) = 0$

~~6.4.11~~

6.4.13 (Λήμμα Borel–Cantelli) (SOS)

$E_n \in \mathcal{M}$ $\quad \sum \mu(E_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup E_n) = 0$

όπου $\limsup E_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \right)$

Λύση Θέτω $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \downarrow$

$$\mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_1^{\infty} E_m\right) \underset{\text{υποπρ.}}{\leq} \sum_1^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

άρα $\mu\left(\bigcap A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right)$

$$\underset{\text{υποπρ}}{\leq} \lim_n \sum_{m=n}^{\infty} \mu(E_m) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) - \sum_{m=1}^{n-1} \mu(E_m) \right)$$

$= 0$ $\blacksquare$

6.4.13 Δίνονται n ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2 - I_n$
Δείξτε ότι αν το $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ περιέχει το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$
τότε $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) \geq 1$

Λύση Αν $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \ell(\bar{I}_i) < 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(\bar{I}_i) < 1 \xrightarrow{\text{υποπρ.}} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right) < 1$$

$$\Rightarrow \mu\left([0,1] \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right) < 1$$

$$\Rightarrow \mu\Big(\underbrace{(0,1) \setminus \big(\underbrace{[0,1] \cap \bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i}_{\text{κλειστό}}\big)}_{\text{ανοικτό}}\Big) > 0$$

Άρα υπάρχει ρητός εντός του $(0,1)\setminus\left([0,1]\cap \bigcup_{i=1}^{n} \bar{I}_i\right)$ άτοπο

Άσκηση $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ $\mu^*(E+x) = \mu^*(E)$ και
$\mu^*(\lambda E) = |\lambda| \mu^*(E)$ όπου $E+x = \{y+x : y \in E\}$
$\lambda E = \{\lambda y : y \in E\}$. $\forall A \in \mathcal{M}$ $x+A \in \mathcal{M}$ και $\mu(x+A) = \mu(A)$

Λύση $\mu(E+x) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : E+x \subseteq \bigcup [a_j, b_j)\right\} =$

$= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) ; E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j - x, b_j - x)\right\}$

$= \dots$ $[a_j - x, b_j - x)$ $\dots$ $= \mu^*(E)$

λ>0 $\mu(\lambda E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j)) : E \subseteq \bigcup [\frac{a_j}{\lambda}, \frac{b_j}{\lambda})\right\} = \dots$

λ<0 $E \subseteq \bigcup [a_j, b_j) \Rightarrow -E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (-b_j, -a_j] \subseteq \bigcup [-b_j - \frac{\varepsilon}{2\cdot 2^j}, a_j^{+}$

$\Rightarrow \mu^*(-E) \leq \varepsilon + \mu^*(E) \Rightarrow \mu^*(-E) \leq \mu^*(E)$. Ανάλογα το E με −E
$\Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(-E)$ Άρα $\mu^*(-E) = \mu^*(E)$ οπότε
$\mu^*(\lambda E) = |\lambda| \mu^*(-E) = |\lambda| \mu^*(E)$.

6.4.14 $\nexists$ $\mu: \mathcal{P}([0\,1)) \to [0\,\infty]$ ώστε

(i) $\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \mu(A_n)$ για A_n ξένα $\subseteq [0\,1)$

(ii) $\mu(A+x) = \mu(A)$ $\forall A \subseteq [0\,1)$ $\forall x \in [0\,1)$

(iii) $\mu([0\,1)) = 1$

Λύση Βήμα 1 $\forall x, y \in [0\,1)$ ορίζουμε $x \sim y \iff$
$\iff x - y \in \mathbb{Q}$

Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα στοιχείο και σχηματίζουμε το σύνολο $A \subseteq [0\,1)$

Βήμα 2 $\forall r \in (\mathbb{Q} \cap [0\,1))$ θέτουμε

$$A_r = ((A \cap [0\;1-r)) + r) \cup (A \cap [1-r\;1) + r - 1)$$

άρα
$$(A \cap [0\;1-r)) + r \subseteq A_r$$
$$(A \cap [1-r, 1) + r - 1) \subseteq A_r$$

Ισχυρισμός Τα A_r αποτελούν διαμέριση του $[0\,1)$ δηλαδή είναι ξένα και $\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0\,1)} A_r = [0\,1)$

[Αν $x \in [0\,1)$, ~~το x ανήκει σε κάποια από τι~~
Έστω a_x το σημείο της κλάσης ισοδυναμίας του x που επιλέχθηκε κατά τον σχηματισμό του A

Αν $x \geq a_x$ θέτω $r = x - a_x$ $\in [0\,1)$, $\in \mathbb{Q}$ αφού $x \sim a_x$

$\Rightarrow a_x = x - r \leq 1 - r \Rightarrow \overset{=x-r}{a_x} \in A \cap [0, 1-r)$

$\Rightarrow \boxed{x \in (A \cap [0, 1-r)) + r \quad \subseteq A_r}$

Αν $x < a_x \Rightarrow a_x - x \in (0\;1) \Rightarrow x - a_x \in (-1, 0)$

$\Rightarrow x - a_x + 1 =: r \in (0\,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_x = x - r + 1 \geq 1 - r \Rightarrow$

$a_x = x - r + 1 \in A \cap [1-r, 1) \Rightarrow x \in (A \cap [1-r\;1) + r - 1) \subseteq A_r$

Άρα σε κάθε περίπτωση $x \in A_r$ για κατάλληλο r

Δηλαδή $[0\ 1) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0\ 1)} A_r$ $\star$.

Τα A_r είναι και ξένα αφού αν $x \in A_r \cap A_{r'}$ με $r \neq r'$

τότε είτε $x = r + a_x$ ή $x = r' + a'_x$ (I)

$x = r + a_x$ ή $x = r' + a'_x - 1$ (II)

$x = r + a_x - 1$ ή $x = r' + a'_x$ (III)

$x = r + a_x - 1$ ή $x = r' + a'_x - 1$ (IV)

Σε κάθε περίπτωση $a_x \sim x \sim a'_x \Rightarrow a_x = a'_x$

αφού το A έχει ένα στοιχείο από κάθε κλάση.

(I) $\Rightarrow r = r'$ άτοπο

(IV) $\Rightarrow r = r'$ άτοπο

(II) $\Rightarrow r = r' - 1 \Rightarrow 1 = r' - r < 1$ άτοπο

(III) $\Rightarrow r - 1 = r' \Rightarrow 1 = r - r' < 1$ άτοπο]

$$\mu(A_r) = \mu\big(((A \cap [0\ 1-r) + r) \cup (A \cap [1-r, 1) + r - 1)\big)$$

$$\overset{(i)}{=} \mu(\qquad) + \mu(\qquad)$$

$$\overset{(ii)}{=} \mu(A \cap [0\ 1-r)) + \mu(A \cap [1-r, 1))$$

$$\overset{(i)}{=} \mu(A)$$

$\star$ $$1 = \mu[0\ 1) = \mu\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0\ 1)} A_r\Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0\ 1)} \mu(A_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0\ 1)} \mu(A)$$

αν $\mu(A) = 0 \Rightarrow 1 = 0$ άτοπο

αν $\mu(A) > 0 \Rightarrow 1 = +\infty$ άτοπο ■

6.4.15 | Δείξτε ότι $\exists A, B \subseteq [0,1]$ ώστε $\mu(A\cup B) < \mu(A) + \mu(B)$

Το A της προηγούμενης (άσκησης) δεν είναι μετρήσιμο

(αν είναι η ⊛ ξαναδίνει άτοπο)

Άρα $\exists\, E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu^*(E) < \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$

Θέτω $A = E\cap A$ και $B = E\cap A^c$. $\boxed{\text{Ψ}}$

Πρόταση $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ ΤΑΕΙ

(i) A μετρήσιμο (ii) $\forall \varepsilon>0\ \exists$ ανοικτό $G\supseteq A$ ώστε $\mu^*(G\setminus A) < \varepsilon$

(iii) $\exists\, G_\delta$ σύνολο $G_\delta \supseteq A$ με $\mu^*(G\setminus A) = 0$

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) Από άσκηση 6.2.2

$\mu(A) = \inf\{\mu(U)\ \ U \text{ αν. } \supseteq A\}$. Άρα $\forall \varepsilon>0$

$\exists\, U \supseteq A$, U αν. και $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$

Αν $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(U) - \mu(A) \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow \mu(U\setminus A) < \varepsilon$.

Αν $\mu(A) = \infty$ εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τα $A_n = A\cap[-n,n)$, U_n και $\frac{\varepsilon}{2^n}$ δηλ.

U_n αν. $\supseteq A_n$ $\mu(U_n\setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

Θέτουμε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ $\mu(U\setminus A) = \mu\left(\bigcup_1^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Αν $x\in \bigcup_1^{\infty} U_n \setminus \bigcup_1^{\infty} A_n \Rightarrow \exists\, n_0 : x\in U_{n_0}$ και

$x\notin A_n\ \forall n$ άρα $x\notin A_{n_0}$ οπότε $x\in U_{n_0}\setminus A_{n_0}$

Έτσι $\bigcup_1^{\infty} U_n \setminus \bigcup_1^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_1^{\infty}(U_n\setminus A_n)$

Ετσι $\mu(U\setminus A) \le \mu\left(\bigcup_1^\infty (U_n\setminus A_n)\right) \le$

$$\le \sum_1^\infty \mu(U_n\setminus A_n) \le \sum_1^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω U_n ανοιχτό $\supseteq A$ ώστε $\mu^*(U_n\setminus A) < \frac{1}{n}$

και $G = \bigcap U_n \supseteq A$, G_δ σύνολο.

$$\mu^*(G\setminus A) \le \mu^*(U_n\setminus A) < \frac{1}{n} \Rightarrow \mu^*(G\setminus A) = 0$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $A = \underset{\substack{\in \\ \mathcal{M} \\ \text{ως } G_\delta}}{G} \setminus \underbrace{(G\setminus A)}_{\substack{\in \\ \mathcal{M} \\ \text{ως μηδενικό}}}$ $\blacksquare$

<u>Πρόταση</u> $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ ΤΑΕΙ

(i) A μετρήσιμο (ii) $\forall \varepsilon>0$ $\exists F$ κλειστό $\subseteq A$ με $\mu(A\setminus F) < \varepsilon$

(iii) $\exists$ F_σ σύνολο $F \subseteq A$ με $\mu^*(A\setminus F) = 0$

<u>Απόδειξη</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall \varepsilon>0$ $\exists U$ ανοικτό $\supseteq A^c$ ώστε $\mu(U\setminus A^c) < \varepsilon$. Θέτω $F = U^c$

$U \supseteq A^c \Rightarrow F \subseteq A$

$$A\setminus F = A\cap F^c = A \cap U = U \cap (A^c)^c = U\setminus A^c$$

άρα $\mu(A\setminus F) = \mu(U\setminus A^c) < \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $F_n \subseteq A$ με $\mu^*(A\setminus F_n) < \frac{1}{n}$ και $F = \bigcup_1^\infty F_n$

F είναι F_σ, $F \subseteq A$ και $\mu^*(A\setminus F) \le \mu^*(A\setminus F_n) < \frac{1}{n}$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $A = \underbrace{(A\setminus F)}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ \text{ως μηδενικό}}} \cup \underset{\substack{\in \\ \mathcal{M} \text{ ως } F_\sigma}}{F}$ $\blacksquare$

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\mathcal{R}[ab]$ το σύνολο των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[ab]$

(i) Το $\mathcal{R}[ab]$ είναι διανυσματικός χώρος με την πρόσθεση συναρτήσεων & τον πολλαπλασιασμό με αριθμούς

(ii) $C[ab] \subseteq \mathcal{R}[ab]$

(iii) Η $I : \mathcal{R}[ab] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad I(f) = \int_a^b f(x)dx$ είναι μη-αρνητική, γραμμική ($I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$) και τηρεί τη διάταξη ($f \geq g \Rightarrow I(f) \geq I(g)$)

Αδυναμίες : ① Δεν περιέχει το $\mathcal{R}[ab]$ μη φραγμένες συναρτήσεις πχ $f(x) = \begin{cases} 1/2\sqrt{x} & x \in (0\ 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Παρόλο που η αντιπαράγωγος $\sqrt{x}$ φτάνει στο 0 & στο 1 για να υπολογιστεί το $\sqrt{x}\,\Big|_0^1$

② $\exists$ $f_n \in \mathcal{R}[ab]$ με $f_n \longrightarrow f$ & $f \notin \mathcal{R}[ab]$

πχ $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1 - q_n\} \\ 0 & x \notin \{\quad\} \end{cases}$ $\quad$ όπου $\{q_1 - -\} = \mathbb{Q}$.

$f_n(x) \longrightarrow \delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [ab] \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \cap [ab] \end{cases}$

Η θεωρία του Lebesgue φτιάχνει ένα ευρύτερο διανυσματικό χώρο $\mathcal{L}[ab] \supseteq \mathcal{R}[ab]$

Όπου το «ολοκλήρωμα» στον $\mathcal{L}[ab]$ περιοριζόμενο στον $\mathcal{R}[ab]$ δίνει τις ίδιες τιμές

Ενώ ταυτόχρονα ο $\mathcal{L}[ab]$ δεν έχει τις προηγούμενες αδυναμίες.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

$\forall\, E \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in E \\ 0 & \text{αν } x \notin E \end{cases}$

Θα θέλαμε το ολοκλήρωμα της χ_E να είναι $\mu(E)\cdot 1$ αλλά αυτό προϋποθέτει ότι $E \in \mathfrak{M}$.

Άρα κάπως πρέπει να ξεχωρίσουμε τις "καλές" από τις "κακές" συναρτήσεις. Ένας τρόπος είναι ο ακόλουθος. $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Ορισμός: Η $f : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ λέγεται μετρήσιμη αν $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο

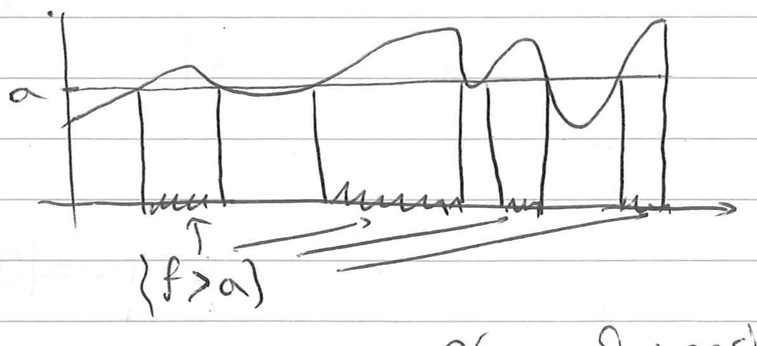
$$f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > a\} =: \{f > a\}$$

είναι μετρήσιμο.

Για παράδειγμα αυτός ο ορισμός θα αποκλείσει την χ_E όταν E όχι μετρήσιμο διότι

$$\{x : \chi_E(x) > \tfrac{1}{2}\} = E \notin \mathfrak{M}$$

Το σύνολο $f^{-1}((a, +\infty])$ είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε για την ύπαρξη ολοκληρώματος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Γιατί το εμβαδόν κάτω από το γράφημα θα προσεγγιστεί από το $\alpha \cdot \mu\{f > a\}$

άρα θα πρέπει $\{f > a\} \in \mathfrak{M}$

Layer Cake Representation

$$\int_0^{\infty} \chi_{\{z: f(z)>t\}}(x)\, dt = \int_0^{f(x)} 1 \cdot dt = f(x)$$

$= 1 \iff t < f(x)$

Αρα για να ορίζεται το $\int f(x)$ πρέπει να υπάρχει

το $\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \chi_{\{z: f(z)>t\}}(x)\, dt\, dx = \int_0^{\infty} \mu\{x: f(x)>t\}\, dt$

άρα πρέπει $\{x: f(x)>t\} \in \mathcal{M} \quad \forall t$

(Γενικότερα θα ισχύει $f(x)^p = \int_0^{\infty} p\, t^{p-1} \chi_{\{f>t\}}(x)\, dt$

για $p>0$ η $f: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$)

<u>Θεώρημα</u> f μετρήσιμη ακν ισχύει μία από τις ακόλουθες

(i) $\forall a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\{x: f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ —//— $\{x: f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$ —//— $\{x: f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$

<u>Απόδειξη</u> $(a, +\infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, +\infty]$, $[a, +\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\frac{1}{n}, +\infty]$

Οπότε

$$\{x: f(x) \geq a\} = f^{-1}[a, +\infty] = f^{-1}\left(\bigcap_1^{\infty} (a-\tfrac{1}{n}, \infty]\right)$$

$$= \bigcap_1^{\infty} f^{-1}(a-\tfrac{1}{n}, \infty] = \bigcap_1^{\infty} \{x: f(x) > a-\tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{M}$$

Ομοίως τα υπόλοιπα $\boxtimes$

Ορισμός Στο $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ κάνουμε τη σύμβαση $0(+\infty) = 0(-\infty) = (+\infty)\cdot 0 = (-\infty)\cdot 0 = 0$

(ώστε $\int_A 0 = 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}$)

(οι πράξεις, $\infty - \infty$ παραμένουν απροσδιόριστες

Έτσι οι $f+g$ $f-g$ f/g δεν ορίζονται πάντα)

Όμως οι $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$, $f_+ = \max\{f,0\}$

$f_- = \min\{f,0\}$, $|f|$ ορίζονται πάντα

Λήμμα Αν $f: A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη $\Rightarrow$ $\forall a \in \tilde{\mathbb{R}}$

το $f^{-1}(\{a\}) = \{x : f(x) = a\}$ είναι μετρήσιμο

Αποδ Αν $a \in \mathbb{R}$ είναι $\{x : f(x) \geq a\}, \{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M} \Rightarrow \{f \geq a\} \cap \{f \leq a\} \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$\{x \;\; f(x) = a\} \in \mathcal{M}$

Αν $a = +\infty$ $\quad \{x : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n}^{\infty} \{x : f(x) > n\} \in \mathcal{M}$

Αν $a = -\infty$ $\quad \{x : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{1}^{\infty} \{x : f(x) < -n\} \in \mathcal{M}$

$\boxtimes$

Ορισμός $\forall f: A \to \tilde{\mathbb{R}}$ ορίζουμε τις

$f^+, f^- : A \to [0, \infty)$ με

θετικό μέρος της f $\leftarrow$ $f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$

αρνητικό μέρος της f $\leftarrow$ $f^-(x) = \min\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) > 0 \end{cases}$

Τότε ισχύουν $f = f^+ - f^-$ $\quad |f| = f^+ + f^-$

Θεώρημα Αν f, g μετρήσιμες και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις

(i) $f+g$ (ii) λf (iii) f^2, $|f|$ (iv) fg

(v) $\max\{f,g\}$ (vi) $\min\{f,g\}$ (vii) f^+, f^-

είναι όλες μετρήσιμες

Απόδειξη (i) Ισχυρισμός $f(x)+g(x) > \alpha \iff$
$\exists\, r \in \mathbb{Q}$ με $f(x) > r$ και $g(x) > \alpha - r$
[Θεωρούμε $r \in \mathbb{Q}$ ώστε $f(x) > r > \alpha - g(x)$
Αν $g(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > r$ & $g(x) > \alpha - r$
Αν $g(x) = +\infty \Rightarrow f(x) > r$ & $g(x) > \alpha - r$
Η περίπτωση $g(x) = -\infty$ δεν υφίσταται γιατί ο μόνος τρόπος να είναι $f(x)+g(x) > \alpha$ είναι $f(x) = +\infty$ αλλά $(+\infty) + (-\infty)$ δεν ορίζεται.
Αντιστρόφως αν $f(x) > r$ και $g(x) > \alpha - r$ πάλι $g(x) \neq -\infty$ και $f(x) \neq -\infty$ οπότε προσθέτουμε κατά μέλη]

Έχουμε $\{x : (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \left(\{x : f(x) > r\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r\}\right)$

μια αριθμήσιμη ένωση άρα $\in \mathcal{M}$

(ii) Αν $\lambda = 0$ $\{x : \lambda f(x) > \alpha\} = \{x : 0 > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R} & \alpha < 0 \end{cases}$
$\in \mathcal{M}$
Αν $\lambda > 0$ $\{x : \lambda f(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \mathcal{M}$
Αν $\lambda < 0$ $\{x : \lambda f(x) > \alpha\} = \{x : f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \mathcal{M}$

(iii) $\{x : (f(x))^2 \leq \alpha\} = \left\{\begin{array}{l} \emptyset \quad \text{αν } \alpha < 0 \\ \{x : f(x) = 0\} \quad \text{αν } \alpha = 0 \\ \{x : -\sqrt{\alpha} \leq f(x)\} \cap \{x : f(x) \leq \sqrt{\alpha}\} \quad \text{αν } \alpha > 0 \end{array}\right\} \in \mathcal{M}$

$$\{x : |f|(x) \leq a\} = \begin{cases} \phi & \alpha\nu\ a<0 \\ \{x : f(x)=0\} & \alpha\nu\ a=0 \\ \{x : -a \leq f(x)\} \cap \{x : f(x) \leq a\} \end{cases} \in \mathcal{M}$$

(iv) Θέτουμε $B = \{x : f(x) \in \{-\infty, +\infty\}\} \cup \{x : g(x) \in \{-\infty, +\infty\}\}$

$B \in \mathcal{M}$ (έχουμε δείξει ότι $\{x : f(x) = a\} \in \mathcal{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$)

Άρα και $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{M}$ (Τα σημεία του $\mathbb{R} \setminus B$ είναι αυτά που και η f κ η g είναι πεπερασμένες)

~~Ισχυρισμός $\Gamma = \{x : f(x) = +\infty$ και $f(x)g(x) > a\} \in \mathcal{M}$~~

~~$[\Gamma = \{x : f(x) = +\infty\} \cap (\{x\ g(x) = +\infty$ κ $f(x)g(x) > a\} \cup$~~

~~$\cup \{x : g(x) = -\infty$ κ $f(x)g(x) > a\}$~~

~~$\cup \{x \in$ [illegible] $g(x) \notin \{\pm\infty\}$ κ $f(x)g(x)$~~

Ισχυρισμός $\Gamma = \{x : f(x) = +\infty$ κ $g(x) \in \{\pm\infty\}$ και $fg(x) > a\}$
$\in \mathcal{M}$

$[\Gamma = \{x : f(x) = +\infty\} \cap (\{x\ g(x) = +\infty$ και $f(x)g(x) > a\} \cup$
$\{x : g(x) = -\infty$ και $f(x)g(x) > a\})$

$= \{x : f(x) = +\infty\} \cap (\{x : g(x) = +\infty\} \cup \phi\} \in \mathcal{M}]$

Ομοίως $\Delta = \{x : f(x) = -\infty$ κ $g(x) \in \{\pm\infty\}$ και $f(x)g(x) > a\} \in \mathcal{M}$

Άρα $\{x : f(x)g(x) > a\} = \{x \in B : f(x)g(x) > a\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus B\ f(x)g(x) > a\}$

$= \Gamma \cup \Delta \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus B : \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2) > a\}$

$\in \mathcal{M}$ γιατί $\frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ μετρήσιμη από τα (i) (ii) (iii).

(v) $\{x : \max\{f(x)\ g(x)\} > a\} = \{x : f(x) > a\} \cup \{x : g(x) > a\}$
$\in \mathcal{M}$

(vi) $\{x : \min\{f(x)\ g(x)\} > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap \{x : g(x) > a\}$

(vi) $f^+ = \max(f,0)$ $\quad f^- = \max\{-f,0\}$ μετρήσιμες από το (v). $\boxed{//}$

<u>Θεώρημα</u> Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού και τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$ τότε και οι $\sup_n f_n$ $\quad \inf_n f_n$ $\quad \limsup_n f_n$ $\quad \liminf_n f_n$

είναι μετρήσιμες. και αν υπάρχει το $\lim_n f_n =: f$ τότε και η f είναι μετρήσιμη

<u>Απόδειξη</u> $\{x : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{1}^{\infty} \{x \; f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}$

$\{x : \inf_n f_n(x) \geq a\} = \bigcap \{x : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

$\liminf_n f_n = \sup_m (\inf_{n \geq m} f_n)$ μετρήσιμη από το προηγούμενο

$\limsup_n f_n = \inf_m (\sup_{n \geq m} f_n)$ —//—

Αν το $\lim f_n$ υπάρχει τότε $= \limsup f_n$ μετρήσιμη $\boxed{//}$

<u>Ορισμός</u> Θα λέμε ότι μια ιδιότητα $p(x)$ για $x \in A$, $\quad A \in \mathcal{M}$ ισχύει «σχεδόν παντού» αν $\quad \mu(\{x \in A : \neg p(x)\}) = 0$. Θα γράφουμε «$p(x)$ σ.π.»

Για παράδειγμα, αν $f, g : A \longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες τότε η φράση «$f = g$ σ.π.» σημαίνει ότι $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ (λέμε «σ.π. ίσες»)

«$f < g$ σ.π.» $\iff$ $\mu(\{x : f(x) \geq g(x)\}) = 0$

Πρόταση $f = g$ σπ και f μετρήσιμη $\Rightarrow g$ μετρήσιμη

Απόδειξη Έστω $E = \{x : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{M}$ γιατί από υπόθεση $\mu(E^c) = 0$

$$\{x : g(x) > a\} = \underbrace{\{x \in E : g(x) > a\}}_{\substack{\| \\ \{x : f(x) > a\} \cap E \in \mathcal{M}}} \cup \underbrace{\{x \in E^c : g(x) > a\}}_{\subseteq E^c \text{ άρα}}$$

έχει $\mu^* = 0$ άρα ανήκει στην $\mathcal{M}$

$\boxtimes$

Πόρισμα $(f_n)_1^\infty$ μετρήσιμες $: A \to \tilde{\mathbb{R}}$ και $f_n \to f$ σπ

Τότε f μετρήσιμη

Απόδειξη Το $\limsup_n f_n$ υπάρχει πάντα και είναι μετρήσιμη. Αλλά $f = \limsup_n f_n$ σπ. άρα f μετρήσιμη $\blacksquare$

Ασκήσεις | 7.2.1 | $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη & $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow g \circ f$ μετρήσιμη

Λύση $\{x : (g \circ f)(x) > a\} = (g \circ f)^{-1}((a\ \infty))$

$= f^{-1}(g^{-1}(a\ \infty))$. $g^{-1}(a\ \infty)$ ανοικτό άρα υπάρχουν ξένα διαστήματα $(a_n\ b_n)$

$$g^{-1}(a\ \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n\ b_n) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(a\ \infty)) = \bigcup_1^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n)$$

$$= \bigcup_1^{\infty} \{x \ f(x) > a_n\} \cap \{x : f(x) < b_n\} \in \mathcal{M}$$

$\boxtimes$

7.2.2 Αν $f: \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ & $f^{-1}((r\ \infty]) \in \mathcal{M}$ $\forall r \in \mathbb{Q}$ τότε f μετρήσιμη

Λύση $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$ θεωρούμε $r_n \in \mathbb{Q}$: $r_n \to \alpha^+$

(πχ $r_n = \dfrac{[n\alpha]+1}{n} > \alpha$) οπότε $(\alpha\ \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n\ \infty]$

$\Rightarrow f^{-1}((\alpha\ \infty]) = \bigcup_{1}^{\infty} f^{-1}(r_n\ \infty] \in \mathcal{M}$ ☒

7.2.3 Η $\sup_{i \in I} f_i(x)$ όταν το I είναι υπεραριθμήσιμο μπορεί να είναι μη μετρήσιμη ακόμα & αν όλες οι f_i είναι μετρήσιμες

Λύση Έστω $E \notin \mathcal{M}$ $E \subseteq \mathbb{R}$. $\forall$ $i \in E =: I$

θέτω $f_i(x) = \chi_{\{i\}}(x) = \begin{cases} 1 & x = i \\ 0 & x \neq i \end{cases}$

κάθε f_i είναι μετρήσιμη αφού το $\{i\}$ είναι μετρήσιμο ως μονοσύνολο. Αλλά η

$\sup_{i \in I} f_i(x) = \chi_E$ δεν είναι μετρήσιμη

$(\{x : \chi_E(x) > 1/2\} = E \notin \mathcal{M})$ ☒

7.2.4 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς & $f = g$ σπ

$\Rightarrow f = g$

Λύση το $A = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ έχει μέτρο μηδέν αφού $f = g$ σπ.. Άρα το A δεν μπορεί να περιέχει διαστήματα. Συνεπώς, αν $x_0 \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \not\subseteq A$, δηλ $\exists$ $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}\ x_0 + \frac{1}{n}) \setminus A$

$x_n \to x_0 \xrightarrow[\text{συνεχεις}]{f, g} f(x_n) \to f(x_0),\ g(x_n) \to g(x_0)$

και $f(x_n) = g(x_n)$ αφού $x_n \notin A$

$\Rightarrow \quad f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow x_0 \notin A$ άτοπο

Άρα $A = \emptyset$ $\boxtimes$

7.25 | Δώστε παράδειγμα $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ α-συνεχής ώστε $f = g$ σπ

Λύση $f = 1 \quad g = \chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ $\boxtimes$

7.26 | Δείξτε ότι αν $f \uparrow : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow f$ μετρήσιμη

Λύση Θα δείξουμε $f^{-1}(a\ \infty)$ διάστημα άρα θα είναι $f^{-1}(a\ \infty) \in \mathcal{M}$

Ισχυρισμός Ένα σύνολο I είναι διάστημα αν $\forall\ x, y \in I$ με $x < y$ & $\forall\ z$ με $x < z < y \Rightarrow z \in I$

Αν ισχύει ο Ισχυρισμός τότε αν $x, y \in f^{-1}(a\ \infty)$ & $x < y$ & z ώστε $x < z < y \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(x), f(y) \in (a\ \infty)$ & $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$

αφού $f \uparrow$. $f(z) \geq f(x) > a \Rightarrow z \in f^{-1}(a\ \infty)$

Από τον Ισχυρισμό $\Rightarrow f^{-1}(a\ \infty)$ διάστημα άρα $\in \mathcal{M}$

Απόδ Ισχυρισμού Αν I διάστημα, είναι προφανές.

Αντίστροφα, Έστω $x_0 = \inf I \quad y_0 = \sup I$

& $x_n \in I \quad x_n \downarrow x_0 \quad y_n \in I \quad y_n \uparrow y_0$

Από υπόθεση $[x_n\ y_n] \subseteq I \Rightarrow \bigcup_n [x_n\ y_n] \subseteq I$

$\Rightarrow \quad (x_0\ y_0) \subseteq I \subseteq [x_0\ y_0] \Rightarrow I$ διάστημα.

$\boxtimes$

Απλές συναρτήσεις

Ορισμός Μια συνάρτηση λέγεται απλή αν παίρνει πεπερασμένο πλήθος [redacted]. πεπερασμένων τιμών.

Ειδικά για τις απλές δεν τους επιτρέπουμε να κάνουν $+\infty$ ή $-\infty$.

Πχ. Η χ_A για $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι απλή, αφού παίρνει δύο τιμές, την 0 κ την 1.

Πχ. κλιμακωτές $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κλιμακωτή αν υπάρχουν ξένα διαστήματα $I_1, \dots, I_n$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ και υπάρχουν $c_j \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}(x)$$

Λήμμα $\forall\, A, B \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

$\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$

Πρόταση Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απλή και μετρήσιμη αν-ν γράφεται στη μορφή $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ όπου $A_1 - A_n$ ξένα μετρήσιμα μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \mathbb{R}$

όπου $c_j \in \mathbb{R}$ κ $c_1 < c_2 < \dots < c_n$.

Η γραφή αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη "$\Leftarrow$" η f παίρνει μόνο τις τιμές $c_1 \dots c_n$ άρα είναι απλή. Αν $a \in \mathbb{R}$ η $a < c_1$ $f^{-1}(a\ \infty) = \mathbb{R} \in \mathcal{M}$
Αν $a \geq c_n$ $f^{-1}(a\ \infty) = \phi \in \mathcal{M}$ και αν
$c_j \leq a < c_{j+1}$ για κάποιο $j = 1, \dots, n-1$

τότε $f^{-1}((a\ \infty)) = A_{j+1} \cup A_{j+2} \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{M}$

άρα f μετρήσιμη

"$\Rightarrow$" Αν f απλή έστω $c_1 < \dots < c_n$ οι τιμές της σε αύξουσα διάταξη. Θέτω $A_j = f^{-1}(\{c_j\})$

$\Rightarrow$ A_j ξένα μετρήσιμα μη κενά $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \mathbb{R}$
$f = \sum_1^n c_j \chi_{A_j}$

Μοναδικότητα Αν $f = \sum_{j=1}^{n} c_i \chi_{A_i} = \sum_{g=1}^{m} b_g \chi_{B_j}$
$c_1 < c_{i+1}$ $b_j < b_{j+1}$ A_j, B_j ξένα μετρήσιμα μη κενά
η f παίρνει n τιμές (τα c_i) ή m τιμές (τα b_j)
άρα $n = m$
Η μικρότερη τιμή της f είναι c_1 αλλά και η b_1
άρα $c_1 = b_1$.
Η 2η μικρότερη η c_2 ή η b_2 άρα $c_2 = b_2$ κλπ

τέλος $A_i = f^{-1}(\{c_i\}) = f^{-1}(\{b_i\}) = B_i$ $\blacksquare$

Η γραφή αυτή για τις απλές λέγεται κανονική αναπαράσταση.
Π.χ. η $f(x) = 2\chi_{[0\,2]} + 3\chi_{[1\,4]}$ είναι απλή

αλλά όχι γραμμένη σε κανονική αναπαράσταση:
$$f(x) = 0\chi_{(-\infty\,0)\cup(4\,\infty)}(x) + 2\chi_{[0\,1)}(x) + 3\chi_{(2\,4]}(x) + 5\chi_{[1,2]}(x)$$

Θεώρημα Κάθε μη αρνητική μετρήσιμη $f: \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ είναι όριο μιας αύξουσας ακολουθίας μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων. Αν η f είναι φραγμένη η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη Κόβουμε το πεδίο τιμών μέχρι το 2^n σε $2^{2n}-1$ τμήματα μήκους $1/2^n$: $(0, \frac{1}{2^n}]$, $(\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \dots, (\frac{2^n-1}{2^n}, 2^n]$
δηλαδή της μορφής $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ $k = 0, \dots, 2^{2n}-1$

Θέτουμε $E_{n,k} = f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ και $F_n = f^{-1}(2^n, \infty]$
$\forall x, y \in E_{nk}$ $f(x), f(y) \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^n}$

Θέτουμε $\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{nk}} + 2^n \chi_{F_n}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists n : 2^n > f(t) \Rightarrow \exists k : f(t) \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$
Άρα $|\varphi_n(t) - f(t)| = \left|\frac{k}{2^n} - f(t)\right| \leq \frac{1}{2^n}$
και $\varphi_n(t) = \frac{k}{2^n} \leq f(t) \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$.

Άρα $\varphi_n(t) \longrightarrow f(t)$. Αν $0 \leq f$ φραγμένη από το M
βρίσκουμε $n_0 : 2^{n_0} > M \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $|\varphi_n(t) - f(t)| < \frac{1}{2^n}$
Άρα $a_n = \sup_t |\varphi_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$ άρα $\varphi_n \rightrightarrows f$

Τέλος $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ διότι κάθε διάστημα $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] =$
$= \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]$
η φ_n είναι ίση με $\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}}$ σε όλο το διάστημα

αλλά η φ_{n+1} είναι $\frac{2k}{2^{n+1}}$ στο πρώτο μισό $(= \varphi_n)$ και
$\frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \varphi_n$ στο δεύτερο
μισό. Άρα $\varphi_{n+1} \geq \varphi_n$.

Ολοκληρώματα απλών συναρτήσεων

Για κάθε απλή φ, στα παρακάτω υποθέτουμε $\mu\{x : \varphi(x) \neq 0\} < \infty$

<u>Ορισμός</u> (i) Αν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη κ $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ ~~κ φ μετρήσιμη~~ η κανονική της αναπαράσταση, θέτουμε $\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$

(ii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$, θέτουμε $\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(x) & \alpha\nu\ x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

κ ορίζουμε $\int \varphi = \int \tilde{\varphi}$

(iii) Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο ορίζουμε $\int_E \varphi = \int \tilde{\varphi} \chi_E$.

<u>Λήμμα</u> (i) Αν A_j ξένα μετρήσιμα κ $a \in \mathbb{R}$

$$\int (a \chi_{A_1} + \dots + a \chi_{A_n}) = \sum_{j=1}^{n} \int a \chi_{A_j}$$

(ii) Αν $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ A_i μετρήσιμα και ξένα.

τότε $\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$

<u>Απόδειξη</u> (i) $\int \sum_{1}^{n} a \chi_{A_j} = \int a \sum_{1}^{n} \chi_{A_j} \overset{A_i \text{ ξένα}}{=} \int a \chi_{\cup A_j} =$

$\overset{\text{ορ}}{=} a \mu\left(\bigcup_{1}^{n} A_j\right) \overset{A_j \text{ ξένα}}{=} a \sum_{1}^{n} \mu(A_j) = \sum_{1}^{n} a \mu(A_j) =$

$= \sum_{1}^{n} \int a \chi_{A_j}$.

(ii) Αν a_j διαφορετικά τα βάζουμε σε γν. αύξουσα διάταξη και η αναπαράσταση είναι κανονική αν προσθέσουμε κ την $0 \cdot \chi_{\mathbb{R} \setminus \cup A_j}$ οπότε το αποτέλεσμα ισχύει από τον ορισμό.

Αν δεν είναι διαφορετικά βγάζουμε κοινούς παράγοντες:

$\forall\, a \in \underbrace{\{a_1, \ldots, a_n\}}$ θέτω $B_a = \bigcup\{A_j : a_j = a\}$

προσοχή! αυτό δεν έχει n στοιχεία γιατί δεν είναι όλα διαφορετικά!!

Άρα $\varphi = \sum_{a \in \{a_1 - a_n\}} a \chi_{B_a}$. Τα a τώρα

είναι διακεκριμένα & τα B_a ξένα. Άρα

$$\int \varphi = \sum a \mu(B_a) = \sum a\, \mu\Big(\bigcup_{a_j = a} A_j\Big) \xlongequal[\text{ξένα}]{A_j} \sum a \sum_{a_j = a} \mu(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j).$$

$\boxed{\text{V}}$

Πρόταση $\forall\, \varphi, \psi$ απλές μετρήσιμες & $s, t \in \mathbb{R}$

(i) $\int (s\varphi + t\psi) = s\int \varphi + t\int \psi$

(ii) Αν $\psi \le \varphi$ σ.π. $\Longrightarrow \int \psi \le \int \varphi$.

Απόδειξη Έστω $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ & $\psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$

κανονικές αναπαραστάσεις. Τα $C_{ij} = A_i \cap B_j$ είναι πεπερασμένα σύνολα και είναι ξένα διότι

αν τα C_{ij}, C_{kl} διαφέρουν στο $i \neq k$ τότε

$C_{ij} \subseteq A_i$, $C_{kl} \subseteq A_k$ ξένα. Ενώ αν $i = k$

αλλά $j \neq l$ τότε $C_{ij} \subseteq B_j$ & $C_{kl} \subseteq B_l$ ξένα

$A_i = A_i \cap \mathbb{R} = A_i \cap \Big(\bigcup_j B_j\Big) = \bigcup_j (A_i \cap B_j) = \bigcup_j C_{ij}$

$B_j = \mathbb{R} \cap B_j = \Big(\bigcup_i A_i\Big) \cap B_j = \bigcup_i (A_i \cap B_j) = \bigcup_i C_{ij}$

Έχουμε $s\int\varphi + t\int\psi = s\sum_i a_i\mu(A_i) + t\sum_j b_j\mu(B_j)$

$$= s\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{m}\mu(C_{ij}) + t\sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m}\mu(C_{ij}) =$$

$$= \sum_{i,j}(sa_i + tb_j)\,\mu(C_{ij})$$ και

$$\int(s\varphi + t\psi) = \int \sum_{ij}(sa_i + tb_j)\chi_{C_{ij}} \overset{\text{προηγ}}{\underset{\text{λήμμα}}{=}} \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\mu(C_{ij})$$

(ii) $\psi - \varphi = \sum_{ij}(b_j - a_i)\chi_{C_{ij}}$

Είτε $b_j \geq a_i$ είτε αν $b_j < a_i$ $\mu(C_{ij}) = 0$
άρα $\psi - \varphi \geq 0$ σπ

Άρα $\int(\psi - \varphi) = \sum_{ij}(b_j - a_i)\mu(C_{ij}) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\psi \geq \int\varphi$. ▨

<u>Πόρισμα</u> Αν $\varphi = \psi$ σπ $\Rightarrow \int\varphi = \int\psi$
[$\varphi = \psi$ σπ $\Rightarrow \varphi \leq \psi$ σπ & $\varphi \geq \psi$ σπ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \int\varphi \leq \int\psi$ & $\int\varphi \geq \int\psi$].

<u>Ορισμός</u> Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{φραγμένη}}$ μετρήσιμη με $\boxed{\mu(A) < \infty}$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f στο A να είναι το

$$\int_A f = \sup\left\{\int_A \varphi \; : \; \varphi \text{ απλή μετρήσιμη με } \varphi \leq f\right\}$$

$$\overset{\text{προηγ}}{\underset{\text{Πόρισμα}}{=}} \sup\left\{\int_A \varphi \; : \; \varphi \text{ απλή μετρήσιμη με } \varphi \leq f \text{ σπ}\right\}$$

γιατί την $\varphi \leq f$ από το πόρισμα μπορώ να την αλλάξω σε οποιαδήποτε $\psi = \varphi$ σπ και αντίστροφα ~~γιατί~~ αν $\varphi \leq f$ σπ η $\psi = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } \varphi(x) \leq f(x) \\ \inf f(x) & \text{αν } \varphi(x) > f(x) \end{cases} \leq f$.

είναι απλή μετρήσιμη $\leq f$ και $\int \varphi = \int \psi$

Το παρακάτω μας λέει ότι θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει

$$\int_A = \inf\left\{ \int_A \psi \ : \ \psi \text{ απλή μετρήσιμη } \geq f \right\}$$

<u>Θεώρημα</u> Αν f φραγμένη $: A \to \tilde{\mathbb{R}}$

$\mu(A) < \infty$ ΤΑΕΙ

(i) f μετρήσιμη

(ii) $\sup\limits_{\varphi \leq f} \int_A \varphi = \inf\limits_{\psi \geq f} \int \psi$, φ, ψ απλές

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" Αν $M \in \mathbb{R}$ ώστε $-M < f < M$

θέτω $A_k = \left\{ x \in A : \frac{(k-1)M}{n} < f \leq \frac{kM}{n} \right\}$

$-n+1 \leq k \leq n$ (δηλ. κόβουμε το $[-M, M]$ με βήμα M/n)

$\bigcup\limits_{k=-n+1}^{n} A_k = A$ και θέτω $\varphi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{k=-n+1}^{n} (k-1) \chi_{A_k}$

$\psi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{k=-n+1}^{n} k \chi_{A_k}$. $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ } απλές

Άρα $\inf\limits_{\psi \geq f} \int \psi \leq \int \psi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{-n+1}^{n} k \mu(A_k)$

και $\sup\limits_{\varphi \leq f} \int \varphi \geq \int \varphi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{-n+1}^{n} (k-1) \mu(A_k)$ Άρα

$0 \leq \inf\limits_{\psi \geq f} \int \psi - \sup\limits_{\varphi \leq f} \int \varphi \leq \frac{M}{n} \sum \mu(A_k) = \frac{M}{n} \mu(A) \longrightarrow 0$

"$\Longleftarrow$" παραλείπεται $\blacksquare$

<u>Παρατήρηση</u> Στο ολοκλήρωμα Riemann γιατί θέλουμε να ισχύει $L(f,P) \approx U(f,P)$ για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα και δεν λέμε για παράδειγμα « $\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f,P)$ » ;

Μια εξήγηση είναι ότι θέλουμε $\int(-f) = -\int f$

Παρατηρήστε ότι $L(-f,P) = \sum m_k(-f)(t_k - t_{k-1})$

η $m_k(-f) = \inf_{[t_{k-1},t_k]} (-f(x)) = -\sup_{[t_{k-1},t_k]} f(x) = -M_k(f)$

Άρα $L(-f,P) = -U(f,P)$.

Έτσι αν ορίζαμε $\int_a^b f(x)dx = \sup L(f,P)$

θα έπρεπε

$$\begin{array}{ccc} \int_a^b (-f)(x)\,dx & = \sup L(-f,P) & \\ \| & \| & \\ -\int_a^b f(x)\,dx & = \sup(-U(f,P)) & = -\inf(U(f,P)) \\ \| & & \\ -\sup_P L(f,P) & & \end{array}$$

~~$\Rightarrow \inf(U(f,P)) = \sup$~~

$\Rightarrow \sup(L(f,P)) = \inf(U(f,P))$

■

<u>Πρόταση</u> Θεωρούμε $f,g : E \to \tilde{\mathbb{R}}$ φραγμένες με $\mu(E) < \infty$,

(i) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\int_E (af+bg) = a\int_E f + b\int_E g$

(ii) Αν $f = g$ σπ $\Rightarrow \int_E f = \int_E g$

(iii) Αν $f \le g$ σπ $\Rightarrow \int_E f \le \int_E g$ επιπλέον $\left|\int_E f\right| \le \int_E |f|$

(iv) Αν $m \le f \le M \Rightarrow m\mu(E) \le \int_E f \le M\mu(E)$

(v) $\forall A, B$ ξένα $\subseteq E \Rightarrow \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Απόδειξη (i) $a=0 \Rightarrow a\int f = 0 = \int af$

αν $a \neq 0$ & φ απλή $\Rightarrow a\varphi$ απλή & φ/a απλή

αν $a>0$ $\int_E af = \sup_{\varphi \le af} \int \varphi = \sup_{\frac{\varphi}{a} \le f} \int \varphi \overset{\psi = \varphi/a}{=\!=}$

$= \sup_{\psi \le f} \int (a\psi) \underset{\text{για απλές}}{\overset{\text{ισχύει}}{=\!=}} \sup_{\psi \le f} a \int \psi = a \sup_{\psi \le f} \int \psi$

$= a \int f$

Αν $a<0$ $\int_E af = \sup_{\varphi \le af} \int \varphi = \sup_{\frac{\varphi}{a} \ge f} \int \varphi \overset{\psi=\varphi/a}{=\!=} \sup_{\psi \ge f} \int a\psi$

$\underset{\text{για απλές}}{\overset{\text{ισχύει}}{=\!=}} \sup_{\psi \ge f} a \int \psi \underset{a<0}{=\!=} a \inf_{\psi \ge f} \int \psi = a \int f$

Αν ψ_1, ψ_2 απλές, $\psi_1 \ge f$ $\psi_2 \ge g$ τότε $\psi_1 + \psi_2$ απλή

η $f+g \le \psi_1 + \psi_2 \Rightarrow \int (f+g) \le \int (\psi_1 + \psi_2) \underset{\text{για απλές}}{\overset{\text{ισχύει}}{=\!=}}$

$\int \psi_1 + \int \psi_2$ παίρνουμε inf για $\psi_1 \ge f$, $\psi_2 \ge g \Rightarrow$

$\Rightarrow \int (f+g) \le \int f + \int g$ (1)

Αν φ_1, φ_2 απλές $\varphi_1 \le f$, $\varphi_2 \le g$ $\int (f+g) \ge \int (\varphi_1 + \varphi_2) =$

$\underset{\text{για απλές}}{\overset{\text{ισχύει}}{=\!=}} \int \varphi_1 + \int \varphi_2$. παίρνοντας sup $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int (f+g) \ge \int f + \int g$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow \int (f+g) = \int f + \int g$

(ii) Από το (i) αρκεί $\int (f-g) = 0$. Αλλά

$f-g=0$ σπ άρα αν ψ απλή $\ge f-g$

$\Rightarrow \psi \ge 0$ σπ $\underset{\text{για απλές}}{\overset{\text{ισχύει}}{\Longrightarrow}} \int \psi \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf_{\psi \ge f-g} \int \psi \ge 0 \Rightarrow \int (f-g) \ge 0$

η αν φ απλή $\le f-g \Rightarrow \varphi \le 0$ σπ $\underset{\text{για απλές}}{\overset{\text{ισχύει}}{\Longrightarrow}} \int \varphi \le 0$

$\Rightarrow \sup_{\varphi \le f-g} \int \varphi \le 0 \Rightarrow \int (f-g) \le 0$

(iii) $g-f\geq 0$ στη ~~ολη~~ A. Αν $\psi \geq g-f$, ψ απλή:

$\psi \geq 0$ στη $\xrightarrow[\text{απλή}]{\text{ισχύει για}} \int \psi \geq 0 \Rightarrow \inf_{\psi \geq g-f} \int \psi \geq 0$

$\Rightarrow \int (g-f) \geq 0 \Rightarrow \int g \geq \int f$.

Κ $\left.\begin{matrix} f\leq |f| \\ -f\leq |f| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \int f\leq \int |f| \\ -\int f \leq \int |f| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\int f\right| = \pm \int f \leq \int |f|$

(iv) $m \leq f \leq M \Rightarrow \underbrace{\int m}_{m\,\mu(E)} \leq \int f \leq \underbrace{\int M}_{M\,\mu(E)}$

(v) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} \overset{A,B \text{ ξένα}}{=\!=} \chi_A + \chi_B$

$\Rightarrow \int_{A\cup B} f = \int f\chi_{A\cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f$

$\boxtimes$

Λήμμα (Αρχή του Littlewood) $\boxed{\text{SOS}}$

$E \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(E)<\infty$, ~~Εν~~ $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες κ $f_n \longrightarrow f$ κατά σημείο. Τότε $\forall \varepsilon>0$ ~~$\forall$~~ $\delta>0$

ωσε ~~...~~ $\exists$ μετρήσιμο $A\subseteq E$ με $\mu(A)<\delta$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ωστε $\forall\, x\in E\setminus A$ κ $\forall n\geq n_0$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

Απόδειξη Θέτουμε

$G_k = \{x\in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ κ $E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k \Rightarrow$

$\Rightarrow E_n = \{x\in E : \exists\ k\geq n : |f_k(x) - f(x)|\geq \varepsilon\}$

$E_n \downarrow$. Αφού $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ μετά από κάποιο δείκτη n_0 θα είναι $|f_n(x) - f(x)|<\varepsilon$ άρα $x\notin E_{n_0}$

Συνεπώς $\bigcap E_n = \emptyset$. $\mu(E_n) \leq \mu(E) <\infty$ Άρα

$0 = \mu(\bigcap E_n) = \lim \mu(E_n)$. Από όπου $\mu(E_{n_0})<\delta$ ~~...~~.

~~... $\forall x \in E\setminus E_n$ ...~~

Θέτω $A = E_{n_0}$ $\mu(A) < \delta$ ή αν $x \notin E_{n_0}$

$\Rightarrow x \notin G_k \ \forall k \geq n_0$ δηλ. $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall k \geq n_0$ $\boxtimes$

Θεώρημα (1η μορφή του Θ. κυριαρχημένης σύγκλισης) f_n μετρήσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \infty$ ή $\exists M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M \ \forall n \ \forall x \in E$. Τότε αν $f_n \to f \ \forall x \in E$ θα ισχύει $\int f_n \to \int f$

[ΔΕΝ είναι συνέπεια του Θ. Riemann αφού η $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1 \dots q_n\} \\ 0 \end{cases}$
$\longrightarrow \chi$ ~~...~~ απειρ.]

$|f_n(x)| \leq M$, $f_n(x) \to f(x)$ $\Rightarrow |f(x)| \leq M$

Απόδειξη Από την αρχή Littlewood, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ και $A \subseteq E$ με $\mu(A) < \varepsilon/4M$ ώστε αν $n \geq n_0$ και $x \in E \setminus A$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}$ οπότε

$$\left|\int f_n - \int f\right| \leq \int |f_n - f| = \int_A |f_n - f| + \int_{E \setminus A} |f_n - f|$$

$$\leq 2M\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2\mu(E)}\mu(E \setminus A) < \varepsilon \quad \boxtimes$$

Το ολοκλήρωμα μιας μη-αρνητικής συνάρτησης
(όχι απαραίτητα ορισμένης σε σύνολο πεπερασμένου μέτρου ούτε απαραίτητα φραγμένες)

Ορισμός Έστω $f \geq 0$ ορισμένη στο μετρήσιμο E.
Ορίζουμε $\int_E f = \sup\left\{\int_E h \ \ h \leq f, \ h \text{ φραγμένη μετρ. με } \mu(\{x : h(x) \neq 0\}) < \infty\right\}$

$= \sup\left\{\int_E h : h \leq f \text{ on } \& \text{ —〃— }\right\}$

skip

<u>Παρατηρηση</u> Αν $F \subseteq E$ μετρησιμο με την f οπως στον ορισμο τοτε $\int_E f\chi_F = \int_F f|_F$

$$\underbrace{\sup\left\{\int_E h \;:\; h \le f\chi_F \text{ on } h \text{ μετρ. φρ με } \mu(x\in E : h(x)\neq 0) < \infty\right\}}_{A} =$$

$$= \underbrace{\sup\left\{\int_F k \;:\; k \le f|_F \text{ on}, \; k \text{ μετρ. φρ. με } \mu\{x\in F : k(x)\neq 0\} < \infty\right\}}_{B}$$

Αν $\int_E h \in A$ οριζουμε $k(x) = h(x) \; \forall x\in F \subseteq E$

φανερα $k(x) \le f(x) \; \forall x\in F$, k φρ. μετρ. και

$\{x\in F : k(x)\neq 0\} \subseteq \{x\in E : h(x)\neq 0\}$

Αρα $\int_F k \in B$. Αλλα $\int_F k = \int_F h =$

$\ge \int_F h + \int_{E\setminus F} h$ γιατι $h|_{E\setminus F} \le 0$ αφου

$h \le f\chi_F \Rightarrow h|_{E\setminus F} \le f|_{E\setminus F}\chi_F|_{E\setminus F} = 0$

Δηλαδη για καθε στοιχειο του A το B εχει ενα μεγαλυτερο, αρα $\sup A \le \sup B$

<u>Αντιστροφα</u> Αν $\int_F k \in B$ θετω $h(x) = \begin{cases} k(x) & x\in F \\ 0 & x\in E\setminus F \end{cases}$

h φρ. μετρ $\le f$ γιατι $f \ge 0$

$\{x\in E : h(x)\neq 0\} \subseteq \{x\in F : k(x)\neq 0\}$

$\Rightarrow \mu(x\in E : h(x)\neq 0) < \infty$ Αρα $\int_E h \in A$

Αλλα $\int_E h = \int_F k + \int_{E\setminus F} 0 = \int_F k$

$\Rightarrow \int_F k \in A$ δηλ $B \subseteq A \Rightarrow \sup B \le \sup A$

Πρόταση $f, g \geq 0$ μετρήσιμες στο $E \in \mathcal{M}$ τότε

(i) $\int_E cf = c\int_E f \quad \forall c>0$ (iii) Αν $f \leq g$ σ.π. $\Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$

(ii) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$ (iv) Αν $f \geq 0$ & $\int_E f = 0 \Rightarrow f=0$ σ.π. στο E

Απόδειξη (i) $\int_E (cf) = \sup_{h \leq cf} \int h = \sup_{\frac{1}{c}h \leq f} \int h$ (*)

για τις h που είναι φρ. μετρ. & $\mu(x : h(x) \neq 0) < \infty$

Θέτω $H = \frac{1}{c} h$ και η H φανερά είναι φρ. μετρ. και —||—

Άρα

(*) $= \sup_{H \leq f} \int cH = \sup_{H \leq f} c \int H = c \sup_{H \leq f} \int H = c \int f.$

(ii) Αν $h \leq f$ και $k \leq g \Rightarrow h+k \leq f+g \Rightarrow \int_E (h+k) \leq \int_E (f+g)$

$\Rightarrow \int_E h + \int_E k \leq \int_E (f+g) \xrightarrow[\substack{h \leq f \\ k \leq g}]{\sup} \int_E f + \int_E g \leq \int_E (f+g)$

$\int_E (f+g) = \sup_{\ell \leq f+g} \int \ell$ όπου ℓ φρ. μετρ. $\mu(x\ \ell(x) \neq 0) < \infty$

h

Θέτω $h(x) = \min\{f(x), \ell(x)\} \leq f(x)$

Επίσης h φραγμένη γιατί $h(x) \leq \ell(x)$ & ℓ φρ.

άρα h άνω φρ. και $h(x) \geq \min\{0, \inf \ell(x)\}$

$\Rightarrow h$ κάτω φρ.

~~$\{x\ h(x) \neq 0\} \subseteq \{x\ \ell(x) \neq 0\}$~~ Επιπλέον

$\{x\ \ell(x) = 0\} \subseteq \{x\ h(x) = 0\}$ γιατί Αν $\ell(x) = 0 \leq f(x)$

$\Rightarrow h(x) = 0$. Άρα $\{x : \ell(x) \neq 0\} \supseteq \{x : h(x) \neq 0\}$

οπότε $\mu(x\ h(x) \neq 0) < \infty$

k

Θέτω $k(x) = \ell(x) - h(x)$ μετρήσιμη και φρ. ως διαφορά φραγμένων

Αν $h(x) = \ell(x) \Rightarrow k(x) = 0 \leq g(x)$

Αν $h(x) = f(x) \Rightarrow f(x) \leq \ell(x)$ ορ. h γιατί $\ell \leq f+g$

Τέλος $\{x : \ell(x)=0\} \subseteq \{x : k(x)=0\}$ γιατί αν
$\ell(x)=0 \Rightarrow h(x)=0$ αφού $f \geq 0$ άρα $k(x) = \ell(x)-h(x)$
$= \ell(x) = 0$

οπότε $\{x : k(x) \neq 0\} \subseteq \{x : \ell(x) \neq 0\}$ οπότε
$\mu(\quad) \leq \mu(\quad) < \infty$

Άρα $\int_E \lambda = \int_E k + \int_E h \overset{\text{ορσ}}{\leq} \int_E g + \int_E f \underset{\lambda \leq f+g}{\overset{\sup}{\Longrightarrow}}$

$\Rightarrow \int_E (f+g) \leq \int_E g + \int_E f$

(iii) $f \leq g$ σπ οπότε αν $h \leq f \Rightarrow h \leq g$ σπ

$\Rightarrow \{h : h$ φρ. μετρ. $\mu(x : h(x) \neq 0) < \infty$, $h \leq f$ σπ$\} \subseteq \{h : h$ φρ. μετρ. $\mu(x : h(x) \neq 0) < \infty$, $h \leq g\}$

$\Rightarrow \{\int h : h$ —— " ——$\} \subseteq \{\int h :$ —— " ——$\}$

$\Rightarrow \sup\{\quad\} \leq \sup\{\quad\}$

$\Rightarrow \int f \leq \int g$

(iv) Θέτουμε $A_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
Αν $\exists n : \mu(A_n) > 0$ τότε $\int f \underset{f \geq 0}{\geq} \int_{A_n} f \geq \mu(A_n)\frac{1}{n} > 0$
άτοπο

Άρα $\mu(A_n) = 0$ $\forall n$. Φανερά $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_1^\infty A_n$

$\Rightarrow \mu(x \in E : f(x) > 0) = 0 \Rightarrow f = 0$ σ.π. $\boxed{4}$

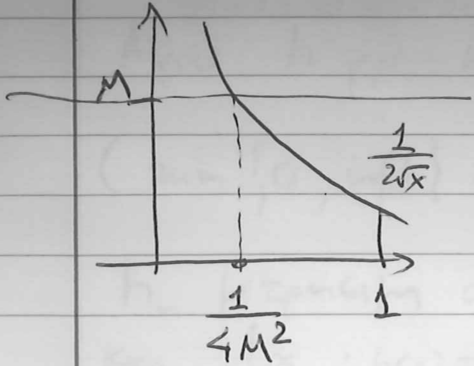
Παράδειγμα Υπολογίστε με τον ορισμό το $\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \sup_{h \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}} \{\int_{(0,1]} h$: h φρ. μετρ. $\mu(x \in (0,1] : h(x) \neq 0) < \infty\}$

$\geq \int_{(0,1]} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{[\frac{1}{n}, 1]}(x)}$ $\boxed{\frac{\text{Riemann}}{??}}$ $\sqrt{x}\Big|_{1/n}^{1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$

$\int \frac{1}{\quad} \geq 1$

Αν $h \le \frac{1}{2\sqrt{x}}$ αφού h φρ. έστω $|h| \le M \Rightarrow h^+ + h^- \le M$
$\Rightarrow h^+ \le M$



$\cancel{\int h \le \int |h|}$

$h \le |h|$

$$h \le h^+ = \max\{0,h\} \le M$$

$$h \le h^+ \le \frac{1}{2\sqrt{x}}\chi_{[\frac{1}{4M^2}, 1]}(x) + M\chi_{[0, \frac{1}{4M^2}]}$$

$$\Rightarrow \int h \le \sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{4M^2}}^{1} + M\frac{1}{4M^2} = 1 - \frac{1}{2M} + \frac{1}{4M} < 1$$

$$\Rightarrow \sup h \le 1 \Rightarrow \int_{(0,1]} 1/2\sqrt{x} \le 1$$ Άτοπο $\boxed{\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1}$

<u>Θεώρημα</u> (Λήμμα Fatou) (SOS ως προς τη διατύπωση)

Θεωρούμε μια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n \ge 0$ μετρήσιμες κ μετρήσιμη f ορισμένες στο μετρήσιμο E. Υποθέτουμε $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ σ.π. στο E. Τότε

$$\int_E f \le \liminf \int_E f_n$$

<u>Απόδειξη</u> Επειδή το ολοκλήρωμα δεν αλλάζει αν οι f_n, f μεταβληθούν σε σύνολο μηδενικού μέτρου (π.χ. μπορούμε να θέσουμε $A = \{x : f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\}$ οπότε $\mu(A) = 0$ κ να θεωρήσουμε τις $\tilde{f}_n = f_n\chi_{E\setminus A}$, $\tilde{f} = f\chi_{E\setminus A}$, τότε $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ $\forall x$)

υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in E$.

Θεωρούμε h φρ. μετρ. $\le f(x)$ με $\mu(x \in E : h(x) \ne 0) < \infty$

θα δείξουμε $\int h \le \liminf \int f_n$ οπότε μετά θα πάρουμε

Θέτουμε $E' = \{x \in E : h(x) \neq 0\}$ και $h_n = \min\{f_n(x), h(x)\} \leq f_n(x)$

Αφού h φρ και $f_n \geq 0$ η h_n είναι <u>ομοιόμορφα</u> φραγμ.

$(\min\{0, \inf h\} \leq h_n \leq \sup h)$ δηλ. $\exists M \in \mathbb{R} : |h_n| \leq M$.

h_n μετρήσιμη ως minimum μετρησίμων

και $\{x : h(x) = 0\} \underset{f_n \geq 0}{\subseteq} \{x : h_n(x) = 0\}$ άρα

$\infty > \mu(x : h(x) \neq 0) \geq \mu(x\ h_n(x) \neq 0)$. Συνεπώς

ορίζεται το $\int_E h_n$ άρα και το $\boxed{\int_{E'} h_n \quad \text{με } \mu(E') < \infty}$

και $h_n(x) \longrightarrow \min\{f(x), h(x)\} = h(x) \quad \forall x \in E'$

Από 1ο θεώρημα ΘΚΣ $\int_{E'} h_n \longrightarrow \int_{E'} h$

Άρα $\int_E h \underset{h|_{E \setminus E'} = 0}{=\!=\!=} \int_{E'} h = \lim_n \int_{E'} h_n = \liminf \int_{E'} h_n \leq$

$\underset{h_n \leq f_n}{\overset{\text{ομοφ } f_n}{\leq}} \liminf \int_{E'} f_n \underset{f_n \geq 0}{\leq} \liminf \int_E f_n$

$\Rightarrow \int_E h \leq \liminf \int_E f_n \xrightarrow[h \leq f]{\sup} \int_E f \leq \liminf \int_E f_n$ ▨

<u>Θεώρημα (μονότονης σύγκλισης) (ΘΜΣ)</u>

Αν $f_n \geq 0$, $f_n \leq f_{n+1}$ μετρήσιμες με $f_n \to f$ σπ

$\Rightarrow \int f = \lim \int f_n$

<u>Απόδ</u> Από το Λ. Fatou $\int f \leq \liminf \int f_n = \lim \int f_n$

(αφού $(\int f_n) \uparrow$) Αλλά $f_n \leq f_{n+k} \xrightarrow[k \to \infty]{} f$

$\Rightarrow f_n \leq f \Rightarrow \int f_n \leq \int f \Rightarrow \lim \int f_n \leq \int f$ ▨

<u>Εφαρμογή</u> $\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$

Η $f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{[\frac{1}{n},1)} + \frac{\sqrt{n}}{2} \chi_{(0,\frac{1}{n})} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$

η $f_n \uparrow$ άρα $\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim \int f_n \underset{\text{Riemann}}{\overset{?}{=}} \sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} + \frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{n} \Longrightarrow 1$

<u>Εφαρμογή</u> $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$f_n(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \chi_{[-n,n]}(x) \uparrow \frac{1}{1+x^2}$ άρα

$\int \frac{1}{1+x^2} = \lim \int f_n = \lim_n \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} = \lim_n (\arctan n - \arctan(-n))$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

<u>Πόρισμα</u> Beppo – Levi

Αν $u_n \geq 0$ μετρήσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$ και $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, τότε

$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$

<u>Απόδειξη</u> Η $f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ είναι $\uparrow$ αφού $u_n \geq 0$

Από ΘΜΣ $\int_E \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \int_E \lim_n \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim \int_E \sum_1^n u_k =$

$= \lim \sum_1^n \int_E u_k = \sum_1^{\infty} \int_E u_k$ Η σειρά να συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ ή να αποκλίνει στο $+\infty$ αφού $\int_E u_k \geq 0$.

<u>Πρόταση</u> Αν $f \geq 0$ μετρήσιμη, E_n ξένα και $E = \bigcup_1^{\infty} E_n$ τότε $\int_E f = \sum \int_{E_n} f$

<u>Απόδ</u> θέτουμε $u_k = f\chi_{E_k}$ οπότε $f\chi_E = f\chi_{\cup E_k} = f \sum \chi_{E_k} =$

$= \sum^{\infty} f\chi$ … + Bepp…

<u>Ορισμός</u> Μια $f \geq 0$ μετρήσιμη λέγεται <u>ολοκληρώσιμη</u> στο μετρήσιμο E, αν $\int_E f < \infty$

<u>Πρόταση</u> Αν $f, g \geq 0$ μετρήσιμες στο $E \in \mathcal{M}$ και $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in E$ και f ολοκληρώσιμη, τότε και g ολοκληρώσιμη και

$$\int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g$$

<u>Αποδ</u> $f = \underbrace{(f-g)}_{\geq 0} + \underbrace{g}_{\geq 0} \implies \int_E f = \int_E (f-g) + \int_E g$

Επειδή $\int_E f < \infty \implies \int_E g < \infty$ άρα

g ολοκληρώσιμη και $\int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g$ ☒

<u>Πρόταση</u> Έστω $f \geq 0$ ολοκληρώσιμη στο E.
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall A \subseteq E$ με $\mu(A) < \delta \implies \int_A f < \varepsilon$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \leq n \\ n & \text{αν } f(x) > n \end{cases}$ οπότε $|f_n(x)| \leq n$ $\forall x$

$\implies f_n$ φραγμένη και $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ διότι

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{αν } f(x) \leq n \implies f(x) < n+1 & \text{άρα } f_n(x) = f(x) = f_{n+1}(x) \\ \text{αν } n < f(x) \leq n+1 \implies & f_n(x) = n < f(x) = f_{n+1}(x) \\ \text{αν } n < n+1 < f(x) \implies & f_n(x) = n < n+1 = f_{n+1}(x) \end{array} \right\}$$

$\forall x \in E$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. Πράγματι αν $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall n > f(x)$, $f_n(x) = f(x)$.

~~Αν~~ Αν $f(x) = +\infty$. $\implies f_n(x) = n \longrightarrow +\infty = f(x)$ $\quad \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Από ΘΜΣ $\int_E f_n \longrightarrow \int_E f$ Άρα (αφού $\int_E f < \infty$) $\forall \varepsilon > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| < \varepsilon/2$ άρα $\left| \int_E f_{n_0} - \int f \right| < \varepsilon/2$

Θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$. Οπότε αν $A \subseteq E$ με $\mu(A) < \delta$

Θα είναι $\int_A f = \int_A (f - f_{n_0}) + \int_A f_{n_0} \underset{|f_{n_0}| \le n_0}{\overset{f_n \uparrow f \Rightarrow f_n \le f}{\le}} \int_E (f - f_{n_0}) + n_0 \mu(A)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon}{2 n_0} = \varepsilon$ ▨

Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Βήμα 4

<u>Ορισμός (γενικός ορισμός)</u> Μια μετρήσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη στο E αν οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες στο E. Το ολοκλήρωμα της ορίζεται να είναι ο αριθμός $\int_E f := \int_E f^+ - \int_E f^-$

<u>Πρόταση</u> Έστω f, g ολοκληρώσιμες στο $E \in \mathcal{M}$

(i) Η cf είναι ολοκληρώσιμη $\forall c \in \mathbb{R}$ και $\int_E cf = c \int_E f$

(ii) Η $f+g$ —//— και $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

(iii) αν $f \le g$ σπ τότε $\int_E f \le \int_E g$

(iv) Αν A, B ξένα μετρήσιμα $\subseteq E \Rightarrow \int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$

<u>Απόδειξη</u> (i) Αν $c \ge 0$ $(cf)^+ = c f^+$, $(cf)^- = c f^-$ ολοκληρώσιμες και $\int (cf) = \int (cf)^+ - \int (cf)^- = \int c f^+ - \int c f^- = c \int f^+ - c \int f^-$
$= c \left(\int f^+ - \int f^- \right) = c \int f$

Αν $c < 0$ $(cf)^+ = \max\{0, cf\} = |c| \max\{0, -f\} = |c| f^-$
$(cf)^- = \max\{0, -cf\} = |c| \max\{0, f\} = |c| f^+$ ολοκλ.

Άρα $\int cf = \int (cf)^+ - \int (cf)^- = |c| \left(\int f^- - \int f^+ \right)$
$= -c \left(\int f^- - \int f^+ \right) = c \int_E f$.

(ii) $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- \Rightarrow$

$f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f+g)^+ - (f+g)^-$

$\Rightarrow f^+ + g^+ + (f+g)^- = (f+g)^+ + f^- + g^-$

$\xRightarrow{\text{Βημα 3}} \int f^+ + \int g^+ + \int (f+g)^- = \int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^-$

$\Rightarrow \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int (f+g)^+ - \int (f+g)^-$

$\Rightarrow \int f + \int g = \int (f+g)$

(iii) $f \le g$ σπ $\Rightarrow g - f \ge 0$ σπ $\xRightarrow[3]{\text{Βημα}} \int (g-f) \ge 0$

$\xRightarrow{(i)+(ii)} \int g - \int f \ge 0 \Rightarrow \int f \le \int g$

(iv) $\int_{A \cup B} f = \int f \chi_{A\cup B} \overset{A,B}{\underset{\text{ξένα}}{=}} \int f(\chi_A + \chi_B) = \int_A f + \int_B f$

<u>Θεώρημα</u> (κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) (2η μορφή)

Αν g ολοκληρώσιμη στο μετρήσιμο E

f_n μετρήσιμες με $|f_n| \le g$

κ $f_n \longrightarrow f$ σπ $\Rightarrow \int f = \lim \int f_n$

<u>Απόδειξη</u> $f_n \le |f_n| \le g$ & $-f_n \le |f_n| \le g$

$\Rightarrow g - f_n \ge 0$ & $g + f_n \ge 0 \xRightarrow{\text{Λ. Fatou}}$

$\int (g-f) \le \liminf \int (g-f_n)$ & $\int (g+f) \le \liminf \int (g+f_n)$

$\Rightarrow \int_E g - \int_E f \le \int g - \limsup \int f_n$ & $\int g + \int f \le \int g + \liminf \int f_n$

$\Rightarrow \int f \le \liminf \int f_n \le \limsup \int f_n \le \int f$ ▢

7.6.3) Η ανισότητα Fatou μπορεί να είναι γνήσια (πχ $f_n = \chi_{[n,n+1]}$)

Λύση $f_n = \chi_{[n,n+1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \int 0 = 0$

$\liminf \int f_n = 1$ $\boxtimes$

7.6.1) $f: \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη ($\int f < \infty$). Αποδείξτε ότι $\forall a \in (0,\infty]$ ισχύει $\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}) < \infty$

Λύση Αν $\exists\, \alpha \in (0,\infty] : \mu(x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha) = +\infty$ τότε

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}} f \geq \int_{\{\ \}} \alpha = \alpha \mu\{\ \} = \underset{\alpha > 0}{+\infty}$$

$\boxtimes$

7.6.5) (Γενίκευση του λήμματος Fatou)

Αν $h: \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μετρήσιμη με $\int_{\mathbb{R}} h < \infty$ η $f_n \geq -h$ μετρήσιμες $f_n \to f$, δείξτε ότι $\int f \leq \liminf \int f_n$

Λύση $f_n + h \geq 0$ άρα η $f_n + h \xrightarrow[n\to\infty]{} f + h$ άρα

$$\int (f + h) \leq \liminf \int (f_n + h) \Rightarrow \int f + \cancel{\int h} \leq \liminf \int f_n + \cancel{\int h}$$

$\boxtimes$

Υπολογίστε το $\displaystyle\int_{[0,\infty]} \frac{1}{1+t^2}$

Λύση $f_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \chi_{[0,n]}(t) \uparrow \dfrac{1}{1+t^2} = f$. Από ΘΜΣ

$$\int f = \lim_n \int_{[0,n]} \frac{1}{1+t^2} = \lim_n \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \lim_n \left(\arctan t \Big|_0^n\right) = \lim \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$$

7.108 Υπολογίστε τα όρια αιτιολογώντας τις πράξεις σας

(i) $\lim_n \int_{[0\infty]} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}$ (ii) $\lim_n \int_{[0\,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}$

(iii) $\lim_n \int_{[0\infty]} n \sin\frac{x}{n} \left(x(1+x^2)\right)^{-1}$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \int_{[a\,\infty]} n(1+n^2x^2)^{-1}$

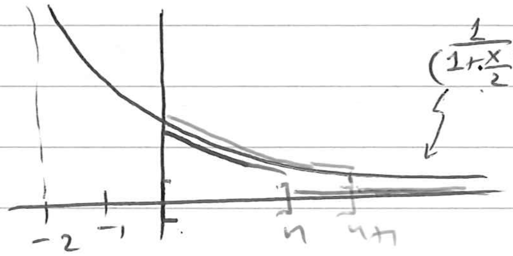
Λύση (i) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n} \longrightarrow e^{-x}\cdot 0 = 0$

Άρα $\lim\int = \int \lim \dots = \int 0 = 0$ αν εφαρμόζεται το ΘΚΣ. Η συνάρτηση f_n είναι μετρήσιμες

Is $\left|\frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right| \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} \quad \forall n\geq 2$

Θέτω $g(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}$. Μένει να δείξουμε

$\int_{[0\infty)} g < \infty$



Θέτω $g_n(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}\chi_{[0n]}(x)$

$g_n \uparrow g$. Από ΘΜΣ $\int g = \lim \int g_n = \lim_n \int_0^n \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}dx$

$\xrightarrow[\substack{x=2y-2\\dx=2dy}]{1+x/2=y} \lim_n \int_1^{1+\frac{n}{2}} \frac{1}{y^2}2dy = \lim_n \left(-\frac{2}{y}\right)\Big|_1^{1+\frac{n}{2}}$

$= \lim_n \left(-\frac{2}{1+\frac{n}{2}} + \frac{2}{1}\right) = 2$. Άρα $\int g = 2 < \infty$

Is το ΘΚΣ εφαρμόζεται άρα το αρχικό όριο είναι μηδέν

Δίνεται $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \uparrow$ $\forall n > -x$

$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \rightrightarrows 0$ Αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θ. ομοιόμορφης σύγκλισης γιατί $\mu([0\infty]) = +\infty$

Για την ομ. σύγκλιση,
Για $0\leq x\leq\sqrt{n}$ $|f_n(x)| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$
Για $\sqrt{n}\leq x$ $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$
Σε κάθε περίπτωση $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
άρα $f_n \rightrightarrows 0$ ■

(ii) $\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ σπ (εκτός αν $x=0$)

Από ανισότητα Bernoulli $\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \le \frac{1+nx^2}{1+nx^2} = 1 = g(x)$

$$\int_{[0,1]} g(x) = 1 < \infty \quad \text{Άρα}$$

$$\lim_n \int_{[0\,1]} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} = \int \lim(\quad) = \int 0 = 0$$

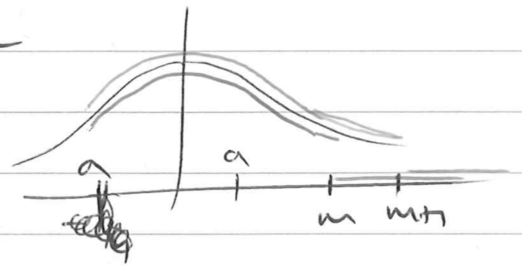
(iii) $$\left|\frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\right| = \left|\frac{\sin(x/n)}{x/n}\right| \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

$\int_{[0\infty]} g(x) = \frac{\pi}{2} < \infty$ άρα εφαρμόζεται ΘΚΣ

$$\lim_n \int_{[0\infty]} \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \int_{[0\infty]} \lim_n \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \frac{1}{1+x^2} = \int_{[0\infty]} \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

(iv) $\frac{n}{1+n^2x^2} \ge 0$ Θέτω $f_m(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}\chi_{[a\ m]}(x)$

για $m > a$



$f_m \uparrow$ με όριο καθώς $m\to\infty$ την $\frac{n}{1+n^2x^2}$

Άρα ΘΜΣ $$\int_{[a\ \infty]} \frac{n}{1+n^2x^2} = \lim_{m\to\infty}\int_a^m \frac{n}{1+n^2x^2}dx = \lim_{m\to\infty} \arctan(nx)\Big|_a^m$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\arctan(nm) - \arctan(na)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0 & \text{αν } a>0 \\ \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2} & \text{αν } a=0 \\ \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi & \text{αν } a<0 \end{cases}$$

Θεώρημα (Lebesgue) Έστω ότι η f είναι φραγμένη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a\,b]$

(i) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε είναι Lebesgue μετρήσιμη και άρα ολοκληρώσιμη, αφού η f είναι φραγμένη. Επίσης

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[ab]} f(x)\,d\mu(x)$$

(ii) Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη εάν και μόνο αν

$$\mu(\{x \in [ab] : f \text{ ασυνεχής στο } x\}) = 0$$

Απόδειξη (i) Έστω f R-ολοκληρώσιμη. Αν $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μια διαμέριση του $[ab]$. Θέτουμε

$$G_P = \sum_1^n M_j \chi_{[t_{j-1}\,t_j]} \quad \& \quad g_P = \sum_1^n m_j \chi_{[t_{j-1}\,t_j]}$$

Παρατηρούμε $\quad U(f\,P) = \int G_P \quad L(f\,P) = \int g_P$

Αν P_k ακολουθία διαμερίσεων με $\|P_k\| = \max_{j=1\dots n} |t_j - t_{j-1}| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ και η μία εκλέπτυνση της προηγούμενης τότε $U(f\,P_k) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx \quad L(f\,P_k) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$.

και $G_{P_k} \downarrow \quad g_{P_k} \uparrow$. Θέτω $G = \lim_k G_{P_k} \quad g = \lim_k g_{P_k}$

οπότε $g_{P_k} \le f \le G_{P_k} \xRightarrow{k\to\infty} g \le f \le G$.

Από ΘΚΣ $\quad (g_{P_k} \le G_{P_1} \;\&\; G_{P_k} \le G_{P_1})$

$$\int g = \lim_k \int g_{P_k} = \int_a^b f(x)dx \qquad \int G = \lim_k \int G_{P_k} = \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int (G-g) = 0 \Rightarrow G = g \text{ σπ} \quad \text{δηλ } G = f \text{ σπ}$$

Άρα f μετρήσιμη (ως όριο ακολουθίας μετρήσιμων)

$$G = f \text{ σπ} \Rightarrow \int f = \int G = \lim \int G_{P_k} = \int_a^b f(x)dx$$

(ii) παραλείπεται.

7.10.19 | Το ΘΜΣ δεν ισχύει πάντα για φθίνουσες

Λύση Θέτουμε $f_n(x) = \chi_{[n,\infty)} \downarrow 0$

$$\int f_n = \infty \not\to 0 = \int 0 \quad \boxed{}$$

(Ισχύει αν $\exists k$: $\int f_k < \infty$, παλι θέτουμε

$g_n = f_k - f_n$ $\forall n \geq k$. $f_n \downarrow \Rightarrow g_n \geq 0$ & $g_n \uparrow f_k - f$

$\Rightarrow \int g_n \to \int (f_k - f) \Rightarrow \int f_k - \int f_n \to \int f_k - \int f$

$\xRightarrow{\int f_k < \infty} \int f_n \to \int f$)

7.7.1 | Ολοκληρώσιμη επί $\xrightarrow{\text{μετρήσιμη φραγμένη σε } \mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη
(ολοκληρώσιμη επί ολοκληρώσιμη όχι απαραίτητα
ολοκληρώσιμη)

Λύση $f \cdot g$ μετρήσιμη. Έστω $|g| \leq M \Rightarrow -M \leq g \leq M$

Ισχ. h ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $|h|$ ολοκληρώσιμη
και $|\int h| \leq \int |h|$

[“$\Rightarrow$” $\int f^+ < \infty$ & $\int f^- < \infty \Rightarrow \int |f| < \infty$

“$\Leftarrow$” $|f|$ ολοκλ. $\Rightarrow \int |f| < \infty \Rightarrow \int (f^+ + f^-) < \infty \xRightarrow{\text{Θεωρ. 3}}$

$\left.\begin{array}{l} \int f^+ + \int f^- < \infty \\ \text{αλλά } \int f^+, \int f^- \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int f^+ < \infty$ & $\int f^- < \infty$

οπότε $\pm h \leq |f| \Rightarrow \pm \int h \leq \int |f| \Rightarrow |\int h| \leq \int |h|$]

Άρα αρκεί $\int |fg| < \infty$. Αλλά $\int |fg| = \int |f||g| \leq \int |f| \cdot M =$
$= M \int |f| < \infty$ $\boxed{}$

($f = g = 1/\sqrt{x}$ στο $(0, \infty)$ είναι ολοκληρώσιμες αλλά $f \cdot g$ όχι)

7.7.3 | f_n, f ολοκληρώσιμες & $\int |f_n - f| \to 0$ τότε
$\int f_n \to \int f$ & $\int |f_n| \to \int |f|$

Λύση $|\int |f_n| - \int |f|| = |\int (|f_n| - |f|)| \leq \int ||f_n| - |f||$

$\leq \int |f_n - f| \longrightarrow 0$ $\boxed{}$

7.10.5 | $\mu(E)<\infty$, f_n, f, g_n, g ολοκληρώσιμες με $f_n \to f$ σπ, $g_n \to g$ σπ, $|f_n| \le g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

και $\int g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int g$. Τότε $\int f_n \to \int f$.

Λύση $\pm f_n \le |f_n| \le g_n \Rightarrow \underbrace{g_n \pm f_n}_{\downarrow\, g\pm f} \ge 0 \xRightarrow{\text{Fatou}}$

$$\int (g \pm f) \le \liminf \int (g_n \pm f_n) \Rightarrow \begin{cases} \int g + \int f \le \int g + \liminf \int f_n \\ \int g - \int f \le \int g - \limsup \int f_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f \le \liminf \int f_n \le \limsup \int f_n \le \int f \qquad \blacksquare$$

7.10.6 | f ολοκληρώσιμη. Τότε η $F(x) = \int_{(-\infty, x]} f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Λύση Έχουμε δείξει (Πρόταση 7.6.10) ότι $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ώστε αν $\mu(E) < \delta \Rightarrow |\int_E f| < \varepsilon$.

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad |F(x) - F(x_0)| = \int_{[x\, x_0] \text{ ή } [x_0\, x]} f$

Άρα αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \mu([x\, x_0] \text{ ή } [x_0\, x]) < \delta$

άρα $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ $\quad \blacksquare$

7.10.7 | Αν $f_n(x) = a e^{-nax} - b e^{-nbx}$ $\quad 0 < a < b$

Δείξτε ότι $\sum_1^\infty \int_{[0\,\infty]} |f_n| = +\infty$ και $\int_{[0\,\infty]} \left(\sum_1^\infty f_n(x)\right) \ne \sum_1^\infty \int_{[0\,\infty]} f_n$

~~Λύση Για το $\int_{[0\infty]} |f_n|$ θεωρούμε την $|f_n| \chi_{[0\, m]} \uparrow |f_n|$ καθώς $m \to \infty$ οπότε από το ΘΜΣ $\int_{[0\infty]} |f_n| = \lim_m \int_0^m |f_n| = \frac{e^{-nax}}{-n}\Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{-nbx}}{-n}\Big|$~~

[illegible] $f_n(x) \geq 0 \iff x \geq \dfrac{\log(b/a)}{n(b-a)} = x_0$

$$\int_{[0\infty]} f_n = \int_{[0\ x_0]} f_n + \int_{[x_0\infty]} f_n \overset{\text{ΘΜΣ}}{=\!=} \int_0^{x_0} (a e^{-nax} - b e^{-nbx})dx + \lim_{m\to\infty} \int_{x_0}^{m} (\qquad) dx$$

$$= \frac{e^{-nax}}{-n}\Big|_0^{x_0} - \frac{e^{-nbx}}{-n}\Big|_0^{x_0} + \lim_{m\to\infty}\left(\frac{e^{-nax}}{-n}\Big|_{x_0}^{m} - \frac{e^{-nbx}}{-n}\Big|_{x_0}^{m}\right)$$

$$= \cancel{\frac{e^{-nax_0}}{-n}} - \cancel{\frac{1}{-n}} - \cancel{\frac{e^{-nbx_0}}{-n}} + \cancel{\frac{1}{-n}} + \lim_{m\to\infty}\left(\frac{e^{-nam}}{-n} - \cancel{\frac{e^{-nax_0}}{-n}} - \frac{e^{-nbm}}{-n} + \cancel{\frac{e^{-nbx_0}}{-n}}\right)$$

$= 0$. Άρα $\boxed{\sum_1^\infty \int_{[0\infty]} f_n = 0}$

$$\sum_1^\infty f_n(x) = a \sum_1^\infty (e^{-ax})^n - b \sum_1^\infty (e^{-bx})^n =$$

$$= a\,\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - b\,\frac{e^{-bx}}{1-e^{-bx}} =: f(x)$$

(οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι φραγμένες άρα δεν είναι R-ολοκληρώσιμες)

~~$\int \sum_1^\infty f_n$ [illegible] ΘΜΣ 0~~

~~$f_1(x) \geq 0$ γιατί $a>0 \overset{x\in[0\infty]}{\Longrightarrow} ax \geq 0 \Rightarrow e^{ax} \geq 1 \Rightarrow e^{-ax} \leq 1 \Rightarrow 1-e^{-ax} \geq 0$ όμοια $f_2(x) \geq 0$~~

Η $f(x) = \dfrac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \dfrac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}} = \dfrac{a}{e^{ax}-1} - \dfrac{b}{e^{bx}-1}$

~~[illegible]~~

$$= \frac{ae^{bx} - a - be^{ax} + b}{(e^{ax}-1)(e^{bx}-1)}$$

$a, b, x \geq 0 \Longrightarrow (e^{ax}-1)(e^{bx}-1) \geq 0$

$\left.\begin{array}{l}\text{Η } g(x) = ae^{bx} - a - be^{ax} + b \text{ ικανοποιεί } g(0) = 0 \\ \text{κ } g'(x) = ab\,(e^{bx} - e^{ax}) \geq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0\infty]$

$\boxed{\text{Άρα } f \geq 0 \text{ !!}}$ οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε

το ΘΜΣ για την $f_n = f\chi_{(\frac{1}{n}, n)} \nearrow f$

Έτσι $\displaystyle\int_{[0\infty]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{n} \left(\frac{ae^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{be^{-bx}}{1-e^{-bx}} \right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\log(1-e^{-ax}) - \log(1-e^{-bx}) \right) \Big|_{1/n}^{n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log \frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}} \Big|_{1/n}^{n} =$$

$$= \log 1 - \lim_{n\to\infty} \log \frac{1-e^{-a/n}}{1-e^{-b/n}}$$

Αλλά $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{-ax}}{1-e^{-bx}} \overset{L'H}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{ae^{-ax}}{be^{-bx}} = \frac{a}{b}$

Συνεπώς

$$\int_{[0\infty]} f = -\log\frac{a}{b} = \log\frac{b}{a}$$

$\sum_1^\infty \int |f_n| = \infty$ γιατί αν $< \infty$ από Beppo-Levy θα έπρεπε $\int \sum f_n = \sum \int f_n$

$$\int \sum f_n = \log\frac{b}{a} \neq 0 = \sum \int f_n .$$

<u>Αλλιώς</u>

$$a e^{-nax} - b e^{-nbx} \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{n} \frac{\log b/a}{b-a} =: C$$

Άρα $\int_{[0\,\infty]} |f_n| = \int_{[0\,c]} |f_n| + \int_{[c\,\infty]} |f_n| = \dots =$

$$= 2\,\frac{e^{-nac} - e^{-nbc}}{n} \;\; \underline{\underline{c = \frac{1}{n}\frac{\log b/a}{b-a}}} \;\; \frac{C(a,b)}{n}$$

Άρα $\sum_1^\infty \int_{[0\infty]} |f_n| = \sum \frac{C(a,b)}{n} = +\infty .$ ∎

<u>Φεβρ '21</u> (α) Με το ΘΜΣ υπολογίστε το

$\int_{[1,2]} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. (β) Δίνεται $f \geq 0$, $f\uparrow$, διαφορίσιμη

$f : [0\,1] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ $f(1) = 1$.

Υπολογίστε το

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_{[0\,1]} \frac{f'(x)}{\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n}$$

<u>Λύση</u> (α) $\int_{[1\,2]} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[1\,2]} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \chi_{[1+\frac{1}{n},\,2]}(x)$

$$= \lim_n \left((2\sqrt{x-1}) \Big|_{1+\frac{1}{n}}^{2} \right)$$

(β) $\underset{\uparrow \text{ΘΚΣ.}}{I =} \int \lim = \int_{[0\,1]} \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} = \left(-e^{-f(x)}\right)\Big|_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1}$

$$\left| \frac{f'(x)}{\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n} \right| \underset{\substack{f' \geq 0 \\ +\text{Bernoulli}}}{\overset{f\uparrow}{\leq}} \underbrace{\boxed{\frac{f'(x)}{1 + f(x)}}}_{g} = \ln\left(1 + f(x)\right)\Big|_0^1 = \ln 2 < \infty .$$

7.10.2| Αν f μετρήσιμη και $\int f < \infty$ τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \infty$ & $\int_E f > \int f - \varepsilon$

Λύση Αν $f \geq 0$ θέτω $f_n = f\chi_{[-n,n]} \uparrow f$ οπότε από ΘΜΣ $\int f_n \to \int f \Leftrightarrow \int_{[-n,n]} f \to \int f$ άρα $\exists n_0$ ώστε

$$\left| \int_{[-n_0,n_0]} f - \int f \right| < \varepsilon \Rightarrow \int_{E=[-n_0,n_0]} f > \int f - \varepsilon \ \& \ \mu(E) = 2n_0$$

Για τη γενική f εφαρμόζουμε το προηγούμενο στις f^+ & f^- άρα $\exists$ $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ $\mu(E_1), \mu(E_2) < \infty$ και

$\int_{E_1} f^+ > \int f^+ - \frac{\varepsilon}{2}$ & $\int_{E_2} f^- > \int f^- - \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε $E = E_1 \cup E_2$

$\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) < \infty$

Έχουμε $-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^+ < \int_{E_1} f^+ \leq \int_E f^+ \leq \int f^+ < \int f^+ + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \left| \int_E f^+ - \int f^+ \right| < \varepsilon/2 \quad \text{και}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \int f^- < \int_{E_2} f^- \leq \int_{E_1 \cup E_2 = E} f^- \leq \int f^- < \int f^- + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \int_E f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2$$

Άρα $\left| \int_E f - \int f \right| = \left| \int_E f^+ - \int_E f^- - \left(\int f^+ - \int f^- \right) \right| \leq$

$$\leq \left| \int_E f^+ - \int f^+ \right| + \left| \int_E f^- - \int f^- \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int f - \int_E f < \varepsilon \Rightarrow \int f - \varepsilon < \int_E f \qquad \blacksquare$$

7.10.3| Βρείτε $f_n \rightrightarrows 0$ στο $\mathbb{R}$ αλλά $\int f_n = +\infty$ & βρείτε $g_n \to 0$ στο $[0,1]$ αλλά $\int g_n = 1$ $\forall n$

Λύση $f_n(x) = \frac{1}{n} \rightrightarrows 0$ $\quad \int f_n = \infty \cdot \frac{1}{n} = \infty$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & 0 < x \leq 1/n \end{cases} \to 0, \quad \int g_n = 1.$$

Σεπ '22 | 3 β) Αφού δείξετε ότι $1+n^2x^2 \geq 2nx$ για $\forall x \in [0,1]$ υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} \frac{nx\log x}{1+n^2x^2}$$

Λύση $f_n(x) = \dfrac{nx\log x}{1+n^2x^2}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{nx|\log x|}{2nx} = \frac{1}{2}|\log x|$

Θέτουμε $g(x) = \frac{1}{2}|\log x|$

$$\int_{[0,1]} g(x) \overset{\text{ΘΜΣ}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{1}{2}|\log x| \chi_{[\frac{1}{n},1]}(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^{1} (-\log x) = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1} \log x \, dx$$

$$\int \log x\,dx = \int x' \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + c$$

Άρα $\displaystyle\int_{[0,1]} g(x) = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} (x\log x - x)\Big|_{1/n}^{1} =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1\log 1 - 1 - \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}(-1 - 0 + 0) = 1/2$$

$$\left(\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to0^+} \frac{\log x}{1/x} \overset{\infty/\infty}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0\right)$$

Άρα $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} \frac{nx\log x}{1+n^2x^2} = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} \frac{nx\log x}{1+n^2x^2} = \int_{[0,1]} 0 = 0.$

$\blacksquare$

4.7.3| $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ (i) σύγκλιση στο $[0\infty)$

(ii) ομοιόμορφη στο $[0\infty)$;

(iii) —//— στο $[\delta\infty)$ $\delta>0$;

Λύση (i) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{x}{\frac{1}{n}+nx^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 =: f \quad \forall x\in[0\infty)$

(ii) $a_n = \sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq 0} \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{n(1+n^2x^2) - nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} =$$

$$= \frac{n+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{1}{n} \qquad \left(-\frac{1}{n}\notin[0\infty)\right)$$

$$a_n = \max\left\{ f_n(0), f_n\left(\tfrac{1}{n}\right), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right\} =$$

$$= \max\left\{0, \frac{1}{1+1}, 0\right\} = \frac{1}{2} \not\to 0 \text{ άρα}$$

$f_n \not\rightrightarrows f$ στο $[0\infty)$

(iii) $\frac{1}{n}\notin[\delta\infty)$ τελικά άρα

$$a_n = \max\left\{ f_n(\delta), \lim_{x\to\infty} f_n(x)\right\} = \max\left\{\frac{n\delta}{1+n^2\delta^2}, 0\right\}.$$

$$= \frac{n\delta}{1+n^2\delta^2} \to 0, \text{ Άρα } f_n \rightrightarrows 0 \text{ στο } [\delta\infty)$$

για $\delta>0$

4.7.5| $f_n(x) = n^2x\,e^{-nx}$ στο $[0 1]$ και στο $[\delta\ 1]$

Λύση $[0 1]$: $\sqrt[n]{n^2x\,e^{-nx}} = \sqrt[n]{n}^2\,\sqrt[n]{x}\,e^{-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}$ για $x\neq 0$

$e^{-x}<1 \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x\neq 0$

$f_n(0) = 0 \to 0.$

$\Rightarrow f_n \to 0 = f$

$$a_n = \sup_{x\in[01]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[01]} \left(n^2x e^{-nx}\right)$$

$$(n^2xe^{-nx})' = n^2e^{-nx} + n^2x\,e^{-nx}(-n) = e^{-nx}n^2(1-nx)$$

$$\Rightarrow x = 1/n$$

Άρα $a_n = \max\{f_n(0), f_n(1), f_n(\frac{1}{n})\} =$

$= \max\{0, \underbrace{n^2 e^{-n}}_{\downarrow \, 0}, \underbrace{n e^{-1}}_{\downarrow \, +\infty}\} \longrightarrow +\infty$

$f_n \not\rightrightarrows f$ στο $[0,1]$.

Στο $[\delta, 1]$, $\frac{1}{n} \notin [\delta, 1]$ τελικά άρα

$a_n = \max\{f_n(\delta), \cancel{n^2 e} \; f(1)\} = \max\{n^2 \delta e^{-n\delta}, n^2 e^{-n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

διότι $\sqrt[n]{n^2 \delta e^{-n\delta}} = \sqrt[n]{n}^2 \sqrt[n]{\delta} \, e^{-\delta} \longrightarrow e^{-\delta} < 1$

4.7.10) (X, d) μ.χ. $\delta > 0$ $f_n : X \to \mathbb{R}$ $f_n(x) \geq \delta$ $\forall x \in X$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \frac{1}{f_n} \rightrightarrows \frac{1}{f}$

Λύση $f_n(x) \geq \delta \Rightarrow \lim_n f_n(x) \geq \delta \Rightarrow f(x) \geq \delta$

$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \delta^2 \; \forall x \in X$

Άρα $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right| = \frac{|f_n - f|}{|f_n||f|} < \frac{\varepsilon \delta^2}{\delta^2} = \varepsilon$ $\boxed{}$

4.7.14) $E \subseteq \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ στο E η f συνεχής

Δείξτε ότι αν $x_n \in E$, $x \in E$, $x_n \to x$ τότε $f_n(x_n) \to f(x)$

Λύση $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$

Αφού f συνεχής $f(x_n) \to f(x)$ άρα $\exists n_1 : \forall n \geq n_1$ $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Αφού $f_n \rightrightarrows f$ $\exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2$ $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in X$ άρα

και για $x = x_n$, δηλ $\forall n \geq n_2$ $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon/2$

Συνεπώς $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ θα είναι

$|f_n(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\boxed{}$

https://myria.math.aegean.gr/~atsol/tmp/AnalysisNotes-1.pdf

$\subseteq$ https://v.gd/IUilJi

https://t.ly/SMmfw

https://app.element.io

#umath.aegean.gr:matrix.org

4.7.16 $f_n : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$

$f(x) = \frac{1}{x} : (0,1] \to \mathbb{R}$

(i) Δείξτε ότι $\forall x \in (0,1]$ η $x_n \in (0,1]$ με $x_n \to x$ θα ισχύει $f_n(x_n) \to f(x)$

(ii) $f_n \not\rightrightarrows f$

Λύση (i) Έστω $x \in (0,1]$. Επειδή $\frac{1}{n} \to 0$ θα είναι τελικά $\frac{1}{n} < x$. Έστω $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_1} < x$. Αν $x_n \to x$ $\exists n_0 : \forall n \ge n_0$

$$|x_n - x| < x - \frac{1}{n_1} \Rightarrow -x + \frac{1}{n_1} < x_n - x < x - \frac{1}{n_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1} < x_n. \text{ Άρα } f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x} = f(x)$$

(ii) $$\sup_{1 \ge x > 0} |f_n(x) - f(x)| \ge \sup_{0<x\le\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0<x\le\frac{1}{n}} \left|n - \frac{1}{x}\right| = +\infty$$

Άρα $f_n \not\rightrightarrows f$.