

Μάνος Μπομπολάκης — Αντώνης Τσολομύτης

Λύσεις των Ασκήσεων

του βιβλίου

Πραγματική Ανάλυση

Μ. Ανούση, Α. Τσολομύτη, Β. Φελουζή



Κρήτη και Σάμος 2024

- Οι φωτογραφίες του εξωφύλλου είναι πραγματικές. Ευχαριστούμε τον Αλέξανδρο Κάσο για την ιδέα.
- Η πρώτη φωτογραφία θυμίζει την τεχνική του ολοκληρώματος Riemann και το τοπίο είναι γνωστό με το όνομα «ο διάδρομος του γίγαντα» (Giant's Causeway). Βρίσκεται στη Βόρεια Ιρλανδία στις συντεταγμένες $55^{\circ} 14' 27'' \text{ N}$, $6^{\circ} 30' 42'' \text{ W}$.
- Η δεύτερη φωτογραφία θυμίζει την τεχνική του ολοκληρώματος Lebesgue. Το τοπίο δείχνει χωράφια καλλιέργειας ρυζιού κοντά στην πόλη Longji στην Κίνα. Η περιοχή είναι γνωστή με το όνομα «πεζούλες ρυζιού του Longji» ή «η ραχοκοκαλιά του δράκου» και βρίσκεται στις συντεταγμένες $25^{\circ} 45' \text{ N}$, $110^{\circ} 8' \text{ E}$.

Έκδοση 0.4 Το αρχείο δεν είναι τελικό. Μπορεί να έχει λάθη ή παραλείψεις. Προς το παρόν είναι υπό συνεχή διαμόρφωση. Για διορθώσεις μπορείτε να στείλετε στο email: manosbobolakis@pm.me

Περιεχόμενα

1	Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου	3
1.1	Ενότητα 1.1	3
1.2	Ενότητα 1.2	3
1.3	Ενότητα 1.3	4
2	Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου	11
2.1	Ενότητα 1η	11
2.2	Ενότητα 2η	11
2.3	Ενότητα 3η	11
2.4	Ενότητα 4η	11
2.5	Ενότητα 5η	11
2.6	Ενότητα 6η	11
2.7	Ενότητα 7η	11
2.8	Ενότητα 8η	11
2.9	Ενότητα 9η	11
2.10	Ενότητα 10η	11
3	Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου	13
3.1	Ενότητα 1η	13
3.2	Ενότητα 2η	13
3.3	Ενότητα 3η	13
3.4	Ενότητα 4η	13
3.5	Ενότητα 5η	13
3.6	Ενότητα 6η	13
3.7	Ενότητα 7η	13
3.8	Ενότητα 8η	13
4	Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου	15
4.1	Ενότητα 1	15
4.2	Ενότητα 2	21
4.3	Ενότητα 3	21
4.4	Ενότητα 4	22
4.5	Ενότητα 5	24
4.6	Ενότητα 6	26
4.7	Ενότητα 7	28
5	Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου	47
5.1	Ενότητα 5.1	47
5.2	Ενότητα 5.2	47

5.3	Ενότητα 5.3	51
6	Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου	53
6.1	Ενότητα 6.1	53
6.2	Ενότητα 6.2	54
6.3	Ενότητα 6.3	58
6.4	Ενότητα 6.4	59
7	Ασκήσεις 7ου Κεφαλαίου	75
7.1	Ενότητα 1η	75
7.2	Ενότητα 2η	75
7.3	Ενότητα 3η	78
7.4	Ενότητα 4η	81
7.5	Ενότητα 5η	81
7.6	Ενότητα 6η	81
7.7	Ενότητα 7η	83
7.8	Ενότητα 8η	87
7.9	Ενότητα 9η	87
7.10	Ενότητα 10η	89
8	Ασκήσεις 8ου Κεφαλαίου	99
8.1	Ενότητα 8.1	99
8.2	Ενότητα 8.2	99
8.3	Ενότητα 8.3	99

2 · ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1.1 Ενότητα 1.1

1.2 Ενότητα 1.2

Άσκηση 1.2.1

Θέτω

$$(1.1) \quad x_1 = 2 \quad \text{και} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Φανερά, με χρήση της επαγωγής, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών ρητών αριθμών.

(i) Δείξτε πρώτα ότι για οποιουδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς a, b ισχύει $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με τη βοήθεια αυτής της ανισότητας αποδείξτε επαγωγικά ότι $x_n^2 \geq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, άρα είναι συγκλίνουσα και η x_n^2 . Δείξτε, υψώνοντας την (1.1) στο τετράγωνο και παίρνοντας όρια και στα δύο μέλη, ότι το όριο της x_n^2 είναι ο αριθμός 2.

Απόδειξη.

(i) Έστω $a, b \geq 0$. Θα δείξω ότι

$$(1.2) \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \iff \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) \geq ab \\ \iff a^2 + ab + b^2 \geq 4ab \\ \iff (a-b)^2 \geq 0,$$

το οποίο είναι αληθές. Τώρα θα δείξω με επαγωγή ότι $x_n^2 \geq 2$. Έχω ότι $x_1^2 = 2^2 = 4 \geq 2$. Υποθέτω ότι $x_n^2 \geq 2$ και θα δείξω ότι και $x_{n+1}^2 \geq 2$. Είναι

$$x_{n+1}^2 = \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)^2 \stackrel{(1.2)}{\geq} x_n \frac{2}{x_n} = 2$$

(ii) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Έχω ότι

$$x_1 = 2 \geq x_2 = \frac{3}{2}$$

Υποθέτω ότι $x_{n-1} \geq x_n$ και θα δείξω ότι $x_n \geq x_{n+1}$. Πράγματι

$$\begin{aligned} x_n > x_{n+1} &\iff x_n \geq \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \iff 2x_n \geq x_n + \frac{2}{x_n} \\ &\iff x_n^2 \geq 2 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από το ερώτημα (i). Θέτω $l = \lim x_n^2$ και θα δείξω ότι $l = 2$. Έχω ότι

$$\begin{aligned} l = \lim x_n^2 &= \lim \left(\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \right)^2 = \lim \frac{1}{4} \left(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2} \right) \\ \iff 4l &= l + 4 + \frac{4}{l} \iff 3l^2 - 4l - 4 = 0 \\ \iff l_1 &= 2 \quad \text{ή} \quad l_2 = -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

όμως επειδή η ακολουθία $(x_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών αριθμών, η λύση $l_2 = -2/3$ απορρίπτεται και συνεπώς $\lim x_n^2 = 2$.

□

1.3 Ενότητα 1.3

Άσκηση 1.3.1

Αν A, B, C σύνολα. Τότε να δείξετε ότι

- (i) $A \cong A$
- (ii) $A \cong B$ αν και μόνο αν $B \cong A$
- (iii) Αν $A \cong B$ και $B \cong C$ τότε $A \cong C$.

Απόδειξη.

- (i) Θεωρώ την συνάρτηση $f : A \rightarrow A$ με $f(x) = x$. Φανερά η f είναι $1-1$ και επί άρα $A \cong A$.
- (ii) Θα δείξω ότι $A \cong B \iff B \cong A$.
 (\implies) Υποθέτω ότι $A \cong B$, άρα υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ $1-1$ και επί, συνεπώς ορίζεται η $f^{-1} : B \rightarrow A$ η οποία είναι επίσης $1-1$ και επί, άρα $B \cong A$.
 (\impliedby) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με το ευθύ.
- (iii) Έχω ότι $A \cong B$, άρα υπάρχει συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ $1-1$ και επί. Επίσης $B \cong C$, άρα υπάρχει συνάρτηση $g : B \rightarrow C$ $1-1$ και επί. Θεωρώ την συνάρτηση $g \circ f : A \rightarrow C$, με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Φανερά η $g \circ f$ είναι καλώς ορισμένη, $1-1$ και επί, άρα $A \cong C$.

□

Άσκηση 1.3.2

Δείξτε ότι το $a = \sup X$, όπου X είναι ένα μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών αν και μόνο αν

- (i) για κάθε $x \in X$ τότε $x \leq a$,
- (ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $x > a - \varepsilon$.

Απόδειξη.

Έχω ότι το σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο, συνεπώς από το αξίωμα της πληρότητας έχω ελάχιστο άνω φράγμα, έστω το $a = \sup X$. Από τον ορισμό του supremum έχω ότι

$$(1.3) \quad \begin{array}{l} \text{για κάθε } x \in X \text{ ισχύει } x \leq a \text{ και} \\ \text{αν } b < a, \text{ τότε υπάρχει } x \in X \text{ με } b < x. \end{array}$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $b = a - \varepsilon$. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $x > a - \varepsilon$. Φανερά $b < a$, άρα από την σχέση (1.3) υπάρχει $x \in X$ ώστε $a - \varepsilon < x$. \square

Άσκηση 1.3.3

Δείξτε ότι για κάθε κάτω φραγμένο υποσύνολο X των πραγματικών αριθμών υπάρχει ένα και μοναδικό στοιχείο $a \in \mathbb{R}$ ώστε

- (i) για κάθε $x \in X$ ισχύει $a \leq x$,
- (ii) αν $b > a$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $x < b$.

Απόδειξη.

Έχω ότι το σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο άρα

$$(1.4) \quad \text{υπάρχει } m \in \mathbb{R} \text{ ώστε για κάθε } x \in X \quad m \leq x.$$

Θεωρώ το σύνολο $-X = \{-x \in \mathbb{R} : x \in X\}$ και θα δείξω ότι είναι άνω φραγμένο. Πράγματι από την (1.4) έχω ότι για κάθε $-x \in -X$ ισχύει ότι $-m \geq -x$. Έτσι από το αξίωμα της πληρότητας έχω ότι το σύνολο $-X$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω το $-a = \sup(-X)$. Καθώς το $-a = \sup(-X)$ από τον ορισμό του supremum θα έχω ότι

$$\begin{array}{l} \text{για κάθε } -x \in -X \text{ ισχύει } -x \leq -a \text{ και} \\ \text{αν } b > -a \text{ τότε υπάρχει } -x \in -X \text{ με } -x < b \end{array}$$

άρα

$$\begin{array}{l} \text{για κάθε } x \in X \text{ ισχύει } x \geq a \text{ και} \\ \text{αν } b > a \text{ τότε υπάρχει } x \in X \text{ με } x < b \end{array}$$

άρα $a = \inf X$. Μένει να δείξω ότι το $a = \inf X$ είναι μοναδικό. Αν $a_2 = \inf X$, θα δείξω ότι $a = a_2$. Το $a = \inf X$ άρα $a \leq a_2$, επίσης το $a_2 = \inf X$ άρα $a_2 \leq a$, συνεπώς $a = a_2$. \square

Άσκηση 1.3.4

Αν τα A και B είναι μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} ορίζουμε με

$$(i) \quad A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$(ii) AB = \{ab : a \in A, b \in B\},$$

$$(iii) -A = \{-a : a \in A\}.$$

Αν $A = (0, 4) \cup (7, 10]$ και $B = (-4, 0) \cup (11, 12)$ να βρείτε τα $A + B$, AB , $-A$ και $A + (-B)$.

Απόδειξη.

Θέτω $A_1 = (0, 4)$, $A_2 = (7, 10]$, $B_1 = (-4, 0)$ και $B_2 = (11, 12)$. Για το σύνολο $A + B$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι

$$(a, b) + r = (a + r, b + r).$$

Έχουμε $\inf B_1 = -4$, $\sup B = 0$. Φανερά $-4 \leq b \leq 0$ για κάθε $b \in B_1$. Συνεπώς

$$C_1 = A_1 + B_1 = \{a + b : a \in A_1, b \in B_1\} = \bigcup_{b \in B_1} ((0, 4) + b) = (-4, 4).$$

Όμοια έχουμε ότι $C_2 = A_1 + B_2 = (11, 16)$, $C_3 = A_2 + B_1 = (3, 10)$, $C_4 = A_2 + B_2 = (18, 22)$. Οπότε το ζητούμενο σύνολο είναι το

$$\begin{aligned} A + B &= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \\ &= (-4, 4) \cup (11, 16) \cup (3, 10) \cup (18, 22) \\ &= (-4, 10) \cup (11, 16) \cup (18, 22). \end{aligned}$$

Για το σύνολο AB . Έστω

$$\begin{aligned} a_1 &= \sup A_1 = 4, & a_2 &= \inf A_1 = 0, & a_3 &= \sup A_2 = 10, & a_4 &= \inf A_2 = 7, \\ b_1 &= \sup B_1 = 0, & b_2 &= \inf B_1 = -4, & b_3 &= \sup B_2 = 12, & b_4 &= \inf B_2 = 11. \end{aligned}$$

Θεωρώ τα σύνολα

$$\begin{aligned} D_1 &= \{a_i b_j : i, j = 1, 2\} = \{-16, 0\}, \\ D_2 &= \{a_i b_j : i = 1, 2 \text{ και } j = 3, 4\} = \{0, 44, 48\}, \\ D_3 &= \{a_i b_j : i = 3, 4 \text{ και } j = 1, 2\} = \{-40, -28, 0\}, \\ D_4 &= \{a_i b_j : i, j = 3, 4\} = \{77, 84, 110, 120\} \end{aligned}$$

για τα οποία έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \min D_1 &= -16 & \text{και} & & \max D_1 &= 0, & \min D_3 &= -40 & \text{και} & & \max D_3 &= 0, \\ \min D_2 &= 0 & \text{και} & & \max D_2 &= 48, & \min D_4 &= 77 & \text{και} & & \max D_4 &= 120 \end{aligned}$$

έτσι εύκολα υπολογίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 B_1 &= (0, 4)(-4, 0) = (-16, 0) \\ A_1 B_2 &= (0, 4)(11, 12) = (0, 48) \\ A_2 B_1 &= (7, 10](-4, 0) = (-40, 0) \\ A_2 B_2 &= (7, 10](11, 12) = (77, 120). \end{aligned}$$

Οπότε το ζητούμενο σύνολο είναι το

$$\begin{aligned} AB &= A_1 B_1 \cup A_1 B_2 \cup A_2 B_1 \cup A_2 B_2 \\ &= (-16, 0) \cup (0, 48) \cup (-40, 0) \cup (77, 120) \\ &= (-40, 0) \cup (0, 48) \cup (77, 120) \end{aligned}$$

Για το σύνολο $-A$. Έχουμε ότι

$$-A = \{-a : a \in A\} = \{-a : 0 < a < 4 \text{ ή } 7 < a \leq 12\}$$

θέτουμε $r = -a$ και θα έχουμε

$$\begin{aligned} -A &= \{r : 0 < -r < 4 \text{ ή } 7 < -r \leq 12\} \\ &= \{r : 0 > r > -4 \text{ ή } -7 > r \geq -12\} \\ &= \{r : r \in (-4, 0) \text{ ή } r \in [-12, -7]\} \\ &= [-12, -7] \cup (-4, 0). \end{aligned}$$

Παρόμοια βρίσκουμε ότι $-B = (-12, -11) \cup (0, 4)$, έτσι ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αυτά που κάναμε για να βρούμε το σύνολο $A + B$, θα έχουμε ότι

$$A + (-B) = (-12, -7) \cup (0, 8) \cup (7, 14) \cup (-5, -1) = (-12, -1) \cup (0, 14)$$

□

Άσκηση 1.3.5

Αν τα A και B είναι δυο μη κενά φραγμένα σύνολα από θετικούς αριθμούς, αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες.

- (i) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. (ii) $\sup(AB) = \sup A \sup B$.
 (iii) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$. (iv) $\sup(-A) = -\inf A$
 (v) $\inf(-A) = -\sup A$.

Απόδειξη.

- (i) Έστω $x \in A + B$, τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $x = a + b$. Υποθέτω ότι $a = \sup A$, $b = \sup B$ και θα δείξω ότι $x = a + b = \sup(A + B)$. Έστω $y \in A + B$, τότε υπάρχουν $a_1 \in A$ και $b_1 \in B$ ώστε $y = a_1 + b_1$. Το $a = \sup A$ και $a_1 \in A$, άρα

$$(1.5) \quad a_1 \leq a.$$

Επίσης $b = \sup B$ και $b_1 \in B$, άρα

$$(1.6) \quad b_1 \leq b.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.5) και (1.6) θα έχουμε ότι

$$a_1 + b_1 \leq a + b \iff y \leq x.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Το $a = \sup A$ έτσι από το δεύτερο ερώτημα της Άσκησης 1.3.2 θα έχουμε ότι υπάρχει $a_2 \in A$ ώστε

$$(1.7) \quad a_2 > a - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης το $b = \sup B$ έτσι πάλι από το δεύτερο ερώτημα της άσκησης (1.3.2) θα έχουμε ότι υπάρχει $b \in B$ ώστε

$$(1.8) \quad b_2 > b - \frac{\varepsilon}{2}$$

Θέτω $y_2 = a_2 + b_2$. Φανερά $y_2 \in A + B$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1.7) και (1.8) θα έχουμε ότι

$$a_2 + b_2 > a + b - \varepsilon \iff y_2 > x - \varepsilon,$$

συνεπώς από την Άσκηση 1.3.2 έχουμε ότι $x = a + b = \sup(A + B)$.

(ii) Υποθέτω ότι $a = \sup A$, $b = \sup B$ και θα δείξω ότι $x = ab = \sup(AB)$. Έστω $y \in AB$, τότε υπάρχουν $a_1 \in A$ και $b_1 \in B$ ώστε $y = a_1 b_1$. Το $a = \sup$ και a_1 , άρα

$$(1.9) \quad a_1 \leq a.$$

Επίσης $b = \sup$ και $b_1 \in B$, άρα

$$(1.10) \quad b_1 \leq b.$$

Τα a, b, a_1, b_1 είναι θετικοί αριθμοί, συνεπώς μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1.9) και (1.10) και θα έχουμε

$$a_1 b_1 \leq ab \iff y \leq x.$$

Έστω $0 < \varepsilon < \min\{a(a+b), b(a+b)\}$. Το $a = \sup A$ έτσι από την Άσκηση 1.3.2 έχουμε ότι υπάρχει $a_2 \in A$ ώστε

$$(1.11) \quad a_2 > a - \frac{\varepsilon}{a+b}$$

Επίσης το $b = \sup B$, συνεπώς πάλι από την Άσκηση 1.3.2 έχουμε ότι υπάρχει $b_2 \in B$ ώστε

$$(1.12) \quad b_2 > b - \frac{\varepsilon}{a+b}.$$

Θέτω $y_2 = a_2 b_2$. Φανερά $y_2 \in AB$. Όλοι οι όροι των σχέσεων (1.11) και (1.12) είναι θετικοί, συνεπώς μπορώ να πολλαπλασιάσω τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη και θα έχω

$$\begin{aligned} a_2 b_2 &> \left(a - \frac{\varepsilon}{a+b}\right) \left(b - \frac{\varepsilon}{a+b}\right) = ab - \frac{a\varepsilon}{a+b} - \frac{b\varepsilon}{a+b} + \left(\frac{\varepsilon}{a+b}\right)^2 \\ &> ab - \varepsilon \iff y_2 > x, \end{aligned}$$

άρα από την Άσκηση 1.3.2 έχουμε ότι $x = ab = \sup AB$.

(iii) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν του ερωτήματος (ii).

(iv) Έστω $a = \inf A$, τότε από τον ορισμό του infimum θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } x \in A \text{ ισχύει } x \geq a \text{ και} \\ &\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } y \in A \text{ ώστε } y < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } -x \in -A \text{ ισχύει } -x \leq -a \text{ και} \\ &\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } -y \in -A \text{ ώστε } -y > -a - \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς $-a = \sup(-A)$, δηλαδή $-\inf A = \sup A$.

(ν) Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με την απόδειξη του ερωτήματος (iv).

□

Άσκηση 1.3.6

Βρείτε μια $1 - 1$ και επί απεικόνιση από το \mathbb{Z} στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.3.7

Βρείτε μια ακολουθία υποσυνόλων $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{N} ώστε:

- (i) το A_n είναι αριθμήσιμο σύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $A_n \cap A_m = \emptyset$ για $m \neq n$,
- (iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

Θεωρώ μια ακολουθία υποσυνόλων του \mathbb{N} με

$$K_n = \{n, nn, nnn, \dots : n \notin A_m, \text{ όπου } m < n\}.$$

Έστω C να είναι το σύνολο όλων των δεικτών της ακολουθίας K και θεωρώ μια ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \rightarrow C$, ώστε:

- η k_n να είναι $1 - 1$,
- η k_n να είναι επί και
- η k_n να είναι γνησίως αύξουσα.

(Η ύπαρξη μιας τέτοιας ακολουθίας εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι το σύνολο C είναι αριθμήσιμο και συνεπώς είναι ισοπληθικό με το \mathbb{N} .) Τώρα θεωρούμε την υπακολουθία $\{K_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ της ακολουθίας $\{K_n\}_{n \in C}$, της οποίας το στοιχείο K_{k_i} αντιστοιχεί στον i -οστό όρο της ακολουθίας $\{K_n\}_{n \in C}$. Τέλος συμβολίζουμε με $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ την ακολουθία $\{K_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (δηλαδή $A_n = K_{k_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{K_n\}_{n \in C}$ ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες.

- (i) Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in C$ το K_n είναι άπειρο σύνολο και $K_n \subset C$, συνεπώς το σύνολο K_n είναι αριθμήσιμο για κάθε $n \in C$.
- (ii) Έστω $m, n \in C$ με $m \neq n$. Τότε φανερά $K_n \cap K_m = \emptyset$.
- (iii) Προφανώς $\bigcup_{n \in C} K_n = \mathbb{N}$, διότι για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in C$ ώστε $r \in K_n$, συνεπώς η ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη ακολουθία.

□

Άσκηση 1.3.8

Συμβολίζουμε με A το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$. Δείξτε ότι:

- (i) Το A είναι ισοπληθικό με το $A \times A$.
- (ii) Αν $I = [0, 1]$, τότε το I είναι ισοπληθικό με το $I \times I$.

Κεφάλαιο 2

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

2.1 Ενότητα 1η

2.2 Ενότητα 2η

2.3 Ενότητα 3η

2.4 Ενότητα 4η

2.5 Ενότητα 5η

2.6 Ενότητα 6η

2.7 Ενότητα 7η

2.8 Ενότητα 8η

2.9 Ενότητα 9η

2.10 Ενότητα 10η

Κεφάλαιο 3

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

3.1 Ενότητα 1η

3.2 Ενότητα 2η

3.3 Ενότητα 3η

3.4 Ενότητα 4η

3.5 Ενότητα 5η

3.6 Ενότητα 6η

3.7 Ενότητα 7η

3.8 Ενότητα 8η

Κεφάλαιο 4

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

4.1 Ενότητα 1

Άσκηση 4.1.1

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει σημειακά σε μια συνάρτηση f . Υποθέτουμε ότι η f_n είναι αύξουσα για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι η f αύξουσα;

Απόδειξη.

Ναι. Αν $x \leq y$ τότε $f_n(x) \leq f_n(y)$, αφού η f_n είναι αύξουσα. Παίρνοντας όρια σε αυτή την ανισότητα για $n \rightarrow +\infty$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leq f(y)$. \square

Άσκηση 4.1.2

Δίνονται δυο ακολουθίες $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και ότι η $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g .

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n + g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f + g$.
- (ii) Αν οι f και g είναι φραγμένες δείξτε ότι η $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f g$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ συνεπώς υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει ότι

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης έχουμε ότι $g_n \rightrightarrows g$ συνεπώς υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει ότι

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Τώρα αν θεωρήσουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ θα έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ και οι δυο παραπάνω σχέσεις θα ικανοποιούνται, δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$

$$(4.1) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

και

$$(4.2) \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Για κάθε $n \geq n_0$ είναι

$$|f_n + g_n - (f + g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

άρα $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$.

(ii) Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ η f_n είναι φραγμένη, δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| < M$. Αφού η f είναι φραγμένη θα υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$(4.3) \quad |f(x)| \leq C.$$

Αν θεωρήσουμε $\varepsilon = 2$ και $M = C + 1$ τότε από την (4.1) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -1 < f_n(x) - f(x) < 1 &\implies f(x) - 1 < f_n(x) < f(x) + 1 \\ &\stackrel{(4.3)}{\implies} -C - 1 < f_n(x) < C + 1 \\ &\implies |f_n(x)| \leq C + 1 \end{aligned}$$

Άρα

$$(4.4) \quad |f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

δηλαδή η f_n είναι φραγμένη για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα έχουμε ότι και η g είναι φραγμένη, συνεπώς υπάρχει θετικός αριθμός C_2 ώστε

$$(4.5) \quad |g(x)| \leq C_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Τέλος από τις (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n g_n - f g| &= |f_n g_n - f_n g + f_n g - f g| \\ &\leq |f_n g_n - f_n g| + |f_n g - f g| \\ &\leq |f_n| |g_n - g| + |g| |f_n - f| \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2} + C_2 \frac{\varepsilon}{2} = \left(\frac{M + C_2}{2} \right) \varepsilon \\ &\leq \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

όπου $\tilde{\varepsilon} = \left(\frac{M + C_2}{2} \right) \varepsilon$, άρα $f_n g_n \rightrightarrows f g$.

□

Άσκηση 4.1.3

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Εξετάστε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-M, M]$, για $M > 0$.

(ii) Εξετάστε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

Απόδειξη.

Αρχικά θα εξετάσουμε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση κατά σημείο. Είναι

$$f_n(x) = \frac{x^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Αφού η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στο 0 από το Θεώρημα 4.1.7 αρκεί να μελετήσω την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \in [-M, M]} |f_n(x)|$ για να ελέγξουμε αν $f_n \rightrightarrows 0$. Είναι

$$\sup_{x \in [-M, M]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [-M, M]} \left| \frac{x^2}{n} \right| = \frac{M^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Άρα $f_n \rightrightarrows 0$.

- (ii) Εξετάζουμε την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^2}{n} \right| = +\infty \not\rightarrow 0,$$

άρα $f_n \not\rightarrow 0$.

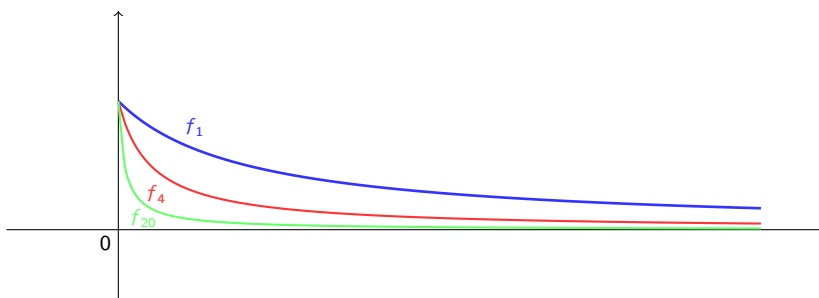
□

Άσκηση 4.1.4

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $[0, 1]$ και βρείτε το όριό της.
 (ii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$.
 (iii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[\delta, 1]$ για $0 < \delta < 1$.

Απόδειξη.

- (i) • Για $x = 0$ έχουμε ότι

$$f_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

- Για κάθε $x \in (0, 1]$ είναι:

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx} = \frac{1}{n} \frac{1}{\frac{1}{n} + x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot \frac{1}{x} = 0.$$

(ii) Έστω f να είναι το κατά σημείο όριο της f_n για κάθε $x \in [0, 1]$, δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = 0 \\ 0, & \text{αν } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Πα να εξετάσουμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$ αρκεί να μελετήσουμε την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$. Είναι

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x \in (0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0,$$

άρα $f_n \not\rightarrow f$.

(iii) Πα $x \in [\delta, 1]$, με $0 < \delta < 1$ έχουμε ότι $f_n \rightarrow 0$. Πα να ελέξουμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη αρκεί να εξετάσουμε την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \in [\delta, 1]} |f_n(x)|$. Πα κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$f'_n(x) = -\frac{n}{(1+nx)^2} < 0, \quad \forall x \in [\delta, 1],$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\delta, 1]$. Οπότε είναι

$$\sup_{x \in [\delta, 1]} |f_n(x)| = f(\delta) = \frac{1}{1+n\delta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Συνεπώς $f_n \rightarrow 0$.

□

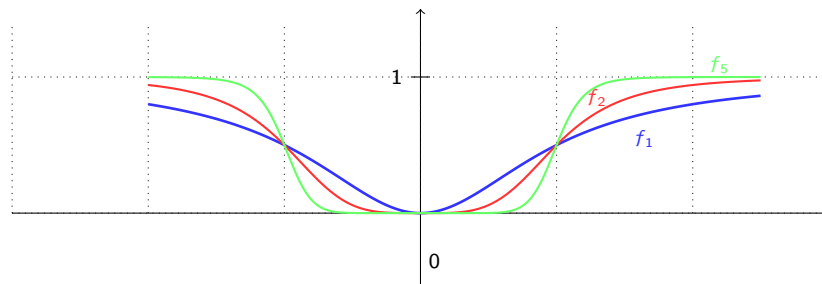
Άσκηση 4.1.5

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στο \mathbb{R} και βρείτε το όριό της.
- (ii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο \mathbb{R} .
- (iii) Εξετάστε αν υπάρχουν $M > 0$ για τα οποία η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[M, \infty)$.

Απόδειξη.



(i) • Αν $x = 1$, τότε

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

• Αν $|x| < 1$, τότε

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{1+0} = 0.$$

• Αν $|x| > 1$, τότε

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{2n}}{x^{2n} \left(\frac{1}{x^{2n}} + 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{0+1} = 1.$$

(ii) Έστω f να είναι το κατά σημείο όριο της f_n για κάθε $x \in [0, 1]$, δηλαδή

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 1 \\ 0, & \text{αν } |x| < 1 \\ 1, & \text{αν } |x| > 1. \end{cases}$$

Για να εξετάσουμε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο \mathbb{R} αρκεί να μελετήσουμε την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$. Είναι

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &\geq \sup_{|x|>1} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right| \\ &= \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}}{1 + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{e}{1+e} - 1 \right| \\ &= \frac{1}{1+e} \neq 0 \end{aligned}$$

συνεπώς $f_n \not\rightarrow f$.

(iii) Έστω $M > 1$. Θα δείξουμε ότι $f_n \rightarrow f$ στο $[M, +\infty)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$f'_n(x) = \frac{2nx^{2n-1}}{(1+x^{2n})^2} > 0, \quad \forall x \geq M,$$

άρα η f_n είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq M$, και συνεπώς η $1 - f_n$ είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \geq M$. Άρα

$$\sup_{x \geq M} |f_n(x) - 1| = \sup_{x \geq M} \left(1 - \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \right) = 1 - \frac{M^{2n}}{1+M^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

άρα $f_n \rightarrow 1$.

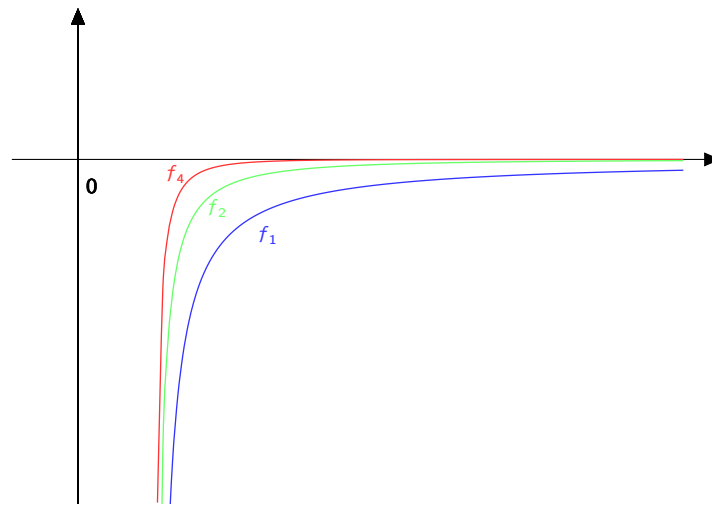
□

Άσκηση 4.1.6

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n(x) = \frac{1}{1-x^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $(1, \infty)$ και βρείτε το όριό της.
(ii) Εξετάστε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα $(1, \infty)$.
(iii) Εξετάστε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$ για $a > 1$.

Απόδειξη.



- (i) Για $x > 1$ έχουμε ότι $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Άρα

$$f_n(x) = \frac{1}{1 - x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (ii) Εύκολα ελέγχουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(1, \infty)$. Πράγματι η ακολουθία αριθμών

$$\sup_{x > 1} |f_n(x) - 0| = \sup_{x > 1} \left| \frac{1}{1 - x^n} \right| = +\infty \neq 0,$$

άρα η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \not\rightarrow 0$.

- (iii) Έστω $a > 1$ και $[a, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [a, \infty)$

$$f_n(x) = \frac{1}{1 - x^n} < 0,$$

οπότε

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = \sup_{x \geq a} (-f_n(x)) = \sup_{x \geq a} \frac{-1}{1 - x^n} = \sup_{x \geq a} \frac{1}{x^n - 1} = \frac{1}{a^n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

άρα $f_n \rightarrow 0$.

□

4.2 Ενότητα 2

Άσκηση 4.2.1

Για ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ βρείτε μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες να είναι όλες ασυνεχείς στο x_0 και η οποία συγκλίνει σε μια συνεχή συνάρτηση στο x_0 .

Απόδειξη.

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \{5\} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{αν } x = 5 \end{cases}$$

Φανερά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f_n είναι ασυνεχής στο $x_0 = 5$ και $f_n \rightarrow f$, με $f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. \square

Άσκηση 4.2.2

Αποδείξτε ότι αν μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{R} συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f , και έχει μια υπακολουθία από συνεχείς συναρτήσεις, τότε το όριο f είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη.

Κάθε υπακολουθία της f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f , άρα και η υπακολουθία των συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς η f ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων (της υπακολουθίας) είναι συνεχής. \square

4.3 Ενότητα 3

Άσκηση 4.3.1

Δίνεται η ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x) = (n+1)(n+2)x^n(1-x)$ στο διάστημα $[0, 1]$.

Αποδείξτε ότι η p_n συγκλίνει κατά σημείο στο 0 αλλά $\int_0^1 p_n(x) dx = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

- Αν $x = 0$ τότε $p_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
- Αν $x = 1$ τότε $p_n(1) = 0 \rightarrow 0$.
- Αν $x \in (0, 1)$ τότε έχουμε ότι

$$\frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} = \frac{(n+2)(n+3)x^{n+1}(1-x)}{(n+1)(n+2)x^n(1-x)} = \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{1 + \frac{1}{n}} x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x < 1$$

και συνεπώς από το κριτήριο λόγου παίρνουμε ότι $p_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_n(x) dx &= \int_0^1 (n+1)(n+2)x^n(1-x) dx \\ &= (n+2) \int_0^1 (n+1)x^n - (n+1) \int_0^1 (n+2)x^{n+1} dx \\ &= (n+2)x^{n+1} \Big|_0^1 - (n+1)x^{n+2} \Big|_0^1 \\ &= n+2 - 0 - (n+1 - 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

4.4 Ενότητα 4

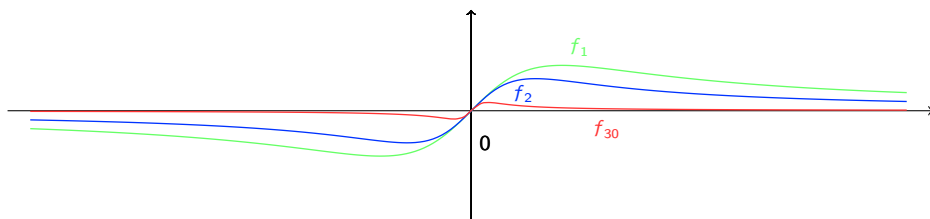
Άσκηση 4.4.1

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οποία ορίζεται από την

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}.$$

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} και βρείτε το όριό της.
- (ii) Δείξτε ότι $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$ αν $x \neq 0$, αλλά $f'_n(0) \not\rightarrow f'(0)$.
- (iii) Βρείτε για ποια διαστήματα $[a, b]$ ισχύει ότι η $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f' στο $[a, b]$.

Απόδειξη.



- (i) Είναι εύκολο να δούμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$.

- Πράγματι αν $x = 0$, τότε $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.
- Αν $x \neq 0$, τότε εύκολα ελέγχει κάποιος ότι $f_n \rightarrow 0$.

Πα να δείξουμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 αρκεί να δείξουμε ότι το $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x/(1 + nx^2)| \rightarrow 0$. Πα κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η παράγωγος της f_n είναι η

$$f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}.$$

Λύνω

$$f'_n(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

οπότε τα κρίσιμα σημεία της f_n υπολογίζεται για $x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, άρα

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1 + nx^2} \right| \\ &= \max \left\{ |f_n(0)|, \lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n(x)|, \left| f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right|, \left| f \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ 0, 0, \frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

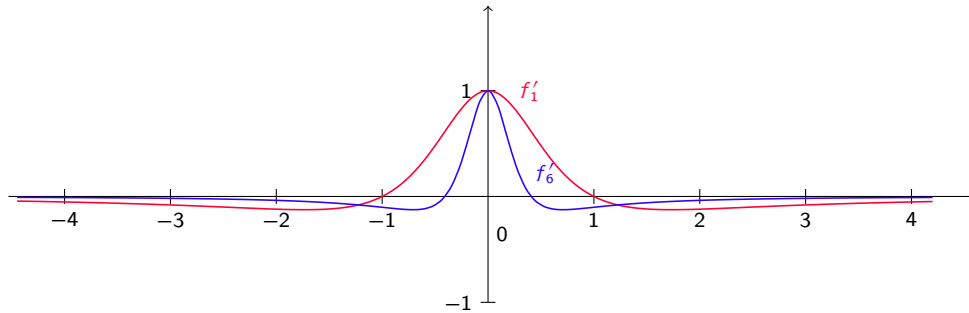
συνεπώς $f_n \rightrightarrows 0$.

(ii) Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι $f_n \rightarrow f = 0$, άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $x \neq 0$ τότε

$$f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n} - x^2}{\left(\frac{1}{n} + x^2\right)^2} \rightarrow 0.$$

- Αν $x = 0$ τότε $f'_n(0) = 1 \rightarrow 1 \neq f'(0) = 0$.



(iii) Έστω $[a, b]$ να είναι ένα διάστημα στο οποίο η f'_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f'(x) = 0$. Τότε επειδή η $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και η σύγκλιση στο $[a, b]$ είναι ομοιόμορφη, θα πρέπει η $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση, γι' αυτό και δεν είναι δυνατόν το $0 \in [a, b]$, καθώς σε αυτή την περίπτωση όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ θα συνέκλινε σε συνάρτηση η οποία δεν είναι συνεχής. Θα μελετήσουμε την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x)|$. Λύνω στο \mathbb{R}

$$f'_n(x) \geq 0 \iff \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} \geq 0 \iff \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

και θέτω

$$g_n(x) = \begin{cases} f'_n(x), & \text{αν } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -f'_n(x), & \text{αν } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Έτσι θα έχουμε ότι $\sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x)| = \sup_{x \in [a, b]} g_n(x)$. Εύκολα ελέγχει κανείς ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η g_n είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{n}\}$. Συνεπώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η παράγωγος της $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι η

$$g'_n(x) = \begin{cases} \frac{2nx(nx^2 - 3)}{(nx^2 + 1)^3}, & \text{αν } |x| < \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{2nx(3 - nx^2)}{(nx^2 + 1)^3}, & \text{αν } |x| > \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Λύνω στο \mathbb{R}

$$g'_n(x) = 0 \iff \left| \frac{2nx(nx^2 - 3)}{(nx^2 + 1)^3} \right| = 0 \iff \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{3}{n}} \\ \text{ή} \\ x = 0. \end{cases}$$

Δηλαδή τα κρίσιμα σημεία της $|f'|$ είναι τα $x = 0$ και $x = \pm \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Έστω τώρα $a, b \in \mathbb{R}^*$, ώστε $0 \notin [a, b]$, τότε επειδή $\sqrt{3/n} \rightarrow 0$ και $0 \in [a, b]^c$ η ακολουθία τελικά δεν βρίσκεται στο διάστημα $[a, b]$. Δηλαδή για αρκούντως μεγάλη n , $\sqrt{3/n} \notin [a, b]$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x)| &= \max\{|f'_n(a)|, |f'_n(b)|\} \\ &= \max\left\{ \left| \frac{na^2 - 1}{(1 + na^2)^2} \right|, \left| \frac{nb^2 - 1}{(1 + nb^2)^2} \right| \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Άρα η $f'_n \rightrightarrows 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

□

4.5 Ενότητα 5

Άσκηση 4.5.1

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{και} \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Δείξτε ότι $0 = f_n(0) < f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1 + x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in (0, \infty)$.
- (ii) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ για $0 < a < b < \infty$.
- (iii) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Απόδειξη.

(i) Η απόδειξη θα γίνει επαγωγή.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $0 = f_1(0) < f_1(x) < f_2(x) < 1 + x$ για κάθε $x > 0$. Είναι

$$f_1(0) = \sqrt{0} = 0$$

και

$$0 < f_1(x) < f_2(x) \iff \sqrt{x} < \sqrt{x + \sqrt{x}} \iff x < x + \sqrt{x} \iff 0 < \sqrt{x}.$$

το οποίο ισχύει άρα $f_1(0) = 0 < f_1(x) < f_2(x)$. Τώρα θα δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} f_2(x) < 1 + x &\iff \sqrt{x + \sqrt{x}} < 1 + x \\ &\iff x + \sqrt{x} < x^2 + 2x + 1 \\ &\iff 0 < x^2 + \frac{3}{4} + x + \sqrt{x} - \frac{1}{4} \\ &\iff 0 < x^2 + \frac{3}{4} + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει. Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση είναι αληθής για $n - 1$, δηλαδή

$$f_{n-1}(0) = 0 < f_{n-1}(x) < f_n < 1 + x$$

και θα δείξουμε ότι $f_n(0) = 0 < f_n(x) < f_{n+1}(x) < 1 + x$.
Είναι

•

$$\begin{aligned} f_n(x) < f_{n+1}(x) &\iff \sqrt{x + f_{n-1}(x)} < \sqrt{x + f_n(x)} \\ &\iff x + f_{n-1}(x) < x + f_n(x) \\ &\iff f_{n-1}(x) < f_n(x) \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει.

• Επίσης

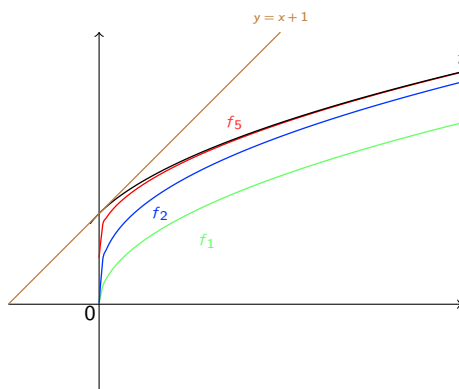
$$f_n(0) = \sqrt{0 + f_{n-1}(0)} = 0.$$

• Τέλος έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) < 1 + x &\iff \sqrt{x + f_n(x)} < 1 + x \\ &\iff x + f_n(x) < 1 + 2x + x^2 \\ &\iff f_n(x) < 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

(ii)



Για κάθε $x > 0$ η $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη συνεπώς θα συγκλίνει και έστω $f(x)$ το όριό της. Τώρα παίρνοντας όρια στην αναδρομική σχέση $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$ θα έχουμε

$$f(x) = \sqrt{x + f(x)} \iff f^2(x) = x + f(x) \stackrel{f > 0}{\iff} f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Τέλος έχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.5.1 (Dini σελ. 110) και συνεπώς $f_n \rightrightarrows f$ στο $[a, b]$.

(iii) Έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(0) = 0 \quad \text{και} \quad f(0) = \frac{1 + \sqrt{1 + 0}}{2} = \frac{1}{2}$$

συνεπώς

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| \geq |f(0) - f_n(0)| = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$$

άρα $f_n \not\rightarrow f$.

□

4.6 Ενότητα 6

Άσκηση 4.6.1

Δίνεται η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ όπου $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^{-2}x^{-2}$.

- (i) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (ii) Εξετάστε αν η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (iii) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$ για κάθε $a > 0$.
- (iv) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(-\infty, -a]$ για κάθε $a > 0$.

Απόδειξη.

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x^{-2} = x^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}x^{-2} < \infty.$$

(ii) Έστω $s_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$ και $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x^{-2}$. Τότε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_k(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x^{-2} - \sum_{n=1}^k f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x^{-2} - \sum_{n=1}^k n^{-2}x^{-2} \right| \\ &= \left| x^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right| = c_k \cdot |x^{-2}| \end{aligned}$$

όπου $c_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, άρα

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |s(x) - s_k(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |c_k| \cdot |x^{-2}| = c_k \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} |x^{-2}| = +\infty$$

άρα $s_k \not\rightarrow s$ στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(iii) Έστω $a > 0$ τότε είναι

$$\sup_{x \geq a} |s(x) - s_k(x)| = \sup_{x \geq a} |c_k| \cdot |x^{-2}| = c_k \sup_{x \geq a} |x^{-2}| = c_k \frac{1}{a^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

άρα $s_k \rightarrow s$ στο $[a, \infty)$.

(iv) Όμοια με το (iii). □

Άσκηση 4.6.2

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ συγκλίνει στο $[0, 1]$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη.

Είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ \frac{x}{1-x}(1-x), & x \in [0, 1) \end{cases} = \begin{cases} 0, & x = 1 \\ x, & x \in [0, 1) \end{cases}.$$

Όμως η σειρά είναι ασυνεχής στο 1, ενώ η ακολουθία $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ με

$$s_k = \sum_{n=1}^k x^n(1-x)$$

είναι συνεχής για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα η $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα (αν συνέκλινε ομοιόμορφα θα έπρεπε και το όριο της να ήταν συνεχής). □

Άσκηση 4.6.3

Δίνεται η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}.$$

Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$.

Απόδειξη.

Έστω $f_n(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}.$$

Είναι

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: M_n, \quad \forall x \geq 0.$$

Επίσης

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

άρα από το Θεώρημα 4.6.3 (Weierstrass) έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. \square

4.7 Ενότητα 7**Άσκηση 4.7.1**

Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο X . Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M_n \in \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε ότι υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ και $|f_n| \leq M_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση. Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x) - f_{n_0}(x)| < 1$ για κάθε $x \in X$, άρα

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leq 1 + M_{n_0}$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή η f είναι φραγμένη.

Έστω τώρα $N = \max\{M_i : 1 \leq i \leq n_0\}$. Τότε $|f_n(x)| \leq N$ για κάθε $n \leq n_0$.

Αν $n \geq n_0$ τότε

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + M_{n_0}$$

για κάθε $x \in X$. Έτσι αν $M = \max\{M_{n_0} + 1, N\}$ έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in X.$$

\square

Άσκηση 4.7.2

Δείξτε ότι η $f_n(x) = 1 + x^n/n!$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, M]$ για $M > 0$, αλλά όχι σε όλο το \mathbb{R} .

Απόδειξη.

Είναι

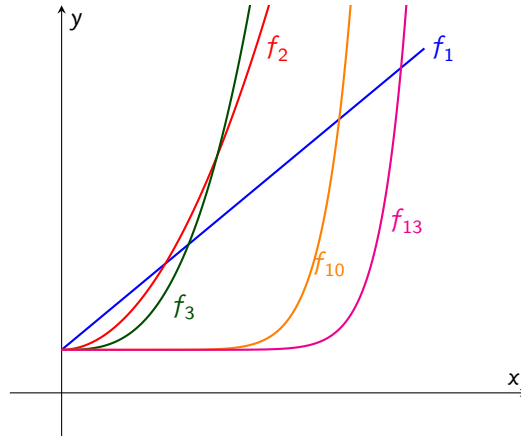
$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Άρα $f_n(x) \rightarrow 1$. Έστω τώρα $M > 0$, τότε

$$\sup_{x \in [0, M]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x \in [0, M]} \frac{|x|}{n!} = \frac{M}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{άρα} \quad f_n \rightrightarrows 1 \quad \text{στο} \quad [0, M].$$

Όμως

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 1| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n!} = +\infty \quad \text{άρα} \quad f_n \not\rightrightarrows 1 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}.$$



Σχήμα 4.1: Σχήμα Άσκησης 4.7.2

□

Άσκηση 4.7.3

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η οποία ορίζεται από την

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}.$$

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $[0, \infty)$ και βρείτε το όριό της.
- (ii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0, \infty)$.
- (iii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[\delta, \infty)$ για $\delta > 0$.

Απόδειξη.

- (i) Είναι εύκολο να δούμε ότι $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$. Πράγματι αν $x = 0$, τότε $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$. Αν $x \neq 0$, τότε

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{n} \frac{x}{\left(\frac{1}{n^2} + x^2\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(ii) Για να δούμε αν η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 αρκεί να εξετάσουμε την ακολουθία αριθμών $\sup_{x \geq 0} |f_n(x)|$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η παράγωγος της f_n είναι η

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - 2n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Λύνω

$$f'_n(x) \geq 0 \iff -\frac{1}{n\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

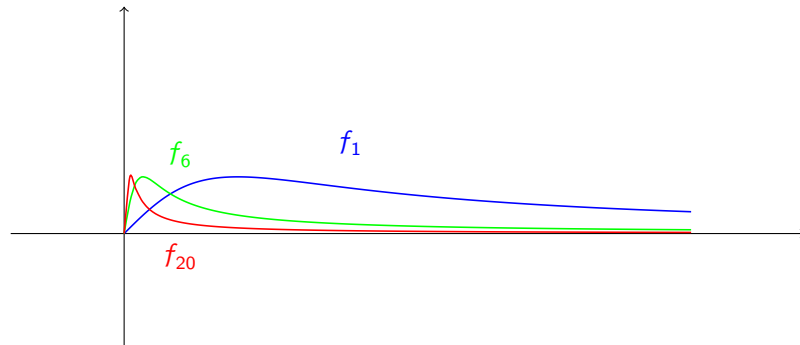
Συνεπώς το πινακάκι μονοτονίας της f_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \geq 0$ θα είναι

x	$-\infty$	$-\frac{1}{n\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{n\sqrt{2}}$	$+\infty$
f'_n		-	0	+	-
f_n		↘	↗	↘	

οπότε

$$\sup_{x \geq 0} |f_n| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{nx}{1 + n^2x^2} \right| = \sup_{x \geq 0} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{2}} \not\rightarrow 0,$$

συνεπώς $f_n \not\rightarrow 0$.



(iii) Έστω $\delta > 0$ και $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\delta\sqrt{2}} \right\rceil + 1$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $\frac{1}{n\sqrt{2}} < \delta$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\delta, +\infty)$ θα έχουμε ότι

$$\sup_{x \geq \delta} |f_n| \stackrel{f_n \geq 0}{=} \sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta) = \frac{1}{n} \frac{\delta}{\left(\frac{1}{n^2} + \delta^2\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

άρα $f_n \rightarrow 0$ στο $[\delta, +\infty)$.

□

Άσκηση 4.7.4

Δίνεται η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σημειακά στο \mathbb{R} και βρείτε το όριό της.
- (ii) Εξετάστε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .
- (iii) Εξετάστε αν η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-M, M]$ για κάθε $M > 0$.

Απόδειξη.

- (i) Έστω $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$|f_n(x)| = \left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

άρα και $f_n(x) \rightarrow 0 := f(x)$.

- (ii) Είναι

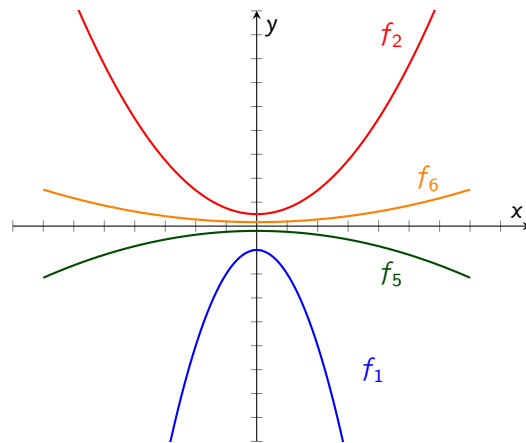
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{x^2 + n}{n^2} = +\infty$$

άρα $f_n \not\Rightarrow f$ στο \mathbb{R} .

- (iii) Είναι

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [-M, M]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [-M, M]} \left| (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2} \right| = \sup_{x \in [-M, M]} \frac{x^2 + n}{n^2} \\ &= \frac{M^2 + n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

άρα $f_n \Rightarrow f$ στο $[-M, M]$.



Σχήμα 4.2: Σχήμα Άσκησης 4.7.4

□

Άσκηση 4.7.5

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ για $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $[0, 1]$ και βρείτε το όριό της.
- (ii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$.
- (iii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[\delta, 1]$ για κάθε $\delta > 0$.

Απόδειξη.

- (i) Για $x \in (0, 1]$ έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{f_n(x)} = \sqrt[n]{n^2 x e^{-nx}} = \sqrt[n]{n^2} \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{e^{-nx}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-x} < 1$$

άρα $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Επίσης $f_n(0) = 0$ άρα

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 := f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

- (ii) Έχουμε ότι

$$f'_n(x) = (n^2 x e^{-nx})' = n^2 e^{-nx} + n^2 x e^{-nx} (-n) = e^{-nx} n^2 (1 - nx)$$

άρα

$$f'_n(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \max \left\{ f_n(0), f_n(1), f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= \max \{ 0, n^2 e^{-n}, n e^{-1} \} \end{aligned}$$

όμως $n e^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ άρα $f_n \not\rightarrow f$ στο $[0, 1]$.

- (iii) Έστω $\delta > 0$. Επειδή $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, τελικά θα είναι $\frac{1}{n} < \delta$, δηλαδή υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_1$.

Οπότε για κάθε $n \geq n_1$ θα έχουμε ότι

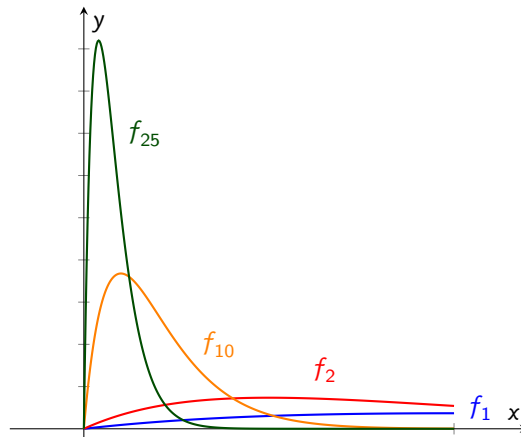
$$\begin{aligned} \sup_{x \in [\delta, 1]} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [\delta, 1]} |f_n(x)| = \max \{ f_n(\delta), f_n(1) \} \\ &= \max \{ n \delta e^{-n \delta}, n^2 e^{-n} \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

διότι,

$$\sqrt[n]{n \delta e^{-n \delta}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\delta} < 1$$

και

$$\sqrt[n]{n^2 e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} < 1.$$



Σχήμα 4.3: Σχήμα Άσκησης 4.7.5

□

Άσκηση 4.7.6

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $[0, \infty)$ και βρείτε το όριό της.
- (ii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0, \infty)$.
- (iii) Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[0, M]$ για $M > 0$.

Απόδειξη.

- (i) Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{2x+n}{x+n} = \frac{x}{n+x} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 := f(x).$$

- (ii) Είναι

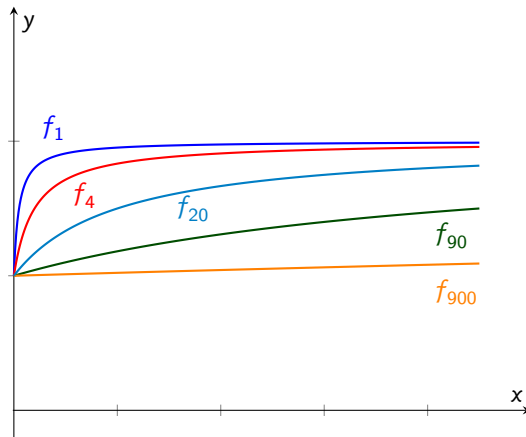
$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{x}{n+x} + 1 - 1 \right| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{x}{n+x} \right|$$

άρα $f_n \not\rightarrow f$ στο $[0, \infty)$.

- (iii) Είναι

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq M} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{0 \leq x \leq M} \left| \frac{x}{n+x} + 1 - 1 \right| = \sup_{0 \leq x \leq M} \left| \frac{x}{n+x} \right| \\ &= \sup_{0 \leq x \leq M} \frac{x}{n+x} = \sup_{0 \leq x \leq M} \frac{1}{\frac{n}{x} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{n}{M} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

άρα $f_n \rightrightarrows f$ στο $[0, M]$.



Σχήμα 4.4: Σχήμα Άσκησης 4.7.6

□

Άσκηση 4.7.7

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο \mathbb{R} και βρείτε το όριο της. Εξετάστε αν η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο \mathbb{R} .

Απόδειξη.

- Αν $x \neq 0$ τότε

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- $f_n(0) = 0$

άρα $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τώρα για την ομοιόμορφη σύγκλιση θα μελετήσουμε την παράγωγο την f_n . Είναι

$$f'_n(x) = \left(\frac{x}{1 + nx^2} \right)' = \frac{1 - x2nx}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2}$$

άρα

$$f'_n(x) = 0 \iff x = \pm \sqrt{\frac{1}{2n}}.$$

Επίσης είναι

$$\left| f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) \right| = \left| f_n\left(-\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) \right| = \frac{\sqrt{\frac{1}{2n}}}{1 + n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

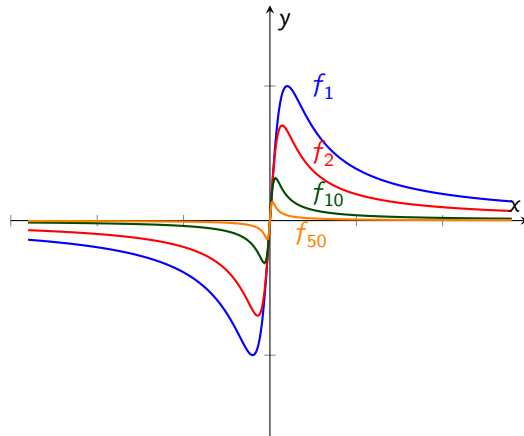
και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |f_n(x)| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{1 + nx^2} = 0.$$

άρα

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \max \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} |f_n(x)|, \lim_{x \rightarrow -\infty} |f_n(x)|, f \left(\sqrt{\frac{1}{2n}} \right) \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

άρα $f_n \rightrightarrows f$ στο \mathbb{R} .



Σχήμα 4.5: Σχήμα Άσκησης 4.7.7

□

Άσκηση 4.7.8

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Δείξτε ότι και η $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $|f|$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\left| |f_n(x)| - |f(x)| \right| \leq |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

άρα $|f_n| \rightrightarrows |f|$.

□

Άσκηση 4.7.9

Για την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που ορίζεται από την

$$f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

δείξτε ότι η $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ ενώ η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$

$$|f_n(x)| = \left| (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right| = 1 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 := f(x).$$

Επίσης

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| |f_n(x)| - 1 \right| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

άρα $f_n \rightrightarrows f$ στο $[0, 1]$.

Τώρα θεωρούμε τις υπακολουθίες $(f_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ και $(f_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

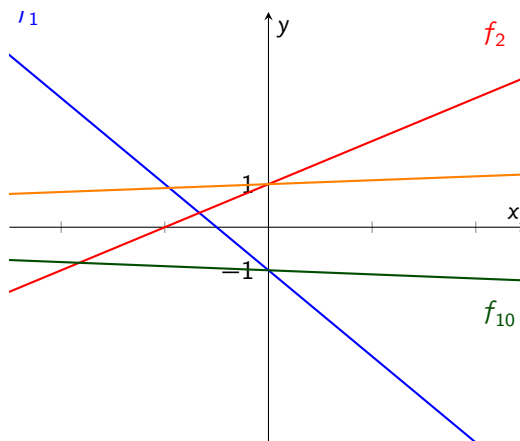
$$f_{2n}(x) = 1 + \frac{x}{2n} \quad \text{και} \quad f_{2n+1}(x) = -1 - \frac{x}{2n+1}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_{2n}(x) = 1 + \frac{x}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$f_{2n+1}(x) = -1 - \frac{x}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

άρα το όριο $\lim_n f_n(x)$ δεν υπάρχει.



Σχήμα 4.6: Σχήμα Άσκησης 4.7.9

□

Άσκηση 4.7.10

Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο X και $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα $f_n(x) \geq \delta$ για κάθε $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(i) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Η $(1/f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $1/f$.

Απόδειξη.

(i) Για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι

$$f_n(x) \geq \delta \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \geq \delta \implies f(x) \geq \delta > 0.$$

(ii) Έστω $\varepsilon > 0$ τότε αφού $f_n \rightrightarrows f$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|f_n - f| < \varepsilon \delta^2.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right| = \frac{|f - f_n|}{|f_n f|} = \frac{|f - f_n|}{|f_n| |f|} < \frac{\varepsilon \delta^2}{\delta^2} = \varepsilon$$

για κάθε $x \in X$ άρα $1/f_n \rightrightarrows 1/f$.

□

Άσκηση 4.7.11

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f με $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$. Δείξτε ότι

(i) $H(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

(Υπόδειξη: για το (i) βεβαιωθείτε ότι (f_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy, γράψτε αυτή την ιδιότητα και παίρνοντας σε αυτήν το όριο $x \rightarrow x_0$ δείξτε ότι η (a_n) είναι Cauchy.

Για το (ii) παρατηρήστε ότι επειδή τελικά (για μεγάλα n) θα ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ (γιατί) αρκεί να μπορούμε σε αυτήν να πάρουμε το όριο για $x \rightarrow x_0$. Για την ύπαρξη του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θεωρήστε ακολουθία $x_k \rightarrow x_0$ και δείξτε ότι υπάρχει το όριο της $(f(x_k))$ ως εξής: δείξτε ότι η τελευταία ακολουθία είναι Cauchy παρεμβάλλοντας με τριγωνική ανισότητα μια f_{n_0} για n_0 κατάλληλο ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon/4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τέλος με όμοιο τρόπο δείξτε ότι αν (y_k) μια άλλη ακολουθία με όριο το x_0 τότε η ποσότητα $|f(x_k) - f(y_k)|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή για μεγάλα k

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$.

(i) Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ άρα η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy, δηλαδή υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_1$

$$(4.6) \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι παίρνοντας το όριο $x \rightarrow x_0$ στην (4.6) έχουμε ότι για κάθε $n, m \geq n_1$

$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon,$$

συνεπώς η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει σε κάποιον αριθμό a .

(ii) Έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n$ άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για $|x - x_0| < \delta$

$$(4.7) \quad |f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επίσης $a_n \rightarrow a$ άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$

$$(4.8) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

και $f_n \rightrightarrows f$ άρα υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_3$

$$(4.9) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έστω $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$.

Τώρα από τις (4.7), (4.8), (4.9) έχουμε ότι για κάθε x με $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - a_{n_0} + a_{n_0} - a| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

(Η απόδειξη με βάση την υπόδειξη είναι πρακτικά η ίδια.)

□

Άσκηση 4.7.12

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η f_n είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ότι η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{Q} . Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο \mathbb{R} .

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ στο \mathbb{Q} άρα η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy, δηλαδή αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_1$

$$(4.10) \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$, επειδή το \mathbb{Q} είναι πυκνό στο \mathbb{R} υπάρχει ακολουθία $(q_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ με $q_k \rightarrow x$. Τότε επειδή η f_n είναι συνεχής για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\lim_k f_n(q_k) = f_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Τώρα για q_k στην (4.10) θα έχουμε ότι για κάθε $n, m \geq n_1$

$$|f_n(q_k) - f_m(q_k)| < \varepsilon$$

και παίρνοντας το όριο $k \rightarrow \infty$ έχουμε ότι για κάθε $n, m \geq n_1$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

δηλαδή $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο \mathbb{R} και συνεπώς $f_n \rightrightarrows f$.

□

Άσκηση 4.7.13

Δίνεται μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα υποσύνολο E του \mathbb{R} . Δείξτε ότι αν η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο E που συγκλίνει σε ένα σημείο $x \in E$, τότε $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$

$$(4.11) \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in E.$$

Επίσης η f είναι συνεχής συνεπώς $\lim_n f(x_n) = f(x)$, δηλαδή υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$

$$(4.12) \quad |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι αν $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε για κάθε $n \geq n_0$, από τις (4.11), (4.12) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

συνεπώς $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Άσκηση 4.7.14

Δίνεται ένας συμπαγής μετρικός χώρος X , μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και μια συνεχή συνάρτηση f με $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X που συγκλίνει στο σημείο $x \in X$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο και έστω λοιπόν ότι $f_n \not\rightrightarrows f$ στον X . Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ να υπάρχει $n \geq n_0$ και $x \in X$ ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Έτσι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ και $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε

$$(4.13) \quad |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon.$$

Έχουμε ότι ο X είναι συμπαγής, άρα η $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον X έστω την $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ με

$$x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} x \in X.$$

Από την (4.13) έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$(4.14) \quad |f_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}}) - f(x_{n_{k_l}})| \geq \varepsilon.$$

Τώρα θεωρούμε την ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$y_n = \begin{cases} x, & \text{αν } n \neq n_{k_l} \\ x_{n_{k_l}}, & \text{αν } n = n_{k_l}. \end{cases}$$

Φανερά $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, έτσι από την υπόθεση έχουμε ότι $f_n(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. Συνεπώς κάθε υπακολουθία της $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ θα έχει το ίδιο όριο, δηλαδή

$$f_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}}) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f(x).$$

Επίσης η f είναι συνεχής άρα $f(x_{n_{k_l}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ και έτσι έχουμε ότι

$$|f_{n_{k_l}}(x_{n_{k_l}}) - f(x_{n_{k_l}})| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

το οποίο είναι άτοπο από την (4.14), άρα η $f_n \rightrightarrows f$. □

Άσκηση 4.7.15

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } \frac{1}{n} < x \leq 1, \end{cases}$$

και η συνάρτηση $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $(0, 1]$ που συγκλίνει στο σημείο x , ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

(ii) Δείξτε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Απόδειξη.

(i) Έστω $x \in (0, 1]$. Επειδή $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, τελικά θα είναι $\frac{1}{n} < x$. Έστω $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_1} < x$. Αν $x_n \rightarrow x$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|x_n - x| < x - \frac{1}{n_1} \iff -x + \frac{1}{n_1} < x_n - x < x - \frac{1}{n_1} \iff \frac{1}{n_1} < x_n$$

$$\text{άρα } f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = f(x).$$

(ii) Είναι

$$\sup_{x \in (0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{0 < x \leq \frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 < x \leq \frac{1}{n}} \left| n - \frac{1}{x} \right| = +\infty.$$

άρα $f_n \not\rightrightarrows f$. □

Άσκηση 4.7.16

Δίνεται μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f . Δείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx.$$

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$ άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [0, 1].$$

Επίσης αφού η f_n είναι συνεχής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο $[0, 1]$ και $f_n \rightrightarrows f$ θα είναι και η f συνεχής στο $[0, 1]$, άρα η f παίρνει μέγιστη τιμή δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ακόμη υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$

$$\frac{M}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι για $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) dx \right| &= \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(x) - f_n(x)) dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(x) - f_n(x)) dx \right| + \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x) - f_n(x)| dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{\varepsilon}{2} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 M dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 1 dx + M \left(1 - 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

άρα

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx.$$

□

Άσκηση 4.7.17

Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση $f_n(x) = x^n$ και μια συνεχής συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι η $(gf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη.

- Αν $x \in [0, 1)$, τότε $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$.
- Αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 1^n \rightarrow 1$

άρα

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

Τώρα για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$(gf_n)(x) \equiv g(x)f_n(x) \rightarrow g(x)f(x) = 0.$$

Έστω $\varepsilon > 0$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$

$$|(gf_n)(x) - (gf)(x)| = |g(x)f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Έχουμε ότι η g είναι συνεχής στο συμπαγές $[0, 1]$ άρα είναι και φραγμένη, συνεπώς υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$(4.15) \quad |g(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Επίσης η g είναι συνεχής στο 1 με $g(1) = 0$ άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$(4.16) \quad \forall x \in [1 - \delta, 1] \text{ να ισχύει } |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ακόμη

$$\sup_{x \in [0, 1 - \delta]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1 - \delta]} x^n = (1 - \delta)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

άρα $f_n \rightrightarrows 0$ στο $[0, 1 - \delta]$ και συνεπώς υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει ότι

$$(4.17) \quad |f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \forall x \in [0, 1 - \delta].$$

Έτσι από τις (4.15), (4.16), (4.17) έχουμε ότι

- αν $x \in [0, 1 - \delta]$

$$|g(x)f_n(x)| = |g(x)||f_n(x)| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$$

- αν $x \in [\delta - 1, 1]$

$$|g(x)f_n(x)| = |g(x)||f_n(x)| = |g(x)|x^n < \frac{\varepsilon}{2}x^n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

άρα σε κάθε περίπτωση για κάθε $n \geq n_0$ $|(gf_n)(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [0, 1]$, οπότε $(gf_n) \rightrightarrows 0$. \square

Άσκηση 4.7.18

Θεωρούμε μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και μια συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, 1]$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δείξτε ότι η $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $g \circ f$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι η g είναι συνεχής στο συμπαγές $[0, 1]$, συνεπώς από το Θεώρημα 3.4.12 έχουμε ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$(4.18) \quad \forall a, b \in [0, 1] \text{ με } |a - b| < \delta \text{ να ισχύει ότι } |g(a) - g(b)| < \varepsilon.$$

Επίσης έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει ότι

$$(4.19) \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

Τέλος από τις (4.18), (4.19) έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$$

δηλαδή $g \circ f_n \rightrightarrows g \circ f$. □

Άσκηση 4.7.19

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Απόδειξη.

Είναι

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (-1)^n x^n (1-x).$$

Έστω

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^k (-1)^n x^n (1-x) = (1-x) \sum_{n=1}^k (-x)^n \\ &= (1-x) \frac{(-x)(1 - (-x)^k)}{x+1} = \frac{-x}{x+1} (1-x)(1 - (-x)^k) \\ &= \frac{-x}{x+1} \left((1-x) - (1-x)(-x)^k \right) \end{aligned}$$

Έστω

$$g_k(x) = (1-x)(-x)^k = (-1)^k (1-x)x^k = (-1)^k (x^k - x^{k+1}).$$

Θα υπολογίσουμε το $\sup_{x \in [0,1]} |g_k(x)|$. Είναι

$$|g_k(x)| = x^k - x^{k+1} \quad \text{και} \quad (|g_k(x)|)' = x^{k-1} (k - (k+1)x).$$

Άρα $g'_k(x) = 0 \iff x = \frac{k}{k+1}$. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |g_k(x)| &= \sup_{x \in [0,1]} (x^k - x^{k+1}) \\ &= \max \left\{ |g_k(0)|, |g_k(1)|, \left| g_k \left(\frac{k}{k+1} \right) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \right\} \\ &= \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

άρα $g_k \rightrightarrows 0$ και

$$\frac{-x}{x+1} \left((1-x) - (1-x)(-x)^k \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{-x(1-x)}{x+1}$$

Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} \left| s_k(x) - \frac{-x(1-x)}{x+1} \right| &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{-x}{x+1} \left((1-x) - (1-x)(-x)^k \right) + \frac{x(1-x)}{x+1} \right| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{-x(1-x)}{x+1} + \frac{x(1-x)(-x)^k}{x+1} + \frac{x(1-x)}{x+1} \right| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x(1-x)(-x)^k}{x+1} \right| \leq (1-x)x^k \rightrightarrows 0 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } s_k(x) \rightrightarrows \frac{-x(1-x)}{x+1}. \quad \square$$

Άσκηση 4.7.20

Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$

Απόδειξη.

Έστω $f_n(x) = a_n e^{-nx}$, τότε έχουμε ότι

$$|f_n(x)| = |a_n e^{-nx}| < |a_n|$$

διότι $e^{-nx} < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα από το Θεώρημα του Weierstrass. \square

Άσκηση 4.7.21

Δίνεται η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} x^n / (1+x^n)$. Βρείτε για ποια σημεία του \mathbb{R} η σειρά συγκλίνει. Βρείτε για ποια διαστήματα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. (Υπόδειξη: για διαστήματα της μορφής $[a, 1)$ ή $(-1, b]$, με $a, b \in (-1, 1)$, αν είναι ομοιόμορφα Cauchy δείξτε ότι το $x^n / (1+x^n)$ για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$ μπορεί να γίνει μικρότερο του $\varepsilon > 0$ για $\varepsilon < 1/2$ για κάθε x σε αυτά τα διαστήματα· άρα και για x κοντά στο 1 ή το -1 ανάλογα το εξεταζόμενο διάστημα.)

Απόδειξη.

Αν $|x| > 1$, τότε $x^n / (1+x^n) \rightarrow 1 \neq 0$. Αν $x = 1$ τότε $x^n / (1+x^n) = 1/2 \rightarrow 1/2 \neq 0$. Άρα στις περιπτώσεις αυτές η $\sum x^n / (1+x^n)$ αποκλίνει.

Αν $|x| < 1$ από το κριτήριο ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{1+x^n} \right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{|1+x^n|}} \rightarrow |x| < 1,$$

οπότε η σειρά συγκλίνει. (Για τον παρονομαστή στο προηγούμενο όριο παρατηρούμε ότι

$$\sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{|1+x^n|} \geq \sqrt[n]{1-|x|^n} \geq \sqrt[n]{1-|x|}.)$$

υπολογίζοντας το $\sup |x^n/(1+x^n)|$ στο $(-1, 1)$ με την βοήθεια της παραγώγου βρίσκουμε ότι αυτό είναι $+\infty$ οπότε το Θεώρημα Weierstrass δεν εφαρμόζεται.

Αν ελέγξουμε τη σύγκλιση στο $[a, b] \subseteq (-1, 1)$ τότε αν θέσουμε $\varphi(x) = x^n/(1+x^n)$ τότε με τη βοήθεια της παραγώγου βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| &= \max \left\{ \left| \frac{a^n}{1+a^n} \right|, \left| \frac{b^n}{1+b^n} \right| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{|a|^n}{1-|a|^n}, \frac{|b|^n}{1-|b|^n} \right\} \\ &\leq \frac{c^n}{1-c^n}, \end{aligned}$$

όπου $c = \max\{|a|, |b|\} < 1$. Η σειρά $\sum c^n/(1-c^n)$ συγκλίνει από το κριτήριο ρίζας άρα η αρχική σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b] \subseteq (-1, 1)$.

Τέλος η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε καμία περιοχή του 1 ή του -1 : πράγματι στο $[\delta, 1)$ ή στο $(-1, -\delta]$ για $\delta > 0$ αν συνέκλινε ομοιόμορφα θα ήταν ομοιόμορφα Cauchy. Έτσι θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \geq M \geq n_0$ να ισχύει

$$\sum_{n=M}^N \frac{x^n}{1+x^n} \leq \frac{1}{3}.$$

Οπότε θα έπρεπε να ισχύει και

$$\frac{x^{2n_0}}{1+x^{2n_0}} \leq \frac{1}{3}$$

για κάθε $x \in [\delta, 1)$. Αλλά παίρνοντας όριο για $x \rightarrow 1^-$ (ή $x \rightarrow -1^+$ αντίστοιχα) προκύπτει $1/2 \leq 1/3$ που είναι άτοπο. \square

Άσκηση 4.7.22

Δίνεται η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} x/(n(x+n))$. Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Απόδειξη.

Έστω

$$\phi_n(x) = \frac{x}{x+n}, \quad x \in [0, 1]$$

τότε

$$\phi_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0, \quad \forall x \in [0, 1]$$

άρα η $\phi_n(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$. Έτσι έχουμε ότι

$$\sup_{x \in [0, 1]} \frac{x}{n(x+n)} = \frac{1}{n(1+n)},$$

δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{x}{n(x+n)} \right| \leq \frac{1}{n(1+n)} := M_n.$$

Όμως

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

άρα από το Θεώρημα του Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα. \square

Άσκηση 4.7.23 (Κριτήριο Cauchy-Hadamard)

Έστω ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε $R = (\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Φανερά $0 \leq R \leq \infty$. Αποδείξτε ότι

- (i) αν $|x| < R$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απόλυτα.
- (ii) αν $|x| > R$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει.
- (iii) αν $0 \leq r < R$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-r, r]$.

Απόδειξη.

(i) Έστω ότι $|x| < R = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$. Άρα $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$. Θεωρούμε ένα λ ώστε

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} < \lambda < 1.$$

Στο διάστημα $[\lambda, 1]$ η ακολουθία $\sqrt[n]{|a_n x^n|}$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος όρων: αλλιώς θα υπήρχε υπακολουθία με όρους μεγαλύτερους ή ίσους του λ , και λόγω συμπίεσης του $[\lambda, 1]$ θα υπήρχε υπακολουθιακό όριο μέσα στο $[\lambda, 1]$, που είναι άτοπο, αφού το supremum των υπακολουθιακών ορίων $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ είναι γνησίως μικρότερο του λ . Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για και $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq \lambda \Rightarrow |a_n x^n| \leq \lambda^n.$$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει απολύτως από το κριτήριο σύγκρισης με την $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$.

Ομοίως αντιμετωπίζουμε το (iii) θέτοντας $\lambda = (r + R)/2$ που είναι ανεξάρτητο του x .

(ii) Η υπόθεση συνεπάγεται $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$. Θεωρούμε $b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} > b > 1.$$

Έτσι υπάρχει υπακολουθία της $\sqrt[n]{|a_n x^n|}$, έστω η $\sqrt[k_n]{|a_{k_n} x^{k_n}|}$, μεγαλύτερη του b . Συνεπώς $|a_{k_n} x^{k_n}| \geq b^{k_n} \rightarrow +\infty$, αφού $b > 1$. Άρα η ακολουθία $a_n x^n$ δεν είναι μηδενική και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει. \square

Κεφάλαιο 5

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

5.1 Ενότητα 5.1

5.2 Ενότητα 5.2

Άσκηση 5.2.1

Αποδείξτε ότι αν $f \in C([0, 1])$ και ισχύει $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f = 0$.

Απόδειξη.

Αρχικά θα δείξουμε ότι αν $\int_0^1 x^n f(x) dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\int_0^1 p(x) f(x) dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο p . Πράγματι αν

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

είναι πολυώνυμο, τότε θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x) f(x) dx &= \int_0^1 (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) f(x) dx \\ &= a_0 \int_0^1 f(x) dx + a_1 \int_0^1 x f(x) dx + \dots + a_n \int_0^1 x^n dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Τώρα επειδή η f είναι συνεχής στο συμπαγές $[0, 1]$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0, 1]$, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Επίσης από το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C([0, 1])$ ώστε $q_n \rightrightarrows f$, δηλαδή $\sup_{x \in [0, 1]} |q_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$, και συνεπώς $q_n f \rightrightarrows f^2$, αφού

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} |q_n(x) f(x) - f^2(x)| &= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| |q_n(x) - f(x)| \\ &\leq M \sup_{x \in [0, 1]} |q_n(x) - f(x)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Τώρα από το Θεώρημα 4.3.2 παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 q_n(x) f(x) dx \rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx,$$

όμως $\int_0^1 q_n(x)f(x)dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα

$$0 = \lim \int_0^1 q_n(x)f(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx,$$

και έτσι αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παίρνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. \square

Άσκηση 5.2.2

Αποδείξτε ότι αν $f \in C([0, 1])$ και ισχύει $\int_0^1 x^{2n}f(x)dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f = 0$.

Απόδειξη.

Επεκτείνω την f με άρτιο τρόπο στο $[-1, 1]$, δηλαδή θέτω

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in [0, 1] \\ f(-x), & \text{αν } x \in [-1, 0], \end{cases}$$

οπότε θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^{2n}\tilde{f}(x)dx &= \int_{-1}^0 x^{2n}f(-x)dx + \int_0^1 x^{2n}f(x)dx \\ &= \frac{t=-x}{dt=-dx} \int_{-1}^0 (-t)^{2n}f(t)(-dt) \\ &= \int_0^1 t^{2n}f(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Τώρα επειδή το γινόμενο άρτιας με περιττής συνάρτησης είναι περιττή, παίρνουμε ότι η συνάρτηση $x^{2n-1}\tilde{f}(x)$ είναι περιττή (αφού η x^{2n-1} είναι περιττή) και συνεπώς

$$\int_{-1}^1 x^{2n-1}\tilde{f}(x)dx = 0. \quad (5.2)$$

Τέλος από τις σχέσεις (5.1), (5.2) παίρνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^1 x^n\tilde{f}(x)dx = 0.$$

Ομοίως με την άσκηση (5.2.1) δείχνουμε ότι $\tilde{f}(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ και συνεπώς και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. \square

Άσκηση 5.2.3

Αποδείξτε ότι η άλγεβρα που παράγεται από την σταθερά ίση με 1, $\mathbf{1}$ και την x^2 είναι πυκνή στο $C([0, 1])$, αλλά δεν είναι πυκνή στο $C([-1, 1])$.

Άσκηση 5.2.4

Αποδείξτε ότι στο θεώρημα Weierstrass είναι απαραίτητο το διάστημα που χρησιμοποιούμε να είναι συμπαγές. Συγκεκριμένα δείξτε ότι υπάρχει υπέρχει f φραγμένη και συνεχής στο $(0, 1]$ ώστε να μην υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n που να συγκλίνει ομοιόμοφα στην f .

Απόδειξη.

Έστω η συνάρτηση $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(1/x)$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων που να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f με απαγωγή σε άτοπο. Το άτοπο θα προκύψει δείχνοντας ότι η f έχει όριο στο 0^+ , το οποίο δεν είναι σωστό, καθώς αν θεωρήσουμε τις μηδενικές ακολουθίες

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

παίρνουμε ότι $f(a_n) \rightarrow 0$ και $f(b_n) \rightarrow 1$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$ και $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \rightrightarrows f$. Τότε εφαρμόζοντας τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης για $\tilde{\varepsilon} = 1$ παίρνουμε ότι

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{ώστε} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{να ισχύει} \quad |p_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x \in (0, 1],$$

επίσης από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι

$$|p_n(x)| - |f(x)| \leq |p_n(x) - f(x)| < 1 \implies |p_n(x)| < 1 + |f(x)|$$

άρα

$$(5.3) \quad |p_n(x)| < 2 \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad x \in (0, 1],$$

όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η p_n και η απόλυτη τιμή είναι συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R} , συνεπώς το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} |p_n(x)|$ υπάρχει και μάλιστα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |p_n(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} p_n(x) \right| = |p_n(0)|$$

έτσι από την σχέση (5.3) παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |p_n(x)| = |p_n(0)| \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

δηλαδή η ακολουθία αριθμών $(p_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και συνεπώς έχει συγκλίνουσα υπακολουθία έστω την $(p_{k_n}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ και έστω $l \in (-2, 2)$ το όριό της. Τότε υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq m_1$ να έχουμε ότι

$$(5.4) \quad |p_{k_n}(0) - l| < \frac{\varepsilon}{3}$$

επίσης $p_{k_n} \rightrightarrows f$, διότι $p_n \rightrightarrows f$, άρα υπάρχει $m_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq m_2$ να ισχύει ότι

$$(5.5) \quad |p_{k_n}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in (0, 1].$$

Έστω $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq m_3$ ισχύουν οι σχέσεις (5.4) και (5.5) άρα και για $n = m_3$, δηλαδή

$$(5.6) \quad |p_{k_{m_3}}(0) - l| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{και} \quad |p_{k_{m_3}}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Το πολυώνυμο $p_{k_{m_3}}$ είναι συνεχής στο 0 άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $0 < x < \delta$ να ισχύει ότι

$$(5.7) \quad |p_{k_{m_3}}(x) - p_{k_{m_3}}(0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τώρα για κάθε $n \geq m_3$ και για κάθε $0 < x < \delta$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.6), (5.7) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &= |f(x) - p_{k_{m_3}}(x) + p_{k_{m_3}}(x) - p_{k_{m_3}}(0) + p_{k_{m_3}}(0) - l| \\ &\leq |f(x) - p_{k_{m_3}}(x)| + |p_{k_{m_3}}(x) - p_{k_{m_3}}(0)| + |p_{k_{m_3}}(0) - l| \\ &\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$, το οποίο όπως είδαμε είναι άτοπο. \square

Άσκηση 5.2.5

Στην άσκηση αυτή θέλουμε να δείξουμε ότι η ακολουθία p_n των πολυωνύμων που μας δίνει το θεώρημα Weierstrass μπορεί να επιλεγθεί ώστε να είναι αύξουσα, δηλαδή να ισχύει $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in [a, b]$.

- (i) Δείξτε ότι αν $f, g \in C([a, b])$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.
- (ii) Χρησιμοποιήστε την ακολουθία $g_n(x) = f(x) - 1/n$ για να δείξετε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε η p_n να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

Απόδειξη.

- (i) Έστω $f, g \in C([a, b])$ με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Η h είναι συνεχής στο συμπαγές $[a, b]$ και συνεπώς παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a, b]$, δηλαδή για κάθε $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} h(x) &\geq \min_{x \in [a, b]} (g(x) - f(x)) = h(x_0) \iff \\ (5.8) \quad g(x) - f(x) &\geq g(x_0) - f(x_0). \end{aligned}$$

Θέτω $\varepsilon = \frac{g(x_0) - f(x_0)}{2}$ οπότε από την σχέση (5.8) έχουμε ότι

$$(5.9) \quad \varepsilon \leq \frac{g(x) - f(x)}{2}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Τώρα επειδή η συνάρτηση $\frac{f+g}{2}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ από το θεώρημα προ-σέγγισης του Weierstrass υπάρχει κάποιο πολυώνυμο p ώστε για κάθε $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \left| p(x) - \frac{f(x) + g(x)}{2} \right| &< \varepsilon \iff \\ (5.10) \quad p(x) - \varepsilon &< \frac{f(x) + g(x)}{2} < p(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Από την (5.10) παίρνουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$

$$p(x) < \frac{f(x) + g(x)}{2} + \varepsilon \stackrel{(5.9)}{\leq} \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{g(x) - f(x)}{2} = f(x)$$

και

$$p(x) > \frac{f(x) + g(x)}{2} - \varepsilon \stackrel{(5.9)}{\geq} \frac{f(x) + g}{2} - \frac{g(x) - f(x)}{2} = g(x)$$

δηλαδή $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(ii) Θεωρώ την ακολουθία συναρτήσεων $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C([a, b])$ με

$$g_n(x) = f(x) - \frac{1}{n} \quad \forall x \in [a, b] \text{ και } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Προφανώς $f - 1/n < f - 1/(n+1)$, άρα από το (i) παίρνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο p_n ώστε για κάθε $x \in [a, b]$ να ισχύει ότι

$$(5.11) \quad \begin{aligned} f(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < f(x) - \frac{1}{n+1} &\iff \\ \frac{1}{n+1} < f(x) - p_n(x) < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

δηλαδή $|f(x) - p_n(x)| < \frac{1}{n+1}$ για κάθε $x \in [a, b]$, συνεπώς έχουμε ότι και $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ άρα $p_n \rightrightarrows f$.

Τώρα μένει να δείξουμε ότι η ακολουθία $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Από την σχέση (5.11) έχουμε ότι

$$p_n(x) < f(x) - \frac{1}{n+1}$$

και

$$f(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < f(x) - \frac{1}{n+1} < p_{n+1}(x)$$

άρα

$$p_n(x) < f(x) - \frac{1}{n+1} < p_{n+1}(x)$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

□

5.3 Ενότητα 5.3

Κεφάλαιο 6

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

6.1 Ενότητα 6.1

Άσκηση 6.1.1

Αποδείξτε ότι αν $A = \{x\}$ τότε $\mu^*(A) = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το διάστημα $[x, x + \varepsilon)$ καλύπτει το σύνολο $A = \{x\}$, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \ell([x, x + \varepsilon)) = \varepsilon,$$

έτσι αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι $\mu^*(\{x\}) = 0$. □

Άσκηση 6.1.2

Αποδείξτε ότι αν $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ τότε $\mu^*(A) = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού τα διαστήματα $[x_1, x_1 + \varepsilon)$, $[x_2, x_2 + \varepsilon)$, ..., $[x_N, x_N + \varepsilon)$ καλύπτουν το σύνολο $A = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^N \ell([x_j, x_j + \varepsilon)) = N\varepsilon,$$

άρα αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι $\mu^*(\{x_1, x_2, \dots, x_N\}) = 0$. □

Άσκηση 6.1.3

Αποδείξτε ότι αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε $\mu^*(A) = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η εξής ακολουθία διαστημάτων:

$$I_1 = \left[x_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right), I_2 = \left[x_2, x_2 + \frac{\varepsilon}{2^2} \right), \dots, I_k = \left[x_k, x_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right), \dots$$

Έχουμε ότι $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ και από τον ορισμό του infimum παίρνουμε ότι

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \ell\left(\left[x_k, x_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \right)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

έτσι αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε ότι $\mu^*(A) = 0$. □

Άσκηση 6.1.4

Αποδείξτε ότι $\mu^*([a, b]) \leq b - a$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το διάστημα $[a, b + \varepsilon)$ καλύπτει το σύνολο $[a, b)$, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου θα έχουμε ότι

$$\mu^*([a, b]) \leq \ell([a, b + \varepsilon)) = b + \varepsilon - a,$$

έτσι αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι $\mu^*([a, b]) \leq b - a$. □

6.2 Ενότητα 6.2**Άσκηση 6.2.1**

Δίνεται ένα υποσύνολο E του $[0, 1]$ με $\mu^*(E) = 0$. Δείξτε ότι το $[0, 1] \setminus E$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτω ότι το σύνολο $A = [0, 1] \setminus E$ δεν είναι πυκνό στο $[0, 1]$, οπότε $\overline{A} \neq [0, 1]$ και συνεπώς θα υπάρχει κάποιο $x_0 \in [0, 1] \setminus \overline{A}$. Αφού το $x_0 \notin \overline{A}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$[0, 1] \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \emptyset,$$

δηλαδή $[0, 1] \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq E$, άρα από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$0 < \varepsilon \leq \mu^*([0, 1] \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) \leq \mu^*(E) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Άσκηση 6.2.2

Δίνεται ένα υποσύνολο E του \mathbb{R} . Δείξτε ότι

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U, U \text{ ανοικτό}\}.$$

Απόδειξη.

Για κάθε $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό με $E \subseteq U$, από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(U)$$

άρα

$$(6.1) \quad \mu^*(E) \leq \inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U, U \text{ ανοικτό}\}.$$

Τώρα από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $[a_j, b_j)$ όπου $j \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\bullet \quad E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j)$$

$$\bullet \sum_{j=1}^{\infty} \ell\left([a_j, b_j]\right) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Θέτω $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j)$. Παρατηρούμε ότι το U είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων. Τώρα από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(V) &= \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - (a_j - \frac{\varepsilon}{2^j})) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon < \mu^*(E) + \varepsilon + \varepsilon \\ &= \mu^*(E) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

άρα

$$\inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U, U \text{ ανοικτό}\} \leq \mu^*(V) < \mu^*(E) + 2\varepsilon$$

οπότε αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι

$$(6.2) \quad \inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U, U \text{ ανοικτό}\} \leq \mu^*(E).$$

Τώρα από τις (6.1), (6.2) έχουμε ότι

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) : E \subseteq U, U \text{ ανοικτό}\}$$

□

Άσκηση 6.2.3

Δίνονται δυο υποσύνολα A και B του \mathbb{R} . Δείξτε ότι αν $\mu^*(A) = 0$ τότε $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B)$.

Απόδειξη.

Αρχικά από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(B).$$

Απ' την άλλη μεριά καθώς το εξωτερικό μέτρο είναι μονότονο και $B \subseteq A \cup B$ έχουμε ότι

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B).$$

Συνεπώς έχουμε ότι $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B)$.

□

Άσκηση 6.2.4

Δίνονται δυο σύνολα A και B ώστε

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Απόδειξη.

Ισχυρισμός.

Έστω $[a, b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ ώστε

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]$$

και

$$\ell([a_j, b_j]) < \varepsilon, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Πράγματι, αν διαμερίσω το διάστημα $[a, b]$ σε N ισομήκη διαστήματα μήκους $r = \frac{b-a}{N}$, δηλαδή

$$[a, b] \stackrel{b=Nr}{=} [a, a+r) \cup [a+r, a+2r) \cup \dots \cup [a+(N-1)r, b]$$

θα έχω ότι

$$\ell([a, b]) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell([a+kr, b+(k+1)r])$$

όμως $r = \frac{b-a}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \geq n_0$ να έχουμε

$$\ell([a+kr, b+(k+1)r]) < \varepsilon, \quad \text{όπου } r = \frac{b-a}{N}.$$

Έστω $d = d(A, B)$, τότε από τον παραπάνω ισχυρισμό έχουμε ότι μπορούμε να καλύψουμε το σύνολο $A \cup B$ με διαστήματα $[a_j, b_j]$, $j \in \mathbb{N}$ μήκους μικρότερου του d . Οπότε έχουμε ότι

$$\mu^*(A \cup B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j]) : A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j], \text{ και } \ell([a_j, b_j]) = b_j - a_j < \frac{d}{2} \right\},$$

άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $[a_j, b_j]$ ώστε $b_j - a_j < \frac{d}{2}$, $A \cup B \subseteq$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j] \text{ και}$$

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j]) < \mu^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Τώρα αφού $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$, φανερά $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$ και $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$. Έστω

$[a_{k_j}, b_{k_j}]$, η υπακολουθία όλων των συνόλων της $[a_j, b_j]$ ώστε $A \cap [a_{k_j}, b_{k_j}] \neq \emptyset$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $[a_{m_j}, b_{m_j}]$ η υπακολουθία όλων των συνόλων της $[a_j, b_j]$ ώστε $B \cap [a_{m_j}, b_{m_j}] \neq \emptyset$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τώρα παρατηρούμε τα εξής:

$$(i) \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{k_j}, b_{k_j}] \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{m_j}, b_{m_j}] \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j]$$

$$(ii) \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{k_j}, b_{k_j}] \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{m_j}, b_{m_j}] = \emptyset$$

$$(iii) \ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{k_j}, b_{k_j}] \text{ και } B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_{m_j}, b_{m_j}]$$

Τα (i), (iii) είναι προφανή, και το (ii) αποδεικνύεται εύκολα με άτοπο χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $d(A, B) = d$ και $\ell([a_{k_j}, b_{k_j}]), \ell([a_{m_j}, b_{m_j}]) < \frac{d}{2}$. Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) + \varepsilon &> \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j, b_j]) \stackrel{(i),(ii)}{\geq} \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_{k_j}, b_{k_j}]) + \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_{m_j}, b_{m_j}]) \\ &\stackrel{(iii)}{\geq} \mu^*(A) + \mu^*(B). \end{aligned}$$

Έτσι αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι

$$(6.4) \quad \mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Από την άλλη μεριά χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$(6.5) \quad \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

έτσι από τις (6.4), (6.5) έχουμε το ζητούμενο. \square

Άσκηση 6.2.5

Δίνονται ένα μετρήσιμο σύνολο A και ένα σύνολο B ώστε $A \subseteq B$. Δείξτε ότι

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(A).$$

Απόδειξη.

Έχουμε ότι το A είναι μετρήσιμο άρα για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$(6.6) \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $B \setminus A = B \cap A^c$ και $B \cap A = A$ άρα για $E = B$ στην (6.6) έχουμε ότι

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A).$$

\square

Άσκηση 6.2.6

Δίνονται υποσύνολο A του \mathbb{R} και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R} που περιέχει το A ώστε

$$\mu^*(U) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Απόδειξη.

Άμεσο από την άσκηση (6.2.2). \square

Άσκηση 6.2.7

Δίνεται ένα υποσύνολο A του \mathbb{R} . Υπάρχει ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R} που περιέχει το A ώστε $\mu^*(U) = \mu^*(A)$;

Απόδειξη.

Όχι δεν υπάρχει. Πράγματι αν $A = \{1\}$, τότε για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R} με $A \subseteq U$, δηλαδή $1 \in U$, έχουμε ότι θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \subseteq U$. Τώρα από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$0 < \mu^*\left((1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\right) = 2\varepsilon \leq \mu^*(U).$$

Όμως $\mu^*(A) = \mu^*(\{1\}) = 0$ άρα $\mu^*(A) \neq \mu^*(U)$. □

6.3 Ενότητα 6.3**Άσκηση 6.3.1**

Δίνεται ένα υποσύνολο A του \mathbb{R} . Δείξτε ότι υπάρχει G_δ υποσύνολο G του \mathbb{R} , που περιέχει το A και ισχύει $\mu^*(G) = \mu^*(A)$.

Απόδειξη.

Αρχικά από την Άσκηση 6.2.2 έχουμε ότι

$$(6.7) \quad \mu^*(A) = \inf\{\mu^*(U) : A \subseteq U \text{ και } U \text{ ανοικτό}\}.$$

- Αν το $\mu^*(A) < \infty$, τότε από την σχέση (6.7) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U_n με $A \subseteq U_n$ και $\mu^*(U_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$, συνεπώς

$$(6.8) \quad \mu^*(A) \stackrel{A \subseteq U_n}{\leq} \mu^*(U_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Έστω $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Το G είναι G_δ σύνολο και ισχύει ότι $A \subseteq G$ και $G \subseteq U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(G) \leq \mu^*(U_n) \stackrel{(6.8)}{<} \mu^*(A) + \frac{1}{n},$$

άρα αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $\mu^*(A) = \mu^*(G)$.

- Αν τώρα το $\mu^*(A) = \infty$, τότε θέτουμε $G = \mathbb{R}$. Φανερά το G είναι σύνολο G_δ , $A \subseteq G$ και $\mu^*(A) = \mu^*(G) = \infty$. □

Άσκηση 6.3.2

Δίνονται ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο U του \mathbb{R} και ένα $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συμπαγές υποσύνολο K του \mathbb{R} που περιέχεται στο U και ισχύει $\mu^*(K) \geq \mu^*(U) - \varepsilon$.

Απόδειξη.

Από την Άσκηση 6.2.2 έχουμε ότι $\mu^*(\overline{U} \setminus U) = \inf\{\mu^*(O) : A \subseteq O \text{ και } O \text{ ανοικτό}\}$. Επίσης αφού το U είναι φραγμένο τότε και το $\overline{U} \setminus U$ είναι φραγμένο, άρα υπάρχει ανοικτό ώστε $\overline{U} \setminus U \subseteq O$ και

$$(6.9) \quad \mu^*(O) < \mu^*(\overline{U} \setminus U) + \varepsilon.$$

Θέτουμε $K = \bar{U} \setminus O$. Τότε το $K \subseteq \bar{U}$ και είναι συμπαγές, αφού είναι φραγμένο και επίσης είναι κλειστό, διότι το K^c είναι ανοικτό. Πράγματι

$$K^c = \mathbb{R} \setminus K = \mathbb{R} \cap K^c = \mathbb{R} \cap (\bar{U} \setminus O)^c = (\bar{U} \setminus O)^c = (\bar{U} \cap O^c)^c = (\bar{U})^c \cup O,$$

άρα το K^c είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών. Τώρα έχουμε ότι το U είναι μετρήσιμο σύνολο, ως ανοικτό, συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(\bar{U}) &= \mu^*(\bar{U} \cap U) + \mu^*(\bar{U} \cap U^c) = \mu^*(U) + \mu^*(\bar{U} \setminus U) \xrightarrow{\mu^*(U) < \infty} \\ \mu^*(\bar{U} \setminus U) &= \mu^*(\bar{U}) - \mu^*(U). \end{aligned}$$

Επίσης το O είναι μετρήσιμο σύνολο, ως ανοικτό, άρα

$$\begin{aligned} \mu^*(\bar{U}) &= \mu^*(\bar{U} \cap O) + \mu^*(\bar{U} \cap O^c) = \mu^*(\bar{U} \cap O) + \mu^*(\bar{U} \setminus O) \xrightarrow{\mu^*(U) < \infty} \\ \mu^*(\bar{U} \setminus O) &= \mu^*(\bar{U}) - \mu^*(\bar{U} \cap O), \end{aligned}$$

άρα παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(K) &= \mu^*(\bar{U} \setminus O) = \mu^*(\bar{U}) - \mu^*(\bar{U} \cap O) \geq \mu^*(\bar{U}) - \mu^*(O) \\ &\stackrel{(6.9)}{>} \mu^*(\bar{U}) - (\mu^*(\bar{U} \setminus U) + \varepsilon) = \mu^*(\bar{U}) - (\mu^*(\bar{U}) - \mu^*(U) + \varepsilon) \\ &= \mu^*(U) - \varepsilon \end{aligned}$$

δηλαδή $\mu^*(K) \geq \mu^*(U) - \varepsilon$. □

6.4 Ενότητα 6.4

Άσκηση 6.4.1

Θεωρούμε την οικογένεια των πεπερασμένων και συμπεπερασμένων υποσυνόλων του \mathbb{N} , δηλαδή την

$$\mathcal{A} = \{F \subseteq \mathbb{N} : F \text{ πεπερασμένο ή } F^c \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Αποδείξτε ότι η \mathcal{A} είναι μια άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} αλλά δεν είναι σ -άλγεβρα.

Απόδειξη.

Αρχικά βλέπουμε ότι το $\{1\} \in \mathcal{A}$ άρα $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Έστω τώρα $F \in \mathcal{A}$, τότε είτε το F είναι πεπερασμένο είτε το F^c είναι πεπερασμένο, άρα έχουμε ότι είτε το F^c είναι πεπερασμένο είτε το $(F^c)^c = F$ είναι πεπερασμένο, άρα το $F^c \in \mathcal{A}$.

Επίσης αν $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ τότε αν το $F_1 \cup F_2$ είναι πεπερασμένο τότε $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{A}$ και συνεπώς το \mathcal{A} είναι μια άλγεβρα συνόλων. Αν τώρα το $F_1 \cup F_2$ είναι άπειρο σύνολο τότε το F_1 είναι άπειρο ή το F_2 είναι άπειρο συνεπώς αφού $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι είτε F_1^c είναι πεπερασμένο είτε το F_2^c είναι πεπερασμένο, άρα και το $F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c$ είναι πεπερασμένο, συνεπώς $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{A}$, οπότε η συλλογή \mathcal{A} είναι μια άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} .

Η συλλογή \mathcal{A} δεν είναι όμως σ -άλγεβρα. Πράγματι αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρήσουμε το μονοσύνολο $F_n = \{2n\} \in \mathcal{A}$ τότε έχουμε ότι

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = 2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{και}$$

$$F^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \right)^c = (2\mathbb{N} - 1)\mathbb{N} = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

δηλαδή και το σύνολο F και το σύνολο F^c είναι άπειρα συνεπώς $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \notin \mathcal{A}$ και η \mathcal{A} δεν είναι σ -άλγεβρα. \square

Άσκηση 6.4.2

Έστω ότι το X είναι ένα μη κένο σύνολο.

- (i) Αποδείξτε ότι αν η \mathfrak{A} είναι μια οικογένεια αλγεβρών (αντίστοιχα σ -άλγεβρών) υποσυνόλων του X τότε και η τομή τους είναι άλγεβρα (αντίστοιχα σ -άλγεβρα).
- (ii) Αποδείξτε ότι αν η \mathcal{D} είναι μια οικογένεια από υποσύνολα του X τότε η

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ είναι μια } \sigma\text{-άλγεβρα με } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F} \}$$

είναι σ -άλγεβρα, και μάλιστα είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα που περιέχει την \mathcal{D} . Η $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ ονομάζεται η σ -άλγεβρα που παράγει η οικογένεια \mathcal{D} .

- (iii) Αν ο (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και \mathcal{O} είναι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X , η ελάχιστη σ -άλγεβρα που περιέχει το \mathcal{O} ονομάζεται Borel σ -άλγεβρα των υποσυνόλων του X και συμβολίζεται με $Borel(X)$. Κάθε στοιχείο της $Borel(X)$ λέγεται ένα Borel υποσύνολο του X . Αποδείξτε ότι η $Borel(X)$ περιέχει τα κλειστά, τα F_σ , G_δ , $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$ κλπ σύνολα.

Απόδειξη.

- (i) Η απόδειξη θα γίνει για την περίπτωση της σ -άλγεβρας (συνεπώς η περίπτωση της άλγεβρας έπεται). Αρχικά έχουμε ότι το $\emptyset \in \mathcal{A}$ για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, άρα $\emptyset \in \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$, άρα η συλλογή $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$ είναι μη κενή. Έστω $F \in \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$, τότε το $F \in \mathcal{A}$ για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, άρα $F \in \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$.

Έστω τώρα $F_1, F_2, \dots \in \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$, τότε το σύνολο $F_j \in \mathcal{A}$ για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, άρα και $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Συνεπώς η συλλογή $\bigcap_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι μια σ -άλγεβρα.

- (ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι σ -άλγεβρα και περιέχει την συλλογή \mathcal{D} , άρα από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι η $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ είναι σ -άλγεβρα.

Μένει να δείξουμε ότι είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα η οποία περιέχει την συλλογή \mathcal{D} . Έστω \mathcal{S} μια σ -άλγεβρα η οποία περιέχει την συλλογή \mathcal{D} . Τότε έχουμε ότι $\mathcal{S} \in \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ είναι μια } \sigma\text{-άλγεβρα με } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F} \}$, άρα

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \bigcap \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ είναι μια } \sigma\text{-άλγεβρα με } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F} \} \subseteq \mathcal{S},$$

άρα η $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα που περιέχει την συλλογή \mathcal{D} . \square

Άσκηση 6.4.3

- (i) Βρείτε την άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} που παράγεται από τα μονοσύνολα.
 (ii) Βρείτε την σ -άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} που παράγεται από τα μονοσύνολα.

Απόδειξη.

- (i) Έστω $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ πεπερασμένο ή } A^c \text{ πεπερασμένο}\}$, φανερά η \mathcal{A} περιέχει τα μονοσύνολα φυσικών αριθμών. Τώρα από την Άσκηση 6.4.1 έχουμε ότι η συλλογή \mathcal{A} είναι άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} , οπότε μένει να δείξουμε πως είναι η ελάχιστη άλγεβρα που περιέχει τα μονοσύνολα. Έστω λοιπόν \mathcal{S} μια άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} η οποία περιέχει τα μονοσύνολα, τότε αφού είναι άλγεβρα θα περιέχει και τις πεπερασμένες ενώσεις των μονοσυνόλων, δηλαδή περιέχει κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A των φυσικών. Τέλος η συλλογή \mathcal{S} είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα συνεπώς για κάθε $A \in \mathcal{S}$ και $A^c \in \mathcal{S}$, και έτσι έχουμε ότι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, άρα η \mathcal{A} είναι η ελάχιστη άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} που περιέχει τα μονοσύνολα.
- (ii) Θεωρούμε την συλλογή $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο}\}$. Η \mathcal{A} είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} . Πράγματι το $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$, άρα η συλλογή \mathcal{A} είναι μη κενή.

Επίσης αν $A \in \mathcal{A}$ τότε το A^c θα είναι το πολύ αριθμήσιμο και συνεπώς και $A^c \in \mathcal{A}$. Έστω τώρα $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ τότε η $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, άρα $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ και συνεπώς η \mathcal{A} είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} .

Τώρα μένει να δείξουμε ότι η \mathcal{A} είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} που περιέχει τα μονοσύνολα. Έστω \mathcal{S} μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} η οποία περιέχει τα μονοσύνολα, τότε επειδή είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις θα περιέχει και κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ το το πολύ αριθμήσιμο και συνεπώς $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, δηλαδή η \mathcal{A} είναι η ελάχιστη σ -άλγεβρα υποσυνόλων του \mathbb{N} που περιέχει τα μονοσύνολα.

□

Άσκηση 6.4.4

Δίνεται μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$.

- (i) Αν η \mathcal{B} είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Y τότε η $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) \subseteq X : B \in \mathcal{B}\}$ είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του X .
 (ii) Αν η \mathcal{A} είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του X τότε η $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Y .

Απόδειξη.

- (i) Αφού η \mathcal{B} είναι μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του Y , τότε το σύνολο $Y \in \mathcal{B}$, άρα $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ και συνεπώς η συλλογή \mathcal{A} είναι μη κενή.
 Έστω τώρα $A \in \mathcal{A}$, τότε θα υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $A = f^{-1}(B)$. Όμως η \mathcal{B} είναι σ -άλγεβρα και συνεπώς $B^c \in \mathcal{B}$ άρα το σύνολο $f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$, αλλά παρατηρούμε ότι $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c = A^c$ και συνεπώς $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχουν $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ ώστε $f^{-1}(B_j) = A_j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τώρα επειδή η \mathcal{B} είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις θα ισχύει $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{B}$, άρα $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) \in \mathcal{A}$. Όμως

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j,$$

άρα $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ και συνεπώς η \mathcal{A} είναι μια άλγεβρα υποσυνόλων του X .

(ii) Αρχικά έχουμε ότι το $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, συνεπώς $Y \in \mathcal{B}$, άρα η συλλογή \mathcal{B} είναι μη κενή. Έστω τώρα $B \in \mathcal{B}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, όμως η \mathcal{A} ως σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα οπότε και $\left(f^{-1}(B)\right)^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$ άρα και το $B^c \in \mathcal{B}$.

Έστω $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$, τότε $f^{-1}(B_j) \in \mathcal{A}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Όμως η \mathcal{A} ως σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, άρα

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j\right) \in \mathcal{A},$$

συνεπώς $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{B}$, άρα η \mathcal{B} είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Y .

□

Άσκηση 6.4.5

Δίνεται μια άλγεβρα συνόλων \mathcal{A} . Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Αν $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και τα A_i είναι ξένα ανά δύο, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και $A_i \subseteq A_{i+1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη.

(i) \Rightarrow (ii) Προφανής.

(ii) \Rightarrow (iii) Έστω $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ με $A_n \subseteq A_{n+1}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $B_n \in \mathcal{A}$, είναι ξένα ανά δυο και

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Έτσι από το (ii) έχουμε ότι $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$ άρα και $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

(iii) \Rightarrow (i) Έστω $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ και

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Έτσι από το (iii) έχουμε ότι $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{A}$ άρα και $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$. □

Άσκηση 6.4.6

Δίνεται ένα υποσύνολο A του \mathbb{R} με $0 < \mu^*(A)$. Δείξτε ότι για κάθε $0 < a < 1$ υπάρχει ανοικτό διάστημα J ώστε $\mu^*(A \cap J) \geq a\mu^*(J)$.

Απόδειξη.

- Αν $\mu^*(A) = \infty$ τότε το διάστημα $J = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ικανοποιεί το ζητούμενο της υπόθεσης.
- Αν $\mu^*(A) < \infty$, θα υποθέσω την άρνηση του συμπερασμάτος και θα οδηγηθώ σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $0 < a < 1$ ώστε για κάθε ανοικτό διάστημα J να ισχύει ότι

$$(6.10) \quad \mu^*(A \cap J) < a\mu^*(J).$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα (a_k, b_k) ώστε αυτά να καλύπτουν το σύνολο A , δηλαδή $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$. Τότε από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου και από την σχέση (6.10) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap (a_k, b_k)) \stackrel{(6.10)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} a\mu^*((a_k, b_k)) \\ &= a \sum_{k=1}^{\infty} \ell((a_k, b_k)) = a \sum_{k=1}^{\infty} \ell([a_k, b_k]). \end{aligned}$$

Αν στην τελευταία σχέση πάρουμε infimum ως προς όλες τις καλύψεις του A από διαστήματα τις μορφής $[a_k, b_k)$, από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου θα έχουμε ότι

$$\mu^*(A) \leq a\mu^*(A), \quad 0 < a < 1$$

το οποίο φανερά είναι άτοπο. □

Άσκηση 6.4.7

Δίνεται ένα υποσύνολο A του \mathbb{R} με $\mu^*(A) < \infty$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Το A είναι μετρήσιμο.
- Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του \mathbb{R} που είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους ανοικτών διαστημάτων ώστε $\mu^*(U \triangle A) < \varepsilon$.

Απόδειξη.

(i) \implies (ii)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο και $\varepsilon > 0$. Τότε από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι υπάρχουν διαστήματα $I_n = [a_n, b_n)$ για $n \in \mathbb{N}$, ώστε $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ και

$$(6.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρώ τα ανοικτά σύνολα $U_n = (a_n - \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}, b_n)$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell\left(a_n - \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}, b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - a_n + \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(I_n) + \frac{\varepsilon}{3} \stackrel{(6.11)}{<} \mu^*(A) + \frac{2\varepsilon}{3} < \infty, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(6.12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) < \mu^*(A) + \frac{2\varepsilon}{3} < \infty.$$

Άρα υπάρχει φυσικός αριθμός $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(6.13) \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu^*(U_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Φανερά $A \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n \subseteq \bigcup_{n=m+1}^{\infty} U_n$ άρα από την μονοτονία και την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$(6.14) \quad \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu^*(U_n) \stackrel{(6.13)}{<} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επίσης $\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus A$ άρα από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus A\right).$$

Όμως το σύνολο A είναι μετρήσιμο, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$

και $\mu^*(A) < \infty$ άρα από την Άσκηση 6.2.5 έχουμε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus A\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) - \mu^*(A) \text{ δηλαδή}$$

$$(6.15) \quad \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) - \mu^*(A) \stackrel{(6.12)}{<} \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Έτσι αθροίζοντας τις (6.14), (6.15) έχουμε ότι

$$\mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A\right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Όμως τα σύνολα $A \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n$, $\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A$ είναι μετρήσιμα και ξένα, συνεπώς (από τον ορισμό του μετρήσιμου συνόλου) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A\right) &= \mu^*\left(\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^m U_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^m U_n \setminus A\right)\right) \\ &= \mu^*\left(A \triangle \bigcup_{n=1}^m U_n\right) \end{aligned}$$

άρα $\mu^* \left(A \triangle \bigcup_{n=1}^m U_n \right) < \varepsilon$.

(ii) \Rightarrow (i)

Υποθέτουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα σύνολο U_m , το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση ανοικτών, ξένων και φραγμένων διαστημάτων ώστε

$$\mu^*(A \triangle U_m) < \frac{1}{2^m}.$$

Θεωρούμε το σύνολο $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m \right)$ και έχουμε ότι το F είναι μετρήσιμο καθώς το U_m είναι μετρήσιμο για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$F \setminus A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} (U_m \setminus A) \right) \subseteq \bigcup_{m=n}^{\infty} (U_m \setminus A).$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \mu^*(F \setminus A) &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \mu^*(U_m \setminus A) \leq \mu^* \left((U_m \setminus A) \cup (A \setminus U_m) \right) = \mu^*(U_m \triangle A) \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu^*(F \setminus A) = 0$ και συνεπώς το $F \setminus A$ είναι μετρήσιμο. Επίσης για κάθε $M \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A \setminus F &= A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} U_m \right) \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} (A \setminus U_m) \right) \\ &= \bigcup_{n=M}^{\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{\infty} (A \setminus U_m) \right) \subseteq \bigcup_{n=M}^{\infty} (A \setminus U_n), \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned} \mu^*(A \setminus F) &\leq \sum_{n=M}^{\infty} \mu^*(A \setminus U_n) \leq \sum_{n=M}^{\infty} \mu^* \left((A \setminus U_n) \cup (U_n \setminus A) \right) = \mu^*(A \triangle U_n) \\ &\leq \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{M-1}}. \end{aligned}$$

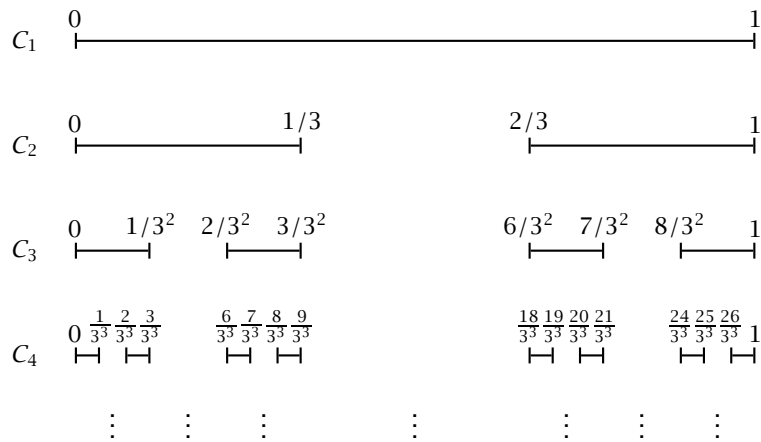
Οπότε $\mu^*(A \setminus F) = 0$, συνεπώς το σύνολο $A \setminus F$ είναι μετρήσιμο. Τέλος παρατηρούμε ότι

$$A = (A \setminus F) \cup (A \cap F) = (A \setminus F) \cup (F \setminus (F \setminus A))$$

συνεπώς και το σύνολο A είναι μετρήσιμο. \square

Άσκηση 6.4.8

Θέτουμε C_1 να είναι το διάστημα με άκρα το μηδέν και το ένα: $C_1 = [0, 1]$. Στη συνέχεια, σχηματίζουμε το C_2 ως εξής: χωρίζουμε το C_1 σε τρία ίσα τμήματα και αφαιρούμε το μεσαίο (ανοικτό) τμήμα (δείτε Σχήμα 6.1), δηλαδή $C_2 = C_1 \setminus (1/3, 2/3)$. Ορίζουμε επαγωγικά το C_n από το C_{n-1} ως εξής: χωρίζουμε κάθε διάστημα του C_{n-1} σε τρία ίσα



Σχήμα 6.1: Η κατασκευή του συνόλου Cantor.

τιμήματα και αφαιρούμε το μεσαίο (ανοικτό) τμήμα. Θέτουμε C την τομή όλων των συνόλων C_n , δηλαδή

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

το οποίο ονομάζεται σύνολο Cantor.

(i) Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\{0, 1, 2\}$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$$

συγκλίνει σε κάποιον αριθμό στο $[0, 1]$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε αριθμό x στο $[0, 1]$ υπάρχει ακολουθία $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\{0, 1, 2\}$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}.$$

Το $0, c_1 c_2 c_3 \dots$ λέγεται τριαδικό ανάπτυγμα του x .

(iii) Δείξτε ότι αν $x \in [0, 1]$ τότε ο x έχει δύο τριαδικά αναπτύγματα αν και μόνον αν $x = m/3^n$ για κάποιους m, n στο \mathbb{N} .

(iv) Δείξτε ότι αν $x \in [0, 1]$ τότε $x \in C$ αν και μόνον αν ο x έχει τουλάχιστον ένα τριαδικό ανάπτυγμα $0, c_1 c_2 c_3 \dots$ με $c_n \in \{0, 2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη.

(i) Έστω μια ακολουθία $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{0, 1, 2\}$, τότε έχουμε ότι

$$0 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{c_n}{3^n} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{3^n} = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει σε κάποιον αριθμό στο $[0, 1]$.

□

Άσκηση 6.4.9

Δείξτε ότι το σύνολο Cantor, που ορίστηκε στην Άσκηση 6.4.8, έχει μέτρο 0.

Απόδειξη.

Έστω C_1, C_2, \dots , τα διαστήματα όπως στην Άσκηση 6.4.8 και C το σύνολο Cantor. Έχουμε ότι $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_k \supseteq \dots$, με C_k μετρήσιμο για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συνεπώς από την Πρόταση 6.3.10 (σελ. 147) έχουμε ότι

$$\mu(C) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n-1}}{3^n}\right) = 0.$$

Εναλλακτικά.

$$\mu(C) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) \leq \mu(C_n), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

άρα

$$\mu(C) \leq \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n-1}}{3^n}\right) = 0.$$

□

Άσκηση 6.4.10

Δίνεται $0 < \delta < 1$. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο $D(\delta)$ του $[0, 1]$ με τον ίδιον τρόπο όπως το σύνολο του Cantor (Άσκηση 6.4.8), με την διαφορά ότι στο n -οστό βήμα τα διαστήματα που αφαιρούνται έχουν μήκος $\delta/3^n$. Δείξτε ότι το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα. Δείξτε ότι $D(\delta)$ είναι μετρήσιμο και βρείτε το μέτρο του.

Άσκηση 6.4.11

Δίνεται το υποσύνολο E του $[0, 1]$ το οποίο αποτελείται από τους αριθμούς των οποίων η δεκαδική γραφή δεν έχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και βρείτε το $\mu(E)$.

Απόδειξη.

□

Άσκηση 6.4.12

Δίνεται το υποσύνολο E του $[0, 1]$ το οποίο αποτελείται από τους αριθμούς των οποίων η δεκαδική μορφή δεν έχει τα ψηφία 5 και 7. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και βρείτε το $\mu(E)$.

Άσκηση 6.4.13 (Λήμμα Borel-Cantelli)

Αν η E_n είναι μια ακολουθία μετρησίμων συνόλων για την οποία ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ τότε $\mu(\limsup E_n) = 0$, όπου

$$\limsup E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \right).$$

Απόδειξη.

Αρχικά αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ συγκλίνει έχουμε ότι

$$(6.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(E_m) = 0.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$. Φανερά $A_n \supseteq A_{n+1}$, επίσης το σύνολο A_n είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι από την Πρόταση 6.3.10 (σελ. 147) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(\limsup E_n) &= \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(E_m) \stackrel{(6.16)}{=} 0. \end{aligned}$$

Άρα $\mu(\limsup E_n) = 0$. □

Άσκηση 6.4.14

Δίνονται n ανοικτά διαστήματα I_1, I_2, \dots, I_n . Δείξτε ότι αν το $\bigcup_{i=1}^n I_i$ περιέχει το $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$,

τότε $\sum_{i=1}^n \ell(I_i) \geq 1$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j$, άρα $\overline{\mathbb{Q} \cap [0, 1]} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^n I_j} = \bigcup_{j=1}^n \overline{I_j}$, δηλαδή

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^n \overline{I_j},$$

συνεπώς από την μονοτονία και την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι

$$1 = \ell([0, 1]) = \mu^*([0, 1]) \leq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^n \overline{I_j}\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu^*(\overline{I_j}) = \sum_{j=1}^n \ell(\overline{I_j}) = \sum_{j=1}^n \ell(I_j).$$

□

Άσκηση 6.4.15

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{P}([0, 1]) \rightarrow [0, \infty]$, ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$(i) \quad \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \text{ για οποιαδήποτε ξένα σύνολα } A_n \subseteq [0, 1],$$

$$(ii) \quad \mu(A+x) = \mu(A) \text{ για οποιοδήποτε } A \subseteq [0, 1] \text{ και για κάθε } x \text{ ώστε } A+x \subseteq [0, 1] \\ (\text{όπου } A+x = \{a+x : a \in A\}),$$

$$(iii) \quad \mu([0, 1]) = 1,$$

ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- (1) Αποδείξτε ότι στο σύνολο $[0, 1)$ η σχέση $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
- (2) Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα στοιχείο και σχηματίζουμε με αυτά ένα σύνολο A . Για κάθε $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ορίζουμε την μετατόπιση του A κατά $r \pmod{1}$ να είναι το σύνολο

$$A_r = \{y + r : y \in A \cap [0, 1 - r)\} \cup \{y + r - 1 : y \in A \cap [1 - r, 1)\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει ακριβώς ένα $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ώστε $x \in A_r$. Για να το δείξετε αυτό θεωρήστε το στοιχείο του A που προήλθε από την κλάση ισοδυναμίας του και θέστε

$$r = \begin{cases} x - y, & \text{αν } x \geq y \\ x - y + 1, & \text{αν } x < y. \end{cases}$$

- (3) Αποδείξτε ότι $\mu(A_r) = \mu(A)$.
- (4) Καταλήξτε σε άτοπο εξηγώντας καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις:

$$1 = \mu([0, 1]) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \mu(A_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)} \mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{αν } \mu(A) > 0 \\ 0 & \text{αν } \mu(A) = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη.

□

Άσκηση 6.4.16

Αποδείξτε ότι υπάρχουν σύνολα A, B υποσύνολα του $[0, 1)$ ώστε να ισχύει

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

όπου μ^* είναι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

(Υπόδειξη: Εξηγήστε γιατί το σύνολο A στην Άσκηση 6.4.15 δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. Στην συνέχεια εφαρμόστε τον Ορισμό 6.1.2).

Απόδειξη.

□

Άσκηση 6.4.17

Δίνονται ένα σύνολο A με $\mu^*(A) < \infty$ και ένα μετρήσιμο υποσύνολο B του A ώστε $\mu(B) = \mu^*(A)$. Δείξτε ότι το A είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Αρχικά έχουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, άρα

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) \stackrel{B \subseteq A}{=} \mu(B) + \mu(A \setminus B)$$

όμως $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, άρα $\mu(A \setminus B) = 0$, έτσι παίρνουμε ότι

$$0 \leq \mu^*(E \cap A \setminus B) \leq \mu(A \setminus B) = 0,$$

δηλαδή $\mu(E \cap A \setminus B) = 0$. Επίσης η μετρησιμότητα του B μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} \mu(E \cap A) &= \mu(E \cap A \cap B) + \mu(E \cap A \cap B^c) \\ &\stackrel{B \subseteq A}{=} \mu(E \cap B) + \mu((E \cap A) \setminus B). \end{aligned}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) &= \mu(E \cap B) + \mu((E \cap A) \setminus B) + \mu(E \cap A^c) \\ &\stackrel{E \cap A^c \subseteq E \cap B^c}{\leq} \mu(E \cap B) + 0 + \mu(E \cap B^c) = \mu(E) \end{aligned}$$

Η άλλη ανισότητα έπεται άμεσα από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και έτσι έχουμε ότι και το A είναι μετρήσιμο. \square

Άσκηση 6.4.18

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{Q} . Για $\varepsilon > 0$ θέτουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Θέτουμε

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(1/n).$$

- (i) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \subseteq A$.
- (ii) Δείξτε ότι το $A(\varepsilon)$ είναι μετρήσιμο και $\mu(A) \leq 2\varepsilon$.
- (iii) Δείξτε ότι το A είναι μετρήσιμο και $\mu(A) = 0$.

Απόδειξη.

(i) Φανερά

$$\begin{aligned} q_n \in \left(q_n - \frac{1/n}{2^n}, q_n + \frac{1/n}{2^n} \right) &\implies \mathbb{Q} \subseteq A(1/n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\implies \mathbb{Q} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A(1/n). \end{aligned}$$

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε ότι το $A(\varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$ είναι μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση μετρησίμων συνόλων (τα διαστήματα είναι μετρήσιμα σύνολα). Τώρα από την υποπροσθετικότητα του μέτρου έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(A(\varepsilon)) &= \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu \left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} - \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2 \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= 2\varepsilon \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

- (iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $A(1/n)$ είναι μετρήσιμο, άρα και το $A^c(1/n)$ είναι μετρήσιμο, συνεπώς και το $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^c(1/n)$ είναι μετρήσιμο, άρα και το $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(1/n)\right)^c = A^c$ είναι μετρήσιμο, οπότε και το A είναι μετρήσιμο. Τέλος από την Πρόταση 6.3.10 (σελ. 147) έχουμε ότι

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(1/n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A(1/n)) \stackrel{(iii)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

□

Άσκηση 6.4.19

Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για $\varepsilon > 0$ θετούμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Θέτουμε

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(1/n).$$

- (i) Δείξτε ότι αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.
- (ii) Δείξτε ότι το $A(\varepsilon)$ είναι μετρήσιμο και $\mu(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.
- (iii) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq A$.
- (iv) Δείξτε ότι $A \subseteq [0, 1]$.
- (v) Δείξτε ότι το A είναι μετρήσιμο και $\mu(A) = 0$.
- (vi) Δείξτε ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη.

- (i) Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ να είναι κενό. Τότε έχουμε ότι $[0, 1] \subseteq A(\varepsilon)$, έτσι από την μονοτονία του μέτρου έχουμε ότι

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(A(\varepsilon)).$$

Τώρα όμοια με την απόδειξη του (ii) της προηγούμενης άσκησης έχουμε ότι

$$\mu(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon \stackrel{\varepsilon < \frac{1}{2}}{<} 1,$$

το οποίο είναι άτοπο άρα το σύνολο $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

- (ii) Άμεσο από στο (ii) της προηγούμενης άσκησης.
- (iii) Όπως το (i) της προηγούμενης άσκησης.

(iv) Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $A \not\subseteq [0, 1]$, τότε υπάρχει $x \in A \setminus [0, 1]$. Έτσι αφού $x \in A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(q_N - \frac{1}{n2^N}, q_N + \frac{1}{n2^N} \right)$ έχουμε ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$x \in \left(q_N - \frac{1}{n2^N}, q_N + \frac{1}{n2^N} \right).$$

Έστω $m = \min\{|x|, |x - 1|\}$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{1}{n_0 2^{n_0}} < m.$$

Τότε όμως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $x \notin \left(q_N - \frac{1}{n2^N}, q_N + \frac{1}{n2^N} \right)$ το οποίο είναι άτοπο.

(v) Όμοια με το (iii) της προηγούμενης άσκησης.

(vi) Αρχικά έχουμε ότι ο $([0, 1], |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $A(1/n)$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$. Συνεπώς από το Θεώρημα Baire, το

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A(1/n)$$

είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$.

Έστω $F_m = [0, 1] \setminus A(1/m)$. Το F_m

- είναι κλειστό για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ως συμπλήρωμα ανοικτού.
- έχει κενό εσωτερικό. Πράγματι αν το F_m δεν είχε κενό εσωτερικό για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τότε θα υπήρχε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq F_m$. Επειδή το A είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$, θα υπάρχει $q_{m_0} \in (a, b) \subseteq F_m$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $A(1/m) \cap F_m = \emptyset$.

Άρα το

$$F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left([0, 1] \setminus A(1/m) \right) = [0, 1] \setminus \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A(1/m) = [0, 1] \setminus A$$

είναι πρώτης κατηγορίας, και συνεπώς το A είναι δεύτερης κατηγορίας σύνολο. Άρα το A είναι υπεραριθμήσιμο.

□

Άσκηση 6.4.20

Δίνεται μια ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο μετρησίμων συνόλων. Δείξτε ότι για κάθε σύνολο B έχουμε

$$\mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_i).$$

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_n),$$

καθώς η άλλη ανισότητα προκύπτει άμεσα από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου. Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$\mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(B \cap A_n).$$

Έχουμε ότι το σύνολο $A_1 \cup A_2$ είναι μετρήσιμο συνεπώς (για $E = B \cap (A_1 \cup A_2)$)

$$\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) = \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2).$$

Τώρα επαγωγικά έχουμε τον ισχυρισμό δηλαδή ότι

$$\mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right) = \sum_{n=1}^N \mu^*(B \cap A_n),$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^N \mu^*(B \cap A_n) = \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right) \leq \mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \right)$$

αφήνοντας τώρα το N να πάει στο άπειρο θα έχουμε ότι

$$\mu^* \left(B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_i).$$

□

Κεφάλαιο 7

Ασκήσεις 7ου Κεφαλαίου

7.1 Ενότητα 1η

7.2 Ενότητα 2η

Άσκηση 7.2.1

Δείξτε ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε και σύνθεση $g \circ f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$(g \circ f)^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}(g^{-1}((a, \infty)))$$

είναι μετρήσιμο.

Έχουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο (a, ∞) είναι ανοικτό, και επειδή η g είναι συνεχής έχουμε ότι και το σύνολο $A = g^{-1}((a, \infty))$ είναι ανοικτό. Συνεπώς από την Πρόταση 2.3.11, το A είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Έτσι υπάρχουν (a_n, b_n) ξένα ώστε $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$, άρα

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(a_n, b_n) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}\left((a_n, \infty) \setminus [b_n, \infty)\right) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(f^{-1}(a_n, \infty) \setminus f^{-1}[b_n, \infty)\right) \in m. \end{aligned}$$

Άρα η $g \circ f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Άσκηση 7.2.2

Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ και το $f^{-1}((r, \infty])$ είναι μετρήσιμο κάθε $r \in \mathbb{Q}$ τότε η f είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ το σύνολο $f^{-1}((r, \infty])$ είναι μετρήσιμο. Έστω τώρα $a \in \mathbb{R}$,

και έστω μια ακολουθία ρητών (r_n) , ώστε $r_n \rightarrow a$ και $r_n > a$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (για παράδειγμα $r_n = \frac{[na] + 1}{n}$). Τότε έχουμε ότι $(a, \infty] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, \infty]$, άρα

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty]) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n, \infty]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}((r_n, \infty]).$$

Άρα το $f^{-1}((a, \infty])$ είναι μετρήσιμο ως αριθμησιμη ένωση μετρησίμων συνόλων και συνεπώς η f είναι μετρήσιμη. \square

Άσκηση 7.2.3

Αποδείξτε με ένα παράδειγμα ότι το *supremum* μιας υπεραριθμήσιμης οικογένειας μετρησίμων συναρτήσεων με τιμές στο \mathbb{R} και πεδίο ορισμού το \mathbb{R} δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη.

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη μετρήσιμο σύνολο, (το E είναι υπεριθμήσιμο, διότι αν ήταν αριθμήσιμο θα είχε μέτρο 0 και συνεπώς θα ήταν μετρήσιμο). Τώρα για κάθε $i \in E$ θεωρούμε την υπεραριθμήσιμη ακολουθία συναρτήσεων $\{f_i\}_{i \in E}$ με

$$f_i(x) = \chi_{\{i\}}(x) \quad , x \in \mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε ότι

$$\sup_{i \in E} f_i(x) = \chi_E(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R},$$

Πράγματι αν $x \in E$, τότε

$$\sup_{i \in E} f_i(x) = \sup_{i \in E} \chi_{\{i\}}(x) = \chi_{\{x\}}(x) = 1 = \chi_E(x),$$

αν $x \notin E$, τότε $f_i(x) = \chi_{\{i\}}(x) = 0$ για κάθε $i \in E$, άρα

$$\sup_{i \in E} f_i(x) = \sup_{i \in E} \chi_{\{i\}}(x) = 0 = \chi_E(x).$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\sup_{i \in E} f_i(x) = \chi_E(x)$, όμως η $\chi_E(x)$ δεν είναι μετρήσιμη, καθώς για το κλειστό σύνολο $\{1\}$, έχουμε ότι $\chi_E^{-1}(\{1\}) = E$ το οποίο δεν είναι μετρήσιμο. \square

Άσκηση 7.2.4

Αποδείξτε ότι αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι και οι δυο συνεχείς και $f = g$ σ.π τότε $f = g$.

Απόδειξη.

Έστω τώρα $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$, αρκεί να δείξω ότι $A = \emptyset$. Αφού $f = g$ σ.π. θα έχουμε ότι $\mu(A) = 0$. Έστω $x \in A$, δηλαδή $f(x) \neq g(x)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

ότι $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \not\subseteq A$, διότι αν είχαμε $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subseteq A$, τότε από την μονοτονία του μέτρου παίρνουμε ότι

$$0 \leq \mu\left(\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \mu(A) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο καθώς

$$\mu\left(\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2}{n} > 0.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ ώστε $x_n \notin A$, δηλαδή

$f(x_n) = g(x_n)$. Φανερά $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, άρα από την συνέχεια των f, g και την αρχή της μεταφοράς (ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας), θα έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \implies f(x) = g(x), \quad x \in A,$$

το οποίο είναι άτοπο και συνεπώς το A είναι το κενό σύνολο. □

Άσκηση 7.2.5

Δώστε ένα παράδειγμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και μιας συνάρτησης $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και για τις οποίες να ισχύει $f = g$ σ.π.

Απόδειξη.

Έστω

$$f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}^c \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Φανερά οι παραπάνω συναρτήσεις ικανοποιούν τα ζητούμενα. □

Άσκηση 7.2.6

Δείξτε ότι αν $\eta f : \mathbb{R} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ είναι αύξουσα τότε ηf είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη.

Έστω $a \in \mathbb{R}$, τότε αρκεί να δείξω ότι το σύνολο

$$f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\} = A$$

είναι μετρήσιμο.

- Αρχικά αν $A = \emptyset$, τότε το A είναι μετρήσιμο και συνεπώς ηf είναι μετρήσιμη.

- Έστω τώρα ότι το $A \neq \emptyset$. Θεωρούμε $b \in A$, τότε επειδή η f είναι αύξουσα έχουμε ότι για κάθε $x \geq b$ ισχύει ότι $f(x) \geq f(b) > a$ άρα $x \in A$, δηλαδή $[x, \infty) \subseteq A$. Συνεπώς για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $[x, \infty) \subseteq A$, οπότε

$$(\inf A, \infty) = \bigcup_{x \in A} [x, \infty) \subseteq A \subseteq [\inf A, \infty).$$

Άρα $A = (\inf A, \infty)$ ή $A = [\inf A, \infty)$.

Έτσι έχουμε ότι σε κάθε περίπτωση το A είναι μετρήσιμο και συνεπώς η f είναι μετρήσιμη. \square

7.3 Ενότητα 3η

Άσκηση 7.3.1

Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$
- (ii) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$
- (iii) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.

Απόδειξη.

(i) • Αν $x \in A$, τότε $\chi_{A^c}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \chi_A(x)$.

• Αν $x \in A^c$, τότε $\chi_{A^c}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \chi_A(x)$.

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

(ii) • Αν $x \in A \cap B$, τότε $\chi_{A \cap B}(x) = 1 = \chi_A(x) \chi_B(x)$.

• Αν $x \notin A \cap B$, τότε $\chi_{A \cap B}(x) = 0 = \chi_A(x) \chi_B(x)$.

Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x)$.

(iii) • Αν $x \notin A \cup B$, τότε $\chi_{A \cup B}(x) = 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$.

• Αν $x \in A \cup B$, τότε είτε $x \in A \setminus B$, είτε $x \in B \setminus A$, είτε $x \in A \cap B$, άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x).$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$.

□

Άσκηση 7.3.2

Αποδείξτε ότι το άθροισμα και το γινόμενο απλών συναρτήσεων είναι απλή συνάρτηση.

Απόδειξη.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ απλές συναρτήσεις. Τότε υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$f(\mathbb{R}) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{και} \quad g(\mathbb{R}) = \{b_1, b_2, \dots, b_m\},$$

συνεπώς

$$(i) (fg)(\mathbb{R}) \subseteq \{a_i b_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

$$(ii) (f+g)(\mathbb{R}) \subseteq \{a_i + b_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Άρα το άθροισμα και το γινόμενο απλών συναρτήσεων είναι απλή συνάρτηση. □

Άσκηση 7.3.3

Δίνεται $E \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν η χ_E είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη.

(\implies)

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο, και $a \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\bullet \text{ Αν } 0 < a \leq 1 \text{ τότε } \{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = E.$$

$$\bullet \text{ Αν } a \leq 0 \text{ τότε } \{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = \mathbb{R}.$$

$$\bullet \text{ Αν } a > 1 \text{ τότε } \{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\} = \emptyset.$$

Σε κάθε περίπτωση το $\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο και συνεπώς η χ_E είναι μετρήσιμη.

(\impliedby)

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε η χ_E να είναι μετρήσιμη, τότε έχουμε ότι το σύνολο $\chi^{-1}(\{1\}) = E$ είναι μετρήσιμο, δηλαδή το E είναι μετρήσιμο. □

Άσκηση 7.3.4

Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) = \chi_{[0,1]}$ σ.π.

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Έστω λοιπόν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, με $f = \chi_{[0,1]}$ σ.π. Θεωρώ το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = \chi_{[0,1]}(x)\}$ και έστω δυο ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ με $x_n, y_n \rightarrow 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in A \cap [0, 1], \quad y_n \in A \cap [0, 1]^c.$$

Τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν, γιατί αφού $\mu(A^c) = 0$

$$\mu(A \cap [0, 1]) = 1 \quad \text{και} \quad \mu(A \cap [-1, 0]) = 1.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι $f(x_n) = 1$ και $f(y_n) = 0$, άρα $\lim f(x_n) = 1$ και $\lim f(y_n) = 0$. Τώρα από την συνέχεια της f θα έχουμε ότι

$$1 = \lim f(x_n) = f(0)$$

$$0 = \lim f(y_n) = f(0)$$

Το οποίο είναι άτοπο. □

Άσκηση 7.3.5

Δίνεται μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κατάλληλα $m, M \in \mathbb{R}$ να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$. Δείξτε ότι αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει απλή συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $m \leq \phi(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$ και

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - m, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

τότε έχουμε ότι η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μη αρνητική, μετρήσιμη και φραγμένη στο $[a, b]$, άρα από το Θεώρημα 7.3.7 (σελ. 167) έχουμε ότι υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία, μη αρνητικών, απλών συναρτήσεων $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ώστε $g_n \xrightarrow{\infty} g$ στο $[a, b]$. Δηλαδή υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε ότι

$$|g(x) - g_n(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - m - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Συνεπώς η παραπάνω σχέση ισχύει και για $n = n_0$, οπότε θέτοντας $\phi = \phi_{n_0}$ και $\phi_n(x) = g_n(x) + m$ θα έχουμε ότι

$$|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in [a, b],$$

όπου ϕ είναι μια απλή συνάρτηση.

Μένει να δείξουμε ότι $m \leq \phi \leq M$. Έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq g_n \leq g.$$

Πράγματι αν είχαμε ότι $g_m(x) > g(x)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ και για κάποιο $x \in [a, b]$, τότε επειδή η g_n είναι αύξουσα η g_n δεν συγκλίνει στην g , το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς έχουμε ότι

$$0 \leq g_{n_0} \leq g \leq M - m \xleftrightarrow{g_{n_0} + m = \phi} m \leq \phi \leq M.$$

□

Άσκηση 7.3.6

Δίνεται μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια απλή συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [a, b]$ με $|f(x)| < M$.

Απόδειξη.

□

Άσκηση 7.3.7

Δίνεται μια απλή συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια κλιμακωτή συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα σύνολο A ώστε $f(x) - \phi(x)$ για κάθε $x \in [a, b] \setminus A$ και $\mu(A) < \varepsilon$.

Απόδειξη.

□

7.4 Ενότητα 4η

7.5 Ενότητα 5η

7.6 Ενότητα 6η

Άσκηση 7.6.1

Θεωρούμε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ για την οποία ισχύει ότι $\int f < \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in (0, \infty)$ ισχύει

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}) < \infty.$$

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}} f \geq \int_{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}} a = a\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}).$$

□

Άσκηση 7.6.2

Δίνεται μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f . Δείξτε ότι υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από μη αρνητικές απλές συναρτήσεις ώστε:

- (i) Υπάρχει E_n με $\mu(E_n) < \infty$ και $\phi_n(x) = 0$ αν $x \notin E_n$.
- (ii) Η $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τείνει κατά σημείο στην f .

Απόδειξη.

□

Άσκηση 7.6.3

Δείξτε ότι η ανισότητα στο Λήμμα του Fatou μπορεί να είναι γνήσια. (Θεωρήστε την ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n(x) = \chi_{[n, n+1)}(x)$.)

Απόδειξη.

Έχουμε ότι

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, n+1) \\ 0, & x \notin [n, n+1) \end{cases}.$$

□

Άσκηση 7.6.4

Έστω ότι οι f_n είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} , $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

- (i) Αν $\int f = \lim \int f_n < \infty$, τότε δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του \mathbb{R} ισχύει $\int_E f = \lim \int_E f_n$.
- (ii) Δείξτε ότι αυτό δεν απαραίτητα σωστό αν $\int f = \lim \int f_n = \infty$.

Απόδειξη.

- (i) Έστω E ένα μετρήσιμο σύνολο. Αρχικά παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος του Fatou για τα μετρήσιμα σύνολα E, E^c , συνεπώς θα έχουμε ότι

$$(7.1) \quad \int_E f = \int_E \liminf f_n \leq \liminf \int_E f_n$$

και

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f - \int_E f &= \int_{E^c} f = \int_{E^c} \liminf f_n \leq \liminf \int_{E^c} f_n \\ &= \liminf \left(\int_{\mathbb{R}} f_n - \int_E f_n \right) = \int_{\mathbb{R}} f - \limsup \int_E f_n \end{aligned}$$

έτσι αφού $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$ έχουμε ότι

$$(7.2) \quad \limsup \int_E f_n \leq \int_E f.$$

Έτσι από τις σχέσεις (7.1) και (7.2) έχουμε ότι

$$\limsup \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf \int_E f_n,$$

και συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim \int_E f_n = \int_E f.$$

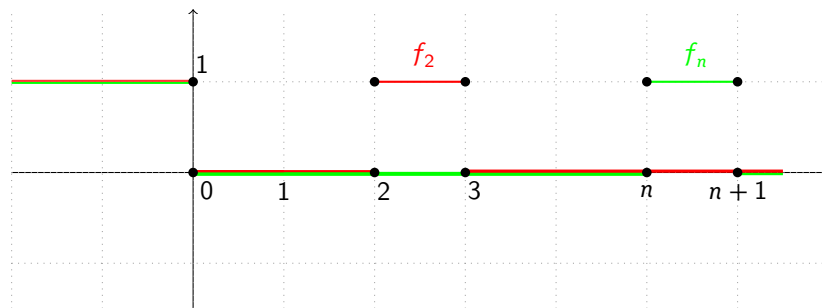
- (ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρώ τα σύνολα

$$F_1 = (-\infty, 0), \quad F_n = (-\infty, 0) \cup [n, n+1) = F_1 \cup [n, n+1).$$

Τώρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \cup [n, n+1) \\ 0, & x \notin (-\infty, 0) \cup [n, n+1) \end{cases} = \chi_{F_n}(x)$$

και έστω $f(x) = \chi_{F_1}(x) = \chi_{(-\infty, 0)}(x)$, με $x \in \mathbb{R}$.



Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f_n \rightarrow f$. Πράγματι

- Αν $x < 0$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $f_n(x) \rightarrow 1 = \chi_{F_1}(x)$.
- Αν $x \geq 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x < n_0$, άρα $x \notin F_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$ και συνεπώς $f_n(x) \rightarrow 0 = \chi_{F_1}(x)$.

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $f_n \rightarrow \chi_{F_1} = f$. Επίσης έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{F_n} = \int_{F_n} 1 \geq \int_{(-\infty, 0)} 1 = \infty,$$

άρα $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n = \infty$ και συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \chi_{F_1} = \int_{(-\infty, 0)} 1 = \infty = \lim \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Όμως αν θεωρήσουμε το μετρήσιμο σύνολο $E = (0, \infty)$, τότε έχουμε ότι

$$\int_E f_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ενώ} \quad \int_E f = 0.$$

□

7.7 Ενότητα 7η

Άσκηση 7.7.1

Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Σε αυτή την περίπτωση αποδείξτε ότι $|\int f| \leq \int |f|$.

Απόδειξη.

(\Rightarrow)

Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε έχουμε ότι

$$\int f^+ < \infty \quad \text{και} \quad \int f^- < \infty.$$

Επίσης ισχύει ότι $|f| = f^+ + f^-$, διότι

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2} \quad \text{και} \quad f^-(x) = \min\{-f(x), 0\} = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2}$$

συνεπώς $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, άρα

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty.$$

(\Leftarrow)

Υποθέτουμε η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Τότε επειδή $|f| = |f|^+$ (δηλαδή $|f|^- = 0$) έχουμε ότι $\int |f| < \infty$. Όμως $f^+, f^- \leq |f| = f^+ + f^-$, άρα

$$\int f^- \leq \int |f| < \infty \quad \text{και} \quad \int f^+ \leq \int |f| < \infty$$

και συνεπώς η f είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος έχουμε ότι

$$(7.3) \quad \left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

□

Άσκηση 7.7.2

Αποδείξτε ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} και η g είναι μετρήσιμη και φραγμένη τότε το γινόμενο fg είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} .

Απόδειξη.

Έχουμε ότι η g είναι φραγμένη στο \mathbb{R} , συνεπώς υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(x)| \leq M$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τώρα επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, από την Άσκηση 7.7.1 έχουμε ότι $\int |f| < \infty$, οπότε έχουμε ότι

$$\int |fg| \leq M \int |f| < \infty,$$

και συνεπώς από την Άσκηση 7.7.1 έχουμε ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} . □

Άσκηση 7.7.3

Δίνεται μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τείνει ομοιόμορφα στην f . Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_{[a,b]} |f_n - f| \rightarrow 0$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$, συνεπώς $\sup_{x \in [a,b]} |f_n - f| \rightarrow 0$, άρα υπάρχει κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$\sup_{x \in [a,b]} |f_n - f| \leq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι για $n \geq n_0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} |f| &= \int_{[a,b]} |f - f_n + f_n| \leq \int_{[a,b]} |f - f_n| + \int_{[a,b]} |f_n| \\ &\leq \int_{[a,b]} \sup_{x \in [a,b]} |f_n - f| + \int_{[a,b]} |f_n| \\ &\leq \int_{[a,b]} 1 + \int_{[a,b]} |f_n| < \infty \end{aligned}$$

και συνεπώς η f είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος παρατηρούμε ότι για την $\{g_n\}_{n \geq n_0}$ με $g_n(y) = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|$, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $y \in [a, b]$, ισχύουν οι συνθήκες του

θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, αφού $|g_n(x)| \leq 1$ με $\int_{[a,b]} 1 = b - a < \infty$, συνεπώς έχουμε ότι

$$0 \leq \int_{[a,b]} |f_n - f| \leq \int_{[a,b]} \sup_{x \in [a,b]} |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Οπότε και

$$\int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

□

Άσκηση 7.7.4

Δίνεται μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f . Υποθέτουμε ότι $\int |f_n - f| \rightarrow 0$. Δείξτε ότι $\int f_n \rightarrow \int f$ και ότι $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$.

Απόδειξη.

Από την Άσκηση 7.3 έχουμε ότι

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int (f_n - f) \right| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα $\int f_n \rightarrow \int f$.

Πάλι χρησιμοποιώντας την Άσκηση 7.3 έχουμε ότι

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| = \left| \int (|f_n| - |f|) \right| \leq \int ||f_n| - |f|| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0.$$

Άρα $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$. □

Άσκηση 7.7.5 (Ενίκευση του Λήμματος Fatou)

Αν $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με $\int h < \infty$ και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $-h \leq f_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Απόδειξη.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $f_n + h \geq 0$ συνεπώς από το Λήμμα Fatou παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int \liminf (f_n + h) &\leq \liminf \int (f_n + h) \iff \\ \int \liminf f_n + \int h &\leq \liminf \int f_n + \int h \iff \\ \int \liminf f_n &\leq \liminf \int f_n. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 7.7.6

Υποθέτουμε ότι στο μετρήσιμο σύνολο E ορίζονται οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f_n, g_n, f και g ώστε $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού, $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού, $\lim \int_E g_n = \int_E g$ και $|f_n| \leq g_n$. Αποδείξτε (επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης) ότι $\lim \int_E f_n = \int_E f$.

Απόδειξη.

Έχουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, άρα

- $|f_n| < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ σχεδόν παντού στο \mathbb{R} .
- $|f| \leq g < \infty$ σχεδόν παντού στο \mathbb{R} .

Επίσης από την $|f_n| \leq g_n$ έχουμε ότι

$$-g_n \leq f_n \leq g_n \xrightarrow{|f_n| < \infty} \begin{cases} 0 \leq g_n - f_n \\ 0 \leq g_n + f_n \end{cases}$$

όμως

$$(7.4) \quad g_n - f_n \rightarrow g - f \implies \liminf (g_n - f_n) = g - f$$

$$(7.5) \quad g_n + f_n \rightarrow g + f \implies \liminf (g_n + f_n) = g + f.$$

Επιπλέον έχουμε ότι

$$(7.6) \quad \int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu \implies \liminf \int g_n d\mu = \limsup \int g_n d\mu = \int g d\mu$$

Τώρα από το Λήμμα του Fatou, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (g_n - f_n) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g_n - f_n) d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (-f_n) d\mu \implies \\ &\int (g - f) d\mu \leq \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu \xrightarrow{(7.4), (7.6)} \\ &\int g d\mu - \int f d\mu \leq \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu \xrightarrow{\int g d\mu < \infty} \\ (7.7) \quad \limsup \int f_n d\mu &\leq \int f d\mu. \end{aligned}$$

Τώρα απ' την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (7.8) \quad \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (g_n + f_n) d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g_n + f_n) d\mu \\ &\leq \liminf \int f_n d\mu + \liminf \int g_n d\mu \xrightarrow{(7.5), (7.6)} \\ &\int (f + g) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu + \int g d\mu \implies \\ &\int f d\mu + \int g d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu + \int g d\mu \xrightarrow{\int g d\mu < \infty} \\ (7.9) \quad \int f d\mu &\leq \liminf \int f_n d\mu. \end{aligned}$$

Έτσι από τις (7.7), (7.9), έχουμε ότι

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu,$$

άρα

$$\limsup \int f_n d\mu = \liminf \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

□

7.8 Ενότητα 8η

Άσκηση 7.8.1

Έστω ότι η $f : (a, b] \rightarrow [0, \infty)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[c, b]$ για κάθε $c \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$ και το ολοκλήρωμα Lebesgue της στο $[a, b]$ ισούται με το γενικευμένο ολοκλήρωμα, δηλαδή

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$

Απόδειξη.

Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι μετρήσιμη. Έχουμε ότι $(a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right]$ άρα

$$f^{-1}((a, b]) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}\left(\left[a + \frac{1}{n}, b \right]\right),$$

όμως η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $\left[a + \frac{1}{n}, b \right]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς το σύνολο $f^{-1}\left(\left[a + \frac{1}{n}, b \right]\right)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι το σύνολο $f^{-1}((a, b])$ είναι μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση μετρησίμων συνόλων. Άρα η f είναι μετρήσιμη.

Τώρα θα δείξουμε ότι $\int_{[a,b]} f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$. Έστω

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left[a + \frac{1}{n}, b \right] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = f(x) \cdot \chi_{\left[a + \frac{1}{n}, b \right]}(x), \quad x \in (a, b].$$

Έχουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και συνεπώς από την Άσκηση 7.7.1 και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τώρα επειδή $f_n \leq |f|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n(x) \rightarrow f(x)$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f \chi_{\left[a + \frac{1}{n}, b \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\left[a + \frac{1}{n}, b \right]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a + \frac{1}{n}}^b f \\ &\stackrel{t = a + \frac{1}{n}}{=} \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f. \end{aligned}$$

□

7.9 Ενότητα 9η

Άσκηση 7.9.1

Θεωρούμε ένα διάστημα E με $\mu(E) = 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f στο E και για κάθε $1 \leq p < q$ ισχύει $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ δηλαδή $(\int |f|^p)^{1/p} \leq (\int |f|^q)^{1/q}$.

Απόδειξη.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = 1$, έτσι από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_E |f|^p \cdot 1 &\leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_E |1|^{\frac{q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \mu(E)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left(\int_E |f|^q \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

άρα

$$\left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Άσκηση 7.9.2

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι μετρήσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε $0 < p < 1$ και $q \in \mathbb{R}$ ώστε $1/p + 1/q = 1$ (από όπου αναγκαστικά $q < 0$). Αν υποθέσουμε ότι $\int_E |g|^q \neq 0$ αποδείξτε ότι ισχύει:

$$\int_E |fg| \geq \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \right)^{1/q}.$$

(Υπόδειξη: Εξηγήστε γιατί η g δεν είναι μηδέν σχεδόν παντού και εφαρμόστε την ανισότητα Hölder στο ολοκλήρωμα $\int_E |fg|^p = \int_E |fg|^p |g|^{-p}$ για κατάλληλους εκθέτες.)

Συμπεράνετε ότι αν $\mu(E) = 1$ τότε για κάθε $q < 0$ και για κάθε $p \geq 1$ ισχύει

$$\left(\int_E |g|^q \right)^{1/q} \leq \int_E |g| \leq \left(\int_E |g|^p \right)^{1/p}.$$

Τέλος δείξτε ότι αν $\int_E |g|^q \neq 0$ για κάθε $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ τότε η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(p) = \left(\int_E |g|^p \right)^{1/p}$$

είναι αύξουσα.

Απόδειξη.

Αν $g = 0$ σχεδόν παντού, τότε επειδή $q < 0$ έχουμε ότι $\int_E |g|^q = +\infty$ και συνεπώς

$$\left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0 \text{ τα ζητούμενα είναι προφανή.}$$

Έστω τώρα ότι $g \neq 0$ σχεδόν παντού. Τώρα θα δείξουμε ότι

$$\int_E |fg| \geq \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \right)^{1/q}.$$

Έχουμε ότι $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, οπότε $q = \frac{p}{p-1}$. Έστω $P = \frac{1}{p}$ και Q ώστε $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$, τότε $Q = \frac{1}{1-p}$. Τώρα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τα P, Q παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \int_E |f|^p &= \int_E |fg|^p |g|^{-p} \\
 &\leq \left(\int_E |fg|^{pP} \right)^{\frac{1}{P}} \left(\int_E |g|^{-pQ} \right)^{\frac{1}{Q}} \implies \\
 &\leq \left(\int_E |fg| \right)^p \left(\int_E |g|^{\frac{-p}{1-p}} \right)^{1-p} \implies \\
 \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{p-1}{p}} &\leq \int_E |fg| \xrightarrow{q=\frac{p}{p-1}} \\
 \int_E |fg| &\geq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

(7.10)

Τώρα από την (7.10) για $f = 1$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leq p$ και $q < \infty$

$$\int_E |g| \geq \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_E 1^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \mu(E)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Επίσης από την Άσκηση 7.9.1 έχουμε ότι για κάθε $1 \leq p$

$$\int_E |g| \leq \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

δηλαδή έχουμε ότι για κάθε $1 \leq p$ και $q < \infty$

$$\left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \int_E |g| \leq \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

7.10 Ενότητα 10η

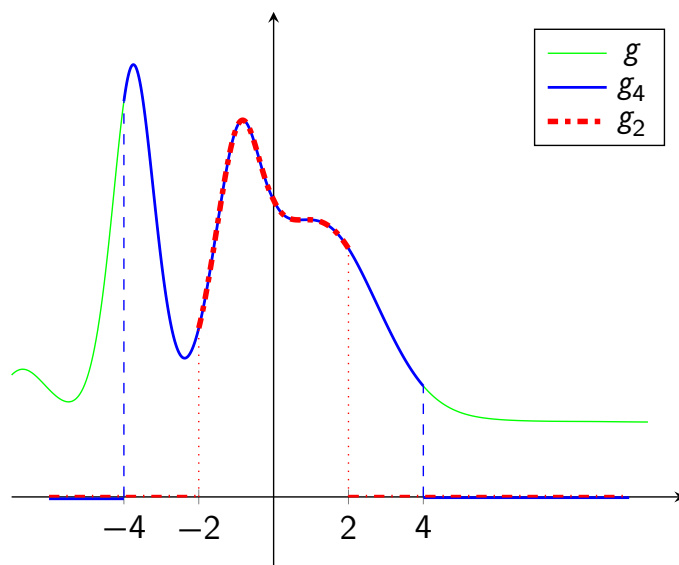
Άσκηση 7.10.1

Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο \mathbb{R} που συγκλίνει στην f κατά σημείο. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το $\int f_k$ να είναι πεπερασμένο, τότε $\int f = \lim \int f_n$.

Άσκηση 7.10.2

Αν η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} με $\int f$ πεπερασμένο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο E του \mathbb{R} ώστε $\mu(E) < \infty$ και $\int_E f > \int f - \varepsilon$.

Απόδειξη.



Έστω $g \geq 0$. Θεωρώ την ακολουθία συναρτήσεων $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$g_n(x) = g(x)\chi_{[-n,n]}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα από το Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int g \iff \int_{[-n,n]} g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int g.$$

Άρα αν $E = [-n_0, n_0]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$(7.11) \quad \left| \int_{[-n_0, n_0]} g - \int g \right| < \varepsilon.$$

Τώρα έχουμε ότι $f = f^+ - f^-$, έτσι εφαρμόζοντας την (7.11) στις f^+ και f^- , παίρνουμε ότι υπάρχουν $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$, με $\mu(E_1), \mu(E_2) < \infty$, άρα αν $E = E_1 \cup E_2$, τότε $\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) < \infty$ και

$$(7.12) \quad \left| \int_{E_1} f^+ - \int f^+ \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \int_{E_2} f^- - \int f^- \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_E f - \int f \right| &= \left| \int_E f^+ - \int_E f^- - \left(\int f^+ - \int f^- \right) \right| \\ &\leq \left| \int_E f^+ - \int f^+ \right| + \left| \int_E f^- - \int f^- \right| \\ &\stackrel{(7.12)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\int_E f - \int f < \varepsilon \implies \int f - \varepsilon < \int_E f.$$

□

Άσκηση 7.10.3

Βρείτε ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο \mathbb{R} που να φθίνει ομοιόμορφα στο 0 αλλά να ισχύει $\int f_n = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βρείτε ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων g_n στο $[0, 1]$ που να συγκλίνει στο 0 κατά σημείο αλλά να ισχύει $\int g_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 7.10.4

Έστω ότι το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο πεπερασμένου μέτρου Lebesgue. Θεωρούμε επίσης μια ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη, και υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Δείξτε ότι αναγκαστικά η f είναι ολοκληρώσιμη και $\lim \int f_n = \int f$.

Άσκηση 7.10.5

Δίνονται οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f_n, f, g_n, g ώστε $f_n \rightarrow f$ σ.π., $g_n \rightarrow g$ σ.π., $|f_n| \leq g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim \int g_n = \int g$. Δείξτε ότι $\lim \int f_n = \int f$.

Άσκηση 7.10.6

Αποδείξτε ότι αν η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt$ τότε η F είναι συνεχής συνάρτηση στο \mathbb{R} .

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Από την Πρόταση 7.6.10, έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \delta$

$$\left| \int_E f^+ \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \int_E f^- \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τώρα θα δουλέψουμε κοντά στο x_0 και θα θεωρήσουμε ότι $x_0 < x$. Η απόδειξη γίνεται ανάλογα αν $x < x_0$.

Αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $\mu([x_0, x]) < \delta$, άρα

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_{(-\infty, x]} (f^+ - f^-) - \int_{(-\infty, x_0]} (f^+ - f^-) \right| \\ &= \left| \int_{[x_0, x]} f^+ - \int_{[x_0, x]} f^- \right| \\ &\leq \left| \int_{[x_0, x]} f^+ \right| + \left| \int_{[x_0, x]} f^- \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα η F είναι συνεχής στο x_0 , και συνεπώς στο \mathbb{R} . □

Άσκηση 7.10.7

Αποδείξτε ότι αν $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ όπου $0 < a < b$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)| dx =$

∞ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx \neq \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx.$$

Άσκηση 7.10.8

Υπολογίστε τα όρια αιτιολογώντας τις πράξεις σας:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} dx \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} dx$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n \sin \frac{x}{n} (x(1 + x^2))^{-1} dx \quad (iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} n(1 + n^2 x^2)^{-1} dx$$

(Η απάντηση εξαρτάται από το αν $a < 0$ ή $a = 0$ ή $a > 0$.)

Απόδειξη.

(i) Θεωρώ την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n}, \quad x \geq 0.$$

Τότε για κάθε $x \geq 0$ έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} = \frac{0}{e^x} = 0.$$

Τώρα έχουμε ότι η $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα (ως προς n), άρα έχουμε ότι για κάθε $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2,$$

άρα για κάθε $n \geq 2$ έχουμε ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{4}} \leq \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \leq \frac{1}{1 + x^2}$$

Άρα

$$|f_n(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} \right| \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ισχυρισμός.

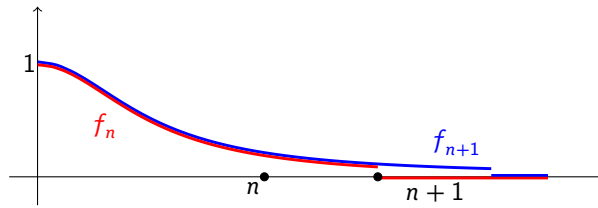
$$(7.13) \quad \int_{[0, \infty]} \frac{1}{1 + x^2} d\mu(x) = \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού

Έστω $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, τότε θεωρούμε την ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & x \leq n \\ 0, & x > n \end{cases} = g(x) \chi_{[0, n]}(x).$$

Φανερά $g_n \rightarrow g$ για κάθε $x \geq 0$. Τώρα θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Πράγματι



- Αν $x \leq n$, τότε $f_n(x) = f_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Αν $x \in (n, n+1]$, τότε $f_n(x) = 0 \leq f_{n+1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- Αν $x > n+1$, τότε $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$.

Συνοπώς σε κάθε περίπτωση $f_n \leq f_{n+1}$. Έτσι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty]} g(x) d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} \int_{[0, \infty]} g_n(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} \int_{[0, \infty]} g(x) \chi_{[0, n]}(x) d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \mathbb{N}} \int_{[0, n]} \frac{1}{1+x^2} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan n - \arctan 1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty]} f_n(x) d\mu(x) = \int_{[0, \infty]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) = 0.$$

(ii) (1ος Τρόπος) Θωρώ την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}, \quad x \in [0, 1].$$

Τότε επειδή για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{f_n(x)} = \sqrt[n]{\frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}} \leq \frac{\sqrt[n]{1 + n}}{1 + x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} < 1,$$

άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Τώρα από την ανισότητα Βερνουλί έχουμε ότι

$(1 + x^2)^n \geq 1 + nx^2$, για κάθε $x \in [0, 1]$, συνεπώς για κάθε $x \in [0, 1]$

$$1 \geq \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} = |f_n(x)|,$$

με

$$\int_{[0, 1]} 1 d\mu(x) = \mu([0, 1]) < \infty.$$

Άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} f_n(x) d\mu(x) = \int_{[0, 1]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x) = 0.$$

(2ος Τρόπος)

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Dini και θα δείξουμε ότι $f_n \rightrightarrows 0$ στο $[0, 1]$ και συνεπώς από το Θεώρημα 4.3.2 (σελ. 104), έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

- Αρχικά έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συναρτήση f_n , ορίζεται στον συμπαγή μετρικό χώρο $([0, 1], |\cdot|)$
- Η f_n είναι συνεχής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- $f_n \rightarrow 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$.
- Η μηδενική συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, 1]$.
- Η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα για κάθε $x \in [0, 1]$. Πράγματι

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \iff \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} \geq \frac{1 + (n+1)x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} \iff$$

$$1 + nx^2 \geq \frac{1 + (n+1)x^2}{1 + x^2} \iff nx^4 \geq 0.$$

Άρα η $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Συνεπώς από το Θεώρημα Dini έχουμε ότι $f_n \rightrightarrows 0$, όπως θέλαμε.

(iii) Θεωρώ την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n} (x(1 + x^2))^{-1} = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x(1 + x^2)}, \quad x \geq 0.$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^2} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Τώρα η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μας δίνει ότι για κάθε $x \geq 0$

$$\left| \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{x}{n},$$

άρα

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x(1 + x^2)} \right| \leq n \frac{x}{n} \frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Από την (7.13) έχουμε ότι $\int_{[0, \infty)} \frac{1}{1 + x^2} d\mu(x) = \frac{\pi}{2} < \infty$, άρα από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} f_n(x) d\mu(x) = \int_{[0, \infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin \frac{x}{n}}{x(1 + x^2)} \\ &= \int_{[0, \infty)} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(iv) Ορίζω

$$I_{a,n} = \int_a^\infty \frac{n}{1+(nx)^2} dx \stackrel{y=nx}{=} \int_{na}^\infty \frac{1}{1+y^2} dy = \int_{na}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx,$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \geq na$$

και για κάθε $x \geq na$ θεωρώ την ακολουθία συναρτήσεων $\{g_m\}_{m \geq na}$ με

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & nx \in [na, m] \\ 0, & x > m \end{cases} = g(x)\chi_{[na,m]}(x).$$

Φανερά $g_m \rightarrow g$ για κάθε $x \geq na$. Επίσης η $\{g_m\}_{m \geq na}$ είναι αύξουσα, αφού

- αν $x \in [na, m]$, τότε $g_m(x) = g_{m+1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- αν $x \in (m, m+1]$, τότε $g_m(x) = 0 \leq g_{m+1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- αν $x > m+1$, τότε $g_m(x) = g_{m+1}(x) = 0$.

Επομένως για κάθε $x \geq na$ έχουμε ότι $g_m \leq g_{m+1}$, άρα από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{[na,\infty]} g(x) d\mu(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[na,\infty]} g_m(x) d\mu(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[na,\infty]} g(x)\chi_{[na,m]} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[na,m]} \frac{1}{1+x^2} d\mu(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{na}^m \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\arctan x \Big|_{na}^m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\arctan m - \arctan(na)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(na) = I_{a,n} \end{aligned}$$

οπότε

- αν $a = 0$, τότε $\arctan 0 = 0$ και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{a,n} = \frac{\pi}{2}$.
- αν $a > 0$, τότε $\arctan(na) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$ και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{a,n} = 0$.
- αν $a < 0$, τότε $\arctan(na) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{2}$ και συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{a,n} = \pi$.

□

Άσκηση 7.10.9

Θεωρούμε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο \mathbb{R} . Χρησιμοποιώντας απαγωγή στο άτοπο και το λήμμα Borel-Cantelli (δείτε Άσκηση 6.4. 13) δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε μετρήσιμο σύνολο A με $\mu(A) < \delta$ να ισχύει $\int_A |f| < \epsilon$.

Άσκηση 7.10.10

Δίνεται μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει $M > 0$ και $A \subseteq [a, b]$ ώστε $\mu(A) < \epsilon$ και $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, b] \setminus A$.

Άσκηση 7.10.11

Δείξτε ότι αν f είναι μετρήσιμη και το B είναι σύνολο Borel τότε το $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο.

Άσκηση 7.10.12

Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής και το B είναι σύνολο Borel τότε το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Άσκηση 7.10.13

Δίνεται μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Δείξτε ότι το σύνολο $\{x \in X : (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνει}\}$ είναι μετρήσιμο.

Άσκηση 7.10.14

Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Δείξτε ότι αν το A είναι F_σ τότε το $f(A)$ είναι F_σ .
- (ii) Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα
 - (α) Αν $\mu(E) = 0$ τότε $\mu(f(E)) = 0$.
 - (β) Αν E είναι μετρήσιμο, τότε το $f(E)$ είναι μετρήσιμο.

Άσκηση 7.10.15

Δίνεται μια ακολουθία E_n μη κενών μετρήσιμων υποσυνόλων του \mathbb{R} . Αν $\mu(E_n) < 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\chi_{E_n}(x) \rightarrow 0$ σ.π.

Άσκηση 7.10.16

Δίνεται μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τείνει στην f σ.π. και ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \rightarrow \int f < \infty$. Δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο E ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \rightarrow \int_E f < \infty$.

Άσκηση 7.10.17

Δίνεται μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο E και $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μια απλή συνάρτηση ϕ ώστε $\int |f - \phi| < \epsilon$.

Άσκηση 7.10.18

Θεωρούμε μια αρίθμηση $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ θέτουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\epsilon}{2^n}, q_n + \frac{\epsilon}{2^n} \right).$$

- (i) Δείξτε ότι η χ_A είναι μετρήσιμη.
- (ii) Δείξτε ότι η χ_A δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.
- (iii) Δείξτε ότι η χ_A δεν είναι ίση σ.π. με καμιά Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Άσκηση 7.10.19

Δείξτε ότι το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δεν ισχύει για φθίνουσες ακολουθίες συναρτήσεων. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου η συνάρτηση $f_n = \chi_{[n, \infty)}$, ορίζεται όπως παρακάτω:

Απόδειξη.

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με

$$f_n(x) = \chi_{[n, \infty)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < n, \\ 1, & \text{αν } n \leq x. \end{cases}$$

Φανερά η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f_n \rightarrow 0 := f$. Όμως

$$\int_{[0, \infty)} f_n = \int_{[n, \infty)} f_n = \int_{[n, \infty)} 1 = \infty,$$

ενώ

$$\int_{[0, \infty)} f = \int_{[0, \infty)} 0 = 0.$$

Επομένως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} f_n = \infty \neq \int_{[0, \infty)} \lim f_n = 0.$$

□

Άσκηση 7.10.20

Δίνεται μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τείνει κατά σημείο στην f και ότι $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$.

Άσκηση 7.10.21

Δίνονται τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις f, g, h . Υποθέτουμε ότι οι f, h είναι ολοκληρώσιμες και ότι $f \leq g \leq h$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη;

Άσκηση 7.10.22

Δίνεται μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f . Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τείνει στην f σ.π. Αποδείξτε ότι $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ αν και μόνον αν $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$. (Υπόδειξη: για το αντίστροφο παρατηρήστε ότι $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \rightarrow 2|f|$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 7.10.5.)

Άσκηση 7.10.23

Δίνεται μια αύξουσα ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f . Υποθέτουμε ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τείνει κατά σημείο στην f . Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \rightarrow \int f$;

Κεφάλαιο 8

Ασκήσεις 8ου Κεφαλαίου

8.1 Ενότητα 8.1

8.2 Ενότητα 8.2

8.3 Ενότητα 8.3

Άσκηση 8.3.1

Θέτουμε $E = [0, 1] \times [0, 1]$. Ελέγξτε αν υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_E f(x, y) d\mu(x, y)$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) d\mu(x)) d\mu(y)$ και $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) d\mu(y)) d\mu(x)$, και αν συμπίπτουν οι τιμές τους για τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$(\alpha) f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}.$$

$$(\beta) f(x, y) = (1 - xy)^{-\alpha}, \text{ όπου } \alpha > 0.$$

$$(\gamma) f(x, y) = (x - 1/2)^{-3} \text{ αν } 0 < y < |x - 1/2|, \text{ και } f(x, y) = 0 \text{ αλλιώς.}$$

Άσκηση 8.3.2

Ολοκληρώνοντας την $e^{-sx} \sin(2xy)$ ως προς x και ως προς y , δείξτε ότι $\int_{[0, \infty)} e^{-sx} x^{-1} \sin^2(x) d\mu(x) = 4^{-1} \log(1 + (4/s^2))$ για $s > 0$.

Άσκηση 8.3.3 (α) Δείξτε ότι $\int_{[0, \infty)} |x^{-1} \sin x| d\mu(x) = \infty$.

(β) Ολοκληρώνοντας την $e^{-xy} \sin x$ ως προς x και y , δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

