Μιγαδική Ανάλυση

Στέλιος Νεγρεπόντης & Αντώνης Τσολομύτης

Πρώτη Έκδοση ¶ 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Κεφάλαιο 1

Ανασκόπηση των ιδιοτήτων των μιγαδικών αριθμών

1.1 Βασικοί ορισμοί

Έστω ότι το $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Υπάρχουν πάνω στο $\mathbb{R}$ δύο αλγεβρικές πράξεις $+$ και $\cdot$ και μια σχέση ολικής διάταξης $\leq$. Η αλγεβρική δομή $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq \rangle$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σώμα (με την αλγεβρική έννοια).

Η επιπλέον ιδιότητα που χαρακτηρίζει το διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ είναι η πληρότητα ως προς τη διάταξη:

Κάθε άνω φραγμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

Μια δυσκολία-ατέλεια των πραγματικών αριθμών είναι ότι υπάρχουν πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές που δεν έχουν ρίζες μέσα στο $\mathbb{R}$. Το απλούστερο τέτοιο πολυώνυμο είναι το $x^2 + 1$. Αυτή η δυσκολία αντιμετωπίζεται με την επέκταση των πραγματικών αριθμών ώστε το νέο σύστημα να διατηρεί όσο το δυνατόν περισσότερες από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών και συγχρόνως να έχει την πρόσθετη ιδιότητα τη σχετική με τις ρίζες πολυωνύμων. Το νέο αυτό σύστημα είναι οι μιγαδικοί αριθμοί, το σύνολο των οποίων συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1 Ως σύνολο, οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$ ταυτίζονται με το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

i) $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ θέτοντας $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.

ii) $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ θέτοντας $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Θέτουμε επίσης $\mathbb{0} = (0, 0)$ και $\mathbb{1} = (1, 0)$

Ο πολλαπλασιασμός ορίζεται κατά ιδιάζοντα αλγεβρικό τρόπο, που έχει όμως σαφή γεωμετρική ερμηνεία, όπως θα δούμε παρακάτω.

Με τους ορισμούς αυτούς η αλγεβρική δομή $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1}\rangle$ είναι ένα αλγεβρικό σώμα. Οι περισσότερες ιδιότητες του σώματος επαληθεύονται αμέσως. Η μόνη μη τετριμμένη ιδιότητα είναι ότι, κάθε $z \in \mathbb{C}$, με $z \neq \mathbb{0}$ έχει (πολλαπλασιαστικό) αντίστροφο. Πράγματι αν $z = (a, b) \neq \mathbb{0}$, τότε έχουμε

$$z^{-1} = \Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big)$$

όπως μπορούμε να ελέγξουμε με κατ' ευθείαν επαλήθευση.

1.2 Σχέση με τους πραγματικούς αριθμούς

Θέτουμε $i = (0, 1)$. Ορίζουμε $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ με $\phi(a) = (a, 0)$. Η ϕ είναι ισομορφισμός (δηλαδή 1-1 απεικόνιση που διατηρεί τις πράξεις: $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ και $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$) και μέσω αυτού ταυτίζουμε το $\mathbb{R}$ με ένα υποσώμα του $\mathbb{C}$, δηλαδή ταυτίζουμε το $a \in \mathbb{R}$ με την εικόνα του, $\phi(a) = (a, 0) \in \mathbb{C}$. Έτσι $1 = \mathbb{1} = (1, 0)$ και γενικότερα

$$(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib.$$

Αυτός ο τελευταίος τρόπος γραφής ενός μιγαδικού αριθμού είναι ο συνηθισμένος.

Παρατήρηση 1.2

i) Παρατηρούμε ότι $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Έτσι τουλάχιστον, το αρχικό πολυώνυμο που είδαμε νωρίτερα $x^2 + 1$ έχει μιγαδική ρίζα το i. Αργότερα θα δούμε ότι αυτό ισχύει για κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας).

ii) Ο πολλαπλασιασμός δυο μιγαδικών αριθμών με τον συμβολισμό $a + ib$ αντί του (a, b) είναι πολύ πιο εύκολος:

$$\begin{aligned}(a, b)(a', b') &= (a + ib)(a' + ib') = aa' + iba' + iab' + i^2bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ba' + ab') = (aa' - bb', ba' + ab').\end{aligned}$$

Μεταβαίνοντας από το σώμα $\mathbb{R}$ στο ευρύτερο σώμα $\mathbb{C}$ κερδίζουμε κυρίως το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, χάνουμε όμως κάθε έννοια διάταξης.

Ορισμός 1.3 Καλούμε *γραμμικά διατεταγμένο σώμα* ένα ζεύγος (F, F_+) όπου $F_+ \subset F$ ώστε να ισχύουν οι εξής

i) για κάθε $x \in F \setminus \{0\}$ είτε $x \in F_+$ είτε (αποκλειστικά) $(-x) \in F_+$, και

ii) για κάθε $x, y \in F_+$ ισχύει $x + y \in F_+$ και $x \cdot y \in F_+$.

Με τον παραπάνω ορισμό ισχύει το ακόλουθο:

Πρόταση 1.4 *Το $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν γραμμικά διατεταγμένο σώμα.*

Απόδειξη: Αν το $\mathbb{C}$ ήταν διατεταγμένο σώμα τότε είτε $i \in \mathbb{C}_+$ είτε $(-i) \in \mathbb{C}_+$ (αφού φανερά $i \neq 0$).

Αν $i \in \mathbb{C}_+$ τότε $-1 = i \cdot i \in \mathbb{C}_+$ άρα $-i = (-1) \cdot i \in \mathbb{C}_+$, άτοπο, αφού δεν μπορεί να συμβαίνουν και τα δύο μαζί. Ομοίως αν $-i \in \mathbb{C}_+$. □

1.3 Τετραγωνική ρίζα

Σε αυτή την ενότητα θα υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα κάθε μιγαδικού αριθμού $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Αν $w = c + id$ είναι μια τετραγωνική ρίζα του z τότε $z = w^2$, δηλαδή $(c + id)^2 = a + ib$ και ως εκ τούτου $c^2 - d^2 = a$ και $2cd = b$. Παρατηρούμε ότι $(c^2 + d^2)^2 = (c^2 - d^2)^2 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2$. Συνεπώς έχουμε ότι $c^2 - d^2 = a$ και $c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Από αυτές εύκολα προκύπτει ότι

$$c^2 = \frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big), \qquad d^2 = \frac{1}{2}\Big(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big).$$

Από αυτές και την $2cd = b$ βρίσκουμε:

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{1}{2}\Big(a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big)} \pm i\dfrac{b}{|b|}\sqrt{\frac{1}{2}\Big(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\Big)} & \text{αν } b \neq 0 \\ \pm\sqrt{a} & \text{αν } b = 0,\ a \geq 0 \\ \pm i\sqrt{-a} & \text{αν } b = 0,\ a \leq 0, \end{cases}$$

όπου $b/|b| = \pm 1$ ανάλογα με το αν $b > 0$ ή $b < 0$.

Ο παραπάνω υπολογισμός θα απλοποιηθεί σημαντικά με χρήση του τύπου de Moivre της Ενότητας 1.6.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 1.1** Αν $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ και

$$z^{-1} = \Big(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\Big)$$

επαληθεύστε ότι $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

***Άσκηση* 1.2** Λύστε την εξίσωση $z^4 + i = 0$.

***Άσκηση* 1.3** Υπολογίστε τις τιμές των ακόλουθων ριζών: $\sqrt{1 + i}$, $\sqrt{1 + \sqrt{i}}$ και $\sqrt{\sqrt{-i}}$.

1.4 Συζυγία και απόλυτη τιμή

Έστω ότι $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $\overline{z} = a - ib$ και τον ονομάζουμε συζυγή του z. *Πραγματικό μέρος* του z ονομάζουμε το $\operatorname{Re} z = a \in \mathbb{R}$ και *μιγαδικό μέρος* του z το $\operatorname{Im} z = b \in \mathbb{R}$.

Προφανώς ισχύουν (και αφήνονται ως άσκηση)

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad \overline{\overline{z}} = z,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}), \quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0.$$

Θέτουμε $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ η *απόλυτη τιμή* του z. Φανερά ισχύει $z\overline{z} = |z|^2$ και $|zw| = |z|\,|w|$ (άσκηση).

Πρόταση 1.5 *Για κάθε z, $w \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ανισότητες:*

i) $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$, $-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$.

ii) $|z+w| \leq |z| + |w|$ *και γενικά* $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$. *Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν για κάθε k, $\ell \in \mathbb{N}$ είτε $z_k = 0$ είτε $z_\ell = 0$ είτε $z_k/z_\ell > 0$.*

iii) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$.

iv) $|z| \leq |a| + |b|$, *για* $z = a + ib$.

v) *Ανισότητα Cauchy-Schwarz: αν $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ τότε:*

$$|z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n|^2 \leq (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)(|w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2).$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $z_j = \lambda w_j$, όποτε $z_j \neq 0$, για $j = 1, 2, \ldots, n$.

Απόδειξη:

i) Ισχύει $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ συνεπώς $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$. Ομοίως για το $b = \operatorname{Im} z$.

ii) Έχουμε:

$$\begin{aligned}(|z| + |w|)^2 - (|z + w|)^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w| - (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= 2|z|\,|w| - (\overline{\overline{w}z} + \overline{w}z) = 2|z|\,|w| - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &= 2(|z\overline{w}| - \operatorname{Re}(z\overline{w})) \geq 0,\end{aligned}$$

από το (i). Συνεπώς $|z| + |w| \geq |z + w|$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε αν $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z\overline{w}|$, και από τον ορισμό του $|z|$ έπεται $\operatorname{Im}(z\overline{w}) = 0$ και $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \geq 0$. Άρα $z\overline{w} \geq 0$. Εάν $w \neq 0$ τότε $z\overline{w} \geq 0$ αν και μόνο αν

$z/w = (z\overline{w})/|w|^2 \geq 0$. Συνεπώς $|z+w| = |z| + |w|$ αν και μόνο αν είτε $w = 0$ είτε $z/w \geq 0$.

Η ανισότητα $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$ είναι προφανής (με επαγωγή).

Έστω ότι ισχύει η ισότητα: $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$. Τότε

$$\begin{aligned} |z_1| + ... + |z_n| &= |z_1 + ... + z_n| = |(z_1 + z_2) + ... + z_n| \\ &\leq |z_1 + z_2| + ... + |z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|. \end{aligned}$$

Άρα $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Οπότε είτε $z_2 = 0$ είτε $z_1/z_2 \geq 0$. Όμοια εργαζόμαστε για δυο τυχόντα z_k, z_ℓ. Συμπεραίνουμε ότι εάν ισχύει η ισότητα τότε $z_k/z_\ell > 0$ για τυχόντα $z_k, z_\ell \neq 0$.

Αντίστροφα: έστω ότι $z_k/z_\ell > 0$ όταν $z_k, z_\ell \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $z_1 \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} |z_1 + ... + z_n| &= |z_1| \left|1 + \frac{z_2}{z_1} + ... + \frac{z_n}{z_1}\right| \\ &= |z_1| \left(1 + \frac{z_2}{z_1} + ... + \frac{z_n}{z_1}\right) && (\text{αφού } z_k/z_1 \geq 0) \\ &= |z_1| \left(1 + \frac{|z_2|}{|z_1|} + ... + \frac{|z_n|}{|z_1|}\right) && (\text{πάλι αφού } z_k/z_1 \geq 0) \\ &= |z_1| + ... + |z_n|. \end{aligned}$$

Άρα η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ο λόγος δυο τυχόντων μη μηδενικών όρων είναι θετικός.

iii) $|z| = |(z-w) + w| \leq |z-w| + |w|$ άρα $|z| - |w| \leq |z-w|$. Ομοίως $|w| - |z| \leq |z-w|$ άρα

$$-|z-w| \leq |z| - |w| \leq |z-w|$$

δηλαδή $||z| - |w|| \leq |z-w|$.

iv) Προκύπτει άμεσα από το (ii), αφού $|i| = 1$.

v) Θέτουμε $A = |z_1|^2 + ... + |z_n|^2$, $B = |w_1|^2 + ... + |w_n|^2$ και $C = z_1 w_1 + ... + z_n w_n$. Αν $B = 0$ τότε $w_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Έστω τώρα ότι $B > 0$ (οπότε $B \in \mathbb{R}$ και άρα $\overline{B} = B$). Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |Bz_j - C\overline{w_j}|^2 &= \sum_{j=1}^{n} (Bz_j - C\overline{w_j})(B\overline{z_j} - \overline{C}w_j) \\ &= B^2 \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 - B\overline{C} \sum_{j=1}^{n} z_j w_j - CB \sum_{j=1}^{n} \overline{w_j z_j} + |C|^2 \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \\ &= B^2 A - B|C|^2 = B(AB - |C|^2). \end{aligned}$$

Συνεπώς $AB - |C|^2 \geq 0$ δηλαδή $|C|^2 \leq AB$ που είναι η ζητούμενη.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $Bz_j - C\overline{w_j} = 0$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ αν και μόνο αν $z_j = \lambda\overline{w_j}$ όπου $\lambda = C/B \in \mathbb{C}$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$. □

Πόρισμα 1.6 *Το* $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ *είναι πλήρης χώρος με νόρμα, και άρα πλήρης μετρικός χώρος με τη μετρική* $\rho(z, w) = |z - w|$.

Απόδειξη: Φανερά $|z| = 0$ αν και μόνο αν $z = 0$ και $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Η τριγωνική ανισότητα $|z + w| \leq |z| + |w|$ δείχθηκε στην Πρόταση 1.5.

Η πληρότητα είναι άμεση συνέπεια της πληρότητας του $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν z_n ακολουθία Cauchy στο $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, αφού

$$|\mathrm{Re}\, z_n - \mathrm{Re}\, z_m| = |\mathrm{Re}\,(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m|$$

από το (i) της Πρότασης 1.6 συμπεραίνουμε ότι και η $\mathrm{Re}\, z_n$ είναι Cauchy στο $\mathbb{R}$. Ομοίως είναι Cauchy και η $\mathrm{Im}\, z_n$. Άρα από την πληρότητα του $\mathbb{R}$ υπάρχουν a, $b \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathrm{Re}\, z_n \to a$ και $\mathrm{Im}\, z_n \to b$. Συμπεραίνουμε ότι

$$|z_n - (a + ib)| = |\mathrm{Re}\, z_n + i\mathrm{Im}\, z_n - a - ib| \leq |\mathrm{Re}\, z_n - a| + |\mathrm{Im}\, z_n - b| \to 0.$$

Άρα η z_n είναι συγκλίνουσα με όριο τον μιγαδικό $a + ib$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Στα επόμενα θα γράφουμε $S(z, r)$ για τον ανοικτό δίσκο ακτίνας $r > 0$ και κέντρου $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή

$$S(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}.$$

Το $\overline{S(z, r)}$ θα συμβολίζει τον κλειστό δίσκο, δηλαδή

$$\overline{S(z, r)} = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\},$$

και τέλος θα γράφουμε $S'(z, r)$ για τον ανοικτό δίσκο χωρίς το κέντρο του, δηλαδή $S'(z, r) = S(z, r) \setminus \{z\}$.

Το σύνορο του $S(z, r)$, δηλαδή η περιφέρεια του κύκλου $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ θα συμβολίζεται με $C(z, r)$.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 1.4** Αν $z = x + iy$ με x, $y \in \mathbb{R}$, υπολογίστε το πραγματικό και φανταστικό μέρος των αριθμών $1/z$ και $1/(1 + z^2)$.

***Άσκηση* 1.5** Αποδείξτε την ιδιότητα του παραλληλογράμμου:

$$|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

για κάθε z, $w \in \mathbb{C}$.

***Άσκηση* 1.6** Αποδείξτε την πολική ταυτότητα: για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$z\overline{w} = \frac{1}{4}(|z+w|^2 - |z-w|^2 + i|z+iw|^2 - i|z-iw|^2).$$

***Άσκηση* 1.7** Δείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $\mathrm{Re}\,(iz) = -\mathrm{Im}\, z$ και $\mathrm{Im}\,(iz) = \mathrm{Re}\, z$.

***Άσκηση* 1.8** Αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

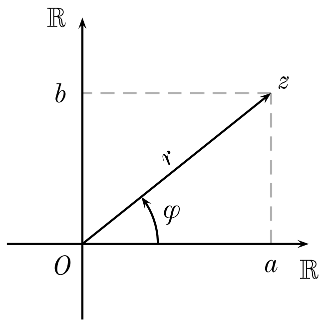
$$|z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

***Άσκηση* 1.9** Αν το V είναι ανοικτό υποσύνολο του μετρικού χώρου $\mathbb{C}$ (όπως στο Πόρισμα 1.6), αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $f(z) = |z|$, $g(z) = \mathrm{Re}\, z$ και $h(z) = \mathrm{Im}\, z$ δεν έχουν μέγιστη τιμή στο V.

***Άσκηση* 1.10** Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $f(z) = \bar{z}$ και $g(z) = |z|$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}$.

1.5 Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικών αριθμών

Έχουμε δει ότι ως σύνολο οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbb{C}$ ταυτίζονται με το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, δηλαδή το πραγματικό 2-διάστατο επίπεδο. Η ταύτιση των πραγματικών αριθμών με υποσώμα των μιγαδικών αριθμών γεωμετρικά είναι η ταύτιση των πραγματικών αριθμών με τον οριζόντο άξονα των x του μιγαδικού επιπέδου. Γι' αυτό ο άξονας αυτός καλείται πραγματικός άξονας. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $\mathrm{Re}\, z = 0$ τότε ο αριθμός z καλείται *φανταστικός αριθμός*. Οι φανταστικοί αριθμοί προφανώς αποτελούν τον κάθετο άξονα των y του μιγαδικού επιπέδου και για αυτό ο άξονας αυτός καλείται *φανταστικός άξονας*.



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ είναι τώρα ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου, και επίσης ορίζει (και μπορεί να ταυτιστεί με) διάνυσμα που αρχίζει από την αρχή των αξόνων O και καταλήγει στο z. Η απόλυτη τιμή $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ του μιγαδικού είναι το μήκος του διανύσματος με το οποίο ταυτίζεται. Η ανισότητα $|z+w| \leq |z|+|w|$ είναι η γεωμετρική τριγωνική ανισότητα.

Η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών είναι, με την παραπάνω ταύτιση, η πρόσθεση διανυσμάτων (με τον κανόνα του παραλληλογράμμου). Για να εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού δυο μιγαδικών αριθμών κάνουμε χρήση των πολικών συντεταγμένων. Αν $z = a+ib = (a, b) \in \mathbb{C}$ τότε οι πολικές συντεταγμένες του z είναι οι (r, θ), με $r \geq 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, όπου $a = r\cos\theta$ και $b = r\sin\theta$. Μπορούμε να γράψουμε

$$z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta. \tag{1.1}$$

Αυτή είναι η τριγωνομετρική μορφή του z.

Βέβαια, ο περιορισμός $\theta \in (-\pi, \pi]$ αφορά στις πολικές συντεταγμένες, ενώ η σχέση (1.1) συνεχίζει να ισχύει αν αντί για θ γράψουμε $\theta + 2k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αφού οι συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Η γωνία $\theta \in (-\pi, \pi]$ ονομάζεται *πρωτεύον όρισμα* του z και τη συμβολίζουμε με $\mathrm{Arg} z$. Με $\arg_k z$ συμβολίζουμε το *όρισμα* $\theta + 2k\pi = \mathrm{Arg} z + 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, ενώ με $\arg z = \{\arg_k z \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$ το σύνολο των ορισμάτων του z.

Θα δούμε παρακάτω (δείτε Ορισμό 3.3 και μετά) ότι η τελευταία έκφραση στην (1.1) γράφεται και ως $re^{i\theta}$, έκφραση την οποία θα χρησιμοποιούμε στο εξής και για την οποία ισχύουν όπως θα δούμε, όλες οι ιδιότητες των αλγεβρικών πράξεων όπως τις γνωρίζουμε για την πραγματική εκθετική συνάρτηση. Φανερά ισχύει $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \geq 0$.

Αν λοιπόν δοθούν οι μιγαδικοί αριθμοί $z = re^{i\theta}$ και $w = \rho e^{i\varphi}$, τότε

$$z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Δηλαδή η τριγωνομετρική μορφή του zw. Όπως γνωρίζουμε και περιμένουμε $|zw| = r\rho = |z|\,|w|$ και

$$\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) \mod 2\pi.$$

Άρα το πρωτεύον όρισμα του γινομένου μιγαδικών αριθμών ισούται με το άθροισμα των πρωτευόντων ορισμάτων modulo 2π. Για παράδειγμα, το πρωτεύον όρισμα του $z = e^{i4\pi/3}e^{i4\pi/3}$ δεν είναι $8\pi/3$ (αφού το πρωτεύον είναι πάντα στο $(-\pi, \pi]$) αλλά $8\pi/3 - 2\pi = 2\pi/3$. Βέβαια το $8\pi/3$ είναι ένα από τα ορίσματα του προηγούμενου z και συγκεκριμμένα το $\arg_1 z$.

***Παρατήρηση* 1.7** Η επιλογή του διαστήματος $(-\pi, \pi]$ ως το σύνολο τιμών του πρωτεύοντος ορίσματος είναι αυθαίρετη, και κανείς μπορεί να επιλέξει οποιοδήποτε διάστημα πλάτους 2π, όπως $(\pi/2, 2\pi + \pi/2]$ ή $(\pi/3 - 2\pi, \pi/3]$ κα. Μια τέτοια επιλογή βεβαίως θα μεταβάλλει και τις τιμές των $\arg_k$.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 1.11** Αποδείξτε ότι για $z, w \in \mathbb{C}$ με $w \neq 0$ ισχύουν τα εξής:

$$\arg(\bar{z}) = -\arg z \mod 2\pi, \qquad \arg(z/w) = \arg z - \arg w \mod 2\pi.$$

1.6 Τύπος de Moivre

Από την τριγωνομετρική μορφή του $z = a + ib = re^{i\theta}$ έχουμε αμέσως ότι $z^n = r^n e^{in\theta}$ για $n \in \mathbb{Z}$. Αν $r = 1$ τότε $z^n = e^{i\theta n}$ δηλαδή $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Προκύπτει δηλαδή ο τύπος του de Moivre:

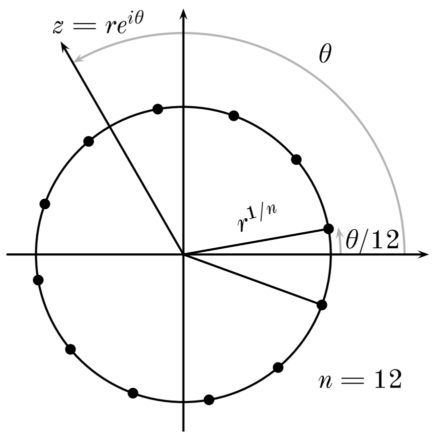
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Υπολογίζουμε τώρα τις n-στες ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$ για $n \in \mathbb{N}$. Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $w^n = z$. Έστω ότι $z = re^{i\theta}$ και $w = \rho e^{i\varphi}$. Τότε $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$. Παίρνοντας τα μέτρα τους βρίσκουμε ότι $\rho^n = r$ και άρα $e^{in\phi} = e^{i\theta}$. Συνεπώς $\rho = r^{1/n}$ και $n\varphi - \theta = 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή

$$\rho = r^{1/n} \quad \text{και} \quad \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k.$$

Έτσι παίρνουμε διαφορετικές τιμές του w εάν $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Επομένως η λύση της εξίσωσης $w^n = z$ δίνεται από τον τύπο

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\theta/n + k(2\pi/n))},$$



Σχήμα 1.2: Γεωμετρική αναπαράσταση των δωδέκατων ριζών

για $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Παρατηρούμε ότι όλες οι ρίζες w_k έχουν την ίδια απόλυτη τιμή $r^{1/n}$ και τα ορίσματά τους απέχουν εξίσου μεταξύ τους. Γεωμετρικά έχουμε το Σχήμα 1.2.

Δηλαδή οι n-στες ρίζες του $z = re^{i\theta}$ είναι οι κορυφές του κανονικού πολυγώνου με n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα $r^{1/n}$.

Στην ειδική περίπτωση που $z = 1$ οι ρίζες της μονάδας είναι οι $w_k = e^{ik(2\pi/n)}$ για $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Αν θέσουμε $w = e^{i2\pi/n}$ έχουμε ότι οι ρίζες της μονάδας είναι οι $w_k = w^k$ για $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 1.12** Αποδείξτε τον τύπο του de Moivre με επαγωγή.

***Άσκηση* 1.13** Ξαναλύστε την Άσκηση 1.2 με χρήση του τύπου του de Moivre.

***Άσκηση* 1.14** Χρησιμοποιήστε τον τύπο de Moivre για να βρείτε τους τύπους διπλασίου και τριπλασίου τόξου για το συνημίτονο και το ημίτονο. Δηλαδή εκφράστε το $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$ και $\sin(3x)$ με δυνάμεις των $\cos x$ και $\sin x$.

***Άσκηση* 1.15** Αποδείξτε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες του Lagrange:

$$1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(x/2)},$$

και

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\sin(x/2) \neq 0$.

***Άσκηση* 1.16** Αποδείξτε την ταυτότητα

$$\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

παραγοντοποιώντας το $z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1$ χρησιμοποιώντας τις n-στες ρίζες της μονάδας, αντικαθιστώντας $z = 1$ και παίρνοντας μέτρα στην εξίσωση που προκύπτει.

1.7 Όρια στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Λέμε, κατά τα γνωστά, ότι μια ακολουθία $z_n \in \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $z \in \mathbb{C}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|z_n - z| < \varepsilon$.

Σε αντίθεση με το $\mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε δύο είδη απείρου (το $+\infty$ και το $-\infty$) στο $\mathbb{C}$ έχουμε ένα και αυτό αφορά στην απόσταση από το μηδέν. Δηλαδή λέμε ότι $z_n \to \infty$ αν και μόνο αν $|z_n| \to +\infty$ ως ακολουθία πραγματικών αριθμών. Έτσι η $z_n = -n$ ενώ στο $\mathbb{R}$ τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε $z_n \to -\infty$, όταν εργαζόμαστε στο $\mathbb{C}$ θα γράφουμε $z_n \to \infty$ (χωρίς πρόσημο) εννοώντας ότι $|z_n| \to +\infty$ στο $\mathbb{R}$.

Όμοια μεταχειριζόμαστε και τα όρια συναρτήσεων:

i) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|z - z_0| < \delta$ να ισχύει $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.

ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|z - z_0| < \delta$ να ισχύει $|f(z)| > M$.

iii) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $K = K(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|z| > K$ να ισχύει $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.

iv) $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $K = K(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|z| > K$ να ισχύει $|f(z)| > M$.

Με τους παραπάνω ορισμούς, μια ακολουθία στο $\mathbb{C}$ έχει πάντα μια υπακολουθία που είτε συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό (αν η αρχική ακολουθία είναι φραγμένη) είτε τείνει στο ∞ αν η αρχική ακολουθία δεν είναι φραγμένη.

Παρατήρηση 1.8 Παρατηρήστε ότι ενώ το όριο $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$ στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει, στο $\mathbb{C}$ ισχύει $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$, αφού $\lim_{n\to\infty}|(-1)^n n| = +\infty$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1.17 Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{z^4 - 4z^2 + 3}{z^4 + 1}$$

καθώς και το $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

1.8 Μιγαδικές δυναμοσειρές

Οι ορισμοί και οι ιδιότητες των σειρών μιγαδικών αριθμών είναι εν γένει παρόμοιες με αυτές των σειρών πραγματικών ακολουθιών.

Ορισμός 1.9 i) Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, με $a_k \in \mathbb{C}$ *συγκλίνει* στο s αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|\sum_{k=0}^{n} a_k - s| < \varepsilon$.

ii) Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, με $a_k \in \mathbb{C}$, συγκλίνει *απολύτως* αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

Πρόταση 1.10 *Αν η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\sum_{k=0}^{n} a_k$ είναι Cauchy, αφού και η $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ είναι Cauchy ως συγκλίνουσα. Άρα και η $\sum_{k=0}^{n} a_k$ συγκλίνει. □

Συχνά στον Απειροστικό Λογισμό τα κριτήρια σύγκλισης n-στης ρίζας και λόγου μιας σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, για λόγους απλότητας, παρουσιάζονται με τη βοήθεια των ορίων $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ και $\lim |a_{n+1}/a_n|$. Επειδή αυτά τα όρια δεν υπάρχουν πάντα η ανάπτυξη της θεωρίας με τη βοήθεια των $\limsup$ και $\liminf$ είναι πιο ακριβής και εδώ ακολουθούμε αυτήν:

Παρατηρούμε ότι αν για $a_k \in \mathbb{R}$ θέσουμε $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, ...\}$ και $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}$ για $n = 1, 2, ...$ τότε

$$b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq ... \quad \text{και} \quad c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n \leq ...$$

Άρα οι ακολουθίες b_n και c_n έχουν πάντα όριο στο $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Ορισμός 1.11 Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε:

$$\limsup a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup\{a_n, a_{n+1}, ...\}) = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_n, a_{n+1}, ...\})$$

και

$$\liminf a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}) = \lim_{n\to\infty}(\inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}).$$

Ορισμός 1.12 Για ένα άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ λέμε ότι η ιδιότητα $p(n)$ ισχύει *συχνά* στο A όταν για κάθε $n \in A$ υπάρχει $m \in A$ με $m \geq n$ ώστε $p(m)$ αληθής.

Για ένα άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ λέμε ότι η ιδιότητα $p(n)$ ισχύει *τελικά* στο A όταν υπάρχει $n_0 \in A$ ώστε για κάθε $n \in A$ υπάρχει με $n \geq n_0$ η $p(n)$ αληθής.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $(-1)^n$ είναι συχνά μεγαλύτερη του $1/2$ στο $\mathbb{N}$, αλλά όχι τελικά μεγαλύτερη του $1/2$. Η ακολουθία $9/n$ βρίσκεται τελικά στο διάστημα $(-1, 1)$.

Ορισμός 1.13 Ένα σημείο $a \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$ λέγεται *οριακό σημείο* μιας ακολουθίας a_n όταν υπάρχει υπακολουθία a_{k_n} της a_n ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = a$

Πρόταση 1.14 *Αν a_n ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε το $a = \limsup\ a_n$ και το $b = \liminf\ a_n$ είναι οριακά σημεία της a_n. Επιπλέον το a είναι το μέγιστο οριακό σημείο της και το b το ελάχιστο.*

Απόδειξη: Αν $a = +\infty$ τότε η a_n δεν είναι άνω φραγμένη (αλλιώς, αν $a_n \leq M$ για κάποιο $M \in \mathbb{R}$ εύκολα προκύπτει ότι $\limsup\ a_n \leq M$). Συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $a_{k_n} \to +\infty$. Δηλαδή το $+\infty$ είναι οριακό σημείο και προφανώς δεν υπάρχει μεγαλύτερο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $a \in \mathbb{R}$. Η $x_n = \sup\{a_k \,:\, k \geq n\}$ έχει όριο το a συνεπώς βρίσκεται τελικά στο $(a-1, a+1)$. Κατά συνέπεια $x_n \in \mathbb{R}$. Το $\sup\{a_k \,:\, k \geq n\} - 1/n$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $\{a_k \,:\, k \geq n\}$ οπότε υπάρχει k_n ώστε

$$\sup\{a_k \,:\, k \geq n\} - \frac{1}{n} \leq a_{k_n} \leq \sup\{a_k \,:\, k \geq n\}.$$

Από το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει ότι $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = a$, δηλαδή το a είναι οριακό σημείο της a_n.

Είναι όμως και το μεγαλύτερο οριακό σημείο της. Πράγματι, αν c ένα άλλο οριακό της σημείο, υπάρχει υπακολουθία a_{m_n} ώστε $\lim_{n\to+\infty} a_{m_n} = c$. Αλλά φανερά

$$a_{m_n} \leq \sup\{a_k \,:\, k \geq m_n\} = x_{m_n}.$$

Παίρνοντας όρια ως προς n προκύπτει ότι $c \leq a$, αφού η x_{m_n} ως υπαλοκουθία της x_n συγκλίνει στο a.

Όμοια κάνουμε την απόδειξη και για το $\liminf\ a_n$. □

Παρατήρηση 1.15 Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{m \,:\, m \geq n \text{ ώστε } a_m > \limsup a_n + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Πράγματι, αν ήταν άπειρο σύνολο για κάποιο $\varepsilon > 0$ τότε θα υπήρχε υπακολουθία της a_n, έστω η a_{k_n}, ώστε $a_{k_n} > \limsup a_n + \varepsilon$. Αυτή η υπακολουθία είτε δεν είναι φραγμένη, οπότε έχει μια περαιτέρω υπακολουθία με όριο το $+\infty$, είτε είναι φραγμένη, οπότε έχει μια περαιτέρω υπακολουθία με όριο μεγαλύτερο ή ίσο με το $\limsup a_n + \varepsilon$. Αυτό είναι άτοπο διότι τότε η a_n έχει οριακό σημείο γνησίως μεγαλύτερο από το $\limsup a_n$ αντιφάσκοντας με την Πρόταση 1.14.

Ορισμός 1.16 *Δυναμοσειρά* με κέντρο το $a \in \mathbb{C}$ είναι μια σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, όπου a_k, $z \in \mathbb{C}$.

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ είναι ένα από τα απλούστερα παραδείγματα δυναμοσειράς. Εξετάζουμε για ποια $z \in \mathbb{C}$ συγκλίνει η γεωμετρική σειρά. Έχουμε

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Αν $|z| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ άρα η γεωμετρικη σειρά συγκλίνει και έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$. Αν $|z| > 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = \infty$ και η σειρά αποκλίνει.

Αυτή η συμπεριφορά είναι τυπική στις δυναμοσειρές, δηλαδή για κάθε δυναμοσειρά υπάρχει αριθμός $0 \le R \le \infty$ ώστε

$$\begin{cases} \text{η σειρά συγκλίνει για } |z-a| < R \\ \text{η σειρά αποκλίνει για } |z-a| > R. \end{cases}$$

Ορισμός 1.17 Έστω ότι ο (X, ρ) είναι μετρικός χώρος και $f_n : X \mapsto \mathbb{C}$ για $n = 1, 2, ...$ Θέτουμε $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$. Λέμε ότι η $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ αν $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ για κάθε $x \in X$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν $s_n \to s$ ομοιόμορφα.

Θα χρειαστούμε το παρακάτω κριτήριο (δείτε [1] Θεώρημα 4.6.3).

Πρόταση 1.18 (Κριτήριο του Weierstrass) *Έστω ότι ο (X, ρ) είναι μετρικός χώρος και $f_n : X \mapsto \mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε αν θέσουμε $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x)|$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Απόδειξη: Θέτουμε $s_n = f_1 + ... + f_n$. Για $n > m$ έχουμε

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k(x)\|_\infty.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{n} \|f_k(x)\|_\infty$ συγκλίνει είναι Cauchy άρα είναι Cauchy και η ακολουθία $(s_n(x))_n$, συνεπώς συγκλίνει στον πλήρη μετρικό χώρο $\mathbb{C}$ (το ότι ο $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι πλήρης με την μετρική $d(z, w) = |z - w|$ αφήνεται ως άσκηση). Ας υποθέσουμε ότι συγκλίνει σε ένα μιγαδικό αριθμό $s(x)$. Έτσι ορίζεται η $s : X \mapsto \mathbb{C}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|s_n(x) - s(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_\infty < \varepsilon.$$

Άρα $s_n \rightrightarrows s$, δηλαδή η $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα. □

Θεώρημα 1.19 *Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ο αριθμός*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}},$$

($R = +\infty$ αν $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$) ο οποίος ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, έχει τις εξής ιδιότητες:

i) $0 \leq R \leq \infty$.

ii) *αν $|z-a| < R$ τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα.*

iii) *αν $0 < r < R$ τότε η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{S(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$.*

iv) *αν $|z-a| > R$ τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη:

i) Προφανώς $0 \leq R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} \leq +\infty$.

ii) Χωρίς βλάβη της γενικότητας $a = 0$. Έστω $|z| < R$ και επιλέγουμε r_0 ώστε $|z| < r_0 < R$. Τότε $1/r_0 > 1/R$. Συνεπώς

$$\frac{1}{r_0} > \lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{|a_k|^{1/k} : k \geq n\}\Big).$$

Οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\frac{1}{r_0} > \sup\{|a_k|^{1/k} : k \geq n\} \geq |a_n|^{1/n}.$$

Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ παίρνουμε $|a_n| < 1/r_0^n$. Συνεπώς $|a_n z^n| < (|z|/r_0)^n$. Άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα, αφού φράσσεται από την γεωμετρική $\sum_{n=0}^{\infty}(|z|/r_0)^n$.

iii) Έστω τώρα ότι $|z| \leq r < R$. Επιλέγουμε r_0 ώστε $r < r_0 < R$ και επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο. Οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα από το κριτήριο του Weierstrass, αφού $|a_n z^n| \leq (r/r_0)^n$ και $r/r_0 < 1$.

iv) Αν $|z| > R$ τότε επιλέγοντας r_0 ώστε $(\limsup |a_n|^{1/n})^{-1} = R < r_0 < |z|$ συμπεραίνουμε ότι για άπειρο πλήθος στοιχείων ισχύει $|a_n| > 1/r_0^n$. Άρα συχνά ισχύει $|a_n z^n| > (|z|/r_0)^n > 1$ οπότε η $a_n z^n$ δεν είναι μηδενική. Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει. □

Πρόταση 1.20 *Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Αν το $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ υπάρχει τότε αυτό είναι ίσο με το R.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a = 0$. Θέτουμε $\lambda = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$.

Αν $\lambda = 0$ τότε για $z \neq 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} |a_n z^n/a_{n+1}z^{n+1}| = 0$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n z^n/a_{n+1}z^{n+1}| < 1$. Συνεπώς η $|a_n z^n|$ για $n \geq n_0$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς όχι μηδενική. Άρα η σειρά αποκλίνει, συνεπώς $R = 0 = \lambda$.

Έστω τώρα ότι $\lambda > 0$. Θεωρούμε $0 < r < \lambda$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $r < |a_n/a_{n+1}|$. Συνεπώς $|a_{n_0+1}| < |a_{n_0}|/r$. Επαγωγικά $|a_{n_0+k}| < |a_{n_0}|/r^k$ για $k \geq 1$. Θέτοντας $n = n_0 + k$ συμπεραίνουμε $|a_n| < |a_{n_0}|/r^{n-n_0}$ για $n \geq n_0$. Θεωρούμε z με $|z| < r$ και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n z^n| \leq r^{n_0}|a_{n_0}| \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n,$$

η οποία συγκλίνει. Άρα η αρχική σειρά συγκλίνει για κάθε z με $|z| < r$ οπότε $r \leq R$. Για $r \to \lambda^-$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda \leq R$.

Θεωρούμε τώρα οποιοδήποτε $r > \lambda$. Έτσι, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n/a_{n+1}| < r$. Αν τώρα z ώστε $|z| > r$ θα έχουμε ότι

$$|a_{n+1}z^{n+1}| > \frac{|a_n|}{r}|z|^{n+1} = |a_n z^n|\frac{|z|}{r} > |a_n z^n|.$$

Συνεπώς η $|a_n z^n|$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα όχι μηδενική. Έτσι η αρχική σειρά αποκλίνει. Συμπεραίνουμε ότι $R \leq r$ και άρα για $r \to \lambda^+$ παίρνουμε $R \leq \lambda$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ασκήσεις

***Άσκηση* 1.18** Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$ με μη μηδενικούς όρους, ισχύουν οι ανισότητες:

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Από αυτές τις ανισότητες αποδείξτε με άλλο τρόπο την Πρόταση 1.20.

***Άσκηση* 1.19** Αποδείξτε ότι και τα τέσσερα όρια της Άσκησης 1.18 μπορεί να είναι διαφορετικά, υπολογίζοντάς τα για την ακολουθία

$$a_n = 2^{(-1)^n n - n},$$

και δείχνοντας ότι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \qquad \liminf \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4},$$
$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1, \qquad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

***Άσκηση* 1.20** Έστω ότι $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Δείξτε ότι αν $\limsup |a_{n+1}/a_n| < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $\mathbb{C}$, ενώ αν $\liminf |a_{n+1}/a_n| > 1$ η σειρά αποκλίνει.

1.9 Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

***Άσκηση* 1.21** Έστω ότι ο (X, ρ) είναι μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ένα $B \subseteq A$ είναι ανοικτό στο $(A, \rho|_{A\times A})$ αν και μόνο αν $B = A \cap G$ για κάποιο $G \subseteq X$ ανοικτό.

***Άσκηση* 1.22** Σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) τα μόνα συμπαγή σύνολα είναι τα πεπερασμένα αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του X είναι ανοικτά.

***Άσκηση* 1.23** Ο $\mathbb{R}^n$ για $n \geq 1$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

***Άσκηση* 1.24** Αν (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) είναι συμπαγείς μετρικοί χώροι, τότε ο $(X_1 \times X_2, \rho)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος με

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\}.$$

***Άσκηση* 1.25** Αν z_2, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$, $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ τότε τα z_1, z_2, z_3 είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

***Άσκηση* 1.26** Αν $\phi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ είναι αυτομορφισμός (αλγεβρικός και τοπολογικός) τότε $\phi(z) = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ή $\phi(z) = \overline{z}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

***Άσκηση* 1.27** Ορίζουμε τη συνάρτηση $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ για $t \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

$$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}, & \text{αν } t \neq 2k\pi, \\ 2n+1 & \text{αν } t = 2k\pi. \end{cases}$$

για $k \in \mathbb{Z}$.

***Άσκηση* 1.28** Έστω ότι $A \subseteq \mathbb{C}$. Καλούμε *κυρτή θήκη* $\mathrm{conv}(A)$ ή $\langle A \rangle$ του A την τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το A (δηλαδή το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει το A). Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ z = \sum_{i\in I} \lambda_i z_i \,:\, I \text{ πεπερασμένο },\ z_i \in A,\ \lambda_i \geq 0 \text{ και } \sum_{i\in I} \lambda_i = 1 \right\}.$$

***Άσκηση* 1.29** Το σύνολο των ριζών της παραγώγου ενός πολυωνύμου βαθμού ≥ 1, περιέχεται στη κυρτή θήκη των ριζών του πολυωνύμου.

***Άσκηση* 1.30** Έστω ότι $A \subseteq \mathbb{C}$, $A \neq \varnothing$. Τότε $\text{διαμ}(\langle A \rangle) = \text{διαμ}(A)$.

***Άσκηση* 1.31** Έστω ότι $A = \{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}$. Τότε το $\langle A \rangle$ είναι συμπαγές.

Άσκηση 1.32 Αν $A \subseteq C$ και $z \in \langle A \rangle$, τότε υπάρχουν a, b, $c \in A$ ώστε $z \in \langle \{a, b, c\} \rangle$.

Άσκηση 1.33 Αν $A \subset \mathbb{C}$ συμπαγές τότε και το $\langle A \rangle$ είναι συμπαγές.

Άσκηση 1.34 Η συνάρτηση $f(z) = z + e^z$ για $z \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} z < 0$ είναι 1-1.

Άσκηση 1.35 Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $z_1, \ldots, z_n$, $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$|z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}\, \sqrt{|w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2},$$

ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα.

i) Δείξτε πρώτα ότι η $0 \leq (z - \overline{w})\overline{(z - \overline{w})}$ συνεπάγεται την $\operatorname{Re}(zw) \leq |z|^2 + |w|^2$.

ii) Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο για να δείξετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για $n = 2$ ξεκινώντας από την παράσταση $|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2$.

iii) Για το επαγωγικό βήμα υποθέστε ότι η ανισότητα ισχύει για $n - 1$, και εφαρμόστε την προηγούμενη ($n = 2$) στην έκφραση

$$\left| z_1 w_1 + \frac{z_2 w_2 + \ldots + z_n w_n}{(|w_2|^2 + \ldots + |w_n|^2)^{1/2}} (|w_2|^2 + \ldots + |w_n|^2)^{1/2} \right|.$$

Κεφάλαιο 2

Ολόμορφες συναρτήσεις

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών συναρτήσεων που έχουν παράγωγο στο $\mathbb{C}$ και τις οποίες ονομάζουμε ολόμορφες.

Ορισμός 2.1 Έστω ότι το Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$.

i) η παράγωγος της f στο $z_0 \in \Omega$ είναι το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

αν αυτό υπάρχει.

ii) Η f λέγεται *ολόμορφη* στο Ω αν υπάρχει η $f'(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Το σύνολο των συναρτήσεων που είναι ολόμορφες στο Ω το συμβολίζουμε με $H(\Omega)$.

iii) Η f λέγεται *ακέραιη* αν υπάρχει η $f'(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις και εδώ ισχύουν διάφορες γνωστές ιδιότητες όπως βλέπουμε στις παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 2.2 *Αν το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ διαφορίσιμη στο $z_0 \in \Omega$, τότε η f είναι συνεχής στο z_0.*

Απόδειξη:

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0 \cdot f'(z_0) = 0. \qquad \square$$

Πρόταση 2.3 *Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφες και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε $af + bg \in H(\Omega)$ και $f \cdot g \in H(\Omega)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $z_0 \in \Omega$. Τότε για κάθε $z \in \Omega$ με $z \neq z_0$ έχουμε

$$\frac{af(z)+bg(z)-(af(z_0)+bg(z_0))}{z-z_0} = a\,\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + b\,\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

Αν πάρουμε το όριο για $z \to z_0$ βρίσκουμε ότι υπάρχει το $(af+bg)'(z_0)$ και ισχύει $(af+bg)'(z_0) = af'(z_0)+bg'(z_0)$. Ομοίως, από τη σχέση

$$\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0} = f(z)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} + g(z_0)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

βρίσκουμε ότι υπάρχει το $(f\cdot g)'(z_0)$ και ισχύει $(f\cdot g)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$. □

Πρόταση 2.4 (Κανόνας αλυσίδας) *Αν Ω και G ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $g : G \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με $f(\Omega) \subseteq G$ τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι ολόμορφη και ισχύει*

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $z_0 \in \Omega$. Θέτουμε: $w_0 = f(z_0)$ και χρησιμοποιούμε την «παρατήρηση Καραθεοδωρή»· ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z) &= \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0), \qquad z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\ \varepsilon_2(w) &= \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} - g'(w_0), \quad w \in G \setminus \{w_0\}. \end{aligned}$$

Τότε: $\lim_{z\to z_0} \varepsilon_1(z) = 0$, $\lim_{w\to w_0} \varepsilon_2(w) = 0$ και ισχύουν:

$$\begin{aligned} f(z)-f(z_0) &= (f'(z_0)+\varepsilon_1(z))(z-z_0), \\ g(w)-g(w_0) &= (g'(w_0)+\varepsilon_2(w))(w-w_0). \end{aligned}$$

Θέτοντας $w = f(z)$ και $w_0 = f(z_0)$ στη δεύτερη σχέση και αντικαθιστώντας την πρώτη σε αυτή έχουμε:

$$\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} = \Big(g'(f(z_0)) + \varepsilon_2(f(z))\Big)(f'(z_0)+\varepsilon_1(z))$$

για $z \neq z_0$. Από αυτή, και αφού η f είναι συνεχής στο z_0, έπεται ότι υπάρχει η παράγωγος $(g\circ f)'(z_0)$ και ισχύει: $(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$. □

Παραδείγματα 2.5 1) Η $f(z) = z^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ άρα κάθε πολυώνυμο είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$.

2) Η $f(z) = 1/z$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3) Από τη 2) και τον κανόνα αλυσίδας έπεται ότι αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, f, $g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ αναλυτικές και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε $f/g \in H(\Omega)$.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 Έστω ότι το U είναι ανοικτό υπούνολο του $\mathbb{C}$. Θέτουμε $U^* = \{\overline{z} : z \in U\}$. Αποδείξτε ότι αν η $f : U \mapsto \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in U$ τότε η $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\overline{z_0} \in U^*$.

2.1 Συνθήκες Cauchy-Riemann

Ο παρακάτω ορισμός είναι ο τυπικός ορισμός της διαφορισιμότητας για συναρτήσεις δύο μεταβλητών και μπορεί να βρεθεί σε κάθε βιβλίο Απειροστικού Λογισμού για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Ορισμός 2.6 Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και $(x_0, y_0) \in A$. Η f λέγεται *διαφορίσιμη* στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν υπάρχει $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ γραμμική ώστε να ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - T(x-x_0, y-y_0)}{|(x-x_0, y-y_0)|} = 0.$$

Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ είναι της μορφής $T(x,y) = ax + by$, όπου a, $b \in \mathbb{R}$, και γεωμετρικά η εξίσωση $z = T(x,y) = ax + by$ στον $\mathbb{R}^3$ περιγράφει το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο εφαπτόμενο επίπεδο της f στο σημείο (x_0, y_0). Θέτοντας T να είναι ο 1×2 πίνακας (a, b), ο προηγούμενος ορισμός είναι ισοδύναμος με την

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{|(x-x_0, y-y_0)|} = 0.$$

Αποδεικνύεται στον Απειροστικό Λογισμό (δείτε [5], Ενότητα 2.7) ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο (x_0, y_0) και ισχύει

$$f_x(x_0, y_0) = a, \qquad f_y(x_0, y_0) = b,$$

όπου $f_x = \partial f/\partial x$ και $f_y = \partial f/\partial y$, συμβολισμό που χρησιμοποιούμε και στα παρακάτω.

Θεώρημα 2.7 *Έστω ότι $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ και $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Θέτουμε, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ και $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, x, $y \in \Omega$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:*

i) *Υπάρχει η παράγωγος $f'(z_0)$ της f στο z_0.*

ii) *Οι u, v είναι διαφορίσιμες στο (x_0, y_0) και ισχύουν στο σημείο αυτό οι συνθήκες Cauchy-Riemann:*

$$u_x = v_y \quad \text{και} \quad u_y = -v_x.$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει: $\operatorname{Re} f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ *και* $\operatorname{Im} f'(z_0) = -u_y(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0)$. *Δηλαδή:*

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x = u_x + iv_x = v_y - iu_y. \tag{2.1}$$

Απόδειξη: Υπάρχει $a + ib \in \mathbb{C}$ ώστε $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a - ib\right) = 0$ *αν και μονο αν*

$$\exists\, a + ib \in \mathbb{C} \text{ ώστε } \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - (a + ib)(z - z_0)}{z - z_0} = 0. \tag{2.2}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - (a + ib)(z - z_0) \\ &= [u(x, y) - u(x_0, y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)] \\ &\quad + i[v(x, y) - v(x_0, y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0)]. \end{aligned}$$

Άρα η (2.2) είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη $a + ib \in \mathbb{C}$ ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)}{|(x - x_0, y - y_0)|} = 0$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0)}{|(x - x_0, y - y_0)|} = 0.$$

Αυτό ισχύει *αν και μόνο* αν υπάρχουν a, $b \in \mathbb{R}$, ώστε οι u και v να είναι διαφορίσιμες με $u_x = a$, $u_y = -b$ και $v_x = b$, $v_y = a$ (στο (x_0, y_0)) *αν και μόνο αν* οι u και v είναι διαφορίσιμες και πληρούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο (x_0, y_0), δηλαδή η (ii).

Είδαμε προηγουμένως ότι $\operatorname{Re} f'(z_0) = a = u_x = v_y$ και $\operatorname{Im} f'(z_0) = b = -u_y = v_x$. □

Πόρισμα 2.8 *Έστω* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό,* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ *με* $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ *και* $z_0 \in \Omega$ *για το οποίο υπάρχει η παράγωγος* $f'(z_0)$. *Τότε* $f'(z_0) = 0$.

Απόδειξη: Έχουμε $v = \operatorname{Im} f = 0$ και $f'(z_0) = v_y + iv_x = 0$. □

Ορισμός 2.9 Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ καλείται *τόπος*, αν είναι ανοικτό, μη κενό και συνεκτικό.

Πρόταση 2.10 *Έστω ότι το* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *είναι τόπος και* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ *ολόμορφη με* $f' = 0$. *Τότε η* f *είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Από την (2.1) έχουμε $f' = u_x - iu_y = 0$ οπότε $u_x = u_y = 0$. Ομοίως $v_x = v_y = 0$. Άρα, αφού το Ω είναι συννεκτικό ως τόπος, οι u, v είναι σταθερές, άρα f σταθερή. □

Πόρισμα 2.11 *Έστω ότι το* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *είναι τόπος και* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ *ολόμορφη με* $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. *Τότε η* f *είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 2.8 έχουμε ότι $f' = 0$. Άρα η f είναι σταθερή. □

Ασκήσεις

***Άσκηση* 2.2** Εξετάστε ως προς την ύπαρξη παραγώγου τις συναρτήσεις:

i) $f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$.

ii) $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

iii) $f(z) = z/|z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

***Άσκηση* 2.3** Έστω ότι η f είναι ακέραιη. Εξετάστε αν οι $g_1(z) = \overline{f(\bar{z})}$ και $g_2(z) = f(\bar{z})$ για $z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραιες.

***Άσκηση* 2.4** Έστω ότι $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Η f είναι σταθερή.

ii) Η $|f|$ είναι σταθερή.

iii) Η $\bar{f}$ είναι ολόμορφη.

iv) Η $u = \operatorname{Re} f$ είναι σταθερή (αντίστοιχα, η $v = \operatorname{Im} f$ είναι σταθερή).

***Άσκηση* 2.5** Επιβεβαιώστε τις συνθήκες Cauchy-Riemann για τη συνάρτηση $f(z) = 1 + z^2$.

***Άσκηση* 2.6** Εξετάστε αν η $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(1+i)\operatorname{Im} z^2}{|z|^2}, & \text{αν } z \neq 0, \\ 0, & \text{αν } z = 0, \end{cases}$$

πληροί τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο $z = 0$ και αν υπάρχει η $f'(0)$.

***Άσκηση* 2.7** Έστω ότι $f(z) = z^5/|z|^4$ αν $z \neq 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι το όριο $\lim_{z\to 0} f(z)/z$ δεν υπάρχει. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy-Riemann στο 0 αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Αντιφάσκει αυτό με το Θεώρημα 2.7 ;

2.2 Παράγωγος δυναμοσειράς

Για το επόμενο θεώρημα θα κάνουμε χρήση των παρακάτω παρατηρήσεων.

***Παρατήρηση* 2.12** $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ και $\lim_{n\to\infty} n^{1/(n-1)} = 1$. □

***Παρατήρηση* 2.13** Αν $b_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b > 0$ και $a = \limsup a_n$, τότε $\limsup a_n b_n = ab$. [Εφόσον $a = \limsup a_n$, υπάρχει υπακολουθία a_{n_k} ώστε: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Τότε $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} b_{n_k} = ab$, άρα το ab είναι οριακό σημείο της $\{a_n b_n\}$. Άρα $c := \limsup a_n b_n \geq ab$.

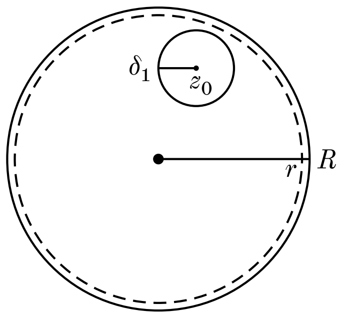
Από την άλλη μεριά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq n$ φανερά ισχύει
$$a_k b_k \leq \sup\{a_k : k \geq n\} \cdot \sup\{b_k : k \geq n\}.$$
Άρα
$$\sup\{a_k b_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k : k \geq n\} \cdot \sup\{b_k : k \geq n\}.$$
Παίρνοντας όρια για $n \to +\infty$ βρίσκουμε
$$c = \limsup a_n b_n \leq \limsup a_n \limsup b_n = ab,$$
αφού $a = \limsup a_n$ και $b = \lim b_n = \limsup b_n$. Άρα $c = ab$.]

Παρατήρηση 2.14 Η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ δίνεται από τον τύπο
$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}}.$$
[Χωρίς βλάβη τη γενικότητας $a = 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σύνολα των οριακών σημείων της $|a_n|^{1/n}$ και της $|a_n|^{1/(n-1)}$ ταυτίζονται. Έστω ότι το s είναι οριακό σημείο της $|a_n|^{1/(n-1)}$. Υπάρχει λοιπόν υπακολουθία $|a_{k_n}|^{1/(k_n-1)}$ που έχει όριο το s. Τότε όμως, σύμφωνα με την Άσκηση 2.8 ισχύει
$$|a_{k_n}|^{1/k_n} = \left(|a_n|^{1/(k_n-1)}\right)^{(k_n-1)/k_n} \to s,$$
και το s είναι και οριακό σημείο της $|a_n|^{1/n}$. Ομοίως εργαζόμαστε αν το s είναι οριακό σημείο της $|a_n|^{1/n}$ για να προκύψει ότι είναι και της $|a_n|^{1/(n-1)}$. Αφού λοιπόν τα σύνολα των οριακών σημείων τους ταυτίζονται θα έχουν το ίδιο supremum, δηλαδή $\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/(n-1)}$.]

Θεώρημα 2.15 *Αν η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε η συνάρτηση f παραγωγίζεται και ισχύει: $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ για κάθε $z \in S(a,R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$.*

Απόδειξη: 1) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ και θέτουμε R' την ακτίνα σύγκλισής της. Έχουμε ότι:
$$\begin{aligned}\frac{1}{R'} &= \limsup |na_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup |n|^{\frac{1}{n-1}} \limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \lim |n|^{\frac{1}{n-1}} \limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}\end{aligned}$$
από τις παραπάνω παρατηρήσεις. Άρα $R' = R$.

2) Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για $a = 0$. Για $|z| < R$ θέτουμε
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}, \qquad s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad \ell_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k,$$



και παρατηρούμε ότι $f(z) = s_n(z) + \ell_n(z)$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $z_0 \in S(0,R)$, το $f'(z_0)$ υπάρχει και $f'(z_0) = g(z_0)$. Επιλέγουμε r, $\delta_1 > 0$: $|z_0| < r < R$ και $\overline{S(z_0,\delta_1)} \subseteq S(0,r)$. Για $z \in S(z_0,\delta_1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0) &= \frac{s_n(z)-s_n(z_0)}{z-z_0} \\ &\quad - s_n'(z_0) + s_n'(z_0) \\ &\quad - g(z_0) + \frac{\ell_n(z)-\ell_n(z_0)}{z-z_0}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\ell_n(z)-\ell_n(z_0)}{z-z_0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z-z_0}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\left|\frac{z^k - z_0^k}{z-z_0}\right| = |z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + ... + z_0^{k-1}| \leq kr^{k-1},$$

αφού z, $z_0 \in S(z_0,\delta_1) \subseteq S(0,r)$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{\ell_n(z)-\ell_n(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $r < R$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|r^{k-1}$ συγκλίνει (από το (1) της απόδειξης) και άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_1$ να ισχύει

$$\left|\frac{\ell_n(z)-\ell_n(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.4}$$

για κάθε $z \in S(z_0,\delta_1)$. Έχουμε επίσης προφανώς ότι $s_n'(z_0) \to g(z_0)$. Άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_2$ να ισχύει

$$|s_n'(z_0) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5}$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ οπότε ισχύουν ταυτόχρονα και η (2.4) και η (2.5). Επιλέγουμε δ με $0 < \delta \leq \delta_1$ ώστε αν $|z - z_0| < \delta$ να ισχύει

$$\left|\frac{s_{n_0}(z) - s_{n_0}(z_0)}{z-z_0} - s_n'(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.6}$$

Έχουμε τέλος από την αρχική σχέση (2.3) και τις (2.4), (2.5) και (2.6) ότι

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{για } |z-z_0| < \delta,$$

από το οποίο έπεται ότι $g(z_0) = f'(z_0)$. □

Πόρισμα 2.16 *Αν η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε:*

1) *η f είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και ισχύει:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k} \quad \text{για } |z| < R.$$

2) *$a_n = f^{(n)}(a)/n!$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Απόδειξη:

1) από το Θεώρημα 2.15 με επαγωγή.

2) Χρησιμοποιώντας το (1) έχουμε: $f^{(k)}(a) = k! a_k$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$ □

Ορισμός 2.17 Έστω ότι $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Λέμε ότι η f είναι *παραστάσιμη με δυναμοσειρά* στο Ω, αν για κάθε $S(a,r) \subseteq \Omega$ υπάρχει μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n = f(z)$ για κάθε $z \in S(a,r)$.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.8 Αποδείξτε ότι αν $a_n \geq 0$ μια ακολουθία πραγματικών με $\lim a_n = \ell$ και $b_n \geq 0$ με $b_n \to 1$ τότε $a_n^{b_n} \to \ell$.

Κεφάλαιο 3

Βασικές συναρτήσεις

3.1 Η εκθετική συνάρτηση

Προφανώς συναρτήσεις παραστάσιμες με δυναμοσειρά είναι απεριόριστα διαφορίσιμες. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η e^z με $\Omega = \mathbb{C}$. Ορίζουμε την e^z επεκτείνοντας τον τύπο του Taylor για την e^x με $x \in \mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$: ορίζουμε

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

για $z \in \mathbb{C}$. Ο ορισμός είναι καλός διότι η σειρά συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως. Πράγματι αυτό είναι φανερό αφού η $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n!$ είναι σειρά πραγματικών αριθμών και συγκλίνει από το Θεώρημα Taylor στο $e^{|z|}$.

Με τις ιδιότητες της συνάρτησης αυτής, που συμβολίζουμε με exp, θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Η παράγωγος αυτής υπολογίζεται με βάση το Θεώρημα 2.15 ως εξής:

$$\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

Άρα $\exp' = \exp$.

Από τα βασικά παραδείγματα στο Θεώρημα Taylor γνωρίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό t ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1},$$

σειρές οι οποίες συγκλίνουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(it)^n}{n!} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + i \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \right) \\ &= \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

Άρα

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Από αυτόν τον τύπο για $t = \pi$ παίρνουμε τον όμορφο τύπο του Euler ο οποίος συνδυάζει και τους πέντε «σημαντικούς» αριθμούς:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Επιπλέον, προκύπτει άμεσα ότι $\cos t = \mathrm{Re}\ e^{it}$ και $\sin t = \mathrm{Im}\ e^{it}$ και από τον βασικό τριγωνομετρικό τύπο $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ παίρνουμε αμέσως $|e^{it}| = 1$. Γεωμετρικά ο αριθμός e^{it} είναι στοιχείο του κύκλου $C(0,1)$, και κάθε στοιχείο αυτού του κύκλου είναι αυτής της μορφής αφού έχει συντεταγμένες της μορφής $(\cos t, \sin t)$.

Πρόταση 3.1 *Για την εκθετική συνάρτηση, για κάθε z, $w \in \mathbb{C}$, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

i) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

ii) $e^z e^w = e^{z+w}$

iii) $e^z = 1$ *αν και μόνο αν* $z/2\pi i \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη: (i) από τη συνέχεια της $z \mapsto \overline{z}$ έχουμε

$$\overline{e^z} = \overline{\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{k\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}.$$

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{C}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = e^z e^{a-z}$. Από τον κανόνα αλυσίδας και γινομένου για την παράγωγο παίρνουμε $f'(z) = e^z e^{a-z} + e^z e^{a-z}(-1) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Συνεπώς, επειδή το $\mathbb{C}$ είναι τόπος (Πρόταση 2.10) η f είναι σταθερή. Δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε $e^z e^{a-z} = c$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα για $z = 0 \in \mathbb{R}$ παίρνουμε $c = e^a$. Έτσι για κάθε $a \in \mathbb{C}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $e^z e^{a-z} = e^a$. Θέτοντας $a = z + w$ προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Για $z = a + ib$ με a, $b \in \mathbb{R}$, και από το (ii) έχουμε $e^z = e^a e^{ib}$. Άρα αν $e^a e^{ib} = 1$ συνεπάγεται $|e^a e^{ib}| = 1$. Αλλά γνωρίζουμε ότι $|e^{ib}| = 1$ οπότε συμπεραίνουμε $e^a = 1$ με $a \in \mathbb{R}$, δηλαδή $a = 0$. Άρα $z = ib$ και $e^{ib} = cosb + i \sin b = 1$ οπότε $\cos b = 1$ και $\sin b = 0$. Άρα $b = 2n\pi$ για κατάλληλο $n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς $z/2\pi i = (ib)/2\pi i = n \in \mathbb{Z}$.

Αντιστρόφως είναι προφανές: αν $z/2\pi i = n \in \mathbb{Z}$ συνεπάγεται $z = 2n\pi i$, οπότε $e^z = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1$. $\square$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις: $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$ και $\sin t = (e^{it} - e^{-it})/2i$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια ορίστε αναλόγως τους μιγαδικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς $\cos z$ και $\sin z$ για $z \in \mathbb{C}$ και αποδείξτε τις σχέσεις:

i) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

ii) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,

iii) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,

για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

Άσκηση 3.2 Λύστε την εξίσωση $\cos z = 1/2$.

Άσκηση 3.3 Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sin z$ απεικονίζει κάθε ευθεία παράλληλη τον πραγματικό άξονα σε έλλειψη και κάθε ευθεία παράλληλη στον φανταστικό άξονα σε υπερβολή.

Βρείτε τις εικόνες αυτών των ευθειών και υπό την $\cos z$.

Άσκηση 3.4 Γράψτε στη μορφή $a + ib$ με $a, b \in \mathbb{R}$ τους αριθμούς:

$$e^{3+i}, \quad \cos(1 + i), \quad \sin(2 + 3i).$$

3.2 Η λογαριθμική συνάρτηση

Η επόμενη πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα να ορίσουμε την έννοια του λογαρίθμου.

Πρόταση 3.2 *Για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ υπάρχει $z \in \mathbb{C}$ ώστε $e^z = w$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε $|w| > 0$. Φανερά $w/|w| \in C(0, 1)$ άρα υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{i\theta} = w/|w|$. Συνεπώς $w = |w|e^{i\theta} = e^{\log|w|+i\theta}$. □

Στον επόμενο ορισμό υπενθυμίζουμε, συνοψίζοντας, τους ορισμούς των ορισμάτων μιγαδικού αριθμού.

Ορισμός 3.3 Αν $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$: $z/|z| = e^{i\theta}$, δηλαδή $z = |z|e^{i\theta}$, η τριγωνομετρική μορφή του z. Το σύνολο των $\theta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $z = |z|e^{i\theta}$ καλείται *όρισμα* του z και το συμβολίζουμε με $\arg z$. Ο μονοσήμαντα ορισμένος $\theta \in \mathbb{R}$ με $-\pi < \theta \leq \pi$ και $z = |z|e^{i\theta}$ καλείται βασικό, πρώτο ή πρωτεύον όρισμα του z και συμβολίζεται με $\mathrm{Arg} z$. Έχουμε τότε:

$$\arg z = \{\mathrm{Arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Επίσης γράφουμε $\arg_k z$ για τον αριθμό $\mathrm{Arg} z + 2k\pi$.

Άρα η

$$\log|z| + i\mathrm{Arg}z \,:\, \mathbb{C}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}\times(-\pi,\pi]$$

είναι αντίστροφη της

$$e^z \,:\, \mathbb{R}\times(-\pi,\pi] \mapsto \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

καθώς και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η

$$\log|z| + i\arg_k z \,:\, \mathbb{C}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}\times(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi]$$

είναι αντίστροφη της

$$e^z \,:\, \mathbb{R}\times(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi] \mapsto \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Αυτές οι αντίστροφες συναρτήσεις ονομάζονται *κλάδοι του λογαρίθμου*. Θα γράφουμε $\mathrm{Log}z$ για την συνάρτηση $\log|z| + i\mathrm{Arg}z$ και την ονομάζουμε *πρώτο κλάδο του λογαρίθμου*, ενώ για την έκφραση $\log|z|+i\arg_k z$ θα γράφουμε $\mathrm{Log}_k z$ και θα την ονομάζουμε k-κλάδο του λογαρίθμου.

Παρατήρηση 3.4 Ο πρώτος λογάριθμος δεν είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $e^z : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}\setminus\{0\}$, αφού η τελευταία δεν είναι 1-1 για να είναι αντιστρέψιμη (για παράδειγμα $e^{i\pi} = e^{i3\pi} = -1$). Είναι μόνο δεξιά αντίστροφη αυτής της εκθετικής όπως και κάθε k-κλάδος του λογαρίθμου. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\exp(\mathrm{Log}_k z) = e^{\log|z|+i\arg_k z} = |z|e^{i\arg_k z} = z$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Δεν είναι όμως (όπως αναμένουμε αφού η εκθετική δεν είναι αντιστρέψιμη) αριστερά αντίστροφη. Για παράδειγμα $\mathrm{Log}e^{i3\pi} = \log|e^{i3\pi}| + i\mathrm{Arg}e^{i3\pi} = \log 1 + i\pi = i\pi \neq i3\pi$.

Πρόταση 3.5 *Το πρωτεύον όρισμα* Arg *είναι συνεχής συνάρτηση στο* $\mathbb{C}\setminus\{t \in \mathbb{R} \,:\, t \leq 0\}$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε πρώτα ότι η $f = \mathrm{Arg}|_{C(0,1)\setminus\{-1\}}$ είναι συνεχής, όπου $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχει $z_0 = e^{i\theta_0}$ με $\theta_0 \in (-\pi,\pi)$ στο οποίο η f δεν είναι συνεχής. Κατά συνέπεια, υπάρχει $z_n = e^{i\theta_n}$ με $\theta_n \in (-\pi,\pi)$ που συγκλίνει στο z_0 αλλά $\theta_n \nrightarrow \theta_0$. Έτσι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε συχνά $\theta_n \notin (\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)$, συνεπώς αυτή έχει υπακολουθία, έστω την θ_{k_n} ώστε $\theta_{k_n} \notin (\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)$. Όμως η θ_{k_n} ανήκει στο συμπαγές $[-\pi,\pi]$ οπότε έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ας ονομάσουμε αυτή την υπακολουθία φ_n με όριο το $\varphi \in [-\pi,\pi]$ και $\varphi \neq \theta_0$ (αφού $\varphi_n \notin (\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon)$). Αλλά από την υπόθεση $e^{i\varphi_n} \to e^{i\theta_0}$ (η $e^{i\varphi_n}$ είναι υπακολουθία της z_n) ενώ από τη συνέχεια της εκθετικής θα πρέπει $e^{i\varphi_n} \to e^{i\varphi}$. Άρα $e^{i\varphi} = e^{i\theta_0}$, οπότε $e^{i(\varphi-\theta_0)} = 1$. Από την Πρόταση 3.1(iii) έπεται ότι $(\varphi-\theta_0)/2\pi$ είναι ακέραιος. Αλλά επειδή $|\varphi-\theta_0| <$

2π, αφού $\varphi \in [-\pi, \pi]$ και $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ συμπεραίνουμε ότι $(\varphi - \theta_0)/2\pi = 0$ δηλαδή $\varphi = \theta_0$, που είναι άτοπο. Άρα f συνεχής.

Ορίζουμε τώρα $h : \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\} \mapsto C(0,1) \setminus \{-1\}$ με $h(z) = z/|z|$, οπότε η $\mathrm{Arg}|_{\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R}:t\leq 0\}} = f \circ h$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. □

Η ίδια απόδειξη μπορεί να γίνει και για τα υπόλοιπα ορίσματα. Έτσι κάθε κλάδος του λογαρίθμου είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$.

3.2.1 Παράγωγος και δυναμοσειρά λογαρίθμων

Η παράγωγος υπολογίζεται εύκολα από τον τύπο παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης. Για λόγους πληρότητας ο αναλυτικός υπολογισμός είναι ως εξής: Αν z, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ και $z \to z_0$ τότε από τη συνέχεια του λογαρίθμου ισχύει $w := \mathrm{Log}_k z \to \mathrm{Log}_k z_0 =: w_0$ και $z = e^w$, $z_0 = e^{w_0}$, αφού κάθε λογάριθμος είναι δεξιά αντίστροφη της εκθετικής. Έτσι έχουμε

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{Log}_k z - \mathrm{Log}_k z_0}{z - z_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}.$$

Συνεπώς $(\mathrm{Log}_k z)' = 1/z$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Για το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά παρατηρούμε πρώτα ότι αυτή πρέπει να έχει κέντρο άλλο από το 0, αφού το μηδέν δεν είναι στο πεδίο ορισμού κανενός λογαρίθμου. Με κέντρο το 1 παρατηρούμε από τη γεωμετρική σειρά ότι

$$(\mathrm{Log}_k z)' = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Έτσι, στον τόπο $S(1,1)$ θα έχουμε

$$\left(\mathrm{Log}_k z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}\right)' = 0,$$

οπότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$ ώστε

$$\mathrm{Log}_k z = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1}.$$

Γα $z = 1$ προκύπτει $c = \mathrm{Log}_m 1 = \log|1| + i\arg_k 1 = i2k\pi$. Συνεπώς

$$\mathrm{Log}_k z = i2k\pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z-1)^{n+1},$$

και η ακτίνα σύγκλισης προκύπτει εύκολα ότι ισούται με 1, ισοδύναμα

$$\mathrm{Log}_k z = i2k\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n, \tag{3.1}$$

Για ανάπτυγμα με άλλο κέντρο, το $z_0 \neq 0$, μπορούμε απλώς να χρησιμοποιήσουμε την (3.1) για το z/z_0 στη θέση του z από όπου με απλές πράξεις θα πάρουμε ότι

$$\mathrm{Log}_k z = \mathrm{Log}_k z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n, \tag{3.2}$$

με ακτίνα σύγκλισης $|z_0|$.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 3.5** Βρείτε δυο διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2)$, και δυο άλλους $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ώστε $\mathrm{Log}(w_1 w_2) \neq \mathrm{Log}(w_1) + \mathrm{Log}(w_2)$.

***Άσκηση* 3.6** Αποδείξτε ότι το ευρύτερο σύνολο στο οποίο είναι ολόμορφη η $f(z) = \mathrm{Log}(zz_0) - \mathrm{Log}z$, για $z_0 \not\geq 0$, αποτελείται από δύο συννεκτικές συνιστώσες και σε καθε μια από αυτές η συνάρτηση f είναι σταθερή.

***Άσκηση* 3.7** Αποδείξτε τον τύπο (3.2).

***Άσκηση* 3.8** (Ορισμός μιγαδικών δυνάμεων) Με βάση τη σχέση $x^y = e^{y \log x}$ από τους πραγματικούς αριθμούς ορίζουμε $z^w_{(k)} = e^{w \log_k z}$ όπου $\log_k$ ο k-κλάδος του λογαρίθμου. Δηλαδή για κάθε κλάδο του λογαρίθμου ορίζεται και ένας κλάδος *δύναμης* του z στην w. Με το σύμβολο $\sqrt[w]{z}$ συμβολίζουμε τον $e^{(\mathrm{Log} z)/w}$ όπου $\mathrm{Log} z$ ο πρωτεύων λογάριθμος.

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει μόνο ένας κλάδος της δύναμης z^w αν και μόνο αν το w είναι ακέραιος.

ii) Αποδείξτε ότι αν ο w είναι ρητός της μορφής m/n με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ και το m/n είναι ανάγωγο τότε το z^w έχει n διαφορετικές τιμές, τις n-στες ρίζες του z^m.

iii) Αν το w είναι άρρητος ή $\mathrm{Im}\, w \neq 0$ τότε το z^w έχει άπειρο πλήθος τιμών.

***Άσκηση* 3.9** Υπολογίστε όλες τις δυνατές τιμές των αριθμών

$$i^i, \quad (-i)^i, \quad 2^i, \quad \log 1, \quad \log(i), \quad \log(1+i)$$

όπου για τον ορισμό των δυνάμεων δείτε την Άσκηση 3.8 και με το log εννοούμε να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές, δηλαδή όλα τα $\log_k$ για $k \in \mathbb{Z}$.

***Άσκηση* 3.10** Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = z^2$ απεικονίζει το πρώτο τεταρτημόριο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ στο άνω ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$.

Αποδείξτε ότι η $g(z) = \sqrt{z}$ (δείτε Άσκηση 3.8) απεικονίζει το C στο άνω ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$.

Άσκηση 3.11 Αποδείξτε ότι η $f(z) = e^z$ απεικονίζει τη «λωρίδα» $\{z \in \mathbb{C} : b \leq \operatorname{Im} z \leq (b + 2\pi)i\}$ στο σύνολο $\overline{S(0,b)} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq b\}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.

Μελετήστε το πεδίο τιμών του $\log_k$ όταν το πεδίο ορισμού είναι το $\overline{S(0,b)} \setminus \{0\}$.

Κεφάλαιο 4

Μιγαδική Ολοκλήρωση

Στο κεφάλαιο αυτό της ολοκλήρωσης θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης f πάνω σε μια καμπύλη του επιπέδου. Στην ουσία πρόκειται για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα όπως το γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό με τη διαφορά ότι η f δεν έχει απαραίτητα πραγματικές τιμές, αλλά τιμές στο $\mathbb{C}$. Όπως και στον απειροστικό λογισμό το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπάρχει πάντα, και η ύπαρξη του τώρα εξαρτάται όχι μόνο από την f αλλά και από την καμπύλη πάνω στην οποία ολοκληρώνουμε.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια απλοποιημένη μορφή της θεωρίας με την επιπλέον υπόθεση ότι η συνάρτηση που περιγράφει την καμπύλη πάνω στην οποία θα ολοκληρώνουμε είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη· δηλαδή εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων η συνάρτηση που περιγράφει την καμπύλη είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι συνεχής.

Εν τούτοις, αν κάποιος θέλει να δει την γενική ανάπτυξη της θεωρίας τότε αντί για αυτό το κεφάλαιο μπορεί να μελετήσει το επόμενο κεφάλαιο στο οποίο η ανάπτυξη της θεωρίας γίνεται για συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης.

Αν $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ μια παραμετροποίηση της καμπύλης στην οποία θα ολοκληρώσουμε, τότε είναι φανερό, ακολουθώντας τις τεχνικές του απειροστικού λογισμού, ότι πρέπει να κατασκευάσουμε αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{i=0}^{n} f(\phi(r_i))(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})),$$

όπου $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ διαμέριση του $[a, b]$ και $t_{i-1} \leq r_i \leq t_i$ ενδιάμεσα σημεία της διαμέρισης, επιδιώκοντας να πετύχουμε μια οριακή τιμή όταν η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν. Αν αυτή η οριακή τιμή υπάρχει θα την ονομάσουμε «ολοκλήρωμα».

Η παραπάνω έκφραση γράφεται και ως

$$\sum_{i=0}^{n} f(\phi(r_i))\frac{\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\,(t_i - t_{i-1}).$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη τότε από το θεώρημα μέσης τιμής του απειροστικού λογισμού, υπάρχει ξ_i ώστε

$$\frac{\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \phi'(\xi_i)$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Επιλέγοντας $r_i = \xi_i$ συμπεραίνουμε ότι το παραπάνω άθροισμα γράφεται ως

$$\sum_{i=0}^{n} f(\phi(r_i))\phi'(r_i)\ (t_i - t_{i-1}),$$

και συνεπώς το ζητούμενο ολοκλήρωμα Riemann είναι ίσο με το $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$.

Αν τώρα η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη εκτός από τα σημεία $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq b$ τότε το ολοκλήρωμα ισούται με το άθροισμα

$$\int_a^{c_1} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt + \int_{c_1}^{c_2} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt + \dots + \int_{c_k}^{b} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt,$$

δηλαδή πάλι με το $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$.

Συμβολισμός: Το προηγούμενο ολοκλήρωμα, δηλαδή το $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ θα το γράφουμε και ως $\int_a^b f\,d\phi$ αλλά και ως $\int_a^b f(t)\,d\phi(t)$.

Ορισμός 4.1 Μια συνάρτηση $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, όπου Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, λέγεται *παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο* Ω αν για κάθε ανοικτό κύκλο $S(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ η f παριστάνεται με δυναμοσειρά στον $S(z_0, \varepsilon)$.

Θεώρημα 4.2 *Έστω ότι $g : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής, $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη και $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\Omega \bigcap g([a, b]) = \emptyset$. Τότε*

i) *η συνάρτηση $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ με*

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\phi}{g - z} = \int_a^b \frac{d\phi(t)}{g(t) - z}$$

είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά.

ii) *ισχύει*

$$f^{(n)}(z) = n! \int_a^b \frac{d\phi}{(g - z)^{n+1}} = n! \int_a^b \frac{d\phi(t)}{(g(t) - z)^{n+1}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus g([a, b])$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε, από τον τύπο άθροισης της γεωμετρικής προόδου, ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g(t) - z_0} \left(\frac{z - z_0}{g(t) - z_0} \right)^n = \frac{1}{g(t) - z} \tag{4.1}$$

αν η σειρά συγκλίνει. Αν θεωρήσουμε σταθερό το $z \in S(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ τότε η σειρά αυτή, ως συνάρτηση του t, συγκλίνει ομοιόμορφα. Πράγματι, η μεν $1/|g(t) - z_0|$ είναι φραγμένη συνάρτηση του t, έστω από το $M > 0$, διότι είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $|g(t) - z_0| \geq \varepsilon$ (αφού $\Omega \cap g([a, b]) = \emptyset$), και

$$\left|\frac{z - z_0}{g(t) - z_0}\right| \leq \frac{|z - z_0|}{\varepsilon} < 1.$$

Οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{g(t) - z_0}\left(\frac{z - z_0}{g(t) - z_0}\right)^n\right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{\varepsilon}\right|^n < +\infty.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα του Weierstrass, η σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων του t στην (4.1) είναι ομοιόμορφη.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ([1] Θεώρημα 4.3.2) ότι

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(g(t) - z_0)^{n+1}}\right) d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b \frac{d\phi}{(g(t) - z_0)^{n+1}}\right)(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ όπου } a_n = \int_a^b \frac{d\phi}{(g - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ως γνωστόν (με επαγωγή) $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Παρατήρηση 4.3 Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι η κατηγορία των συναρτήσεων που είναι παραστάσιμες με δυναμοσειρά είναι μεγάλη.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 4.1** Έστω ότι $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ και $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη. Τότε

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)\, dt \in \overline{\langle f([a, b]) \rangle}.$$

***Άσκηση* 4.2** Έστω ότι το Ω είναι ανοικτό και κυρτό, και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη με την $\operatorname{Re} f'$ να μην έχει ρίζα στο Ω. Τότε η f είναι 1-1.

4.1 Καμπύλες με μήκος

Ορισμός 4.4

i) Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ λέγεται καμπύλη στο $\mathbb{C}$.

ii) Το σύνολο $\gamma^* = \{\gamma(t) \,:\, a \leq t \leq b\} = \gamma([a, b])$ λέγεται *ίχνος* της γ ή *εικόνα* της γ.

iii) Το ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ το ονομάζουμε *μήκος* της καμπύλης γ και το συμβολίζουμε με $\mu(\gamma)$. Ο λόγος είναι ότι μια προσέγγιση του μήκους καμπύλης με βάση μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ είναι το άθροισμα $\sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$, και εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα μέσης τιμής του απειροστικού λογισμού για την κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη γ, αυτό γράφεται $\sum_{i=1}^n |\gamma'(r_i)|(t_i - t_{i-1})$ για κατάλληλα ενδιάμεσα σημεία r_i. Συνεπώς όταν η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

iv) Η κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη γ λέγεται *ευθυγραμμίσιμη ή καμπύλη με μήκος* αν $\mu(\gamma) < +\infty$.

Παραδείγματα

i) Έστω ότι $a, b \in \mathbb{C}$. Η καμπύλη $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ καλείται (προσανατολισμένο) *ευθύγραμμο τμήμα* με πρώτο άκρο το a και δεύτερο το b και συμβολίζεται μερικές φορές και $[a,b]$. Το μήκος αυτής είναι
$$\mu(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|.$$

ii) Η καμπύλη $\gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = a + re^{it}$ όπου $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ καλείται (προσανατολισμένη) *περιφέρεια* κέντρου a και ακτίνας r και συμβολίζεται με $C(a,r)$. Το μήκος αυτής είναι
$$\mu(C(a,r)) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

iii) Η καμπύλη $\gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, $a, b > 0$ είναι η (προσανατολισμένη) *έλλειψη* με ημιάξονες a, b.

Πρόταση 4.5 *Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλη με μήκος και $\phi : [c,d] \mapsto [a,b]$ μια κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη και γνήσια αύξουσα (ή γνήσια φθίνουσα). Τότε $\mu(\gamma \circ \phi) = \mu(\gamma)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η ϕ είναι γνήσια αύξουσα, άρα $\phi'(x) > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$.
$$\begin{aligned}\mu(\gamma \circ \phi) &= \int_c^d \big|(\gamma \circ \phi)'(t)\big|\,dt = \int_c^d \big|(\gamma'(\phi(t))\phi'(t)\big|\,dt \\ &= \int_c^d \big|(\gamma'(\phi(t))\big|\phi'(t)\,dt. \qquad (\text{αφού } \phi'(x) > 0)\end{aligned}$$

Από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών του Απειροστικού Λογισμού, θέτοντας $s = \phi(t)$ θα έχουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με $\int_a^b |\gamma'(s)|\,ds = \mu(\gamma)$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Ομοίως αν η ϕ είναι γνήσια φθίνουσα (η ϕ' θα βγει από την απόλυτη τιμή με ένα επιπλέον πλην αλλά το s τώρα θα κυμαίνεται από b έως a). □

Ορισμός 4.6

i) Έστω ότι $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλες. Λέμε ότι η γ_1 είναι ισοδύναμη με τη γ_2 (και γράφουμε $\gamma_1 \sim \gamma_2$) αν υπάρχει $\phi : [c, d] \mapsto [a, b]$ κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη, γνήσια αύξουσα (άρα και 1-1) και επί ώστε $\gamma_1 \circ \phi = \gamma_2$.

ii) Θεωρούμε μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως αντίθετη καμπύλη της γ την $-\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ με $(-\gamma)(t) := \gamma(a + b - t)$. Παρατηρούμε ότι $-\gamma = \gamma \circ \phi$ όπου $\phi : [a, b] \mapsto [a, b]$ με $\phi(t) = a + b - t$.

iii) Έστω ότι $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Ορίζουμε το άθροισμά τους $\gamma_1 + \gamma_2$ να είναι η καμπύλη $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, b + d - c] \mapsto \mathbb{C}$ με

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{αν } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t + c - b), & \text{αν } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Πρόταση 4.7 *Ισχύουν τα παρακάτω:*

i) *Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

ii) *Αν $\gamma_1 \sim \gamma_2$ τότε $\mu(\gamma_1) = \mu(\gamma_2)$.*

iii) $\mu(-\gamma) = \mu(\gamma)$.

iv) *Αν $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ τότε $\mu(\gamma_1 + \gamma_2) = \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$.*

Απόδειξη: (i) Αφήνεται ως άσκηση με την παρατήρηση ότι αν $\gamma_1 \circ \phi = \gamma_2$ όπου $\phi : [a, b] \mapsto [c, d]$ κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη, γνήσια αύξουσα και επί τότε $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi^{-1}$ όπου $\phi^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]$ είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη, γνήσια αύξουσα και επί.

Τα (ii) και (iii) είναι άμεσες συνέπειες της Πρότασης 4.5.

(iv) Η $\phi : [b, b + d - c] \mapsto [c, d]$ με $\phi(t) = t + c - b$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνήσια αύξουσα και επί απεικόνιση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(\gamma_1 + \gamma_2) &= \int_a^{b+d-c} \left|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\right| dt \\
&= \int_a^b \left|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\right| dt + \int_b^{b+d-c} \left|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\right| dt \\
&= \int_a^b \left|\gamma_1'(t)\right| dt + \int_b^{b+d-c} \Big|(\gamma_2(t + c - b))'(t)\Big| dt \\
&= \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2 \circ \phi) \\
&= \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2) \qquad \text{(από την Πρόταση 4.5)} \quad \square
\end{aligned}$$

4.2 Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

Ορισμός 4.8 Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι ευθυγραμμίσιμη καμπύλη, κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη και $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f επί της γ το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f \circ \gamma\,d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Παρατήρηση 4.9 i) Έστω ότι

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} = \sup_{t\in[a,b]}\Big|f(\gamma(t))\Big| < +\infty.$$

Τότε από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b \Big|f(\gamma(t))\gamma'(t)\Big|\,dt \le \|f\|_\infty \mu(\gamma).$$

ii) Έστω ότι οι $f_n : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (αντίστοιχα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n$) συγκλίνει ομοιόμορφα στη (συνεχή) f. Τότε ισχύει $\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz$ (αντίστοιχα $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$), γεγονός που προκύπτει αμέσως από το προηγούμενο και το ότι

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,dz\right| \le \|f_n - f\|_\infty \mu(\gamma).$$

Παραδείγματα 4.10 i) Αν $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλη και $f = c$ σταθερή συνάρτηση τότε $\int_\gamma c\,dz = \int_a^b c\gamma'(t)\,dt = c(\gamma(b) - \gamma(a))$.

ii) Θεωρούμε $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ και το ευθύγραμμο τμήμα $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$. Αν η $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,d(z_1 + (z_2 - z_1)t)\\ &= (z_2 - z_1)\int_0^1 f(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,dt.\end{aligned}$$

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,d(z_1 + (z_2 - z_1)t)\\ &= \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

iii) Έστω ότι $\gamma = C(a, r)$ και $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,d\gamma(t) = ir\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{it}\,dt.$$

Ιδιαίτερα για $f(z) = (z - a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= ir\int_0^{2\pi} (re^{it})^n e^{it}\,dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt \\ &= ir^{n+1}\left[\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t)\,dt + i\int_0^{2\pi} \sin((n+1)t)\,dt\right] \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i r^{n+1}, & n = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{C(a,r)} (z - a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i r^{n+1}, & n = -1. \end{cases}$$

Πρόταση 4.11 *Έστω ότι η $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη με μήκος, $\phi : [c, d] \mapsto [a, b]$ συνεχής, γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα γνήσια φθίνουσα) και επί, και $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz$ (αντίστοιχα $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz$).*

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz &= \int_c^d f((\gamma\circ\phi)(t))(\gamma\circ\phi)'(t)\,dt \\ &= \int_c^d f\Big(\gamma(\phi(t))\Big)\gamma'(\phi(t))\phi'(t)\,dt\end{aligned}$$

Από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής του Απειροστικού Λογισμού, και θέτοντας $s = \phi(t)$ θα έχουμε $ds = \phi'(t)dt$ οπότε

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz &= \int_c^d f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \\ &= \int_\gamma f(z)\,dz,\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πρόταση 4.12 *Θεωρούμε τις καμπύλες στον Ορισμό 4.6 και μια συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στα ίχνη τους. Τότε έχουμε*

i) *Αν* $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *τότε* $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

ii) $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$.

iii) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

Απόδειξη: Τα (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 4.11.

(iii)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_a^{b+d-c} f\circ(\gamma_1+\gamma_2)\,d(\gamma_1+\gamma_2)\\ &= \int_a^b f\circ\gamma_1\,d\gamma_1 + \int_b^{b+d-c} f\circ\gamma_2\circ\phi\,d(\gamma_2\circ\phi)\\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2\circ\phi} f(z)\,dz\\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz, \qquad \text{(από την Πρόταση 4.11)}\end{aligned}$$

όπου $\phi : [b, b+d-c] \mapsto [c, d]$ με $\phi(t) = t+c-b$ (δείτε Πρόταση 4.7(iv)). □

Θεώρημα 4.13 *Έστω ότι* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *ανοικτό,* $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ *ευθυγραμμίσιμη κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη και* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ *συνεχής συνάρτηση με παράγουσα (δηλαδή υπάρχει* $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ *ώστε* $F' = f$*). Τότε*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Απόδειξη: Αφού η γ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη τότε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\circ\gamma\,d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$ □

Πόρισμα 4.14 *Έστω ότι η* $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *είναι κλειστή καμπύλη με μήκος* (κλειστή *καλείται αν* $\gamma(b) = \gamma(a)$*). Τότε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ *ισχύει* $\int_\gamma z^n\,dz = 0$.

Απόδειξη: Η $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$ είναι παράγουσα της $f(z) = z^n$. Άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $\int_\gamma z^n\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 4.3 Αν $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ είναι συνεχής, $f_n \to f$ (αντίστοιχα $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$) και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, τότε $\int_\gamma f_n\,dz \to \int_\gamma f\,dz$ για κάθε καμπύλη με μήκος γ στο Ω.

***Άσκηση* 4.4** Να υπολογιστούν τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^n}\, dz,\ n \geq 1 \qquad I_2 = \int_{[-i,i]} z\, dz \qquad I_3 = \int_{[-i,i]} |z|\, dz$$

Κεφάλαιο 4΄

Μιγαδική Ολοκλήρωση

Στο κεφάλαιο αυτό της ολοκλήρωσης θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης f πάνω σε μια καμπύλη του επιπέδου. Στην ουσία πρόκειται για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα όπως το γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό με τη διαφορά ότι η f δεν έχει απαραίτητα πραγματικές τιμές, αλλά τιμές στο $\mathbb{C}$. Όπως και στον απειροστικό λογισμό το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπάρχει πάντα, και η ύπαρξη του τώρα εξαρτάται όχι μόνο απο την f αλλά και από την καμπύλη πάνω στην οποία ολοκληρώνουμε. Στα παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια γενική κατηγορία καμπυλών, τις καμπύλες «φραγμένης κύμανσης», στις οποίες οι συνεχείς (τουλάχιστον) συναρτήσεις έχουν ολοκλήρωμα.

Αν $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ μια παραμετροποίηση της καμπύλης στην οποία θα ολοκληρώσουμε, τότε είναι φανερό, ακολουθώντας τις τεχνικές του απειροστικού λογισμού, ότι πρέπει να κατασκευάσουμε αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{i=0}^{n} f(\phi(r_i))(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})),$$

όπου $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ διαμέριση του $[a, b]$ και $t_{i-1} < r_i < t_i$ ενδιάμεσα σημεία της διαμέρισης, επιδιώκωντας να πετύχουμε μια οριακή τιμή όταν η λεπτότητα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν. Αν αυτή η οριακή τιμή υπάρχει θα την ονομάσουμε «ολοκλήρωμα». Επειδή σε αντίθεση με τον απειροστικό λογισμό οι τιμές της f δεν πολλαπλασιάζονται με τις διαφορές $t_i - t_{i-1}$ αλλά με τις διαφορές $\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})$ το ολοκλήρωμα αυτό λέγεται «Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes». Τον ακριβή ορισμό του θα τον δούμε παρακάτω.

4.1΄ Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

Ορισμός 4.1΄ Έστω ότι a, $b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Ένα πεπερασμένο σύνολο $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ καλείται *διαμέριση* του $[a, b]$. Το σύνολο των διαμερίσεων του $[a, b]$ το συμβολίζουμε με $\mathcal{D}[a, b]$. Τον αριθμό $\lambda(P) = \max\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ καλούμε *λεπτότητα* της διαμέρισης $\mathcal{P}$.

Ορισμός 4.2΄ Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ (αντίστοιχα $\mathbb{R}^n$) είναι μια συνάρτηση και $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Συμβολίζουμε με Δf_i τη διαφορά $f(t_i) - f(t_{i-1})$.

i) Καλούμε *κύμανση* (μεταβολή) της f ως προς την P τον αριθμό

$$V(f, P|a,b) = V(f,P) := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i|.$$

ii) Καλούμε *ολική κύμανση* της f στο $[a,b]$ τον αριθμό

$$V(f,a,b) = V(f) = \sup_{P \in \mathcal{D}[a,b]} V(f,P).$$

iii) Η f καλείται φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ αν $V(f) < +\infty$.

Παραδείγματα 4.3΄

i) Αν η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μονότονη τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης και $V(f) = |f(b) - f(a)|$.

ii) Αν για την $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ υπάρχει η παράγωγος f' και είναι φραγμένη (δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$) τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης (λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής).

iii) Αν η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) είναι φραγμένης κύμανσης τότε η f είναι και φραγμένη (αφού αν $x \in [a,b]$ τότε $|f(x) - f(a)| \leq V(f)$).

Η $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin(1/x)$ για $x \in (0,1]$ και $f(0) = 0$, δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Πράγματι για τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2\pi(n-1) + \frac{\pi}{2}}, \right. \\ \left. \frac{1}{2\pi(n-1) - \frac{\pi}{2}}, \ldots, \frac{1}{2\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2\pi - \frac{\pi}{2}}, 1\right\}$$

ελέγχουμε εύκολα ότι ισχύει $V(f, P_n) = 2n \to +\infty$.

Παρατήρηση 4.4΄ Αν $P \subseteq Q$ δυο διαμερίσεις του $[a,b]$ τότε από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει ότι $V(f,P) \leq V(f,Q)$ (Άσκηση 4.1). Κατά συνέπεια αν P_0 διαμέριση του $[a,b]$ ισχύει

$$V(f) = \sup\{V(f,P) : P \in \mathcal{D}[a,b] \text{ και } P \supseteq P_0\}.$$

Πράγματι, αν ονομάσουμε p_0 την ποσότητα στα δεξιά, από τον ορισμό της $V(f)$ φανερά ισχύει $p_0 \leq V(f)$. Ενώ αν $\varepsilon > 0$, επειδή υπάρχει P διαμέριση του $[a,b]$ ώστε $V(f,P) \geq V(f) - \varepsilon$ θα ισχύει $p_0 \geq V(f, P \cup P_0) \geq V(f,P) \geq V(f) - \varepsilon$, δηλαδή $p_0 \geq V(f) - \varepsilon$, και άρα $p_0 = V(f)$.

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη σχέση της κύμανσης μιας $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) με την ϕ' όταν αυτή υπάρχει και είναι συνεχής. Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση η ϕ έχει πεδίο ορισμού ένα διάστημα πραγματικών αριθμών (και όχι το $\mathbb{C}$). Έτσι η ϕ' δεν είναι η μιγαδική παράγωγος αλλά η παράγωγος όπως αυτή ορίζεται στον Απειροστικό Λογισμό. Τόσο η παράγωγος όσο και το ολοκλήρωμα σε αυτή την περίπτωση εννοούνται κατά συντεταγμένη. Έτσι αν $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ με τις ϕ_j να έχουν συνεχή παράγωγο για κάθε $j = 1, \dots, n$ τότε $\phi'(t) = (\phi_1'(t), \dots, \phi_n'(t))$ και ισχύει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_x^y \phi'(t)\,dt &= \left(\int_x^y \phi_1'(t)\,dt, \dots, \int_x^y \phi_n'(t)\,dt\right)\\ &= (\phi_1(y) - \phi_1(x), \dots, \phi_n(y) - \phi_n(x)) = \phi(y) - \phi(x),\end{aligned}$$

για κάθε x, $y \in [a, b]$ (δείτε [5]). Στο παρακάτω η παράσταση $|\phi'(t)|$ είναι το μέτρο του μιγαδικού $\phi'(t)$ και αν η ϕ έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^n$ τότε είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $\phi'(t)$.

***Πρόταση 4.5΄** *Αν η συνάρτηση $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) είναι συνεχώς διαφορίσιμη (δηλαδή υπάρχει η ϕ' στο $[a, b]$ και είναι συνεχής σε αυτό) τότε η ϕ είναι φραγμένης κύμανσης και $V(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|\,dt$.*

Για την απόδειξη θα γράφουμε $S(|\phi'|, P)$ για το άθροισμα $\sum_{i=1}^n |\phi'(t_i)|(t_i - t_{i-1})$, το οποίο είναι το άθροισμα Riemann της $|\phi'|$ στη διαμέριση P με επιλογή ενδιάμεσων σημείων τα t_i· τα δεξιά άκρα των διαστημάτων της διαμέρισης.

Απόδειξη: Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Η ϕ' είναι συνεχής, άρα (από τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann στον Απειροστικό Λογισμό) υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ με $\lambda(P) < \delta_1$ να ισχύει

$$\left|S(|\phi'|, P) - \int_a^b |\phi'(t)|\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Η ϕ' είναι ομοιόμορφα συνεχής ([1] Θεώρημα 3.4.12), άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε για κάθε $t_1, t_2 \in [a, b]$ με $|t_1 - t_2| < \delta_2$ να ισχύει $|\phi'(t_1) - \phi'(t_2)| < \varepsilon/(2(b - a))$.

Θεωρούμε διαμέριση Q του $[a, b]$ με $\lambda(Q) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, και διαμέριση $P = \{x_0 \le \dots \le x_n\}$ του $[a, b]$ με $P \supseteq Q$. Τότε $\lambda(P) \le \delta_1$ και άρα

$$\left|S(|\phi'|, P) - \int_a^b |\phi'(t)|\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\left|V(\phi,P)-S(|\phi'|,P)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\Big(\left|\phi(x_i)-\phi(x_{i-1})\right|-\left|\phi'(x_i)\right|(x_i-x_{i-1})\Big)\right| \\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi'(t)\,dt\right|-\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi'(x_i)\,dt\right|\right)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi'(t)\,dt-\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi'(x_i)\,dt\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\phi'(t)-\phi'(x_i)\right|dt \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι για κάθε $t\in[x_{i-1},x_i]$ έχουμε ότι $|t-x_i|\leq\lambda(P)\leq\lambda(Q)<\delta_2$ οπότε $|\phi'(t)-\phi'(x_i)|<\varepsilon/(2(b-a))$.

Συνεπώς

$$\left|V(\phi,P)-S(|\phi'|,P)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Από τις (4.1) και (4.2) παίρνουμε ότι

$$\int_a^b|\phi'|\,dt-\varepsilon<V(\phi,P)<\int_a^b|\phi'(t)|\,dt+\varepsilon$$

για κάθε διαμέριση $P\supseteqq Q$. Άρα (από την Παρατήρηση 4.4΄, και παίρνοντας supremum ως προς $P\in\mathcal{D}[a,b]$ με $P\supseteqq Q$)

$$\int_a^b|\phi'|\,dt-\varepsilon<V(\phi)\leq\int_a^b|\phi'(t)|\,dt+\varepsilon$$

και συνεπώς $V(\phi)=\int_a^b|\phi'(t)|\,dt$. □

Παρατήρηση 4.6΄ Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευτεί αφού γίνει η ακόλουθη σύμβαση: το $\int_a^b f(t)\,dt$ έχει νόημα και όταν η f ορίζεται σε όλο το $[a,b]$ εκτός από περασμένο πλήθος σημείων $x_1<x_2<\dots<x_n$, στα οποία αν θέσουμε τιμές $f(x_i)=a_i$, $i=1,2,\dots,n$, υπάρχει το $\int_a^b f(t)\,dt$, και μάλιστα είναι ανεξάρτητο από τις τιμές αυτές. Αν η ϕ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη, δηλαδή υπάρχουν $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ώστε η ϕ' να υπάρχει και να είναι συνεχής σε κάθε $[x_i,x_{i-1}]$, $i=1,2,\dots,n$ τότε $V(\phi)=\int_a^b|\phi'(t)|\,dt$. Η απόδειξη είναι συνδυασμός των Προτάσεων 4.9΄ και 4.5΄. Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης ϕ είναι μια τεθλασμένη γραμμή.

Πρόταση 4.7΄ *Αν f, $g : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης και $\lambda \in \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$, λf, $f \cdot g$ είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης και ισχύουν $V(f \pm g) \leq V(f) + V(g)$ και $V(\lambda f) \leq |\lambda| V(f)$.*

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση με την ακόλουθη υπόδειξη για την $f \cdot g$: Θέτουμε $h = fg$. Από το Παράδειγμα (iii) έχουμε ότι υπάρχουν A, $B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A$ και $|g(x)| \leq B$ για κάθε $x \in [a,b]$. Παρατηρούμε τώρα ότι $\Delta h_i = f(t_i)\Delta g_i + g(t_{i-1})\Delta f_i$ άρα

$$\sum |\Delta h_i| \leq A \sum |\Delta g_i| + B \sum |\Delta f_i| \leq AV(g) + BV(f).$$

Πρόταση 4.8΄ *Έστω ότι $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$, $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$. Τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ αν και μόνο αν οι f_1 και f_2 είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$. Επιπλέον ισχύει $V(f_1), V(f_2) \leq V(f) \leq V(f_1) + V(f_2)$.*

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση καθώς και η γενίκευσή της για την περίπτωση που $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ (Άσκηση 4.2).

Πρόταση 4.9΄ *Έστω ότι $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) και $a \leq x \leq b$. Τότε*

$$V(f,a,b) = V(f,a,x) + V(f,x,b).$$

Απόδειξη: Έστω ότι το $P = \{t_0 \leq \dots \leq t_n\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και i_0 ο δείκτης για τον οποίο ισχύει $t_{i_0-1} \leq x \leq t_{i_0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} V(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_0-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{i_0-1}) - f(x)| \\ &\qquad\qquad + |f(x) - f(t_{i_0})| + \sum_{i=i_0+1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &\leq V(f,a,x) + V(f,x,b). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Άρα $V(f,a,b) = \sup_{P \in \mathcal{D}[a,b]} V(f,P) \leq V(f,a,x) + V(f,x,b)$. Αντιστρόφως, αν Q_1, Q_2 διαμερίσεις των $[a,x]$ και $[x,b]$ αντίστοιχα. Θέτουμε $Q = Q_1 \cup Q_2$. Η Q είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ισχύει

$$V(f,Q_1) + V(f,Q_2) = V(f,Q) \leq V(f,a,b).$$

Παίρνοντας supremum ως προς $Q_1 \in \mathcal{D}[a,x]$ και $Q_2 \in \mathcal{D}[x,b]$ προκύπτει η αντίστροφη της (4.3). □

Πόρισμα 4.10΄ *Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Η συνάρτηση $U_f(x) = V(f,a,x)$, η οποία λέγεται* συνάρτηση κύμανσης *της f, είναι αύξουσα και φραγμένη.* □

Θεώρημα 4.11΄ *Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ (ή $\mathbb{R}^n$) είναι φραγμένης κύμανσης και συνεχής. Τότε η συνάρτηση κύμανσης της f, $U_f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$: $U_f(x) = V(f,a,x)$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω ότι $y \in (a,b]$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{t\to y-} U_f(t) = U_f(y)$. Επειδή όμως η U_f είναι αύξουσα ισχύει $\lim_{t\to y-} U_f(t) = \sup_{t\in[a,y]} U_f(t)$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\sup_{t\in[a,y]} U_f(t) = U_f(y)$, και για αυτό αρκεί για κάθε $\varepsilon > 0$ να βρούμε $t \in [a,y]$ ώστε $U_f(t) \geq U_f(y) - \varepsilon$, αφού η αντίστροφη, δηλαδή η $\sup_{t\in[a,y]} U_f(t) \leq U_f(y)$ είναι άμεση από το ότι η U_f είναι αύξουσα. Ισοδύναμα, αρκεί να βρούμε $t \in [a,y]$ ώστε $V(f,a,t) \geq V(f,a,y) - \varepsilon$.

Από τον ορισμό της $V(f,a,y)$ Θεωρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = y\}$ του $[a,y]$ ώστε $V(f,P,a,y) \geq V(f,a,y) - \varepsilon/2$. Έτσι ισχύει

$$V(f,a,y) - \varepsilon/2 \leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(y) - f(x_{n-1})|. \qquad (4.4)$$

Επιλέγουμε $t \in [x_{n-1}, y]$ ώστε $|f(y) - f(t)| < \varepsilon/2$ το οποίο υπάρχει, αφού η f είναι συνεχής. Συνεχίζοντας τώρα από την (4.4) με τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} V(f,a,y) - \varepsilon/2 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(t) - f(x_{n-1})| + |f(y) - f(t)| \\ &\leq V(f,a,t) + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

που ήταν η ζητούμενη.

Ομοίως, αν $y \in [a,b)$, αποδεικνύεται ότι $\lim_{t\to y+} U_f(t) = U_f(y)$. Άρα η U_f είναι συνεχής. □

Θεώρημα 4.12΄ *Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις f^+, $f^- : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ αύξουσες και φραγμένες ώστε $f = f^+ - f^-$.*

Αν η f είναι και συνεχής τότε και οι f^+, f^- είναι συνεχείς.

Απόδειξη: Θέτουμε $f^+ = U_f$ και $f^- = f^+ - f$. Τότε $f = f^+ - f^-$, και αφού η f είναι φραγμένης κύμανσης οι f^+ και f^- είναι φραγμένες. Η f^+ είναι αύξουσα (Πόρισμα 4.10΄) καθώς και η f^-: έστω $a \leq x \leq y \leq b$. Έχουμε

$$f^-(y) - f^-(x) = U_f(y) - U_f(x) - (f(x) - f(y)).$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{x \leq y\}$ του $[x,y]$. Τότε έχουμε $V(f,P) \leq V(f,x,y)$, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq V(f,x,y)$. Αλλά

$$V(f,x,y) = V(f,a,y) - V(f,a,x)$$

(από την Πρόταση 4.9΄). Άρα $f(y) - f(x) \leq V(f,a,y) - V(f,a,x)$ δηλαδή

$$f^-(y) - f^-(x) = U_f(y) - U_f(x) - (f(y) - f(x)) \geq 0.$$

Ώστε η f^- είναι αύξουσα. Αν η f είναι συνεχής τότε είναι συνεχής και η f^+ (Θεώρημα 4.11΄) άρα και η $f^- = f^+ - f$. □

Από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει άμεσα ότι δεν είναι όλες οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης (αν ήταν, τότε ως διαφορά αυξουσών, για παράδειγμα θα υπήρχαν πάντα τα πλευρικά όρια σε κάθε σημείο).

Προφανώς η ανάλυση $f = f^+ - f^-$ δεν είναι μοναδική (για παράδειγμα $f = f^+ - f^- = (f^+ + c) - (f^- + c)$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$). Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι $f^+ = U_f$.

Πόρισμα 4.13΄ *Έστω ότι η $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Τότε υπάρχουν ϕ_1^+, ϕ_1^-, ϕ_2^+, ϕ_2^- αύξουσες συναρτήσεις ώστε $\phi = \phi_1^+ - \phi_1^- + i(\phi_2^+ - \phi_2^-)$.*

Αν η ϕ είναι και συνεχής τότε και οι ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 και ϕ_4 είναι και αυτές συνεχείς.

Απόδειξη: Θέτουμε $\phi_1 = \operatorname{Re}\phi$, $\phi_2 = \operatorname{Im}\phi$. Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια της Πρότασης 4.8΄ και του Θεωρήματος 4.12΄. □

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1 Αποδείξτε ότι η κύμανση $V(f, P)$ μιας συνάρτησης $f : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι αύξουσα συνάρτηση της διαμέρισης P. Δηλαδή αν $P \Subset Q$ δυο διαμερίσεις του $[a, b]$ τότε $V(f, P) \leq V(f, Q)$.

Άσκηση 4.2 Αποδείξτε την Πρόταση 4.8΄ και τη γενίκευσή της με τη βοήθεια της ανισοτικής σχέσης

$$|x_j| \leq \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ και για κάθε $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4.3 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{\pi}{x}, & \text{αν } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και δεν είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης.

4.2΄ Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Ορισμός 4.14΄ Έστω ότι $f, \phi : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \in \mathcal{D}[a, b]$ και $T = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P. Ορίζουμε ως ενδιάμεσο άθροισμα της f ως προς P και T τον αριθμό

$$S(P,T) = S(f,\phi,P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})).$$

Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann-Stieltjes ως προς ϕ αν υπάρχει αριθμός I ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν P διαμέριση του $[a,b]$ με $\lambda(P) < \delta$ να ισχύει $|S(P,T) - I| < \varepsilon$ για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων T της P. Τον αριθμό I εφόσον υπάρχει, τον λέμε και όριο του αθροίσματος $S(f,\phi,P,T)$ καθώς $\lambda(P) \to 0$ και γράφουμε $I = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,\phi,P,T)$. Το όριο αυτό το καλούμε τότε ολοκλήρωμα κατά Riemann-Stieltjes της f ως προς ϕ και το συμβολίζουμε με $\int_a^b f\,d\phi$.

Παρατήρηση 4.15΄ Προσέξτε ότι το παραπάνω όριο δεν εμπίπτει ακριβώς στην έννοια του ορίου όπως την γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, διότι η ποσότητα $S(P,T)$ *δεν* είναι συνάρτηση της λεπτότητας $\lambda(P)$ της διαμέρισης P, αλλά της ίδιας της διαμέρισης. Αυτό διότι είναι φανερό ότι μπορεί για δύο διαμερίσεις P_1 και P_2 να ισχύει $\lambda(P_1) = \lambda(P_2)$ αλλά $S(P_1,T_1) \neq S(P_2,T_2)$ ακόμα και αν τα T_1 και T_2 ταυτίζονται. Για έναν εναλλακτικό ορισμό δείτε την Άσκηση 4.4.

Παρατήρηση 4.16΄

i) Αν η f είναι σταθερή ίση με c τότε το $\int_a^b f\,d\phi$ υπάρχει και ισχύει $\int_a^b f\,d\phi = c(\phi(b) - \phi(a))$. Πράγματι $S(f,\phi,P,T) = \sum_{i=1}^{n} c(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) = c(\phi(b) - \phi(a))$ για κάθε $(P,T) \in \mathcal{D}$.

ii) Είναι φανερό ότι αν $f = f_1 + if_2$ και $\phi = \phi_1 - \phi_2 + i(\phi_3 - \phi_4)$ τότε

$$\begin{aligned} S(f,\phi,P,T) = S(f_1,\phi_1,P,T) &- S(f_1,\phi_2,P,T) \\ &- S(f_2,\phi_3,P,T) + S(f_2,\phi_4,P,T) \\ + i(S(f_2,\phi_1,P,T) &- S(f_2,\phi_2,P,T) \\ &+ S(f_1,\phi_3,P,T) - S(f_1,\phi_4,P,T)). \end{aligned}$$

Άρα αν υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_a^b f_i\,d\phi_j = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f_i,\phi_j,P,T)$ για $i = 1,2$ και $j = 1,2,3,4$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f\,d\phi$ υπάρχει και ισούται με

$$\begin{aligned} \int_a^b f\,d\phi = \int_a^b f_1\,d\phi_1 - \int_a^b f_1\,d\phi_2 - \int_a^b f_2\,d\phi_3 + \int_a^b f_2\,d\phi_4 \\ + i\Big(\int_a^b f_2\,d\phi_1 - \int_a^b f_2\,d\phi_2 + \int_a^b f_1\,d\phi_3 - \int_a^b f_1\,d\phi_4\Big). \end{aligned}$$

iii) Αν $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ και το $\int_a^b f\,d\phi$ υπάρχει τότε $|\int_a^b f\,d\phi| \leq$

$MV(\phi)$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}|S(f,\phi,P,T)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(r_i)(\phi(t_i)-\phi(t_{i-1}))\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |f(r_i)|\,|\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})| \le M\sum_{i=1}^{n} |\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})| \\ &\le MV(\phi).\end{aligned}$$

Άρα $|\int_a^b f\,d\phi| = |\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,\phi,P,T)| \le MV(\phi)$.

iv) Αν f, $\phi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ με f συνεχή και ϕ αύξουσα, $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ και ενδιάμεσα σημεία $T = \{(t_i)_{i=1}^n : t_{i-1} < r_i < t_i\}$, θεωρούμε, όπως και στον Απειροστικό Λογισμό, τις ποσότητες

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})), \quad \text{όπου} \quad m_i = \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\,(\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})), \quad \text{όπου} \quad M_i = \sup_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \\ R(f,P,T) &= \sum_{i=1}^{n} f(r_i)\,(\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})). \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε (ακριβώς όπως και στο ολοκλήρωμα Riemann) ότι για οποιεσδήποτε διαμερίσεις P, Q του $[a,b]$ ισχύει

$$L(f,P) \le U(f,Q). \tag{4.5}$$

(Αν P_2 εκλέπτυνση της P_1 τότε $L(f,P_1) \le L(f,P_2)$ και $U(f,P_1) \ge U(f,P_2)$, οπότε για τυχούσες P, Q, επειδή η $P \cup Q$ είναι εκλέπτυνση και της P και της Q προκύπτει $L(f,P) \le L(f,P\cup Q) \le U(f,P\cup Q) \le U(f,Q)$.)

Επειδή η ϕ έχει τώρα υποτεθεί αύξουσα και πραγματική συνάρτηση ισχύει $\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) \ge 0$ και επειδή η f έχει ως συνεχής στο $[a,b]$ είναι φραγμένη ισχύει $-\infty < m_i \le M_i < \infty$. Κατά συνέπεια

$$L(f,P) \le R(f,P,T) \le U(f,P)$$

για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων T.

Το θεώρημα που θα ακολουθήσει μας δίνει μια συνθήκη για την καμπύλη ϕ ώστε τουλάχιστον οι συνεχείς συναρτήσεις να έχουν ολοκλήρωμα. Θα χρειαστούμε όμως πρώτα ένα λήμμα:

Λήμμα 4.17΄ *Αν $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και για οποιεσδήποτε ακολουθίες διαμερίσεων P_n και Q_n με $\lambda(P_n) \to 0$ και $\lambda(Q_n) \to 0$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty}(U(f,P_n) - U(f,Q_n)) = 0$ τότε το όριο $\lim_{\lambda(P)\to 0} U(f,P)$ υπάρχει.*

Απόδειξη: Η f ως συνεχής στο $[a,b]$ είναι φραγμένη, έστω ότι $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$ για κατάλληλο $M > 0$. Άρα για κάθε διαμέριση $P = \{x_i\}_{i=0}^n$ του $[a,b]$ ισχύει

$$|U(f,P)| \leq \sum_{i=1}^{n} |M_i|(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}) = M(b-a).$$

Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων Q_n με $\lambda(Q_n) \to 0$. Η $U(f,Q_n)$ είναι φραγμένη άρα υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω η $U(f,Q_{k_n})$ με όριο τον αριθμό I. Τώρα για κάθε ακολουθία P_n με $\lambda(P_n) \to 0$ από την υπόθεση ισχύει $\lim_{n\to+\infty}(U(f,P_n) - U(f,Q_{k_n})) = 0$. Προσθέτοντας την $\lim_{n\to+\infty} U(f,Q_{k_n}) = I$ παίρνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} U(f,P_n) = I$.

Έτσι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε ακολουθία διαμερίσεων P_n με $\lambda(P_n) \to 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} U(f,P_n) = I. \tag{4.6}$$

Αν τώρα το όριο $\lim_{\lambda(P)\to 0} U(f,P)$ δεν υπάρχει, τότε δεν είναι ίσο με I, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει διαμέριση P που εξαρτάται από το δ ώστε $|U(f,P) - I| \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας αυτό για $\delta = 1/n$ βρίσκουμε διαμέριση P_n με $\lambda(P_n) < 1/n$ ώστε $|U(f,P_n) - I| \geq \varepsilon$ αντιφάσκοντας με την (4.6). ☐

Θεώρημα 4.18΄ *Αν $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής και $\phi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ φραγμένης κύμανσης τότε υπάρχει το $\int_a^b f\,d\phi$.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.12΄ και την Παρατήρηση 4.16΄ (ii) αρκεί να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει αν f πραγματική, συνεχής συνάρτηση και ϕ πραγματική, αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση. Όπως και στην Παρατήρηση 4.16΄ (vi) ισχύει $L(f,P) \leq R(f,\phi,P,T) \leq U(f,P)$.

Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι τα όρια $\lim_{\lambda(P)\to 0} L(f,P)$ και $\lim_{\lambda(P)\to 0} U(f,P)$ υπάρχουν και είναι ίσα. Αυτό είναι προφανές αν ϕ σταθερή (είναι και τα δύο όρια μηδέν). Υποθέτουμε ότι ϕ όχι σταθερή, και αφού είναι αύξουσα ισχύει $\phi(a) < \phi(b)$.

Η f ως συνεχής στο συμπαγές $[a,b]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\lambda(P) < \delta$ να ισχύει $M_i - m_i < \varepsilon/(\phi(b) - \phi(a))$. Συνεπώς αν $\lambda(P) < \delta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{(\phi(b) - \phi(a))}\,(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Οπότε το όριο $\lim_{\lambda(P)\to 0}(U(f,P) - L(f,P))$ υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν. Μένει να δειχθεί ότι υπάρχει και το $\lim_{\lambda(P)\to 0} U(f,P)$. Αν δεν υπάρχει, τότε, από το Λήμμα 4.17΄, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και ακολουθίες διαμερίσων P_n και P'_n με $\lambda(P_n) \to 0$, $\lambda(P'_n) \to 0$ με $U(f,P_n) - U(f,P'_n) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (κανονικά $|U(f,P_n) - U(f,P'_n)| \geq \varepsilon$ αλλά όποτε $U(f,P_n) - U(f,P'_n) < 0$ μετονομάζουμε την P_n σε P'_n και την P'_n σε P_n). Αλλά από τα προηγούμενα $\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0$, άρα υπάρχει δείκτης k ώστε $U(f,P_k) - L(f,P_k) < \varepsilon/2$. Συνεπώς

$$L(f,P_k) - U(f,P'_k) \geq U(f,P_k) - \frac{1}{2}\varepsilon - U(f,P'_k) \geq \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon > 0$$

αντιφάσκοντας με την (4.5). □

Πρόταση 4.19΄ *Αν f, $g : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ συνεχείς, ϕ, $\psi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ φραγμένης κύμανσης και λ, $\mu \in \mathbb{C}$ και $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ ισχύουν:*

i) $\int_a^b (\lambda f + \mu g)\, d\phi = \lambda \int_a^b f\, d\phi + \mu \int_a^b g\, d\phi$.

ii) $\int_a^b f\, d(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda \int_a^b f\, d\phi + \mu \int_a^b f\, d\psi$.

iii) $\int_a^b f\, d\phi = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\, d\phi$.

Απόδειξη: Γράφουμε τη ϕ ως $(\phi_1^+ - \phi_1^-) + i(\phi_2^+ - \phi_2^-)$ με $\phi_j^\pm$ αύξουσες, $j = 1, 2$, και χρησιμοποιούμε την Παρατήρηση 4.16΄ (ii). □

Πρόταση 4.20΄ *Αν η $f_n : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η ακολουθία f_n (αντίστοιχα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n$) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια (συνεχή) συνάρτηση f και $\phi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ φραγμένης κύμανσης, τότε $\int_a^b f\, d\phi = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\, d\phi$ (αντίστοιχα $\int_a^b f\, d\phi = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b f_n\, d\phi$).*

Απόδειξη: Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon / V(\phi)$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ με τη βοήθεια της Παρατήρησης 4.16΄ (iii) έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n\, d\phi - \int_a^b f\, d\phi \right| = \left| \int_a^b (f_n - f)\, d\phi \right| \leq \frac{\varepsilon}{V(\phi)} V(\phi) = \varepsilon. \qquad \square$$

Πρόταση 4.21΄ *Αν f, $\phi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ με f συνεχή και ϕ συνεχώς διαφορίσιμη (ή κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη) ισχύει $\int_a^b f\, d\phi = \int_a^b f(t)\phi'(t)\, dt$.*

Απόδειξη: Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [a,b]$. Έστω ότι $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} \in \mathcal{D}[a,b]$, $T = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P και τα ενδιάμεσα αθροίσματα

$$S_1 = S(f,\phi,P,T) = \sum_{i=1}^n f(r_i)(\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}))$$
$$S_1 = S(f\phi',P,T) = \sum_{i=1}^n f(r_i)\phi'(r_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
|S_1 - S_2| &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(r_i)|\, |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) - \phi'(r_i)(t_i - t_{i-1})| \\
&\leq M \sum_{i=1}^{n} |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1}) - \phi'(r_i)(t_i - t_{i-1})|. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Έστω ότι $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, με $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Τότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του Απειροστικού Λογισμού υπάρχουν x_i, y_i με $t_{i-1} < x_i, y_i < t_i$ ώστε $\phi_1(t_i) - \phi_1(t_{i-1}) = \phi_1'(x_i)(t_i - t_{i-1})$ και $\phi_2(t_i) - \phi_2(t_{i-1}) = \phi_2'(y_i)(t_i - t_{i-1})$. Έτσι η (4.7) γράφεται

$$
|S_1 - S_2| \leq M \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\left(\phi_1'(x_i) - \phi_1'(r_i)\right)^2 + \left(\phi_2'(y_i) - \phi_2'(r_i)\right)^2}. \qquad (4.8)
$$

Οι ϕ_1', ϕ_2' είναι συνεχείς στο $[a,b]$ άρα είναι και ομοιόμορφα συνεχείς, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [a,b]$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει

$$
|\phi_1'(x) - \phi_1'(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}M(b-a)} \quad \text{και} \quad |\phi_2'(x) - \phi_2'(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}M(b-a)}.
$$

Από τα παραπάνω, αν $\lambda(P) < \delta$ είναι φανερό ότι

$$
|S_1 - S_2| \leq M \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \frac{\varepsilon}{M(b-a)} = \varepsilon.
$$

Συνεπώς

$$
\lim_{\lambda(P) \to 0} |S_1 - S_2| = \left| \int_a^b f\, d\phi - \int_a^b f(t)\phi'(t)\, dt \right| \leq \varepsilon.
$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ άρα $\int_a^b f\, d\phi = \int_a^b f(t)\phi'(t)\, dt$. □

Στα επόμενα θα γράφουμε $S(a,r)$ για τον ανοικτό κύκλο $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r \geq 0$. Επίσης θα γράφουμε $C(a,r)$ για την περιφέρεια του κύκλου κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r \geq 0$, δηλαδή για το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$.

Ορισμός 4.22΄ Μια συνάρτηση $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, όπου Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, λέγεται *παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο* Ω αν για κάθε ανοικτό κύκλο $S(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ η f παριστάνεται με δυναμοσειρά στον $S(z_0, \varepsilon)$.

Θεώρημα 4.23΄ *Έστω ότι $g : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής, $\phi : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ φραγμένης κύμανσης και $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό με $\Omega \cap g([a,b]) = \varnothing$. Τότε*

i) *η συνάρτηση* $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ *με*

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\phi}{g-z} = \int_a^b \frac{d\phi(t)}{g(t)-z}$$

είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά.

ii) *ισχύει*

$$f^{(n)}(z) = n! \int_a^b \frac{d\phi}{(g-z)^{n+1}} = n! \int_a^b \frac{d\phi(t)}{(g(t)-z)^{n+1}}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus g([a,b])$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε, από τον τύπο άθροισης της γεωμετρικής προόδου, ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g(t)-z_0}\left(\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right)^n = \frac{1}{g(t)-z} \tag{4.9}$$

αν η σειρά συγκλίνει. Αν θεωρήσουμε σταθερό το $z \in S(z_0, \varepsilon) \sqsubseteq \Omega$ τότε η σειρά αυτή, ως συνάρτηση του t, συγκλίνει ομοιόμορφα. Πράγματι, η μεν $1/|g(t)-z_0|$ είναι φραγμένη συνάρτηση του t, έστω από το $M > 0$, διότι είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $|g(t)-z_0| \geq \varepsilon$ (αφού $\Omega \bigcap g([a,b]) = \emptyset$), και

$$\left|\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right| \leq \frac{|z-z_0|}{\varepsilon} < 1.$$

Οπότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{g(t)-z_0}\left(\frac{z-z_0}{g(t)-z_0}\right)^n\right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{\varepsilon}\right|^n < +\infty.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα του Weierstrass, η σύγκλιση της σειράς συναρτήσεων του t στην (4.9) είναι ομοιόμορφη.

Από την Πρόταση 4.20΄ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(g(t)-z_0)^{n+1}}\right) d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b \frac{d\phi}{(g(t)-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ όπου } a_n = \int_a^b \frac{d\phi}{(g-z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ως γνωστόν (με επαγωγή) $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Παρατήρηση 4.24΄ i) Από το παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ότι η κατηγορία των συναρτήσεων που είναι παραστάσιμες με δυναμοσειρά είναι μεγάλη.

ii) $|a_n| = \left|\int_a^b \frac{d\phi}{(g(t)-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{V(\phi)}{\varepsilon^{n+1}}$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ασκήσεις

***Άσκηση* 4.4** Ένα μη κενό σύνολο X με μια ανακλαστική και μεταβατική σχέση $\leq$ ονομάζεται *κατευθυνόμενο* αν έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι για κάθε ζευγάρι στοιχείων του συνόλου αυτό έχει κάποιο στοιχείο που είναι άνω φράγμα τους· δηλαδή αν x, y δυο στοιχεία ενός κατευθυνόμενου συνόλου τότε αυτό έχει ένα στοιχείο z ώστε $x \leq z$ και $y \leq z$. Η σχέση $\leq$ σε ένα κατευθυνόμενο σύνολο ονομάζεται «κατεύθυνση». Λέμε ότι $x_n \to \infty$ στην κατεύθυνση αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \leq x_n$.

i) Δείξτε ότι το συνολο

$$\mathcal{T} = \{(P, T) \,:\, P \in \mathcal{D}[a, b],\ T \text{ ενδιάμεσα σημεία της } P\}$$

με $(P_1, T_1) \leq (P_2, T_2)$ αν και μόνο αν $P_1 \Subset P_2$ είναι κατευθυνόμενο.

ii) Σε κάθε κατευθυνόμενο σύνολο X με κατεύθυνση $\leq$ λέμε ότι η συνάρτηση $f : X \mapsto C$ έχει όριο ℓ στην κατεύθυνση $\leq$, και γράφουμε $\lim_{x \in X} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 \leq x$ ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Επιπλέον λέμε ότι το όριο στην κατεύθυνση είναι το ∞ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $x_0 \leq x$ ισχύει $|f(x)| \geq M$.

Αποδείξτε ότι το $\lim_{\lambda(P) \to 0} R(f, P, T)$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο της $R(f, P, T) : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ στην κατεύθυνση $\Subset$ και ισχύει

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} R(f, P, T) = \lim_{(P,T) \in \mathcal{D}[a,b]} R(f, P, T).$$

***Άσκηση* 4.5** Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση και $x_0 \in \mathbb{R}$.

i) Αποδείξτε ότι αν για κάθε δύο ακολουθίες x_n και y_n με $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ τότε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

ii) Αποδείξτε ότι το προηγούμενο ισχύει και αντίστροφα αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Δώστε ένα παράδειγμα μη φραγμένης f για την οποία δεν ισχύει το αντίστροφο του (i).

***Άσκηση* 4.6** Αποδείξτε ότι αν η $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε $\int_a^b d\phi = V(\phi)$.

4.3΄ Καμπύλες με μήκος

Ορισμός 4.25΄

i) Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ λέγεται καμπύλη στο $\mathbb{C}$.

ii) Το σύνολο $\gamma^* = \{\gamma(t) \,:\, a \leq t \leq b\} = \gamma([a,b])$ λέγεται *ίχνος* της γ ή *εικόνα* της γ.

iii) Την ολική κύμανση $V(\gamma)$ της γ καλούμε *μήκος* της καμπύλης γ και συμβολίζουμε με $\mu(\gamma)$.

iv) Η καμπύλη γ λέγεται *ευθυγραμμίσιμη ή καμπύλη με μήκος* αν $\mu(\gamma) < +\infty$.

Παρατήρηση 4.26΄ Αν η καμπύλη $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη τότε από την Πρόταση 4.5΄ το μήκος της είναι $\mu(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Παραδείγματα

i) Έστω ότι a, $b \in \mathbb{C}$. Η καμπύλη $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ καλείται (προσανατολισμένο) *ευθύγραμμο τμήμα* με πρώτο άκρο το a και δεύτερο το b και συμβολίζεται μερικές φορές και $[a,b]$. Το μήκος αυτής είναι
$$\mu(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|.$$

ii) Η καμπύλη $\gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = a + re^{it}$ όπου $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ καλείται (προσανατολισμένη) *περιφέρεια* κέντρου a και ακτίνας r και συμβολίζεται με $C(a,r)$. Το μήκος αυτής είναι
$$\mu(C(a,r)) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r.$$

iii) Η καμπύλη $\gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$, a, $b > 0$ είναι η (προσανατολισμένη) *έλλειψη* με ημιάξονες a, b.

Πρόταση 4.27΄ *Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλη και $\phi : [c,d] \mapsto [a,b]$ μια συνεχής αύξουσα (ή φθίνουσα) και επί απεικόνιση. Τότε $\mu(\gamma \circ \phi) = \mu(\gamma)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η ϕ είναι αύξουσα. Παρατηρούμε ότι για τυχούσα διαμέριση $P = \{c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d\}$ του $[c,d]$ το $\{a = \phi(y_0) \leq \phi(y_1) \leq ... \leq \phi(y_n) = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, άρα
$$\sum_{i=1}^n |\gamma \circ \phi(y_i) - \gamma \circ \phi(y_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \Big|\gamma(\phi(y_i)) - \gamma(\phi(y_{i-1}))\Big| \leq \mu(\gamma).$$

Άρα
$$\mu(\gamma \circ \phi) = \sup_{P \in \mathcal{D}[c,d]} \sum_{i=1}^n |\gamma \circ \phi(y_i) - \gamma \circ \phi(y_{i-1})| \leq \mu(\gamma). \qquad (4.10)$$

Έστω ότι το $P_1 = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$. Εφόσον η ϕ είναι επί, υπάρχει $P = \{c = x_0 < x_1 < ... < x_n = d\} \in \mathcal{D}[c, d]$ ώστε $\phi(x_i) = t_i$ για κάθε $i = 0, 1, 2, ..., n$. Άρα έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \big|\gamma \circ \phi(x_i) - \gamma \circ \phi(x_{i-1})\big| \leq \mu(\gamma \circ \phi).$$

Οπότε

$$\mu(\gamma) = \sup_{P_1 \in \mathcal{D}[a,b]} \sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \mu(\gamma \circ \phi). \tag{4.11}$$

Από την (4.10) και (4.11) έπεται ότι $\mu(\gamma \circ \phi) = \mu(\gamma)$. Ομοίως αν η ϕ είναι φθίνουσα. □

Ορισμός 4.28΄

i) Έστω ότι $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλες. Λέμε ότι η γ_1 είναι ισοδύναμη με τη γ_2 (και γράφουμε $\gamma_1 \sim \gamma_2$) αν υπάρχει $\phi : [c, d] \mapsto [a, b]$ συνεχής, γνήσια αύξουσα (άρα και 1-1) και επί ώστε $\gamma_1 \circ \phi = \gamma_2$.

ii) Θεωρούμε μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως αντίθετη καμπύλη της γ την $-\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ με $(-\gamma)(t) := \gamma(a + b - t)$. Παρατηρούμε ότι $-\gamma = \gamma \circ \phi$ όπου $\phi : [a, b] \mapsto [a, b]$ με $\phi(t) = a + b - t$.

iii) Έστω ότι $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Ορίζουμε το άθροισμά τους $\gamma_1 + \gamma_2$ να είναι η καμπύλη $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, b + d - c] \mapsto \mathbb{C}$ με

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{αν } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t + c - b), & \text{αν } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Πρόταση 4.29΄ *Ισχύουν τα παρακάτω:*

i) *Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

ii) *Αν $\gamma_1 \sim \gamma_2$ τότε $\mu(\gamma_1) = \mu(\gamma_2)$.*

iii) $\mu(-\gamma) = \mu(\gamma)$.

iv) *Αν $\gamma_1 : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{C}$ καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ τότε $\mu(\gamma_1 + \gamma_2) = \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$.*

Απόδειξη: (i) Αφήνεται ως άσκηση με την παρατήρηση ότι αν $\gamma_1 \circ \phi = \gamma_2$ όπου $\phi : [a, b] \mapsto [c, d]$ συνεχής, γνήσια αύξουσα και επί τότε $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi^{-1}$ όπου $\phi^{-1} : [c, d] \mapsto [a, b]$ είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και επί.

Τα (ii) και (iii) είναι άμεσες συνέπειες της Πρότασης 4.27΄.

(iv) Η $\phi : [b, b+d-c] \mapsto [c,d]$ με $\phi(t) = t+c-b$ είναι συνεχής, γνήσια αύξουσα και επί απεικόνιση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(\gamma_1+\gamma_2) &= V(\gamma_1+\gamma_2, a, b+d-c) \\
&= V(\gamma_1+\gamma_2, a, b) + V(\gamma_1+\gamma_2, b, b+d-c) && \text{(Πρόταση 4.9΄)} \\
&= V(\gamma_1, a, b) + V(\gamma_2\circ\phi, b, b+d-c) && \text{(Ορισμός 4.28΄ (iii))} \\
&= \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2\circ\phi) && \text{(Ορισμός 4.25΄ (iii))} \\
&= \mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2) && \text{(από την Πρόταση 4.27΄)} \quad \square
\end{aligned}$$

4.4΄ Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα

Ορισμός 4.30΄ Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι ευθυγραμμίσιμη καμπύλη και $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f επί της γ το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f\circ\gamma\,d\gamma.$$

Παρατήρηση 4.31΄ i) Όταν η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη (ή κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη) από την Πρόταση 4.21΄ έχουμε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

ii) Έστω ότι

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \,:\, z\in\gamma^*\} = \sup_{t\in[a,b]}\Big|f(\gamma(t))\Big| < +\infty.$$

Τότε από την Παρατήρηση 4.16΄(iii) έχουμε ότι

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \|f\|_\infty \mu(\gamma).$$

iii) Έστω ότι οι $f_n : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Αν η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (αντίστοιχα η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n$) συγκλίνει ομοιόμορφα στη (συνεχή) f. Από την Πρόταση 4.20΄ ισχύει $\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz$ (αντίστοιχα $\sum_{n=1}^\infty \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$).

Παραδείγματα 4.32΄ i) Αν $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλη και $f = c$ σταθερή συνάρτηση τότε (Παρατήρηση 4.16΄(i)) $\int_\gamma c\,dz = c(\gamma(b)-\gamma(a))$.

ii) Θεωρούμε z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ και το ευθύγραμμο τμήμα $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$. Αν η $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,d(z_1 + (z_2 - z_1)t)\\ &= (z_2 - z_1)\int_0^1 f(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,dt.\end{aligned}$$

Αν z_1, $z_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz &= \int_0^1 f(z_1 + (z_2 - z_1)t)\,d(z_1 + (z_2 - z_1)t)\\ &= \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

iii) Έστω ότι $\gamma = C(a,r)$ και $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,d\gamma(t) = ir\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{it}\,dt.$$

Ιδιαίτερα για $f(z) = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= ir\int_0^{2\pi} (re^{it})^n e^{it}\,dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt\\ &= ir^{n+1}\left[\int_0^{2\pi}\cos((n+1)t)\,dt + i\int_0^{2\pi}\sin((n+1)t)\,dt\right]\\ &= \begin{cases} 0, & n \neq -1,\\ 2\pi i, & n = -1.\end{cases}\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{C(a,r)} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1,\\ 2\pi i, & n = -1.\end{cases}$$

Πρόταση 4.33′ *Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι καμπύλη με μήκος, $\phi : [c,d] \mapsto [a,b]$ συνεχής, αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) και επί, και $f : \gamma^* \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz$ (αντίστοιχα $\int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz$).*

Απόδειξη: Λόγω της συνέχειας της f πάνω στις γ^*, $(\gamma\circ\phi)^*$ και επειδή $\mu(\gamma\circ\phi) = \mu(\gamma) < +\infty$ υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_\gamma f(z)\,dz$, $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz$. Το $\int_\gamma f(z)\,dz$ υπάρχει, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $P = \{a = x_0 <$

$x_1 < ... < x_n = b\} \in \mathcal{D}[a,b]$ με $\lambda(P) < \delta_1$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $T = (\xi_i)_{1\le i\le n}$ της P έχουμε

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(f\circ\gamma)(\xi_i)(\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})) - \int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Η $\phi : [c,d] \mapsto [a,b]$ είναι συνεχής άρα ομοιόμορφα συνεχής. Οπότε για το $\delta_1 > 0$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $s, t \in [c,d]$ με $|s-t| < \delta_2$ ισχύει $|\phi(s)-\phi(t)| < \delta_1$. Για κάθε $P_1 = \{c = t_0 < t_1 < ... < t_n = d\} \in \mathcal{D}[c,d]$ με $\lambda(P_1) < \delta_2$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $T_1 = (r_i)_{1\le i\le n}$, το σύνολο $P_2 = \{a = \phi(t_0) < \phi(t_1) < ... < \phi(t_n) = b\}$ ανήκει στο $\mathcal{D}[a,b]$ και $\lambda(P_2) < \delta_1$, ενώ τα $(\phi(r_i))_{1\le i\le n}$ είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων της P_2. Συνεπώς ισχύει η (4.12), δηλαδή

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(f\circ\gamma)(\phi(r_i))\,[\gamma(\phi(t_i))-\gamma(\phi(t_{i-1}))] - \int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon.$$

Άρα

$$\left|S(f\circ\gamma\circ\phi, \gamma\circ\phi, P_1, T_1) - \int_\gamma f(z)\,dz\right| < \varepsilon$$

για κάθε $P_1 \in \mathcal{D}[c,d]$ με $\lambda(P_1) < \delta_2$. Δηλαδή, $\int_{\gamma\circ\phi} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$. □

Πρόταση 4.34′ *Θεωρούμε τις καμπύλες στον Ορισμό 4.28′ και μια συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στα ίχνη τους. Τότε έχουμε*

i) *Αν $\gamma_1 \sim \gamma_2$ τότε $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.*

ii) $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$.

iii) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.

Απόδειξη: Τα (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 4.33′.

(iii)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_a^{b+d-c} f\circ(\gamma_1+\gamma_2)\,d(\gamma_1+\gamma_2)\\ &= \int_a^b f\circ\gamma_1\,d\gamma_1 + \int_b^{b+d-c} f\circ\gamma_2\circ\phi\,d(\gamma_2\circ\phi)\\ &\qquad\qquad (\text{από την Πρόταση } 4.19')\\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2\circ\phi} f(z)\,dz\\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz, \qquad (\text{από την Πρόταση } 4.33')\end{aligned}$$

όπου $\phi : [b, b+d-c] \mapsto [c,d]$ με $\phi(t) = t+c-b$ (δείτε Πρόταση 4.29′(iv)). □

Λήμμα 4.35΄ *Έστω ότι $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$ ευθυγραμμίσιμη καμπύλη και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} \in \mathcal{D}[a,b]$ ώστε η πολυωνυμική γραμμή $\gamma_\rho = \sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i=1}^n [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ είναι υποσύνολο του Ω και ισχύει*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz - \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz \right| < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\} \in \mathcal{D}[a,b]$ και ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι η πολυγωνική γραμμή $\gamma_\rho = \sum_{i=1}^n [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ είναι υποσύνολο του Ω και $T = (r_i)_{1 \le i \le n}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων. Παρατηρούμε ότι για $S(P,T) := S(f, \gamma, P, T)$

i) $\left|\int_\gamma f(z)\, dz - \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz\right| \le \left|\int_\gamma f(z)\, dz - S(P,T)\right| + \left|S(P,T) - \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz\right|$.

ii)

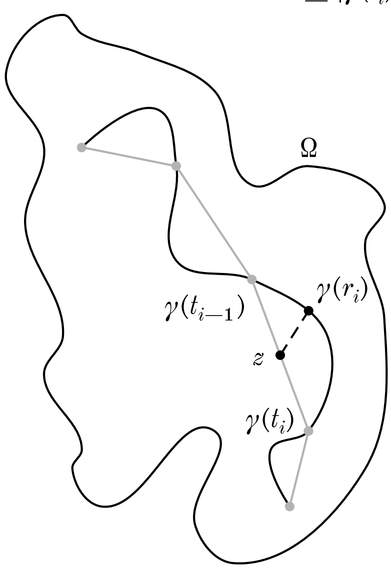
$$\begin{aligned}
\left|S(P,T) - \int_{\gamma_\rho} f(z)\, dz\right| &= \left|\sum_{i=1}^n f(\gamma(r_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\, dz\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \left[\int_{\gamma_i} f(\gamma(r_i))\, dz - \int_{\gamma_i} f(z)\, dz \right]\right| \qquad (4.13) \\
&\le \sum_{i=1}^n \left| \int_{\gamma_i} \left(f(\gamma(r_i)) - f(z)\right)\, dz \right|,
\end{aligned}$$

όπου για την (4.13) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\int_{\gamma_i} f(\gamma(r_i))\, dz = f(\gamma(r_i))\mu(\gamma_i) = f(\gamma(r_i))(\gamma(t_{t_i}) - \gamma(t_{i-1})).$$

iii) Για $z \in \gamma_i$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|z - \gamma(r_i)| &\le |z - \gamma(t_i)| + |\gamma(t_i) - \gamma(r_i)| \\
&\le |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + |\gamma(t_i) - \gamma(r_i)|.
\end{aligned}$$



Θα προσπαθήσουμε να πετύχουμε καθεμιά ποσότητα στα δεξιά στο (i) να είναι μικρότερη του $\varepsilon/2$ με $\gamma_\rho \subseteq \Omega$.

Το $\gamma^* = \gamma([a,b])$ είναι συμπαγές (αφού γ συνεχής) και το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι κλειστό. Άρα $d := d(\gamma^*, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$.

Το $K := \{z \in \mathbb{C} : d(z, \gamma^*) \le d/2\}$ είναι κλειστό και φραγμένο άρα συμπαγές.

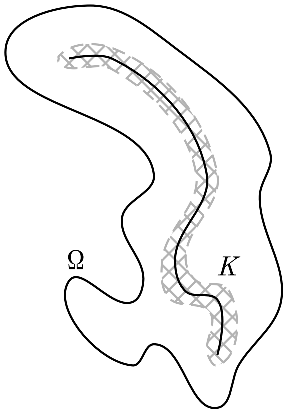
α) Η $f|_K$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|z_1 - z_2| < \delta_1$ τότε $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon/(2\mu(\gamma))$.

β) Η $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για $\varepsilon_0 = \min\{d, \delta_1\}/2 > 0$ υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $t_1, t_2 \in [a,b]$ με $|t_1 - t_2| < \delta_2$ ισχύει $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \varepsilon_0$ (επιλέξαμε αυτό το ε_0 ώστε να πετύχουμε να ισχύει $\gamma_\rho = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Subset \Omega$· διότι αν $z \in [\gamma(t_1) - \gamma(t_2)]$ και $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ τότε $d(\gamma(t_1), \mathbb{C} \setminus \Omega) < \varepsilon_0$, άτοπο από τον ορισμό του ε_0).

γ) $\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{P \in \mathcal{D}[a,b]} S(f \circ \gamma, \gamma, P, T)$ άρα με $\varepsilon/2 > 0$ υπάρχει $0 < \delta_3 \leq \delta_2$ ώστε αν $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ με $\lambda(P) < \delta_3$ τότε

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\gamma(r_i))[\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})] - \int_\gamma f(z)\,dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη $\gamma_\rho = \sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i=1}^n [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$. Τότε



iv) $\gamma_\rho \Subset K$.

Πράγματι, αν $z \in \gamma_i = [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ τότε $|z - \gamma(t_i)| \leq |\gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_i)| < d/2$ άρα $d(z, \gamma^*) \leq |z - \gamma(t_i)| < d/2$ οπότε $z \in K$.

v) $|S(P,T) - \int_\gamma f(z)\,dz| < \varepsilon/2$

Πράγματι, λόγω της (3) και της (ii) έχουμε $|z - \gamma(r_i)| < \delta_1/2 + \delta_1/2 = \delta_1$. Άρα λόγω του (i) ισχύει $|f(\gamma(r_i)) - f(z)| < \varepsilon/(2\mu(\gamma))$. Συνεπώς η (ii) δίνει

$$\left| S(P,T) - \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2\mu(\gamma)} \mu(\gamma_i) = \frac{\varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(\gamma_i)}{2\mu(\gamma)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το αποτέλεσμα τώρα είναι φανερό από τα (i), (γ) και (v). □

Θεώρημα 4.36΄ *Έστω ότι $\Omega \Subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$ ευθυγραμμίσιμη καμπύλη και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με παράγουσα (δηλαδή υπάρχει $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ώστε $F' = f$). Τότε*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Απόδειξη: α) Αν η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη τότε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f\circ\gamma\,d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

β) Στη γενική περίπτωση, βάσει του Λήμματος 4.35΄ για την καμπύλη $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$ και για $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή

$$\gamma_\rho = \sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i=1}^n [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$$

ώστε $|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz| < \varepsilon$.

Κάθε γ_i είναι συνεχώς διαφορίσιμη, άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^n \Big[F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))\Big]\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Άρα

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz - \Big[F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\Big]\right| < \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$, οπότε $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. □

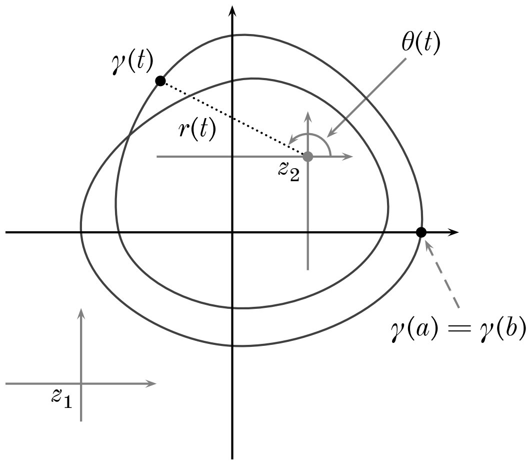
Πόρισμα 4.37΄ *Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι κλειστή καμπύλη με μήκος* (κλειστή *καλείται αν $\gamma(b) = \gamma(a)$). Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ισχύει $\int_\gamma z^n\,dz = 0$.*

Απόδειξη: Η $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$ είναι παράγουσα της $f(z) = z^n$. Άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $\int_\gamma z^n\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$. □

Κεφάλαιο 5

Δείκτης στροφής κλειστής καμπύλης

5.1 Διαισθητική περιγραφή



Μια νέα έννοια την οποία εισάγουμε σε αυτή την ενότητα είναι αυτή του «δείκτη στροφής καμπύλης ως προς σημείο». Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ευθυγραμμίσιμη καμπύλη $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ και ένα σημείο $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ στο οποίο βρίσκεται ένας παρατηρητής. Αυτός παρατηρεί την εξέλιξη της καμπύλης από το αρχικό της σημείο $\gamma(a)$ μέχρι το τελικό της $\gamma(b)$ (ας φανταστούμε τη μεταβλητή t της $\gamma(t)$ να είναι ο χρόνος). Για κάθε σημείο της καμπύλης $\gamma(t)$ ορίζουμε $r(t)$ την απόστασή του από το σημείο z του παρατηρητή και τη γωνία $\theta(t)$ που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα $[z, \gamma(t)]$ με τον πραγματικό άξονα. Στο διπλανό σχήμα εξετάζουμε αυτή την κατάσταση για δύο σημεία· το z_1 και το z_2. Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την συνολική μεταβολή της γωνίας ως προς τον παρατηρητή, δηλαδή την ποσότητα $\theta(b) - \theta(a)$. Για παράδειγμα, για το σημείο z_1 αυτή η διαφορά είναι φανερά μικρότερη από 2π ενώ για το z_2, αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η γ διατρέχει μία φορά το ίχνος γ^* (δηλαδή είναι ένα προς ένα εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων (εκτός των σημείων που τέμνει τον εαυτό της)) τότε η διαφορά $\theta(b) - \theta(a)$ είναι ακριβώς

4π. Με άλλα λόγια η καμπύλη του σχήματος δεν ολοκληρώνει έναν κύκλο γύρω από το z_1 αλλά ολοκληρώνει δύο κύκλους γύρω από το z_2. Αυτός ο ακέραιος αριθμός, δηλαδή το πόσους κύκλους ολοκληρώνει μια καμπύλη γύρω από τον παρατηρητή μας στο σημείο z τον ονομάζουμε «δείκτη στροφής της γ γύρω από το z.

Πώς όμως θα μπορούσαμε από την γ να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής για κάθε σημείο $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$;

Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι οι συναρτήσεις θ και r είναι παραγωγίσιμες. Τότε η καμπύλη μπορεί να γραφτεί με τον τύπο $\gamma(t) = z + r(t)e^{i\theta(t)}$. Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε

$$\gamma'(t) = r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t),$$

από τον κανόνα γινομένου και αλυσίδας. Αφού $z \notin \gamma^*$ το $\gamma(t) - z = r(t)e^{i\theta(t)}$ δεν είναι ποτέ ίσο με μηδέν, οπότε διαιρώντας με αυτό βρίσκουμε:

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t).$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση ως προς t:

$$\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt = \ln(r(b)) - \ln(r(a)) + i(\theta(b) - \theta(a)).$$

Έτσι αν η καμπύλη γ είναι κλειστή, αν δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$ τότε $r(a) = r(b)$ και θα πάρουμε ότι

$$i(\theta(b) - \theta(a)) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Το πλήθος λοιπόν των κύκλων που κάνει η γ γύρω από το z ισούται με $(\theta(b) - \theta(a))/2\pi$ δηλαδή είναι ίσο με

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Παρατηρήστε ότι για το σημείο z_1 του σχήματος $\theta(a) = \theta(b)$ κάτι που *δεν*(!) ισχύει για το z_2. Πράγματι για το σημείο z_1 η γωνία $\theta(t)$ αυξομειώνεται καθώς «εξελίσσεται» η καμπύλη για να καταλήξει στην ίδια γωνία με την αρχική, αλλά για το z_2 συνεχώς αυξάνει.

5.2 Ορισμός και ιδιότητες

Ορισμός 5.1 Έστω ότι η $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι κλειστή καμπύλη με μήκος και $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Ορίζουμε ως δείκτη στροφής της καμπύλης γ ως προς το $z \in \Omega$ τον αριθμό

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Θεώρημα 5.2 *Έστω ότι η $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ είναι μια κλειστή, συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη και $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Ο δείκτης στροφής λαμβάνει ακέραιες τιμές για κάθε $z \in \Omega$. Ιδιαίτερα, είναι σταθερή συνάρτηση σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω και ίσος με μηδέν στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώστα του Ω.*

Απόδειξη:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds$$

για $z \in \Omega$. Ο $w/(2\pi i)$ είναι ακέραιος αν και μόνο αν $e^w = 1$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\phi(b) = 1$, όπου

$$\phi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\right) \text{ για } a \leq t \leq b.$$

Η ϕ παραγωγίζεται και ισχύει $\phi'(t) = \phi(t)\gamma'(t)/(\gamma(t)-z)$ οπότε $\phi'(t)(\gamma(t)-z) = \phi(t)(\gamma(t)-z)'$. Άρα $(\phi(t)/(\gamma(t)-z))' = 0$ δηλαδή η $\phi(t)/(\gamma(t)-z)$ είναι σταθερή, έστω ίση με c.

Για $t = a$ λοιπόν, $\phi(a)/(\gamma(a)-z) = c$ οπότε

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z}\phi(a) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z},$$

αφού $\phi(a) = 1$. Οπότε

$$\phi(b) = \frac{\gamma(b)-z}{\gamma(a)-z} = 1,$$

αφού η γ είναι κλειστή. Συνεπώς ο δείκτης στροφής παίρνει ακέραιες τιμές.

Ο δείκτης στροφής είναι συνάρτηση παραστάσιμη με δυναμοσειρά (από το Θεώρημα 4.23′ για $g(t) = \phi(t) = \gamma(t)$), άρα είναι ολόμορφη συνάρτηση και συνεπώς συνεχής. Έτσι αν το $c(x)$ είναι συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το x, συνεκτικό είναι και το υποσύνολο $\mathrm{Ind}_\gamma(c(x))$ του $\mathbb{Z}$. Τα μόνα όμως συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{Z}$ είναι τα μονοσύνολα άρα είναι σταθερός ο δείκτης στροφής Ind_γ σε όλο το $c(x)$.

Το γ^* είναι συμπαγές (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς) άρα είναι και φραγμένο, οπότε $\gamma^* \subset S(0,r)$ για κατάλληλο $r > 0$. Το $\mathbb{C} \setminus S(0,r)$ είναι συνεκτικό και μη φραγμένο και περιέχεται στη συνεκτική συνιστώσα c_0 του Ω που είναι μη φραγμένη. Η c_0 είναι η μόνη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του Ω (γιατί κάθε άλλη συνεκτική συνιστώσα ξένη με την c_0 θα περιέχεται στο $S(0,r)$ οπότε θα είναι φραγμένη).

Αφού $\gamma^* \subset S(0,r)$ συμπεραίνουμε ότι $|\gamma(t)| \leq r$ για κάθε $t \in [a,b]$. Άρα $|\gamma(t) - z| \geq |z| - |\gamma(t)| \geq |z| - r$ για κάθε $t \in [a,b]$ και $z \notin S(0,r)$. Έτσι

$$\left|\mathrm{Ind}_\gamma(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-z|}\,dt \leq \frac{1}{2\pi(|z|-r)}\mu(\gamma) < 1$$

για επαρκώς μεγάλο $|z|$. Συνεπώς επειδή $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ για $z \in c_0$. $\square$

Παράδειγμα Το σύνολο

$$C(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : z = a + re^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi, r > 0\}$$

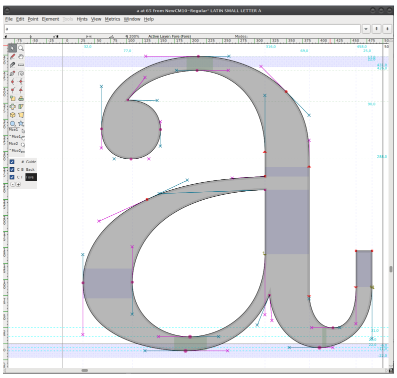
είναι η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια γ κέντρου a και ακτίνας r (όπου $|z-a|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ είναι η εξίσωση περιφέρειας). Τότε

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |z-a| < r, \\ 0, & \text{αν } |z-a| > r, \end{cases}$$

γιατί το $\mathbb{C} \setminus \gamma =: \Omega$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες: το εσωτερικό του κύκλου και το εξωτερικό του κύκλου. Για $|z-a| < r$ από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = 1.$$

Και για $|z-a| > r$ θα είναι $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$.



Ο δείκτης στροφής είναι μία από τις τεχνολογίες που χρησιμοποιείται στα γραφικά υπολογιστών σε κάθε τεχνολογία αποτύπωσης πληροφορίας (είτε είναι η οθόνη είτε ένας εκτυπωτής). Πράγματι για να τυπώσει ένας εκτυπωτής ένα γράμμα, για παράδειγμα το λατινικό «a», πρέπει να αποφασίσει σε ποια σημεία του χαρτιού θα βάλει μελάνι και σε ποια όχι. Ομοίως για μια οθόνη ο υπολογιστής θα πρέπει να αποφασίσει πια pixels θα ανάψει και ποια θα σβήσει. Ένα γράμμα όπως το a, περιγράφεται από δύο καμπύλες όπως στο διπλανό σχήμα. Πώς θα αποφασίσει όμως ο εκτυπωτής ποιο σημείο πρέπει να θεωρηθεί εντός του γράμματος για να βάλει μελάνι και ποιο εκτός του γράμματος; Ένας τρόπος να το κάνει αυτό είναι ο υπολογισμός του συνολικού δείκτη στροφής των καμπυλών που περιγράφουν το γράμμα ως προς το σημείο.

Ο σχεδιαστής της γραμματοσειράς εκτός από τον σχεδιασμό των καμπυλών δηλώνει πάντα και τη φορά με την οποία αυτές γράφονται. Στο παράδειγμα του a του σχήματος η εξωτερική καμπύλη δηλώνεται ότι σχεδιάζεται με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού και η εσωτερική καμπύλη με τη φορά του ρολογιού. Δηλαδή η εξωτερική καμπύλη έχει «θετική» φορά και η εσωτερική «αρνητική». Ένα σημείο στο παραπάνω σχήμα που θα βαφτεί με μελάνι έχει δείκτη στροφής ως προς την εσωτερική καμπύλη ίσο με μηδέν και ως προς την εξωτερική καμπύλη ίσο με $+1$. Έτσι έχει «συνολικό» δείκτη στροφής $0 + 1 = 1 \neq 0$ και το σημείο βάφεται με μελάνι.

Αν όμως θεωρήσουμε ένα σημείο στο εσωτερικό τμήμα της εσωτερικής καμπύλης του a τότε αυτό έχει δείκτη στροφής $+1$ ως προς την εξωτερική καμπύλη του a και -1 ως προς την εσωτερική καμπύλη του a. Ο συνολικός δείκτης στροφής είναι $+1 - 1 = 0$ και στο σημείο ο εκτυπωτής δεν ρίχνει μελάνι!

Υπάρχουν και μερικές ακόμα τεχνικές απεικόνισης στους υπολογιστές αλλά είναι ισοδύναμες με την παραπάνω. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο δείκτης στροφής, εντελώς απρόσμενα ίσως, χρησιμοποιείται καθημερινά από τους ανθρώπους και είναι «κρυμμένος» μέσα στην τεχνολογία των οθονών, εκτυπωτών, προβολέων και κάθε συσκευής απεικόνισης.

Κεφάλαιο 6

Το τοπικό Θεώρημα Cauchy

Θεώρημα 6.1 (Cauchy-Goursat) *Έστω ότι το Δ είναι κλειστό τρίγωνο εντός του ανοικτού $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $p \in \Omega$. Αν η συνάρτηση $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ είναι τοπικά φραγμένη στο p (δηλαδή υπάρχει $M > 0$ και $S(p,r) \subseteq \Omega$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in S(p,r)$) και $f|_{\Omega\setminus\{p\}}$ ολόμορφη, τότε $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$, όπου $\partial\Delta$ η περίμετρος του τριγώνου.*

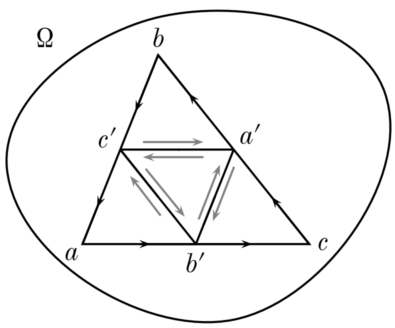
Απόδειξη: *Περίπτωση 1*: $p \notin \Delta$

A) Καθορισμός ενός σημείου z_0: Έστω ότι οι κορυφές του Δ είναι a, b, c. Θέτουμε a', b' και c' για τα μέσα των τμημάτων $[b,c]$, $[a,c]$, $[a,b]$ αντίστοιχα, και θεωρούμε τα τρίγωνο

$$\Delta_1^{(1)} = \langle\{a', b', c'\}\rangle, \qquad \Delta_1^{(2)} = \langle\{b, a', c'\}\rangle,$$

$$\Delta_1^{(3)} = \langle\{c, b', a'\}\rangle, \qquad \Delta_1^{(4)} = \langle\{a, b', c\}\rangle.$$

Προφανώς $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\Delta_1^{(i)}} f(z)\,dz$ άρα



$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial\Delta_1^{(i)}} f(z)\,dz\right|.$$

Άρα υπάρχει $1 \leq i \leq 4$ ώστε

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_1^{(i)}} f(z)\,dz\right|.$$

Θέτω $\Delta_1 = \Delta_1^{(i)}$. Επαναλαμβάνουμε τώρα τη διαδικασία αυτή με το Δ_1 στο ρόλο του Δ και λαμβάνουμε ένα κλειστό υποτρίγωνο Δ_2 του Δ_1 ώστε:

$$\left|\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4} \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4^2} \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|.$$

Επαγωγικά, και με εντελώς ανάλογο τρόπο, ορίζουμε μια ακολουθία από κλειστά τρίγωνα $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ ώστε να ισχύουν

i) $\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$.

ii) Το Δ_{n+1} είναι ένα από τα τέσσερα υποτρίγωνα του Δ_n ($n \geq 1$) που ορίζονται από τα μέσα σημεία των πλευρών του Δ_n με θετικό (αντι-ωρολογιακό) προσανατολισμό και $\mu(\partial\Delta_n) = 2^{-n}(\mu(\partial\Delta))$, για $n = 1, 2, \dots$.

Από την πληρότητα του μετρικού χώρου $\mathbb{C}$, το θεώρημα του Cantor, το γεγονός ότι τα σύνολα Δ_n είναι κλειστά σύνολα με $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ και

$$\text{διαμ}(\Delta_n) \leq \mu(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\mu(\partial\Delta) \to 0, \tag{6.1}$$

έπεται ([1] Θεώρημα 2.6.14) ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ είναι μονοσύνολο με μοναδικό στοιχείο, έστω το z_0, όπου στην (6.1) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η διάμετρος κάθε τριγώνου είναι μικρότερη από την περίμετρό του (αφήνεται ως άσκηση).

B) Υπολογισμός του $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$: Το $z_0 \in \Delta \subset \Omega$ άρα το $f'(z_0)$ υπάρχει (εφόσον $p \notin \Delta$) αφού η f είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{p\}$. Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $0 < |z - z_0| < \delta$ τότε

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Επίσης $\text{διαμ}(\partial\Delta_n) \to 0$ άρα για το $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\text{διαμ}(\partial\Delta_n) < \delta$. Άρα αν $z \in \Delta_n$ τότε

$$|z - z_0| \leq \text{διαμ}(\Delta_n) < \delta. \tag{6.3}$$

Από το Πόρισμα 4.37′ ισχύει $\int_{\partial\Delta_n}(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\,dz = 0$.

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n}(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\,dz,$$

άρα για $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n}\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| &\leq \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \\
&\leq \left|\int_{\partial\Delta_n}(z - z_0)\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right]dz\right| \\
&< \varepsilon\,\text{διαμ}(\Delta_n)\mu(\partial\Delta_n) \\
&\qquad \text{(Παρατήρηση 4.16′(iii), (6.2) και (6.3))} \\
&\leq \frac{\varepsilon(\mu(\partial\Delta))^2}{4^n}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς $|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| < \varepsilon(\mu(\partial\Delta))^2$ για τυχόν $\varepsilon > 0$, οπότε $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 2: $p \in \Delta$ και p κορυφή του Δ.

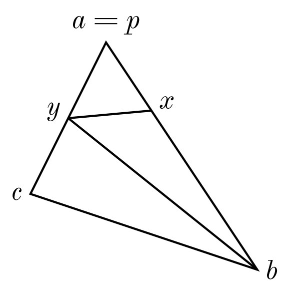
Αν $\Delta = \langle\{a, b, c\}\rangle$ χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι $p = a$. Αν a, b, c είναι στην ίδια ευθεία τότε το συμπέρασμα είναι τετριμμενο γιατί ισχύει γενικά: αν f ολοκληρώσιμη τότε $\int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz = 0$.

Υποθέτουμε ότι τα a, b, c δεν είναι στην ίδια ευθεία. Η $\partial\Delta$ είναι απλή καμπύλη (δηλαδή δεν τέμνει τον εαυτό της) και η $f|_{\Omega\setminus\{p\}}$ είναι συνεχής, άρα η $f \circ \partial\Delta$ είναι συνεχής εκτός από ένα σημείο (αφού $p \in \partial\Delta$) και η $\partial\Delta$ κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη, οπότε υπάρχει το ολοκηρωμα Riemann-Stieltjes της $f \circ \partial\Delta$ ως προς $\partial\Delta$, δηλαδή το $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$.

Αν $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta(x,b,y)} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta(y,b,c)} f(z)\,dz \\
&= \int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,dz \qquad \text{(από την Περίπτωση 1)} \\
&= \int_{[a,x]} f(z)\,dz + \int_{[x,y]} f(z)\,dz + \int_{[y,a]} f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

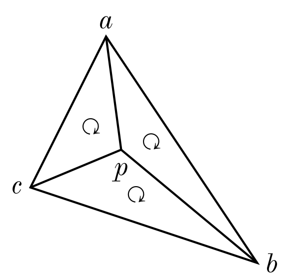
Άρα για $0 < \varepsilon < 3Mr$ και $x, y \in S(p, \varepsilon/3M)$, υποσύνολο του $S(p, r)$, ισχύει $|f(z)| \le M$, και άρα



$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| &\le M\mu(\partial\Delta(a, x, y)) \\
&= M(|x - a| + |x - y| + |y - a|) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Συνεπώς $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 3: $p \in \Delta$ και $p \notin \{a, b, c\}$.



$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta(a,b,p)} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta(p,b,c)} f(z)\,dz \\
&\quad + \int_{\partial\Delta(c,a,b)} f(z)\,dz \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

από την Περίπτωση 2. □

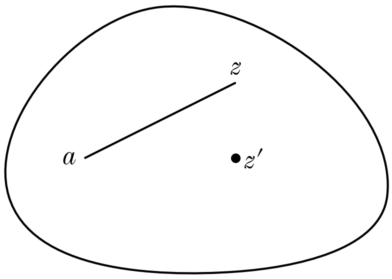
6.1 Το Θεώρημα του Cauchy για κυρτό σύνολο

Θεώρημα 6.2 *Έστω ότι το Ω είναι ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $p \in \Omega$. Αν η $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ είναι συνεχής και η $f|_{\Omega \setminus \{p\}}$ ολόμορφη τότε*

i) *υπάρχει $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f$,*

ii) *$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ εντός του Ω με μήκος.*

Απόδειξη: (i) Έστω $a \in \Omega$. Αφού Ω κυρτό τότε για κάθε $z \in \Omega$ το ευθύγραμμο τμήμα $[a, z] \subset \Omega$. Ορίζουμε $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ με $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi) d\xi$.



Ισχυρισμός: Η $F'(z)$ υπάρχει και $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

[Αν $z' \in \Omega$, $z' \neq z$, το κλειστό τρίγωνο $\Delta(a, z, z') \subset \Omega$ άρα $\int_{\partial\Delta(a,z,z')} f(\xi)\, d\xi = 0$ από το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα. Έτσι

$$\int_{[a,z]} f(\xi)\, d\xi + \int_{[z,z']} f(\xi)\, d\xi + \int_{[z',a]} f(\xi)\, d\xi = 0$$

οπότε

$$\int_{[z,z']} f(\xi)\, d\xi = \int_{[a,z']} f(\xi)\, d\xi - \int_{[a,z]} f(\xi)\, d\xi = F(z') - F(z).$$

Άρα

$$\frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) = \frac{1}{z' - z} \int_{[z,z']} (f(\xi) - f(z))\, d\xi.$$

Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Επειδή $f|_\Omega$ συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|\xi - z| < \delta$ τότε $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$. Άρα για $0 < |z' - z| < \delta$ ισχύει

$$\left| \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| = \frac{1}{|z' - z|} \left| \int_{[z',z]} (f(\xi) - f(z))\, d\xi \right| \leq \frac{1}{|z' - z|} \mu([z, z'])\varepsilon = \varepsilon \quad \text{(Παρατήρηση 4.16΄(iii))}$$

(εφόσον $\xi \in [z, z']$ συνεπάγεται $|\xi - z| < \delta$) άρα $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.]

(ii) Εφόσον η f έχει παράγουσα συνεπάγεται από το Θεώρημα 4.36΄ $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη με μήκος. □

Παρατήρηση 6.3 Παρατηρούμε ότι για την απόδειξη του Ισχυρισμού του προηγούμενου θεωρήματος χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο Ω και το ότι το ολοκλήρωμά της στο σύνορο κάθε τριγώνου στο Ω είναι μηδέν. Αυτές οι δύο υποθέσεις αρκούν για την απόδειξη του ισχυρισμού και δεν είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι η f είναι ολόμορφη. Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε ανεξάρτητα το (i) του παραπάνω θεωρήματος ως εξής: *Εάν Ω κυρτό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $f|_\Omega$ συνεχής με $\int_{\partial\Delta} f(\xi)\,d\xi = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subset \Omega$ τότε υπάρχει $F : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f$.* Αυτή η παρατήρηση θα χρειαστεί παρακάτω στο Θεώρημα Morera (Θεώρημα 6.7).

Θεώρημα 6.4 (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για κυρτό σύνολο) *Έστω ότι η $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση με Ω ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Για κάθε $z \in \Omega \setminus \gamma^*$*

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ με

$$g(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \xi \in \Omega \setminus \{z\}, \\ f'(z), & \xi = z. \end{cases}$$

Η g είναι συνεχής στο Ω, επειδή η f είναι συνεχής και

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \to f'(z) = g(z)$$

για $\xi \to z$. Επίσης η g είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{z\}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Caychy για κυρτά σύνολα για τη συνάρτηση g και έχουμε: $\int_\gamma g(\xi)\,d\xi = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ. Οπότε για $z \notin \gamma^*$ έχουμε

$$\int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,d\xi = 0.$$

Άρα στο Ω

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\frac{d\xi}{\xi - z}$$

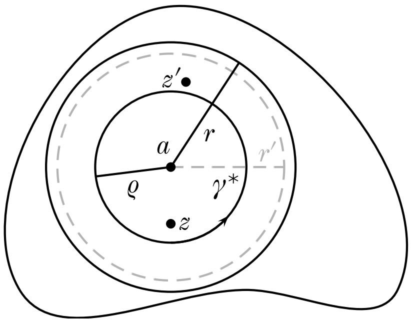
οπότε προκύπτει ο ζητούμενος τύπος. □

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε μια θεμελιώδη και απροσδόκητη ιδιότητα των ολόμορφων συναρτήσεων.

Θεώρημα 6.5 *Έστω ότι το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : \Omega \mapsto C$ ολόμορφη. Τότε η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω.*

Απόδειξη: Έστω ότι $a \in \Omega$, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $S(a, r) \subseteq \Omega$. Πρέπει να δείξουμε (Ορισμός 4.22′) ότι f παριστάνεται με δυναμοσειρά στο $S(a, r)$.

Επιλέγουμε $0 < \varrho < r$ και θεωρούμε γ την καμπύλη του κύκλου με ακτίνα ϱ θετικά προσανατολισμένη. Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για το κυρτό και ανοικτό σύνολο $S(a, r)$ και την καμπύλη γ.



Έχουμε ότι

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

για $z \in S(a, r) \setminus \gamma^*$. Άρα

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

για $z \in S(a, \varrho)$ ($\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ για $z \in S(a, \varrho)$). Τότε η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά από το Θεώρημα 4.23′ στο $S(a, \varrho)$, θέτοντας $g(t) = \gamma(t)$ και $\phi(t) = \int_0^t f(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (παρατηρήστε ότι η $f(\gamma(t))\gamma'(t)$ ως συνεχής είναι φραγμένη στο $[0, 2\pi]$ άρα η ϕ είναι φραγμένης κύμανσης (Παράδειγμα 4.3′(ii))). Έστω λοιπόν ότι ισχύει $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ για $z \in S(a, \varrho)$. Έστω τώρα ότι $z' \in S(a, r)$ με $|z' - a| > \varrho$. Αν $r > r' > |z' - a| \geq \varrho$ τότε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n$ για $z \in S(a, r')$. Άρα

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - a)^n$$

για $z \in S(a, \varrho)$, οπότε $a_n = b_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$ Δηλαδή $f(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - a)^n$ για κάθε $z' \in S(a, r)$. Άρα η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο $S(a, r)$. □

Πόρισμα 6.6 i) *Κάθε ολόμορφη συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη.*

ii) *Αν $f \in H(\Omega)$ τότε $f' \in H(\Omega)$.*

iii) *Αν Ω ανοικτό, $a \in \Omega$, $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής και $f|_{\Omega \setminus \{a\}}$ ολόμορφη τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω (δηλαδή και στο a).*

Απόδειξη: i) Εφόσον η $f \in H(\Omega)$ αναλύεται σε δυναμοσειρά και μια δυναμοσειρά είναι απεριόριστα διαφορίσιμη (Θεώρημα 2.15) έπεται ότι και η f είναι απεριόριστα διαφορίσιμη.

ii) Η f παρίσταται με δυναμοσειρά άρα $f' \in H(\Omega)$.

iii) Βρίσκουμε $r > 0$ ώστε $S(a, r) \subseteq \Omega$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Cauchy στο ανοικτό και κυρτό $S(a, r)$. Άρα υπάρχει $F : S(a, r) \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f|_{S(a,r)}$. Αλλά από το (ii) η F' είναι ολόμορφη και άρα και η f είναι ολόμορφη στο a. □

Θεώρημα 6.7 (Morera) *Έστω ότι $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ συνεχής και $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ για κάθε τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.*

Απόδειξη: Έστω ότι $a \in \Omega$. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $S(a, r) \subseteq \Omega$. Το $S(a, r)$ είναι ανοικτό και κυρτό. Εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 6.3 για ανοικτά και κυρτά σύνολα, οπότε υπάρχει ολόμορφη F ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in S(a, r)$. Αλλά τώρα η F' είναι ολόμορφη (από το Πόρισμα 6.6) στο $S(a, r)$. Έτσι η $f = F'$ είναι ολόμορφη σε κάθε ανοικτή σφαίρα του Ω, οπότε η f είναι ολόμορφη στο Ω. □

Πρόταση 6.8 *Εάν $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $\overline{S(a, r)} \subset \Omega$, τότε για κάθε $z \in S(a, r)$:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi$$

για $n \in \mathbb{N}$, όπου $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι υπάρχει $\varepsilon > r$ ώστε

$$\Omega \supseteq S(a, \varepsilon) \supset \overline{S(a, r)},$$

διότι το $\mathbb{C} \setminus \Omega$ είναι κλειστό και ξένο με το συμπαγές $\overline{S(a, r)}$, οπότε έχουν θετική απόσταση.

Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για το ανοικτό και κυρτό $S(a, \varepsilon)$ και με γ τον κύκλο $C(a, r)$. Τότε έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}\, d\gamma(t)$$

για $|z - a| < \varepsilon$. Η f όμως λόγω του Θεωρήματος 4.2 (ή του Θεωρήματος 4.23′ από το Κεφάλαιο 4′) (για $g(t) = \gamma(t)$ και $\phi(t) = \int_0^t f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$, $0 \leq t \leq 2\pi$) είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά με συντελεστές

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t) - z)^{n+1}}\, d\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi,$$

για $z \notin \gamma*$. Έτσι $f(\xi) = \sum_{n=0}^\infty c_n(\xi - z)^n$ απ' όπου $c_n = f^{(n)}(z)/n!$. Άρα

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$ □

Θεώρημα 6.9 (Εκτιμήσεως του Cauchy) *Έστω ότι η $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη $\overline{S(a, r)} \subset \Omega$ και $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in C(a, r)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f^{(n)}(a)| \leq Mn!/r^n$.*

Απόδειξη: Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi.$$

Αλλά $|f(\xi)/(\xi - a)^{n+1}| \leq M/r^{n+1}$ για κάθε $\xi \in C(a, r)$. Άρα από την Παρατήρηση 4.16΄ (iii) έχουμε ότι

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\mu(C(a,r)) = \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}}2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}. \qquad \square$$

Ορισμός 6.10 Κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ λέγεται *ακέραιη*.

Θεώρημα 6.11 (Liouville) *Κάθε φραγμένη ακέραιη συνάρτηση είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Από τον τύπο εκτιμήσεως του Cauchy για $x \in \mathbb{C}$ και $\overline{S(z,R)} \subset \mathbb{C}$ και $n = 1$ έχουμε $|f'(z)| \leq M/R$ για κάθε $R > 0$ όπου $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό έχουμε ότι η f είναι σταθερή. $\square$

Θεώρημα 6.12 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας) *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε ότι το πολυώνυμο $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ βαθμού τουλάχιστον 1, δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Θέτουμε $f(z) = 1/p(z)$. Αφού το $p(z)$ δεν έχει ρίζες η f είναι καλά ορισμένη και ακέραιη. Επιπλέον

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^n(|1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{-(n-1)} + a_0 z^{-n})} = 0.$$

Άρα για κατάλληλο $R > 0$ και $|z| > R$ θα ισχύει $|f(z)| \leq 1$. Από τη συνέχεια της f στο συμπαγές $\overline{S(0,R)}$ προκύπτει ότι η f είναι φραγμένη (από το μέγιστο των 1 και του φράγματος στο $\overline{S(0,R)}$). Από το Θεώρημα του Liouville έπεται ότι f σταθερή, δηλαδή το $p(z)$ είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Το επόμενο πολύ ενδιαφέρον πόρισμα μας λέει ότι δεν υπάρχουν πραγματικά πολυώνυμα βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 3 που δεν παραγοντοποιούνται σε πολυώνυμα πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Πόρισμα 6.13 *Κάθε πραγματικό πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων πραγματικών πολυωνύμων.*

Απόδειξη: Έστω ότι το $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ είναι πραγματικό πολυώνυμο, δηλαδή $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Αν αυτό έχει ρίζα τον πραγματικό x_0 όπως είναι καλά γνωστό από τον αλγόριθμο διαίρεσης του Ευκλείδη, το $x - x_0$ διαιρεί το $p(x)$.

Αν τώρα το z είναι ρίζα του $p(x)$ με $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ τότε είναι ρίζα του $p(x)$ και το $\overline{z}$ διότι $p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = 0$. Άρα το $p(x)$ διαιρείται από το $(x-z)(x-\overline{z})$. Αλλά το τελευταίο είναι πραγματικό δευτεροβάθμιο πολυώνυμο αφού

$$(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - 2(\operatorname{Re} z)x + |z|^2,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ασκήσεις

***Άσκηση* 6.1** Να υπολογιστούν τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{C(0,1)} \frac{1}{z-2}\, dz \qquad I_2 = \int_{C(0,1)} \frac{(e^z + z)^n}{z},\, n \geq 1$$

$$I_3 = \int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2+1} \qquad I_4 = \int_{\gamma} \overline{z}|z|\, dz,$$

όπου γ το σύνορο του άνω ημικυκλίου του μοναδιαίου κύκλου, θετικά προσανατολισμένο.

***Άσκηση* 6.2** Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{C(0,2)} \frac{z}{(z-1)^2}\, dz \qquad I_2 = \int_{C(0,2)} \frac{z^2+1}{z(z-1)}\, dz$$

$$I_3 = \int_{C(a,r)} \frac{e^z}{(z-c)^n}\, dz \qquad I_4 = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{e^z - 1}$$

***Άσκηση* 6.3** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma e^z/(z(1-z))\, dz$, όπου η γ είναι η

i) $C(0, 1/2)$ ii) $C(1, 1/2)$ iii) $C(1/2, 1)$.

***Άσκηση* 6.4** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{C(0,R)} f(z)/((z-a)(z-b))\, dz$, όπου η f είναι ακέραιη και a, $b \in C(0,R)$ με $a \neq b$. Να δειχθεί από αυτό το Θεώρημα Liouville.

***Άσκηση* 6.5** Να βρεθεί ολόμορφη συνάρτηση που δεν έχει παράγουσα.

***Άσκηση* 6.6** Αν η γ είναι κλειστή καμπύλη με μήκος και $\gamma^* \cap \mathbb{R} = \varnothing$ τότε $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 7

Ρίζες και πόλοι

Λήμμα 7.1 *Έστω ότι η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ συγκλίνει για $|z-a| < r$ όπου $r > 0$ και $c_0 = f(0) = 0$ και $f \neq 0$. Τότε υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ και δυναμοσειρά g που συγκλίνει για $|z-a| < r$ ώστε $g(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m g(z)$ για $|z-a| < r$.*

Απόδειξη: Δεν είναι όλα τα c_n μηδέν, αφού $f \neq 0$. Επιλέγουμε τον μικρότερο ακέραιο m για τον οποίο $c_m \neq 0$. Φυσικά $m \geq 1$ (αφού $c_0 = 0$). Τότε

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k.$$

Θέτουμε $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k$ η οποία σαφώς συγκλίνει για $|z-a| < r$. Επίσης $g(a) = c_m \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m g(z)$ για $|z-a| < r$. □

Ορισμός 7.2 Για $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ θέτουμε $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$. Το σύνολο $Z(f)$ καλείται το *μηδενικό σύνολο της f* ή το σύνολο των ριζών της.

Λήμμα 7.3 *Αν το Ω είναι ένα ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, και η $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση, τότε το σύνολο*

$$Z(f)' = \{z \in \Omega : z \text{ σημείο συσσώρευσης του } Z(f)\}$$

είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του Ω.

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι συνεχής, το σύνολο $Z(f)$ άρα και το $Z(f)'$ είναι κλειστό υποσύνολο Ω ([1] Άσκηση 2.3.6). Θα δείξουμε ότι είναι και ανοικτό.

Έστω $a \in Z(f)'$ (αν $Z(f)' = \varnothing$ τότε είναι βεβαίως ανοικτό). Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $S(a,r) \subseteq \Omega$, αφού το Ω είναι ανοικτό. Επίσης, από το Θεώρημα 6.5, υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad \text{για } z \in S(a,r).$$

Παρατηρούμε ότι $f(a) = 0$, αφού το a είναι σημείο συσσώρευσης του $Z(f)$ και η f είναι συνεχής (ως ολόμορφη). Αν η f είναι ταυτοτικά μηδέν στο $S(a,r)$ τότε βέβαια το a είναι εσωτερικό σημείο του $Z(f)'$. Αν η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο $S(a,r)$ τότε από το Λήμμα 7.1 $f(z) = (z-a)^m g(z)$ για κάποια δυναμοσειρά g στο $S(a,r)$ με $g(a) \neq 0$. Έτσι, εφόσον η g είναι συνεχής στο a ως δυναμοσειρά, υπάρχει ε με $0 < \varepsilon < r$ ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε z με $|z-a| < \varepsilon$. Οπότε $S(a,\varepsilon) \bigcap Z(f) = \{a\}$. Δηλαδή το a είναι μεμονωμένο σημείο του $Z(f)$, άρα $a \notin Z(f)'$, αντίφαση. □

Θεώρημα 7.4 *Αν το Ω είναι τόπος στο $\mathbb{C}$, και η $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση, τότε*

i) *ή η f είναι ταυτοτικά μηδέν,*

ii) *ή το $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία* (*και άρα είναι αριθμήσιμο σύνολο*).

Απόδειξη: Από το Λήμμα 7.3 το $Z(f)'$ είναι κλειστό και ανοικτό υποσύνολο του Ω. Εφόσον το Ω είναι τόπος, είναι σύνολο συνεκτικό, και άρα είτε $Z(f)' = \Omega$, δηλαδή η f είναι ταυτοτικά μηδέν είτε $Z(f)' = \emptyset$, δηλαδή το $Z(f)$ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Μένει να αποδείξουμε ότι, αφού τα σημεία αυτά είναι μεμονωμένα είναι αναγκαστικά αριθμήσιμο πλήθος.

Ισχυρισμός: Υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος συμπαγών υποσυνόλων $F_n \Subset \Omega$ ώστε $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

[Θέτουμε $\Omega_n = \{z \in \Omega \,:\, d(z, \Omega^c) \geq 1/n\}$. Φανερά κάθε Ω_n είναι κλειστό υποσύνολο του Ω: πράγματι, αν $z_k \to z \in \mathbb{C}$ και $z_k \in \Omega_n$, ισχύει $d(z_k, \Omega^c) \geq 1/n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $|z_k - w| \geq 1/n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $w \in \Omega^c$. Παίρνοντας όριο ως προς k προκύπτει $|z-w| \geq 1/n$ για κάθε $w \in \Omega^c$, συνεπώς $d(z, \Omega^c) \geq 1/n$, οπότε $z \in \Omega_n$.

Επιπλέον αν $z_0 \in \Omega$, αφού το Ω είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(z_0, \varepsilon) \Subset \Omega$. Άρα $d(z_0, \Omega^c) \geq \varepsilon$. Οπότε αν $n_0 > 1/\varepsilon$ συνεπάγεται ότι $d(z_0, \Omega^c) \geq 1/n_0$, δηλαδή $z_0 \in \Omega_{n_0}$. Άρα $\Omega \Subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Επειδή ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής προκύπτει $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Άρα

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (\Omega_n \cap \overline{S(0,k)}).$$

Το πλήθος των συνόλων $\Omega_n \bigcap \overline{S(0,k)}$ είναι αριθμήσιμο και είναι και συμπαγή.]

Επειδή τώρα τα $F_n \bigcap Z(f)$ είναι πεπερασμένα σύνολα (αλλιώς το $Z(f)$ έχει σημείο συσσώρευσης στο συμπαγές $F_n \Subset \Omega$), το

$$Z(f) = Z(f) \bigcap \Omega = Z(f) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Z(f) \cap F_n)$$

ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων, είναι αριθμήσιμο. □

Θεώρημα 7.5 (Σφαιρικό του Cauchy) *Έστω ότι το Ω είναι τόπος στο $\mathbb{C}$, η $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega$, $f(a) = 0$ και η f όχι ταυτοτικά μηδέν. Τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $m \geq 1$ και h ολόμορφη συνάρτηση στο Ω ώστε $h(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m h(z)$ για $z \in \Omega$.*

Συγκρίνετε την ουσιαστικά ισχυρότερη διατύπωση του θεωρήματος αυτού με το Λήμμα 7.1. Ο $m = m(a)$ καλείται τάξη της ρίζας (ή του μηδενικού).

Απόδειξη: Επιλέγουμε $r > 0$ ώστε $S(a,r) \Subset \Omega$. Εφόσον η f είναι ολόμορφη, και άρα είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω, υπάρχουν $c_n \in \mathbb{C}$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$ ώστε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{για } z \in S(a,r).$$

Από το Θεώρημα 7.4 το a είναι μεμονωμένο σημείο του $Z(f)$. Άρα η $f|_{S(a,r)}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνεπώς, από το Λήμμα 7.1, υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ και δυναμοσειρά g στο $S(a,r)$ ώστε $g(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m g(z)$ για $|z-a| < r$. Θέτουμε $h : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ με

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}, & \text{για } z \in \Omega \setminus \{a\}, \\[2ex] g(a), & \text{για } z = a. \end{cases}$$

Τότε παρατηρούμε ότι $h(a) \neq 0$, η h είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{a\}$, και $h(z) = g(z)$ δυναμοσειρά στο $S(a,r)$. Άρα η h είναι ολόμορφη και στο a. Έπεται ότι η h είναι ολόμορφη στο Ω. Τέλος, προφανώς, $f(z) = (z-a)^m h(z)$ για $z \in \Omega$. □

Παρατήρηση 7.6 Τα m και g του Θεωρήματος 7.5 καθορίζονται κατά μοναδικό τρόπο. Πράγματι αν m_1 και g_1 ικανοποιούν το Θεώρημα 7.5 τότε

$$(z-a)^m g(z) = (z-a)^{m_1} g_{m_1}(z)$$

για κάθε $z \in \Omega$. Αν $m > m_1$ τότε $(z-a)^{m-m_1} g(z) = g_1(z)$ για κάθε $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Από τη συνέχεια των g, g_1 έπεται ότι έχουμε ισότητα και για $z = a$, δηλαδή $g_1(a) = 0$ άτοπο. Άρα $m = m_1$ και συνεπώς

$$(z-a)^m g(z) = (z-a)^m g_{m_1}(z).$$

Οπότε $g(z) = g_{m_1}(z)$ για κάθε $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Από τη συνέχεια των g, g_1 έπεται ότι $g(a) = g_1(a)$ και άρα $g = g_1$.

Θεώρημα 7.7 (Αρχή αναλυτικής συνέχισης) *Αν το Ω είναι τόπος στο $\mathbb{C}$, οι f, g ολόμορφες συναρτήσεις, και το σύνολο $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ στο οποίο οι συναρτήσεις είναι ίσες έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε $f = g$.*

Απόδειξη: Από τις υποθέσεις έπεται ότι $Z(f-g)' \neq \emptyset$, και άρα από το Θεώρημα 7.4 παίρνουμε $f - g = 0$, δηλαδή $f = g$. □

Παρατήρηση 7.8 Το Θεώρημα 7.7 δεν ισχύει αν το Ω δεν είναι τόπος αλλά απλώς ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Πράγματι, αν $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ είναι μη κενά, ξένα, ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{C}$, $f = 0$ και

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{αν } z \in \Omega_1, \\ 1, & \text{αν } z \in \Omega_2, \end{cases}$$

Τότε $\{z \in \Omega \,:\, f(z) = g(z)\} = \Omega_1 = \Omega_1' \neq \emptyset$, ενώ $f \neq g$.

Παρατήρηση 7.9 Η αρχή της αναλυτικής συνέχισης δείχνει ότι οι τιμές μιας ολόμορφης συνάρτησης σε διαφορετικά σημεία ενός τόπου Ω στον οποίο ορίζεται η συνάρτηση, αλληλοεξαρτώνται. Αν μεταβάλουμε τις τιμές της συνάρτησης σε μια οσοδήποτε μικρή περιοχή ενός σημείου με τρόπο που η συνάρτηση που προκύπτει να παραμείνει ολόμορφη, είμαστε αναγκασμένοι να τις αλλάξουμε τις τιμές και σε κάθε άλλη περιοχή κάθε σημείου του Ω οσοδήποτε μακριά και αν βρίσκεται από την αρχική μεταβολή· διότι η αρχή της αναλυτικής συνέχισης συνεπάγεται ότι δεν γίνεται να συμπίπτουν σε μια περιοχή και να διαφέρουν σε μια άλλη. Αν συμπίπτουν σε μια περιοχή συμπίπτουν παντού. Για αυτό το λόγο η αρχή αυτή λέγεται και *αρχή μοναδικότητας των ολόμορφων συναρτήσεων*. Συγκρίνετε με τις διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Προφανώς αυτές μπορούν να διαφέρουν σε ένα διάστημα και να συμπίπτουν σε ένα άλλο.

Ασκήσεις

***Άσκηση* 7.1** Να βρεθεί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ διαφορίσιμη που να μην επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$.

***Άσκηση* 7.2** Δώστε παράδειγμα ολόμορφης συνάρτησης f, μη σταθερής, με τα σημεία συσσώρευσης του $Z(f)$ στο $\mathbb{C}$ να μην είναι το κενό σύνολο.

***Άσκηση* 7.3** Αποδείξτε, με τη βοήθεια της αρχής της αναλυτικής συνέχισης, ότι το σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων $H(\Omega)$ σε ένα τόπο Ω είναι *ακέραιη περιοχή*, δηλαδή αν f, $g \in H(\Omega)$ και $f(z)g(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$ τότε είτε $f = 0$ είτε $g = 0$.

Αποδείξτε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις $C(\Omega)$ σε ένα τόπο Ω *δεν* συνιστούν ακέραιη περιοχή.

7.1 Μεμονωμένες Ανωμαλίες

Μελετούμε τώρα τις μεμονωμένες ανωμαλίες των ολόμορφων συναρτήσεων, σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.10 Αν το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ και η συνάρτηση $f : \Omega \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη τότε το σημείο a καλείται *μεμονωμένη ανωμαλία* της f.

Μια μεμονωμένη ανωμαλία της f καλείται *επουσιώδης ανωμαλία* της f αν η f μπορεί να οριστεί και στο σημείο a κατά τέτοιο τρόπο ώστε η νέα συνάρτηση (δηλαδή η $f \cup \{(a, f(a))\}$) να είναι ολόμορφη στο Ω.

Θεώρημα 7.11 (Riemann) *Έστω ότι το Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.*

Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε η $f|_{S(a,\varepsilon)\setminus\{a\}}$ να είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Αν η ανωμαλία στο a είναι επουσιώδης τότε η f είναι φραγμένη σε κάθε $\overline{S(a,\varepsilon)} \subseteq \Omega$, αφού η επέκτασή της ($f \cup \{(a, f(a))\}$) είναι συνεχής και το $\overline{S(a,\varepsilon)}$ είναι συμπαγές.

Αντιστρόφως τώρα, θέτουμε $h : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ με

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z), & \text{αν } z \in \Omega \setminus \{a\}, \\ 0, & \text{αν } z = a. \end{cases}$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{z\to a} \frac{h(z) - h(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) = 0,$$

αφού η f είναι φραγμένη σε μια περιοχή του a. Άρα η h είναι ολόμορφη και $h'(a) = 0$. Συνεπώς

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^2 (c_2 + (z-a) + \dots).$$

Δηλαδή $h(z) = (z-a)^2 g(z)$ με τη g ολόμορφη στο $S(a,\varepsilon)$. Προφανώς $g(z) = f(z)$ για $z \in S(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$. Ορίζουμε $f(a) = c_2$, και είναι σαφές ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω. □

Ορισμός 7.12 Έστω ότι το a είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f. Το a καλείται *πόλος τάξεως* $k \geq 1$ για την f αν υπάρχουν $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ με $c_k \neq 0$ ώστε η συνάρτηση

$$f(z) - \frac{c_1}{z-a} - \frac{c_2}{(z-a)^2} - \dots - \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

να έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a. Η παράσταση

$$\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

καλείται κύριο μέρος της f στο a.

Θεώρημα 7.13 *Έστω ότι η $f : \Omega \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και $m \geq 1$ φυσικός. Η f έχει πόλο τάξης m στο a αν και μόνο αν υπάρχει $g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη, με $g(a) \neq 0$ και*

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z)$$

για κάθε $z \in \Omega \setminus \{a\}$.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Η $f(z)(z-a)^m$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a (αφού στο a μπορεί να οριστεί ως $g(a)$) άρα

$$\begin{aligned} f(z)(z-a)^m &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \qquad (\text{για } 0<|z-a|<\varepsilon) \\ &= c_0 + c_1(z-a) + \ldots + c_{m-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} c_k(z-a)^k. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_0}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{(z-a)} + \sum_{k=m}^{\infty} c_k(z-a)^{k-m} \\ &= \frac{c_0}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{(z-a)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k, \end{aligned}$$

για $z \in S(a,\varepsilon)$. Συνεπώς η

$$f(z) - \frac{c_{m-1}}{(z-a)} - \ldots - \frac{c_0}{(z-a)^m}$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a.

($\Rightarrow$) Έστω ότι το

$$\frac{c_1}{(z-a)} + \ldots + \frac{c_m}{(z-a)^m}$$

είναι το κύριο μέρος της f στο a (ώστε $c_m \neq 0$). Θέτουμε $g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ με

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z) & \text{αν } z \neq a, \\ c_m, & \text{αν } z = a. \end{cases}$$

Η g είναι ολόμορφη: πράγματι από το Θεώρημα 7.11 αρκεί να δειχθεί ότι η g είναι συνεχής στο a (οπότε θα είναι και φραγμένη σε μια σφαίρα γύρω από το a). Όμως η

$$h(z) = f(z) - \frac{c_1}{(z-a)} - \ldots - \frac{c_m}{(z-a)^m}$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a. Επίσης

$$g(z) = (z-a)^m f(z) = h(z)(z-a)^m + c_1(z-a)^{m-1} + \ldots + c_m,$$

άρα $\lim_{z\to a} g(z) = c_m = g(a)$. □

Ορισμός 7.14 Έστω ότι το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη και a πόλος τάξης $m \geq 1$ της f με κύριο μέρος το

$$\frac{c_1}{(z-a)} + \ldots + \frac{c_m}{(z-a)^m}$$

($c_m \neq 0$). Ο αριθμός c_1 καλείται το *ολοκληρωτικό υπόλοιπο* της f στο a και συμβλίζεται με $\mathrm{Res}(f,a)$.

Πρόταση 7.15 *Με τον συμβολισμό και τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.13 έχουμε ότι*

$$c_1 = \operatorname{Res}(f, a) = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!}.$$

Απόδειξη: Εφόσον η g είναι ολόμορφη, υπάρχει $r > 0$ ώστε $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k$ για $z \in S(a, r) \subseteq \Omega$. Άρα

$$f(z) = \frac{d_0}{(z-a)^m} + \frac{d_1}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{d_{m-1}}{z-a} + d_m + d_{m+1}(z-a) + \ldots$$

Συνεπώς

$$c_1 = d_{m-1} = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!}. \qquad \square$$

Θεώρημα 7.16 (Ολοκληρωτικών υπολοίπων) *Έστω ότι το Ω είναι ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Omega$, $f : \Omega \setminus \{a\} \mapsto \mathbb{C}$ ολόμορφη, γ κλειστή καμπύλη με μήκος (στο Ω), a_k πόλοι της f για $k = 1, \ldots, n$ και a_1, $a_2, \ldots, a_n \notin \gamma^*$. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k) \operatorname{Ind}_{\gamma}(a_k).$$

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με $Q_k(z)$ το κύριο μέρος της f στο a_k, $k = 1, \ldots, n$. Τότε η $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} Q_k(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στα $a_1, \ldots, a_n$. Δηλαδή η g επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση στο Ω. Από το Θεώρημα του Caychy για κυρτά σύνολα $\int_{\gamma} g(z)\, dz = 0$, δηλαδή

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma} Q_k(z)\, dz.$$

Αλλά

$$\int_{\gamma} Q_k(z)\, dz = \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Res}(f, a_k)}{z-a}\, dz = \operatorname{Res}(f, a_k)\, 2\pi i \operatorname{Ind}_{\gamma}(a_k).$$

Δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Ασκήσεις

***Άσκηση* 7.4** Εξετάστε για ποιες από τις συναρτήσεις

i) $e^{1/z}$ ii) $\dfrac{1}{e^z - 1}$ iii) $\dfrac{z}{e^z - 1}$ iii) $\dfrac{z-2}{z^2(z-1)}$

το μηδέν είναι πόλος, ουσιώδης ή επουσιώδης ανωμαλία. Στην περίπτωση πόλου να υπολογιστεί το αντίστοιχο κύριο μέρος.

***Άσκηση* 7.5** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\text{i)} \int_{C(0,2)} \frac{z-2}{z^2(z-1)}\,dz \qquad \text{ii)} \int_{C(0,2)} \frac{dz}{e^z-1}.$$

***Άσκηση* 7.6** Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό και γ κλειστή καμπύλη στο Ω με μήκος, τότε $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

***Άσκηση* 7.7** Έστω ότι $f(z) = p(z)/q(z)$ για $z \in \mathbb{C} \setminus Z(q)$ ρητή συνάρτηση όπου τα πολυώνυμα p βαθμού n και q βαθμού $m \geq n+2$ δεν έχουν κοινές ρίζες και $q(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j),$$

όπου z_j για $j = 1, 2, \ldots, k$ οι ρίζες του q που έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

***Άσκηση* 7.8** Έστω ότι $f(z) = e^{itz}p(z)/q(z)$ για $z \in \mathbb{C} \setminus Z(q)$ όπου τα πολυώνυμα p βαθμού n και q βαθμού $m \geq n+2$ δεν έχουν κοινές ρίζες και $q(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$. Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j),$$

όπου z_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ οι ρίζες του q με θετικό φανταστικό μέρος.

***Άσκηση* 7.9** Έστω μια συνάρτηση $R(\sin\theta, \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, όπου R ρητή συνάρτηση. Θέτουμε

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right).$$

Τότε

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f, z_j),$$

όπου z_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ οι πόλοι της f στο $S(0,1)$.

***Άσκηση* 7.10** Δείξτε ότι:

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} = \frac{\pi}{b}, \quad a, b \in \mathbb{R}, b > 0$

iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(tx)}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi t e^{-at}}{4a}, \quad t > 0, a > 0$

iv) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}, \quad a\in\mathbb{R}, |a|<1$

v) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad a\in\mathbb{R}, a>1$

***Άσκηση* 7.11** Ποιες τιμές παίρνει το ολοκλήρωμα $\int_\gamma (z^2+1)^{-1}\,dz$ όταν η γ είναι διαφορίσιμη καμπύλη που συνδέει τα σημεία $+1$ και -1 και δεν διέρχεται από τα σημεία i και $-i$.

***Άσκηση* 7.12** Να δειχθεί ότι το $(i\pi)^{-1}\int_\gamma z^{-1}\,dz$ είναι περιττός ακέραιος, όπου γ διαφορίσιμη καμπύλη που συνδέει τα σημεία $+1$ και -1 και δεν διέρχεται από το μηδέν.

7.2 Ουσιώδεις ανωμαλίες

Ορισμός 7.17 Αν η $f:\Omega\setminus\{a\}\mapsto\mathbb{C}$, όπου $a\in\Omega$, f ολόμορφη και το a δεν είναι επουσιώδης ανωμαλία ούτε το a είναι πόλος κάποιας τάξης m, τότε το a καλείται *ουσιώδης ανωμαλία* της f.

Στο επόμενο συμβολίζουμε με $S'(a,\varepsilon)$ το σύνολο $S(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$.

Θεώρημα 7.18 (Casorati-Weierstrass) *Έστω ότι $a\in\Omega$, $f:\Omega\setminus\{a\}\mapsto\mathbb{C}$ ολόμορφη. Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ ώστε $S'(a,\varepsilon)\Subset\Omega$ έπεται ότι το σύνολο $f(S'(a,\varepsilon))$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $S'(a,\varepsilon)\Subset\Omega$ και το $f(S'(a,\varepsilon))$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή υπάρχει $w\in\mathbb{C}$ και $\delta>0$ ώστε $f(S'(a,\varepsilon))\bigcap S(w,\delta)=\varnothing$. Άρα, αν $0<|z-a|<\varepsilon$ συνεπάγεται $|f(z)-w|\geq\delta$. Θέτουμε $g:S'(a,\varepsilon)\mapsto\mathbb{C}$ με $g(z)=1/(f(z)-w)$. Τότε η g είναι ολόμορφη στο $S'(a,\varepsilon)$ και

$$|g(z)|=\frac{1}{|f(z)-w|}\leq\frac{1}{\delta}$$

για $z\in S'(a,\varepsilon)$. Δηλαδή είναι φραγμένη «κοντά» στο a. Από το Θεώρημα 7.11 η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a, δηλαδή υπάρχει επέκταση της g στο a (την οποία ονομάζουμε πάλι g) η οποία είναι ολόμορφη στο $S(a,\varepsilon)$.

Ισχυρισμός 1: Αν $g(a)\neq 0$ τότε η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a.

[Υπάρχει $0<\varepsilon_1<\varepsilon$ ώστε αν $z\in S(a,\varepsilon_1)$ τότε $|g(z)|>|g(a)|/2=:\delta_1$. Τότε $\delta_1\leq 1/|f(z)-w|$ για $z\in S'(a,\varepsilon_1)$ δηλαδή $|f(z)-w|\leq 1/\delta_1$. Άρα $|f(z)|\leq|w|+1/\delta_1$ για $z\in S'(a,\varepsilon_1)$. Συνεπώς η f είναι φραγμένη κοντά στο a οπότε από το Θεώρημα 7.11 έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a.]

Ισχυρισμός 2: Αν $g(a)=0$ τότε η f έχει πόλο (κάποιας τάξης) στο a.

[Παρατηρούμε ότι $g(z) \neq 0$ για $z \in S'(a, \varepsilon)$, άρα το a είναι μεμονωμένη ρίζα της g. Έπεται ότι υπάρχει g_1 ολόμορφη συνάρτηση στο $S(a, \varepsilon)$ και $m \geq 1$ ώστε $g(z) = (z-a)^m g_1(z)$ με $g_1(a) \neq 0$. Παρατηρούμε ότι $g_1(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, \varepsilon)$ οπότε η $h_1(z) = 1/g_1(z)$ είναι ολόμορφη στο $S(a, \varepsilon)$. Συνεπώς $h_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k$ για $z \in S(a, \varepsilon)$. Επίσης $c_0 = h_1(a) = 1/g_1(a) \neq 0$. Άρα

$$\begin{aligned} f(z) - w = \frac{1}{g(z)} &= \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{(z-a)^m}(c_0 + c_1(z-a) + \ldots) \\ &= \left(\frac{c_0}{(z-a)^m} + \ldots + c_m \right) + \ldots, \end{aligned}$$

με $c_0 \neq 0$. Δηλαδή η f έχει πόλο τάξης m στο a.]

Άρα έχουμε αντίφαση με το ότι η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a.

($\Leftarrow$) Αν η f δεν έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a τότε είτε έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a ή πόλο κάποιας τάξης $m \geq 1$.

Περίπτωση 1: Υπάρχει ολόμορφη επέκταση της f στο a.

Σε αυτή την περίπτωση $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$, άρα υπάρχει περιοχή $S(a, \varepsilon)$ του a ώστε $f(S(a, \varepsilon)) \subseteq S(f(a), 1)$, και επομένως το σύνολο $f(S'(a, \varepsilon))$ *δεν* είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$, αντίφαση.

Περίπτωση 2: Η f έχει πόλο τάξης $m \geq 1$ στο a.

Τότε υπάρχει g ολόμορφη στο a ώστε

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z).$$

Άρα

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} \frac{1}{|z-a|^m} \lim_{z \to a} |g(z)| = \infty \cdot |g(a)| = \infty,$$

οπότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $|z| < \varepsilon$ ισχύει $|f(z)| \geq 1$. Δηλαδή υπάρχει περιοχή $S(a, \varepsilon)$ του a ώστε $f(S(a, \varepsilon)) \subseteq \mathbb{C} \setminus S(0, 1)$ και επομένως το σύνολο $f(S(a, \varepsilon))$ *δεν* είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$, αντίφαση. $\square$