Γραμμική Άλγεβρα Ι

Νίκος Παπαλεξίου

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών

I. ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1 Σώμα

1.1.1 Ορισμός: Ένα σύνολο $\mathbb{k}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ ονομάζεται **σώμα** αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

(Α) (α) (Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης)

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{k},$$

(β) (Μηδενικό στοιχείο): Υπάρχει $\mathbf{0} \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{0}+a = a+\mathbf{0} = a, \quad \forall a \in \mathbb{k},$$

(γ) (Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου): Για κάθε $a \in \mathbb{k}$ υπάρχει $-a \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$a+(-a) = (-a)+a = \mathbf{0},$$

(δ) ((Αντι)-Μεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης)

$$a+b = b+a, \quad \forall a,b \in \mathbb{k}.$$

(Β) (α) (Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{k},$$

(β) (Μοναδιαίο στοιχείο): Υπάρχει $\mathbf{1} \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{1}\cdot a = a\cdot\mathbf{1} = a, \quad \forall a \in \mathbb{k},$$

(γ) (Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου): Για κάθε $a \in \mathbb{k}\setminus\{\mathbf{0}\}$ υπάρχει $a^{-1} \in \mathbb{k}$ τέτοιο ώστε

$$a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = \mathbf{1},$$

(δ) ((Αντι)-Μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού)

$$a\cdot b = b\cdot a, \quad \forall a,b \in \mathbb{k}.$$

(Γ) (Επιμεριστική ιδιότητα)

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c, \quad \forall a,b,c \in \mathbb{k}.$$

Παραδείγματα: 1) Στο $(\mathbb{R},+,\cdot)$ ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το $\mathbb{R}$ είναι σώμα.

2) Στο $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το $\mathbb{C}$ είναι σώμα.
3) Στο $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες, άρα το $\mathbb{Q}$ είναι σώμα.
4) Το $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δε είναι σώμα διότι το 2 δεν έχει αντίστροφο.
5) Έστω $\mathbb{k} = \{0, 1\}$. Όριζουμε τις πράξεις:

$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
0 + 1 &= 1 + 0 = 1 \\
1 + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 0 &= 0 \\
0 \cdot 1 &= 1 \cdot 0 = 0 \\
1 \cdot 1 &= 1.
\end{aligned}
$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1, άρα το $\mathbb{k} = \{0, 1\}$ είναι σώμα (συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_2$).

Από τα παραπάνω σώματα, τα $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ είναι άπειρα σώματα, ενώ το $\mathbb{Z}_2$ είναι πεπερασμένο σώμα.

1.2 Πίνακες

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε με $\mathbb{k}$ το σύνολο των ρητών ή το σύνολο των πραγματικών ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Ορισμός 1.2.1: Μία διάταξη στοιχείων ενός σώματος $\mathbb{k}$ σε μορφή ορθογωνίου σχήματος αποτελούμενη από m-γραμμές και n-στήλες, λέγεται **πίνακας** $m \times n$. Δηλαδή, έστω A ένας πίνακας $m \times n$, τότε θα γράφουμε:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

Επίσης θα γράφουμε

$$
A = (a_{ij}),
$$

εννοώντας τον πίνακα που έχει στη θέση (i, j) το στοιχείο a_{ij} για $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Το σύνολο των πινάκων $m \times n$ με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{k}$ θα συμβολίζεται με $M_{m \times n}(\mathbb{k})$. Τους πίνακες θα συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα της Ελληνικής ή της Λατινικής αλφαβήτου.

Όταν $m = n$ (δηλαδή αν ο αριθμός των γραμμών ισούται με τον αριθμό των στηλών), τότε ο πίνακας θα λέγεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων $n \times n$ με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{k}$ θα συμβολίζεται με $M_n(\mathbb{k})$.

Δύο πίνακες $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$ και $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$ είναι **ίσοι** αν και μόνον αν $a_{ij} = b_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.

Παραδείγματα: α) Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & \frac{8}{3} & -7 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 2×3 με στοιχεία που ανήκουν στο $\mathbb{Q}$ ή στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$.

β) Ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 2×2 με στοιχεία που ανήκουν στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$.

γ) Ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 2×2 με στοιχεία που ανήκουν στο $\mathbb{C}$.

1.3 Πράξεις Πινάκων

1.3.1 Πρόσθεση Πινάκων

Για να προσθέσουμε δύο πίνακες θα πρέπει αυτοί να έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών αντίστοιχα. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$ και $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$. Ορίζουμε το άθροισμα των δύο πινάκων $C = A + B$, ως τον πίνακα $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}$ με $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, n$.

Δηλαδή η πρόσθεση δύο πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{k}) \text{ και } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}$$

γίνεται ως εξής:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}.$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ \sqrt{2} & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Τότε

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 3-6 & -1+1 \\ 8+\sqrt{2} & -2-3 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ 8+\sqrt{2} & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Πολλαπλασιασμός αριθμού με Πίνακα

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$ και $\lambda \in \mathbb{k}$. Ορίζουμε τον πίνακα $\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$.

Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού $\lambda \in \mathbb{k}$ με έναν πίνακα: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in$ $M_{m\times n}(\mathbb{k})$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{k}).$$

Παράδειγμα: Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε

$$5 \cdot A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$. Ορίζουμε τον πίνακα $-A := (-1) \cdot A \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$. Κατά συνέπεια μπορούμε να ορίσουμε την **αφαίρεση** πινάκων:

$$A - B := A + (-1)B.$$

1.3.3. Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$ ένας πίνακας $m \times n$ και $B \in M_{s\times t}(\mathbb{k})$ ένας πίνακας $s \times t$. Για να πραγματοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός $A \cdot B$ απαιτείται $n = s$, δηλαδή ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα θα πρέπει να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου πίνακα.

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$ και $B = (b_{ij}) \in M_{n\times t}(\mathbb{k})$. Ορίζουμε ως το γινομένο $C = A \cdot B$ τον πίνακα $C = (c_{ij}) \in M_{m\times t}(\mathbb{k})$ με

$$\boxed{c_{ij} = \textstyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}} \qquad (1).$$

Παραδείγμα: 1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 7\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 7\cdot(-3) + (-1)\cdot 4 \\ 0\cdot 3 + 4\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 4\cdot(-3) + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -27 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

2) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός. Δηλαδή, εν γένει, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.4 Ιδιότητες Πινάκων

1.4.1 Ορισμός: Ονομάζουμε **Μοναδιαίο** ή **Ταυτοτικό** πίνακα τον τετραγωνικό πίνακα $n \times n$ του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα με 1 και όλα τα άλλα στοιχεία είναι μηδέν. Δηλαδή

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ο οποίος γράφεται

$$I_n = (\delta_{ij}),$$

με $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{για } i \neq j \\ 1, & \text{για } i = j \end{cases}$.

1.4.2 Ορισμός: Ονομάζουμε **Μηδενικό** τον $m \times n$ πίνακα που όλα του τα στοιχεία είναι μηδέν, δηλαδή

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4.3 Πρόταση: Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$, $B = (b_{ij}) \in M_{s\times t}(\mathbb{k})$ και $C = (c_{ij}) \in M_{p\times q}(\mathbb{k})$.

(i) Αν $m = s$ και $n = t$, δηλαδή ορίζεται η πρόσθεση του πίνακα A με τον πίνακα B, τότε

$$A + B = B + A \quad \text{(αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης).}$$

(ii) Αν $m = s = p$ και $n = t = q$, δηλαδή ορίζεται η πρόσθεση των πινάκων A, B, C, τότε

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{(προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης).}$$

(iii) $A + \mathbb{O} = A$, για κάθε πίνακα A.

(iv) $A + (-A) = \mathbb{O}$, για κάθε πίνακα A.

(v) $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, για κάθε τετραγωνικό πίνακα A.

(vi) Έστω $n = s$ και $t = p$. Τότε

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad \text{(προσεταιριστική ιδιότητα του πολ/σμού).}$$

(vii) (a) Έστω $n = s = p$ και $t = p$, τότε

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{(επιμεριστική ιδιότητα από τα αριστερά).}$$

(b) Έστω $s = p$ και $t = q = m$, τότε

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad \text{(επιμεριστική ιδιότητα από τα δεξιά).}$$

Αποδ: (i) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \\ &= (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) \\ &= B + A \end{aligned}$$

(ii) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})) \\ &= ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) \quad \text{(προσεταιριστική ιδιότητα στο } \Bbbk) \\ &= (A + B) + C \end{aligned}$$

(iii) Προφανές

(iv) Προφανές

(v) Έστω $A = (a_{ij})$ και $I_n = (\delta_{ij})$. Αν $A \cdot I_n = (c_{ij})$, τότε από τον τύπο 1.3.3(1) έχουμε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}.$$

Άρα $A \cdot I_n = A$. Όμοια δείχνουμε ότι $I_n \cdot A = A$.

(vi) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Έχουμε

$$A \cdot B = (d_{ij}), \quad \text{με } d_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j} \quad (1).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= (\sum_{k=1}^{t} d_{ik}c_{kj}) \\ &\overset{(1)}{=} (\sum_{k=1}^{t}(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k})c_{kj}) \\ &= (\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}(\sum_{k=1}^{t} b_{\ell k}c_{kj})) \quad (2). \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε,

$$B \cdot C = (e_{ij}), \quad \text{με } e_{ij} = \sum_{k=1}^{t} b_{ik}c_{kj} \quad (3).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= (\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}e_{\ell j}) \\ &\stackrel{(3)}{=} (\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}(\sum_{k=1}^{t} b_{\ell k}c_{kj})) \quad (4). \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

(vii) (a) Θεωρούμε $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και $C = (c_{ij})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})) \\ &= [(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj})] \\ &= (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}) \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

(b) Όμοια με το (a) αποδεικνύουμε ότι $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.$\square$

1.5 Δύναμη Πίνακα

Έστω $A \in M_n(\Bbbk)$ ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Ισχύει,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ \cdots & \quad \cdots \\ A^n &= \overbrace{A \cdot A \cdots A}^{n-\text{φορές}}. \end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε

$$A^0 := I_n.$$

Υπολογίζοντας το τετράγωνο του αθροίσματος δύο τετραγωνικών πινάκων A, B βρίσκουμε:

$$(A + B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2. \quad (1)$$

Αν οι πίνακες A, B μετατίθενται μεταξύ τους τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2.$$

Πιο γενικά η n-οστή δύναμη του αθροίσματος δύο τετραγωνικών πινάκων A, B που μετατίθενται μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

1.5.1 Πρόταση: Αν οι πίνακες $A, B \in M_n(\Bbbk)$ μετατίθενται μεταξύ τους τότε:

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} \cdot B + \binom{n}{2}A^{n-2} \cdot B^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}A \cdot B^{n-1} + \binom{n}{n}B^n,$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, με $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ και $0! := 1$.

Αποδ.: Η απόδειξη είναι έξω από τους σκοπούς του μαθήματος.$\square$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η n-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας A γράφεται:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + B,$$

όπου $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι οι πίνακες B και I_3 μετατίθενται μεταξύ τους, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του διωνύμου του Νεύτωνα:

$$(I_3 + B)^n = \binom{n}{0}I_3^n + \binom{n}{1}I_3^{n-1} \cdot B + \cdots + \binom{n}{n-1}I_3 \cdot B^{n-1} + \binom{n}{n}B^n. \quad (1)$$

Επειδή ο I_3 είναι ο μοναδιαίος πίνακας, έχουμε $I_3^n = I_3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την άλλη μεριά υπολογίζουμε τις δυνάμεις του B:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο μηδενικός πίνακας 3×3. Κατά συνέπεια $B^k = \mathbb{O}$ για κάθε $k \geq 3$.

Συνεπώς, από τον τύπο (1) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
A^n &= (I_3+B)^n \\
&= I_3^n + \binom{n}{1} I_3^{n-1}\cdot B + \binom{n}{2} I_3^{n-2}\cdot B^2 + \binom{n}{3} I_3^{n-3}\cdot \overbrace{B^3}^{=0} + \cdots + \binom{n}{n}\overbrace{B^n}^{=0} \\
&= I_3 + nI_3\cdot B + \frac{n(n-1)}{2} I_3\cdot B^2 \\
&= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

1.6 Διαγώνιος Πίνακας

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $n\times n$ ονομάζεται **διαγώνιος** αν όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου είναι 0, δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.
$$

Θα το συμβολίζουμε με diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Παράδειγμα: Έχουμε $I_3 = \text{diag }(1,1,1)$

1.7 Κλιμακωτός Πίνακας

1.7.1 Ορισμός: Ένας $m\times n$ πίνακας, ονομάζεται **κλιμακωτός**, αν και μόνον αν,

(i) το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο (από τα αριστερά), κάθε μη μηδενικής γραμμής, είναι 1. Αυτό το στοιχείο ονομάζεται **ηγετικό**.

(ii) Το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή, βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της κάθε προηγούμενης.

(iii) Οι μη μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν (πάνω) από τις μηδενικέςγραμμές.

Παραδείγματα:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ κλιμακωτός}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ μη κλιμακωτός}$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ κλιμακωτός}$$

$$d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ μη κλιμακωτός}$$

$$e) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ μη κλιμακωτός.}$$

1.7.2 Ορισμός: Ένας κλιμακωτός πίνακας ονομάζεται **ανηγμένος** κλιμακωτός, αν και μόνον αν, το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο στη στήλη στην οποία βρίσκεται το 1.

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ανηγμένος κλιμακωτός.}$$

1.8 Αντίστροφος Πίνακας

1.8.1 Ορισμός: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Θα λέμε ότι ο A είναι **αντιστρέψιμος** αν και μόνον αν υπάρχει ένας πίνακας B $n \times n$, τέτοιος ώστε

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \quad (\star)$$

Ο B λέγεται **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1}.

1.8.2 Πρόταση: Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι μοναδικός.

Αποδ.: Έστω B, C δύο αντίστροφοι του πίνακα A. Τότε από τον ορισμό και την εξίσωση $(\star)$ έχουμε:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad (1)$$
$$B \cdot C = C \cdot B = I_n \quad (2).$$

Κατά συνέπεια έχουμε,

$$C = C \cdot I_n \overset{(1)}{=} C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B \overset{(2)}{=} I_n \cdot B = B.\square$$

1.8.3 Πρόταση: Αν A, B είναι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε και ο $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.}$$

Αποδ.: Επειδή οι A, B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, από τον ορισμό και την εξίσωση $(\star)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \quad (1) \\ B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = I_n \quad (2). \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} \\ &\overset{(2)}{=} A \cdot I_n \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &\overset{(1)}{=} I_n \end{aligned}$$

και από την άλλη μεριά

$$\begin{aligned} (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B \\ &\overset{(1)}{=} B^{-1} \cdot I_n \cdot B \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &\overset{(2)}{=} I_n. \end{aligned}$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό, ο $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.\square$

1.9 Ανάστροφος Πίνακας

1.9.1 Ορισμός: Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ ένας $m \times n$ πίνακας (όχι απαραίτητα τετραγωνικός). Ονομάζουμε **ανάστροφο** πίνακα του A, τον πίνακα $n \times m$, ο οποίος έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A. Συμβολίζουμε με A^t τον ανάστροφο του πίνακα A.

Παράδειγμα:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.9.2 Πρόταση: Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$. Τότε,
(i) $(A+B)^t = A^t + B^t$.
(ii) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
(iii) $(A^t)^t = A$.
(iv) $I^t = I$.
(v) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

Αποδ.: Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Τότε $A^t = (a'_{ij})$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ και $B^t = (b'_{ij})$ με $b'_{ij} = b_{ji}$.
(i) $(A+B)^t = ((a_{ij}+b_{ij})') = (a_{ji}+b_{ji}) = (a'_{ij}+b'_{ij}) = (a'_{ij})+(b'_{ij}) = A^t+B^t$.
(ii) Έστω $A \cdot B = (c_{ij})$ με $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Τότε,

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^t = (c'_{ij}) &= (c_{ji}) \\ &= (\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}) \\ &= (\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj}) \\ &= B^t \cdot A^t.\end{aligned}$$

(iii) $(A^t)^t = ((a'_{ij})') = ((a_{ji})') = (a_{ij}) = A$.
(iv) $I_n^t = (\delta'_{ij}) = (\delta_{ji}) = (\delta_{ij}) = I_n$.
(v) $(\lambda A)^t = ((\lambda(a_{ij}))') = ((\lambda a_{ij})') = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a'_{ij}) = \lambda A^t$.□

1.9.3 Πρόταση: Έστω A τετραγωνικός πίνακας $n \times n$. Τότε, ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A^t είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Αποδ.: ($\Longrightarrow$) Έστω A αντιστρέψιμος. Από τον ορισμό προκύπτει ότι υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$. Παίρνοντας τον ανάστροφο και στα δύο μέλη της ισότητας:

$$(A \cdot A^{-1})^t = I_n^t \iff (A^{-1})^t \cdot A^t = I_n. \quad (1)$$

Όμοια από την εξίσωση $A^{-1} \cdot A = I_n$ παίρνουμε την εξίσωση $A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n \quad (2)$. Από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ο αντίστροφος πίνακας του A^t είναι ο $(A^{-1})^t$, δηλαδή ο A^t είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον έχουμε $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
($\Longleftarrow$) Έστω A^t αντιστρέψιμος τότε από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι ο $(A^t)^t$ είναι αντιστρέψιμος δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος.□

1.10 Συμμετρικοί, Αντισυμμετρικοί και Ορθογώνιοι Πίνακες

1.10.1 Ορισμοί: (i) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **συμμετρικός** αν και μόνον αν $A^t = A$.

(ii) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **αντισυμμετρικός** αν και μόνον αν $A^t = -A$.

(iii) Ένας τετραγωνικός πίνακας A ονομάζεται **ορθογώνιος** αν και μόνον αν $A^t \cdot A = A \cdot A^t = I_n$.

Παραδείγματα:

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ συμμετρικός}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ αντισυμμετρικός}$$

$$(iii) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ορθογώνιος.}$$

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Έστω $M_n(\mathbb{k})$ το σύνολο των $n\times n$ πινάκων που ορίζονται πάνω σ' ένα σώμα $\mathbb{k}$. Για $\mathbb{k}=\mathbb{Q}$, $M_n(\mathbb{Q})$ είναι το σύνολο των ρητών $n\times n$ πινάκων, για $\mathbb{k}=\mathbb{R}$, $M_n(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των πραγματικών $n\times n$ πινάκων και για $\mathbb{k}=\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$ είναι το σύνολο των μιγαδικών $n\times n$ πινάκων.

Ορίζουσες $n\times n$.

Έστω $A=(\alpha_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{k})$.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}=(r_1,\ldots,r_n),$$

όπου $r_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in})$ είναι οι γραμμές του A για $i=1,2,\ldots,n$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $\det : M_n(\mathbb{k})\longrightarrow\mathbb{k}$ λέγεται **ορίζουσα συνάρτηση** αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1) (n-γραμμική): (α) Για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ έχουμε

$$\det(r_1,\ldots,r_i+r_i',\ldots,r_n)=\det(r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_n)+\det(r_1,\ldots,r_i',\ldots r_n).$$

(β) Για κάθε $\lambda\in\mathbb{k}$ και για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ έχουμε:

$$\det(r_1,\ldots,\lambda r_i,\ldots,r_n)=\lambda\det(r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_n).$$

2) (Εναλλάσσουσα) Αν δύο διαδοχικές γραμμές ενός πίνακα A είναι ίσες, τότε $\det(A)=0$. Δηλαδή αν $r_k=r_{k+1}$ για κάποιο k, τότε

$$\det(r_1,\ldots,r_k,r_{k+1},\ldots,r_n)=0.$$

3) $\det(I_n)=1$.

Θα ονομάζουμε το $\det A$ **ορίζουσα** του A. Επίσης θα συμβολίζουμε την ορίζουσα ενός πίνακα, με τον ίδιο τον πίνακα αντικαθιστώντας τις παρενθέσεις του πίνακα από δύο κάθετες γραμμές.

Παράδειγμα 1**:** Η συνάρτηση $\det : M_2(\mathbb{k})\longrightarrow\mathbb{k}$ που ορίζεται από τον τύπο $\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ είναι μια ορίζουσα συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11}+\alpha_{11}' & \alpha_{12}+\alpha_{12}'\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_{11}' & \alpha_{12}'\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21}+\alpha'_{21} & \alpha_{22}+\alpha'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

δηλαδή η συνάρτηση είναι γραμμική στις δύο γραμμές.

Επίσης είναι εναλλάσσουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0.$$

Τέλος έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι 3 ιδιότητες του ορισμού.

Παράδειγμα 2: Η συνάρτηση $\det : M_3(\Bbbk) \longrightarrow \Bbbk$ που ορίζεται από τον τύπο ως εξής:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}$$

είναι μια ορίζουσα συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12}+\alpha'_{12} & \alpha_{13}+\alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_{11}+\alpha'_{11} & \alpha_{12}+\alpha'_{12} & \alpha_{13}+\alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\
&= (\alpha_{11}+\alpha'_{11})\alpha_{22}\alpha_{33} + (\alpha_{12}+\alpha'_{12})\alpha_{23}\alpha_{31} + (\alpha_{13}+\alpha'_{13})\alpha_{21}\alpha_{32} \\
&-(\alpha_{11}+\alpha'_{11})\alpha_{23}\alpha_{32} - (\alpha_{12}+\alpha'_{12})\alpha_{21}\alpha_{33} - (\alpha_{13}+\alpha'_{13})\alpha_{22}\alpha_{31} \\
&= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\
&+\alpha'_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha'_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha'_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha'_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha'_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha'_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\
= &\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύουμε την παραπάνω ιδιότητα για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή.
Επίσης έχουμε

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \lambda\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \lambda\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \lambda\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \lambda\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \lambda\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} \\
&= \lambda\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

και το ίδιο μπορούμε να αποδείξουμε για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή. Συνεπώς η συνάρτηση είναι γραμμική ως προς τις τρεις γραμμές.

Επίσης είναι εναλλάσσουσα:

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{13}a_{31} + a_{13}a_{11}a_{32} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{11}a_{13}a_{32} - a_{12}a_{11}a_{33} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{23} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{11} - a_{11}a_{23}a_{12} - a_{12}a_{21}a_{13} = 0.
$$

Τέλος έχουμε

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.
$$

Επομένως ικανοποιούνται οι 3 ιδιότητες του ορισμού.

Ιδιότητες οριζουσών

Πρόταση 1: Αν αλλάξουμε τη σειρά δύο διαδοχικών γραμμών τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή για $i = 1, 2, \ldots, n-1$ αν $A = (r_1, \ldots, r_i, r_{i+1}, \ldots, r_n)$ και $B = \det(r_1, \ldots, r_{i+1}, r_i, \ldots, r_n)$, τότε

$$
\det(B) = -\det(A).
$$

Αποδ: Από την ιδιότητα $1(a)$ του ορισμού της ορίζουσας, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
0 &= \det(r_1, \ldots, r_i + r_{i+1}, r_i + r_{i+1}, \ldots, r_n) \\
&= \overbrace{\det(r_1, \ldots, r_i, r_i, \ldots, r_n)}^{=0} + \det(r_1, \ldots, r_i, r_{i+1}, \ldots, r_n) \\
&+ \det(r_1, \ldots, r_{i+1}, r_i, \ldots, r_n) + \overbrace{\det(r_1, \ldots, r_{i+1}, r_{i+1}, \ldots, r_n)}^{=0} \\
&= 0 + \det(A) + \det(B) + 0.
\end{aligned}
$$

Άρα $\det(B) = -\det(A)$.$\square$

Πρόταση 2: Αν δύο γραμμές του A είναι ίσες, τότε

$$\det A = 0.$$

Αποδ.: Υποθέτουμε ότι $A = (r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n)$ με $r_i = r_j$. Αλλάζουμε την i-γραμμή με τις επόμενες διπλανές γραμμές έως ότου αυτή η γραμμή πάρει τη θέση της διπλανής γραμμής της j-γραμμής. Από την πρόταση 1 το πρόσημο της ορίζουσας αλλάζει σε κάθε εναλλαγή. Άρα,

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n) \\
&= \pm \det(r_1, \ldots, r_i, r_j, \ldots, r_n) \\
&= 0. \qquad\qquad \text{(από την ιδιότητα 2 του ορισμού, διότι } r_i = r_j\text{)}
\end{aligned}$$

Επομένως $\det A = 0.\square$

Πρόταση 3: Αν $j \neq i$, τότε

$$\det(r_1, \ldots, r_i + \lambda r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) = \det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n),$$

δηλαδή αν ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής προστεθεί σε μία άλλη γραμμή τότε η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει.

Αποδ.: Από την ιδιότητα 1 του ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\det(r_1, \ldots, r_i + \lambda r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n) \\
= \ &\det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n) + \lambda \overbrace{\det(r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_j, \ldots, r_n)}^{=0 \text{ (από πρόταση 2)}} \\
= \ &\det(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_n).\square
\end{aligned}$$

Ορισμός: Αν $A = (\alpha_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{k})$, έστω $A(i|j) \in M_{n-1}(\mathbb{k})$ ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν παραλείψουμε την i-γραμμή και j στήλη του A. Ο $A(i|j)$ ονομάζεται **ελάσσονας** πίνακας του στοιχείου α_{ij}.

Θεώρημα 1: Έστω $n > 1$ και $\det : M_{n-1}(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ μια ορίζουσα συνάρτηση. Για κάθε $j = 1, 2, \ldots n$ οι συναρτήσεις $D_j : M_n(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ τέτοιες ώστε:

$$D_j(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det(A(i|j))$$

είναι ορίζουσες συναρτήσεις.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ και $A = (r_1, \ldots, r_n)$. Ο ελάσσονας πίνακας $A(i|j)$ γράφεται:

$$A(i|j) = (\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_{i-1}, \overline{r}_{i+1}, \overline{r}_n),$$

όπου $\overline{r}_i$ είναι η i-γραμμή χωρίς το j-στοιχείο. Επομένως:

$$\begin{aligned}
& D_j(r_1,\ldots,r_k+r'_k,\ldots,r_n)\\
= & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_k+\overline{r}'_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
= & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
+ & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}'_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
= & D_j(r_1,\ldots,r_k,\ldots,r_n)+D_j(r_1,\ldots,r'_k,\ldots,r_n)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
& D_j(r_1,\ldots,\lambda r_k,\ldots,r_n)\\
= & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\lambda\overline{r}_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
= & \lambda\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det(\overline{r}_1,\ldots,\overline{r}_k,\ldots,\overline{r}_{i-1},\overline{r}_{i+1},\ldots,\overline{r}_n)\\
= & \lambda D_j(r_1,\ldots,r_k,\ldots,r_n).
\end{aligned}$$

Άρα η D_j είναι n-γραμμική.

Δείχνουμε τώρα ότι η D_j είναι εναλλάσσουσα. Έστω $r_k = r_{k+1}$. Θεωρώ $i \neq k$ και $i \neq k+1$. Συνεπώς ο $A(i|j)$ έχει δύο διαδοχικές σειρές ίσες. Επομένως από την ιδιότητα 2 του ορισμού, έχουμε $\det(A(i|j)) = 0$. Άρα

$$D_j(A) = (-1)^{k+j}\alpha_{kj}\det(A(k|j)) + (-1)^{k+1+j}\alpha_{k+1,j}\det(A(k+1|j)).$$

Επειδή όμως $r_k = r_{k+1}$ έπεται ότι $\alpha_{kj} = \alpha_{k+1,j}$ και $A(k|j) = A(k+1|j)$. Άρα $D_j(A) = 0$.

Τέλος έχουμε, $(I_n)(j|j) = I_{n-1}$ και $\det((I_n)(j|j)) = 1$, συνεπώς $D_j(I_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\delta_{ij}\det(I_n(i|j)) = (-1)^{j+j}\det(I_n(j|j)) = 1$. Δηλαδή η $D_j(I_n) = 1$. Άρα για κάθε $j = 1,2,\ldots,n$ οι D_j είναι ορίζουσες συναρτήσεις. $\square$

Παρατήρηση 1: Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τις συναρτήσεις:

$$D'_i(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A(i/j)).$$

Δηλαδή αν $\det : M_{n-1}(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ είναι ορίζουσα συνάρτηση, τότε και οι συναρτήσεις $D'_i : M_n(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$ είναι ορίζουσες συναρτήσεις, για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$ (Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1).

Πόρισμα 1 (Ύπαρξη ορίζουσας συνάρτησης) Υπάρχει τουλάχιστον μία ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στο n. Ήδη είδαμε ότι υπάρχει στο $M_2(\mathbb{k})$ (Παράδειγμα 1). Επίσης το Θεώρημα 1 μας λέει πως μπορούμε να πάρουμε ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$ όταν έχουμε μια τέτοια συνάρτηση στο $M_{n-1}(\mathbb{k})$.□

Θεώρημα 2 (Μοναδικότητα ορίζουσας συνάρτησης) Υπάρχει μία και μοναδική ορίζουσα συνάρτηση στο $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ και $\det, \det'$ ορίζουσες συναρτήσεις. Θέτω $\Delta(A) = \det(A) - \det'(A)$. Θα δείξουμε ότι $\Delta(A) = 0$. Έστω $A = (r_1, \ldots, r_n)$, με

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (*),$$

όπου $e_j = (\,0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0\,)$ είναι ο πίνακας γραμμή που έχει 1 στην j-θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Παρατηρούμε ότι :

α) Η Δ είναι n-γραμμική (διότι det, det$'$ είναι n-γραμμικές).

β) Η Δ είναι εναλλάσσουσα (διότι det, det$'$ είναι εναλλάσσουσες).

γ) Αν $(k_1, \ldots, k_n)$ είναι μια μετάθεση των $(1, 2, \ldots, n)$, τότε

$$\Delta(r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots, r_{k_n}) = \pm \Delta(r_1, r_2, \ldots, r_n).$$

(διότι το ίδιο συμβαίνει για τις det, det$'$).

δ) $\Delta(I_n) = \det(I_n) - \det'(I_n) = 1 - 1 = 0$.

Από την εξίσωση $(*)$ αν αντικαταστήσουμε το r_1 έχουμε:

$$\Delta(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \Delta(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} e_j, r_2, \ldots, r_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \Delta(e_j, r_2, \ldots, r_n).$$

Κατόπιν αντικαθιστούμε το r_2 με $\sum_k \alpha_{2k} e_k$. Έτσι $\Delta(e_j, r_2, \ldots, r_n) = \sum_k \alpha_{2k} \Delta(e_j, e_k, r_3, \ldots, r_n)$. Συνεπώς,

$$\Delta(A) = \sum_{j,k} \alpha_{1j} \alpha_{2k} \Delta(e_j, e_k, r_3, \ldots, r_n).$$

Αντικαθιστούμε το r_3 με $\sum_\ell \alpha_{3\ell} e_\ell$, κ.ο.κ. Έτσι τελικά έχουμε:

$$\Delta(A) = \sum_{1 \leq k_1, \ldots, k_n \leq n} \alpha_{1,k_1} \alpha_{2,k_2} \ldots \alpha_{n,k_n} \Delta(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}).$$

Όμως, $\Delta(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}) = \pm \Delta(e_1, \ldots, e_n) = 0$ από το (δ). Επομένως $\Delta(A) = 0$.□

Πόρισμα 1: Για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$$\boxed{\det A = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i \mid j).}$$

και για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i \mid j).}$$

Σημείωση: Οι παραπάνω τύποι υπολογισμού της ορίζουσας ονομάζονται αντίστοιχα **τύπος αναπτύγματος κατά τη j-στήλη** και **τύπος αναπτύγματος κατά τη i-γραμμή**.

Αποδ.: Άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 2 και της παρατήρησης 1.$\square$

Παράδειγμα 2: $\det : M_3(\mathbb{k}) \longrightarrow \mathbb{k}$, $1 \leq j \leq 3$. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{k})$. Έχουμε:

$$\det(A) = D_1(A) = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_2(A) = -\alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D_3(A) = \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} - \alpha_{23} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} + \alpha_{33} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D'_1(A) = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D'_2(A) = -\alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{23} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix},$$

$$\det(A) = D'_3(A) = \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix} - \alpha_{32} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} + \alpha_{33} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Θεώρημα 3: Αν $A, B \in M_n(\mathbb{k})$, τότε

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Αποδ.: Η απόδειξη είναι έξω από τις δυνατότητες του μαθήματος.$\square$

Πόρισμα: Έστω $A \in M_n(\mathbb{k})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ισχύει

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Αποδ.: Επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, από τον ορισμό, υπάρχει πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n$. Παίρνοντας την ορίζουσα και στα δύο μέλη της εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) &\implies \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \\ &\implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.\square \end{aligned}$$

Πρόταση 4: Για κάθε $A \in M_n(\Bbbk)$, έχουμε

$$\det A^t = \det A.$$

Αποδ.: Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ και $A^t = (a'_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$ με $a'_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A σύμφωνα τον τύπο του αναπτύγματος κατά την i-γραμμή:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A(i|j)) \quad (1).$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A^t σύμφωνα με τον τύπο του αναπτύγματος κατά την j-στήλη:

$$\det(A^t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} \det(A^t(i|j)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^t(i|j)).$$

Όμως $A^t(i|j) = (A(j|i))^t$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^t(i|j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det((A(j|i))^t) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det((A(i|j))^t) \quad (2). \end{aligned}$$

Η απόδειξη της πρότασης γίνεται με επαγωγή στο n. Για $n = 2$, έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Τότε $A^t = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$. Προφανώς έχουμε:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \det(A^t).$$

Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε $\det(A(i|j)) = \det((A(i|j))^t)$, άρα από τις εξισώσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$\det A^t = \det A. \square$$

Παρατήρηση: Η πρόταση 4 λέει ότι αν αλλάξουμε τις γραμμές από τις στήλες σε έναν πίνακα τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει. Συνεπώς οι ιδιότητες (προτάσεις 1,2,3) ισχύουν και αν αντικαταστήσουμε τη λέξη γραμμές από τη λέξη στήλες.

Πρόταση 5: Αν $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ είναι ένας άνω (ή κάτω) τριγωνικός πίνακας $n \times n$ τότε η ορίζουσά του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, δηλαδή:

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Αποδ.: Έστω ότι ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, δηλαδή $a_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$. Από τον τύπο του αναπτύγματος ως προς την πρώτη στήλη έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} & \cdots & \alpha_{3n} \\ 0 & \alpha_{44} & \cdots & \alpha_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Η απόδειξη για τον κάτω τριγωνικό πίνακα είναι αντίστοιχη.□

Συζυγής (προσαρτημένος) πίνακας-υπολογισμός αντίστροφου πίνακα.

Έστω $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ ένας πίνακας $n \times n$. Ονομάζουμε **συμπαράγοντα ή αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου α_{ij} το στοιχείο

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).$$

Από το πόρισμα 1 ξέρουμε ότι:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij}. \quad (1)$$

Ορισμός: Ονομάζουμε **συζυγή** (προσαρτημένο) πίνακα του A (συμβολισμός $adjA$) τον πίνακα $n \times n$:

$$(adjA)_{ij} = c_{ji}.$$

Έχουμε $\det A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_{ij}$. Για $j \neq k$, αντικαθιστούμε την j-στήλη του A από την k-στήλη και ονομάζουμε τον πίνακα που προκύπτει B. Τότε ο B έχει δύο ίσες στήλες. Συνεπώς, $\det B = 0$. Επειδή, για $j \neq k$, $B(i|j) = A(i|j)$ και $\beta_{ij} = \alpha_{ik}$, έχουμε:

$$0 = \det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \beta_{ij} \det(B(i|j)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ik} \det(A(i|j)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ij}. \quad (2)$$

Άρα, από τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ij} = \delta_{jk} \det A. \quad (*)$$

Θεώρημα 4: Έστω $A \in M_n(k)$. Ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν $\det A \neq 0$. Επιπλέον έχουμε

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} adjA.$$

Αποδ.: Θέτουμε $adjA = (c'_{ij})$, όπου $c'_{ij} = c_{ji}$. Από την $(*)$ έχουμε,

$$((adjA)A)_{jk} = \sum_{i=1}^{n} c'_{ji} \alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} c_{ij} = \delta_{jk} \det A.$$

Συνεπώς $(adjA)A = (\det A)I$. Θα δείξουμε ότι $A(adjA) = (\det A)I$. Έχουμε, $(A^t)(i|j) = (A(j|i))^t$. Κατά συνέπεια $(-1)^{i+j} \det(A^t)(i|j) = (-1)^{i+j} \det(A(j|i))^t$. Δηλαδή,

$$adjA^t = (adjA)^t.$$

Συνεπώς, $(adjA^t)A^t = (\det A^t)I = (\det A)I$. Όμως, $(adjA^t)A^t = (A(adjA))^t = A(adjA)$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $A(adjA) = (\det A)I$.

Συνεπώς, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $AA^{-1} = I_n$. Άρα παίρνοντας την ορίζουσα και στα δύο μέλη της ισότητας θα έχουμε $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ και από το θεώρημα 3 προκύπτει ότι $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Συνεπώς $\det(A) \neq 0$.

Αντίστροφα, αν $\det(A) \neq 0$ από τους τύπους που αποδείξαμε παραπάνω: $(adjA)A = A(adjA) = (\det A)I$, προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA.$$

□

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων αναπτύσσοντας αυτές κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή μιας στήλης:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Να υπολογίσετε τη $n \times n$ ορίζουσα:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

3. Αν $\det(A) \neq 0$, τότε $\det(adj(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

4. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)^3.$$

5. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

6. Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a).$$

7. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα:

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-x \end{pmatrix}.$$

8. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος του πίνακα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Δείξτε ότι αν n είναι περιττός αριθμός και A ένας αντισυμμετρικός πίνακας $n \times n$, τότε $\det(A) = 0$.

10. Δείξτε ότι αν A είναι ένας ορθογώνιος πίνακας τότε $\det(A) = \pm 1$.

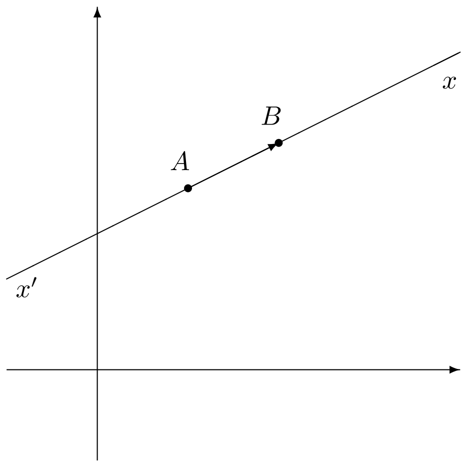
11. Έστω A, B δύο μη μηδενικοί τετραγωνικοί πίνακες. Δείξτε ότι αν $A \cdot B = \mathbf{0}$ τότε $\det(A) = \det(B) = 0$.

12. Έστω $i \neq j$. Δείξτε ότι αν σε έναν πίνακα αλλάξω την i με την j γραμμή τότε η ορόζουσα αλλάζει πρόσημο.

III. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

3.1. Διανύσματα στο επίπεδο και στο χώρο.

Ορισμός 3.1.1: Ένα ζεύγος σημείων (A, B) του επιπέδου ορίζει το ευθύγραμμο τμήμα AB του οποίου τα άκρα θεωρούνται «διατεταγμένα»: Το A πρώτο και το B δεύτερο. Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται **εφαρμοστό διάνυσμα** με αρχή A και τέλος B.



(i) **Διεύθυνση** του (A, B) λέγεται η διεύθυνση της ευθείας xx' που διέρχεται από το AB.

(ii) **Φορά** του (A, B) λέγεται η φορά της ημιευθείας Ax.

(iii) **Μέτρο** του (A, B) λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων ορίζουμε την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας:

$$(A, B) \sim (C, D) \iff \text{Τα } (A,B) \text{ και } (C,D) \text{ έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και το ίδιο μέτρο.}$$

Ορισμός 2.1.2: Κάθε κλάση ισοδυναμίας που δημιουργείται με τη σχέση $\sim$ λέγεται **ελεύθερο διάνυσμα** (ή απλά διάνυσμα) στο επίπεδο. Θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του (A, B) με $\overrightarrow{AB}$. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{E}$ το σύνολο ελεύθερων διανυσμάτων του επιπέδου.

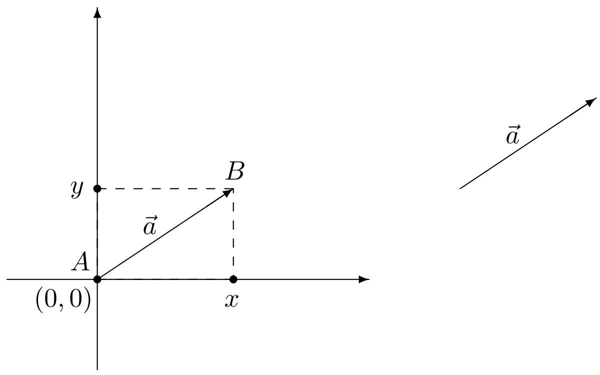
Στο σύνολο $\mathcal{E}$ μπορούμε να ορίσουμε δύο πράξεις. Την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού επί διάνυσμα. Η πρόσθεση διανυσμάτων ορίζεται ως εξής:

Το άθροισμα μεταξύ των ελεύθερων διανυσμάτων ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \forall \vec{a},\vec{b}\in\mathcal{E}$,
(ii) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \quad \forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathcal{E}$,
(iii) $\vec{a}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}+\vec{a}=\vec{a} \quad \forall \vec{a}\in\mathcal{E}$,
(iv) $\forall a\in\mathcal{E}$, $\exists \vec{a}'\in\mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{a}'+\vec{a}=\vec{\mathbf{0}}$.

Έστω $\vec{a}$ ένα ελεύθερο διάνυσμα και $\lambda\in\mathbb{R}$. Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού $\lambda>0$ επί $\vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα $\lambda\vec{a}$ το οποίο έχει ίδια διεύθυνση και φορά με το $\vec{a}$ και μέτρο ίσο με λ φορές το μέτρο του $\vec{a}$. Αν τώρα $\lambda<0$ το $\lambda\vec{a}$ έχει ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά με το $\vec{a}$ και μέτρο ίσο με λ φορές το μέτρο του $\vec{a}$.

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού $\lambda\in\mathbb{R}$ επί ελεύθερο διάνυσμα ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:
(i) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall\vec{a},\vec{b}\in\mathcal{E}$,
(ii) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a} \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall\vec{a}\in\mathcal{E}$,
(iii) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a} \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall\vec{a}\in\mathcal{E}$,
(iv) $\forall\vec{a}\in\mathcal{E}$ $1\vec{a}=\vec{a}$.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μ΄ ένα ζεύγος συντεταγμένων (x,y) στο $\mathbb{R}^2$: Πράγματι, κάθε κλάση ισοδυναμίας ελεύθερων διανυσμάτων έχει έναν αντιπρόσωπο που ξεκινά από την αρχή των αξόνων. Αντιστοιχούμε λοιπόν σ΄ αυτή την κλάση τις συντεταγμένες (x,y) της τελικής κορυφής του διανύσματος (βλ. το παρακάτω σχήμα):



Αντίστροφα, μπορούμε σε κάθε ζεύγος συντεταγμένων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ να αντιστοιχήσουμε την κλάση που έχει αντιπρόσωπο το διάνυσμα με αρχική κορυφή το $(0, 0)$ και τελική το (x, y). Έτσι έχουμε μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ των ελεύθερων διανυσμάτων και του $\mathbb{R}^2$. Επομένως έχουμε

$$\{\text{Ελεύθερα διανύσματα στο } \mathbb{R}^2\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Όμοια βρίσκουμε την αντιστοιχία στο χώρο:

$$\{\text{Ελεύθερα διανύσματα στο } \mathbb{R}^3\} \longleftrightarrow \mathbb{R}^3.$$

3.2 Ορισμός Διανυσματικών χώρων

Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε την έννοια του ελεύθερου διανύσματος και του συνόλου των ελεύθερων διανυσμάτων, εισάγοντας την έννοια του διανυσματικού χώρου του οποίου τα στοιχεία θα ονομάζονται διανύσματα. Ο ορισμός του διανυσματικού χώρου θα βασιστεί στις ιδιότητες των ελεύθερων διανυσμάτων που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

3.2.1 Ορισμός: Διανυσματικός (ή Γραμμικός) Χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) ονομάζουμε ένα σύνολο V, του οποίου τα στοιχεία ονομάζονται διανύσματα, εφοδιασμένο με δύο πράξεις:

a) Η πρώτη πράξη ονομάζεται **πρόσθεση διανυσμάτων**, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(*i*) Αν $u, v \in V$ τότε $u + v \in V$ (λέμε ότι ο V είναι «κλειστός» ως προς την πρόσθεση).

(*ii*) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης).

(iii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης).

(iv) Υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbf{0} \in V$, ονομαζόμενο μηδενικό στοιχείο, τέτοιο ώστε $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$, $\forall u \in V$.

(v) Για κάθε στοιχείο $v \in V$, υπάρχει ένα στοιχείο $(-v) \in V$, ονομαζόμενο αντίθετο του v, τέτοιο ώστε $v + (-v) = \mathbf{0} = (-v) + v$.

Η δεύτερη πράξη ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** (πολλαπλασιασμός αριθμού $\lambda \in \Bbbk$ επί διανύσματος $v \in V$) και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\forall \lambda \in \Bbbk, v \in V$, το στοιχείο λv ανήκει στο V. Ονομάζουμε το λv (βαθμωτό) πολλαπλάσιο του λ επί το v,

(ii) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall \lambda \in \Bbbk$, $u, v \in V$,

(iii) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, $\forall \lambda, \mu \in \Bbbk$, $u \in V$,

(iv) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, $\forall \lambda, \mu \in \Bbbk$, $u \in V$,

(v) $\mathbf{1}v = v$, $\forall v \in V$.

Παραδείγματα (Διανυσματικών Χώρων)

(i) Το σύνολο $\mathbb{Q}$ υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

(ii) Το σύνολο $\mathbb{R}$ υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(iii) Το σύνολο $\mathbb{R}$ υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

(iv) Το σύνολο $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{C}$.

(v) Το σύνολο $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(vi) Στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε τις πράξεις:

$a)$ Για $v = (x_1, y_1), u = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε την πρόσθεση:

$$v + u = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

και $b)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε το βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\lambda v = \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2.$$

Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ είναι το $\mathbf{0} = (0, 0)$ και το αντίθετο ενός στοιχείου $v = (x, y)$ είναι το $-v = (-x, -y)$. Είναι εύκολο να επαληθευθούν οι ιδιότητες του ορισμού 3.2.1, συνεπώς το $\mathbb{R}^2$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(vii) Με τον ίδιο τρόπο εφοδιάζεται το σύνολο $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) με τη δομή του διανυσματικού χώρου υπεράνω του $\mathbb{R}$. Για $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$a + b = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^n$$

και για $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

$$\lambda a = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ είναι το $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ και το αντίθετο ενός στοιχείου $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι το $-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

$(viii)$ Έστω $\mathbb{k}[x]_n$ το σύνολο πολυωνύμων μιας μεταβλητής x βαθμού $\leq n$, με συντελεστές στο $\mathbb{k}$, δηλαδή:

$$\mathbb{k}[x]_n = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n | a_i \in \mathbb{k} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)\}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{k}[x]_n$ ορίζουμε τις πράξεις:

$a)$ Για $v = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, u = q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n \in \mathbb{k}[x]_n$ ορίζουμε την πρόσθεση:

$$v + u = (p+q)(x) := p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \in \mathbb{k}[x]_n$$

και $b)$ για $\lambda \in \mathbb{k}$, ορίζουμε το βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\lambda v = (\lambda p)(x) := \lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n \in \mathbb{k}[x]_n.$$

Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{k}[x]_n$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο $p(x) \equiv 0$ και το αντίθετο ενός πολυωνύμου $v = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ είναι το $-p(x) = -a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n$. Είναι εύκολο να επαληθευθούν οι ιδιότητες του ορισμού 3.2.1, συνεπώς το $\mathbb{k}[x]_n$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{k}$.

(ix) Οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ συνεχής}\}.$$

Για $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ορίζουμε την πρόσθεση δύο συνεχών συναρτήσεων: $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση (το άθροισμα συνεχών είναι συνεχής). Για $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ορίζουμε το βαθμωτό πολλαπλασιασμό αριθμού επί συνάρτηση: $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση. Η μηδενική συνάρτηση $f(x) \equiv 0$ είναι συνεχής συνάρτηση και η αντίθετη μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ είναι η συνεχής συνάρτηση $-f(x)$.

(x) Οι διαφορίσιμες συαναρτήσεις με πραγματικές τιμές και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(xi) Το σύνολο των ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων:

$$\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ με } \int_{\mathbb{R}} |f| < \infty\},$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

(xii) Το σύνολο $M_{m \times n}(\mathbb{k})$ των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{k}$, εφοδιασμένο με την πρόσθεση πινάκων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού στο $\mathbb{k}$ με πίνακα είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{k}$. Το μηδενικό στοιχείο είναι ο μηδενικός $m \times n$ πίνακας $\mathbb{O}$. Ο αντίθετος ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$ είναι ο πίνακας $-A \in M_{m \times n}(\mathbb{k})$.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι ο όρος «διάνυσμα» έχει εδώ ευρύτερη σημασία. «Διάνυσμα» δεν είναι μόνον ένα ελέυθερο διάνυσμα του $\mathcal{E}$, αλλά και μια συνάρτηση, ένας πίνακας, ένα πολυώνυμο κ.λ.π.

3.3 Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε ορισμένες στοιχειώδεις ιδιότητες που είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού ενός διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 3.3.1: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{k}$. Τότε:

(a) Το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0} \in V$ (βλ. 3.2.1$(a)(iv)$) είναι μοναδικό.

(b) Αν $v \in V$, τότε το αντίθετο στοίχείο $(-v) \in V$ (βλ. 3.2.1$(a)(v)$) είναι μοναδικό.

(c) Αν $u + v = u + w$, τότε $v = w$, $\forall u, v, w \in V$ (ιδιότητα διαγραφής).

(d) Αν $u, v \in V$ τότε η εξίσωση $u+x = v$ έχει μια μοναδική λύση: $x = v-u \in V$.

(e) $-(-v) = v$, $\forall v \in V$.

(f) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ $\forall v \in V$.

(g) $-(\lambda v) = -(\lambda v) = \lambda(-v)$ και $(-\lambda)(-v) = (\lambda v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{k}, v \in V$.

Αποδ.: (a) Έστω $\mathbf{0}'$ ένα άλλο μηδενικό στοιχείο. Τότε από 3.2.1$(a)(iv)$ έχουμε

$$v + \mathbf{0} = v = \mathbf{0} + v \quad \forall v \in V \quad (1),$$
$$v + \mathbf{0}' = v = \mathbf{0}' + v \quad \forall v \in V \quad (2).$$

Επομένως, αν θέσουμε $v = \mathbf{0}'$ στην εξίσωση (1) και $v = \mathbf{0}$ στην εξίσωση (2) παίρνουμε:

$$\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$$
$$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0} = \mathbf{0}' + \mathbf{0},$$

επομένως $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

(b) Έστω $v \in V$. Από τον ορισμό του αντίθετου του $v \in V$ έχουμε:

$$v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0} \quad (1).$$

Έστω v' ένα άλλο αντίθετο του v. Τότ εξ ορισμού έχουμε:

$$v + v' = v' + v = \mathbf{0} \quad (2).$$

Τότε

$$\begin{aligned} v' &= v' + \mathbf{0} \quad \text{από } 3.2.1(a)(iv) \\ &= v' + (v + (-v)) \quad \text{από } (1) \\ &= (v' + v) + (-v) \quad \text{από } 3.2.1(a)(iii) \\ &= \mathbf{0} + (-v) \quad \text{από } (2) \\ &= -v \quad \text{από } 3.2.1(a)(iv). \end{aligned}$$

(c) Αν $u + v = u + w$ $\forall u, v, w \in V$, τότε $(-u) + (u + v) = (-u)(u + w)$ και κατά συνέπεια $((-u)+u)+v = ((-u)+u)+w$ απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι $v = w$.

(d) Πρώτα επαληθεύουμε ότι η $x = (-u) + v$ είναι μια λύση του συστ'ματος. Πράγματι: $u+((-u)+v) = (u+(-u))+v = \mathbf{0}+v = v$. Επομένως η $x = (-u)+v$ είναι μια λύση του συστήματος. Αποδεικνύουμε ότι είναι μοναδική. Έστω x' μια άλλη λύση της εξίσωσης. Τότε $u+x = u+x'$ και από την (c) (νόμος διαγραφής) παίρνουμε $x = x'$.

(e) Έστω $v \in V$, τότε $-v \in V$ και από τον ορισμό του αντίθετου για το $-v$ και για το v έχουμε: $(-v) + (-(-v)) = \mathbf{0} = (-v) + v$. Τότε από το (c) (νόμος διαγραφής) παίρνουμε $-(-v) = v$.

(f) Έστω $v \in V$.

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v.$$

Από την άλλη μεριά έχουμε $0 \cdot v = \mathbf{0} + 0 \cdot v$. Επομένως παίρνουμε $0 \cdot v + 0 \cdot v = \mathbf{0} + 0 \cdot v$ και από το νόμο της διαγραφής $0 \cdot v = \mathbf{0}$.

(g) Έστω $\lambda \in \mathbb{k}$, και $v \in V$. Από τον ορισμό 3.2.1$(a)(v)$ έχουμε $v+(-v) = \mathbf{0}$. Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με λ παίρνουμε $\lambda v + \lambda(-v) = \lambda \cdot \mathbf{0}$. Όμως

$$\begin{array}{rcl} \lambda \cdot \mathbf{0} & = & \lambda(0 \cdot v) \quad \text{από το } (f) \\ & = & (\lambda 0) \cdot v \\ & = & 0 \cdot v \\ & = & \mathbf{0}. \quad \text{από το } (f) \end{array}$$

Συνεπώς $\lambda v + \lambda(-v) = \mathbf{0}$. Από το (b) (μοναδικότητα του αντίστροφου) συμπεραίνουμε ότι $-(\lambda v) = \lambda(-v)$. Επίσης $\lambda + (-\lambda) = 0$ και έτσι από την (f) έχουμε $(\lambda + (-\lambda))v = \lambda v + (-\lambda)v = \mathbf{0} = \lambda v + (-(\lambda v))$, άρα $(-\lambda)v = -(\lambda v)$. Τέλος, από την εξίσωση $\lambda(-v) = (-\lambda)v$ προκύπτει ότι $(-\lambda)(-v) = \lambda(-(-v)$ και από την (e) παίρνουμε $(-\lambda)(-v) = \lambda v$.$\square$

3.4 Διανυσματικοί υπόχωροι

Ορισμός 3.4.1: Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται **διανυσματικός υπόχωρος** του V εάν και μόνον εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
(1) αν $u, v \in U$, τότε $u + v \in U$,
(2) αν $u \in U$ και $\lambda \in \mathbb{k}$, τότε $\lambda u \in U$.

Αν το U ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη θα λέμε ότι το U είναι «κλειστό» ως προς την πράξη της πρόσθεσης. Αν το U ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη θα λέμε ότι το U είναι «κλειστό» ως προς την πράξη του (βαθμωτού) πολλαπλασιασμού.

Πρόταση 3.4.2:Εάν U είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V τότε ο U είναι ο ίδιος ένας διανυσματικός χώρος εάν ορίσουμε την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό όπως στον V.

Αποδ: Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες $(a)(i)$ και $(b)(i)$ ικανοποιούνται από την υπόθεση. Επίσης οι συνθήκες $(a)(ii)$, $(a)(iii)$, $(b)(ii)$, $(b)(iii)$, $(b)(iv)$ και $(b)(v)$

ικανοποιούνται διότι το U είναι υποσύνολο του V και το V είναι διανυσματικός χώρος. Αποδεικνύουμε το $(a)(iv)$ και $(a)(v)$. Πράγματι, εφόσων το U είναι μη κενό θεωρώ ένα στοιχείο u του U. Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι το $0 \cdot u = \mathbf{0} \in U$. Επίσης από την υπόθεση και από το 3.3.1(g) έχουμε ότι $-1 \cdot u = -u \in U$. Άρα ο U είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος.□

3.5 Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$.

Ορισμός 3.5.1 Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ διανύσματα του V. Ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό των $v_1, v_2, \ldots, v_n$ κάθε διάνυσμα της μορφής:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι αριθμοί του $\mathbb{k}$.

Πρόταση 3.5.2 Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ διανύσματα του V. Τότε το υποσύνολο του V:

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n | \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}\}$$

είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V.

Αποδ.: Έστω $u_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ και $u_2 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$ δύο τυχαία διανύσματα του U. Τότε

$$u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + (\lambda_2 + \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n + \mu_n)v_n$$

είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Επομένως $u_1 + u_2 \in U$.

Έστω τώρα $\lambda \in \mathbb{k}$ και $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ ένα τυχαίο διάνυσμα του U. Έχουμε ότι

$$\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + (\lambda\lambda_2)v_2 + \cdots + (\lambda\lambda_n)v_n$$

ανήκει στο U.□

Ορισμός 3.5.3: Ονομάζουμε τον υπόχωρο

$$U = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n | \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}\}$$

υπόχωρο που **παράγεται** από τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Θα τον συμβολίζουμε με

$$U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle.$$

Πρόταση 3.5.4: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V. Τότε και ο $U \cap W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Αποδ.: Έστω $u, v \in U \cap W$. Τότε $u \in U$ και $v \in U$, συνεπώς επειδή ο U είναι διανυσματικός υπόχωρος, $u + v \in U$. Επίσης $u \in W$ και $v \in W$, άρα επειδή ο W είναι διανυσματικός υπόχωρος, $u + v \in W$. Κατά συνέπεια $u + v \in U \cap W$.

Όμοια βρίσκουμε ότι αν $u \in U \cap W$ και $\lambda \in \Bbbk$, τότε $\lambda u \in U \cap W$.$\Box$

Πόρισμα 3.5.5: Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ n διανυσματικοί υπόχωροι του V. Τότε και ο $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Αποδ.: Με επαγωγή στο n, χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.5.4.$\Box$

Ορισμός 3.5.6: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V. Ορίζουμε το άθροισμα των U, W ως το σύνολο

$$U + W := \{u + w | u \in U, w \in W\}.$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι $U \subseteq U + W$ και $W \subseteq U + W$ (άρα $U \cup W \subseteq U + W$).

Πρόταση 3.5.7: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V. Τότε και το σύνολο $U + W$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Αποδ.: Έστω $c_1, c_2 \in U + W$. Υπάρχουν $u_1, u_2 \in U$ και $w_1, w_2 \in W$ τέτοια ώστε $c_1 = u_1 + w_1$ και $c_2 = u_2 + w_2$. Τότε

$$c_1 + c_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2),$$

συνεπώς $c_1 + c_2 \in U + W$. Έστω τώρα $\lambda \in \Bbbk$ και $c = u + w \in U + W$. Έχουμε

$$\lambda c = \lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w,$$

άρα $\lambda c \in U + W$.$\Box$

Πόρισμα 3.5.8: Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ n διανυσματικοί υπόχωροι του V. Τότε και ο $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

Αποδ.: Με επαγωγή στο n, χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.5.7.$\Box$

Ορισμός 3.5.9: Έστω U, W δύο διανυσματικοί υπόχωροι του V. Ονομάζουμε **ευθύ άθροισμα** των U, W τον υπόχωρο C που ικανοποιεί τις δύο παρακάτω συνθήκες:

(i) $C = U + W$ και

(ii) $U \cap W = \mathbf{0}$.

Θα συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα των U, W με

$$C = U \oplus W.$$

Παραδείγματα 3.5.10: (i) Έστω $U = \{(a, b, 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$ και $W = \{(0, c, d) | c, d \in \mathbb{R}\}$. Τότε $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $U + W \subseteq \mathbb{R}^3$. Έστω $u = (a, b, 0) \in U$ και $w = (0, c, d) \in W$ με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Τότε $u + w = (a, b, 0) + (0, c, d) = (a, b + c, d) \in \mathbb{R}^3$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W$. Έστω $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε $v = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) \in U + W$. Άρα $\mathbb{R}^3 = U + W$.

(ii) Έστω $U = \{(a, b, 0) | a, b \in \mathbb{R}\}$ και $W' = \{(0, 0, c) | c \in \mathbb{R}\}$. Τότε $\mathbb{R}^3 = U \oplus W'$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $U + W' \subseteq \mathbb{R}^3$. Έστω $u = (a, b, 0) \in U$ και $w = (0, 0, c) \in W'$ με $a, b, c \in \mathbb{R}$. Τότε $u + w = (a, b, 0) + (0, 0, c) = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W'$. Έστω $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε $v = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z) \in U + W'$. Άρα $\mathbb{R}^3 = U + W'$. Επίσης $U \cap W' = \{\mathbf{0}\}$, άρα $\mathbf{R}^3 = U \oplus W'$.

Γραμμική εξάρτηση και γραμμική ανεξαρτησία

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\Bbbk$.

Ορισμός 3.6.1: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ διανύσματα του V. Λέμε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένα** αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ τέτοια ώστε:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0} \text{ και } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0).$$

Ορισμός 3.6.2: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ διανύσματα του V. Λέμε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0} \Longrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0),$$

με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$.

Πρόταση 3.6.3: Ένα σύνολο διανυσμάτων $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ενός διανυσματικού χώρου είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνον αν υπάρχει ένα διάνυσμα στο E το οποίο ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα υπόλοιπα.

Αποδ.: ($\Longrightarrow$) Επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$ όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}.$$

Εφόσων τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ δεν είναι όλα μηδέν, υπάρχει $\lambda_i \neq 0$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Άρα από την προηγούμενη εξίσωση αν λύσουμε ως προς v_i έχουμε:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_k,$$

συνεπώς $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$.

($\Longleftarrow$) Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα $v \in E$ που να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Έστω $v = v_i$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Τότε υπάρξουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$ τέτοια ώστε

$$v = v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Απ' όπου παίρνουμε ότι $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots \lambda_k v_k = \mathbf{0}$ δηλαδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.$\square$

Παραδείγματα 3.6.4: (i) Τα διανύσματα $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbf{0}$, συνεπάγεται ότι $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, δηλαδή τα $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ii) Οι πίνακες του $M_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι. Πράγματι αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ και

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Παρατηρήσεις 3.6.5: (i) Αν k διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και $n > k$ διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ είναι επίσης γραμμικώς εξαρτημένα. Πράγματι, επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα έπεται ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Bbbk$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k = \mathbf{0}$. Συνεπώς:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_k v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \cdots 0 \cdot v_n = \mathbf{0}.$$

Άρα, επειδή κάποιο από τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ δεν είναι 0, έχουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots, v_n$ ίσο με το 0 με τουλάχιστον έναν συντελεστή μη μηδενικό. Άρα τα $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(ii) Αν k διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και οποιαδήποτε απ΄ αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, θα δείξουμε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_i$, με $i \leq k$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: Αν $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_i v_i = \mathbf{0}$, τότε $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_k = \mathbf{0}$. Επειδή όμως τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έπεται ότι: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_i = 0 = \cdots = 0 = 0$. Άρα τα τα $v_1, v_2, \ldots, v_i$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Εφαρμογή (Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^n$)

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Αυτό το σύστημα γράφεται ως εξίσωση πινάκων:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Αν θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

τον πίνακα των συντελεστών,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

τον πίνακα των αγνώστων και

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

τον πίνακα των σταθερών όρων, το σύστημα γράφεται:

$$AX = B.$$

Επίσης θεωρούμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται

$$AX = \mathbf{0}.$$

Πρόταση: Το ομογενές σύστημα $AX = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενικές λύσεις αν και μόνον αν $\det A = 0$.

Αποδ.: Αποδεικνύουμε την κατεύθυνση ($\Longrightarrow$). Υποθέτουμε ότι $\det A \neq 0$. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και επομένως από την εξίσωση $AX = \mathbf{0}$ παίρνουμε $A^{-1}AX = \mathbf{0}$, συνεπώς $X = \mathbf{0}$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

Αντίστροφα τώρα αποδεικνύουμε την κατεύθυνση ($\Longleftarrow$). Υποθέτουμε ότι $\det A = 0$. Σύμφωνα με τη μέθοδο *Gauss* ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος μ΄ έναν ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα A'. Επειδή $\det A = 0$, θα έχουμε $\det A' = 0$. Επίσης, επειδή ο πίνακας A' είναι τετραγωνικός και $\det A' = 0$, έπεται ότι ο A' έχει το ηγετικό κάποιας γραμμής τουλάχιστον δύο θέσεις δεξιότερα από το ηγετικό της προηγούμενης. Άρα ο A' έχει μια γραμμή ίση με μηδέν. Άρα το σύστημα $A'X = \mathbf{0}$ έχει $(n-1)$ εξισώσεις με n αγνώστους. Απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, άρα και μη μηδενικές λύσεις. Συνεπώς το σύστημα $AX = \mathbf{0}$ θα έχει και αυτό και μη μηδενικές λύσεις.□

Πόρισμα : Έστω n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}) \\ v_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}) \end{aligned}$$

Τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν και μόνον αν $\det A \neq 0$.

Αποδ.: ($\Longrightarrow$) Η εξίσωση $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εξ΄ ορισμού έχουμε ότι το παραπάνω ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική. Άρα από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι $\det A \neq 0$.

($\Longleftarrow$) Αντίστροφα αν $\det A \neq 0$ τότε από την προηγούμενη πρόταση το παραπάνω ομογενές σύστημα έχε μοναδική λύση τη μηδενική. Άρα τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.□

3.7 Βάση και διάσταση διανυσματικού χώρου

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$. Θα λέμε ότι ο V είναι **πεπερασμένα παραγόμενος** αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του V, το οποίο παράγει τον V. Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με διανυσματικούς χώρους πεπερασμένα παραγόμενους.

Ορισμός 3.7.1: Ένα πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ διανυσμάτων του V, λέγεται **βάση** του V αν:

(i) τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

(ii) τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ παράγουν τον V.

Θεώρημα 3.7.2 (ύπαρξης βάσης): Έστω V ένας διανυσματικός χώρος (πεπερασμένα παραγόμενος). Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{B} =$

$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ διανυσμάτων του V το οποίο αποτελεί βάση του V.

Αποδ.: Εφόσων ο V είναι πεπερασμένα παραγόμενος, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ διανυσμάτων του V που παράγει τον V, δηλ.

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = V.$$

Εάν το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε το $\mathcal{B}$ είναι βάση και το θεώρημα αποδείχτηκε. Υποθέτουμε τώρα ότι το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Από την πρόταση 3.6.3 υπάρχει ένα διάνυσμα v του $\mathcal{B}$ το οποίο είνια γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{v\}$ το σύνολο των υπολοίπων διανυσμάτων. Έχουμε $\langle \mathcal{B}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ και $\langle v \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle$ (επειδή $v \in \langle \mathcal{B}' \rangle$), άρα

$$\langle \mathcal{B} \rangle = \langle v \cup \mathcal{B}' \rangle \subseteq \langle v \rangle + \langle \mathcal{B}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle + \langle \mathcal{B}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{B}' \rangle.$$

Συνεπώς $\langle \mathcal{B}' \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$. Τώρα μπορούμε να επαναλάβουμε το επειχείρημά μας στο $\mathcal{B}'$. Έτσι, ή το $\mathcal{B}'$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, οπότε το θεώρημα αποδείχτηκε, ή είναι γραμμικώς εξαρτημένο οπότε χρησιμοποιώντας το προηγούμενο επιχείρημα ανάγουμε το πρόβλημα του $\mathcal{B}'$ σ' ένα σύνολο $\mathcal{B}''$ κατά ένα διάνυσμα λιγότερο από το $\mathcal{B}'$. Επειδή το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}$ από το οποίο ξεκινήσαμε είναι πεπερασμένο, το θεώρημα έπεται επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα για ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.□

Πρόταση 3.7.3: Έστω $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων. Το E είναι γραμμικώς εξαρτημένο αν και μόνον αν $v_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{m-1} \rangle$ για κάποιο $m \leq k$.

Αποδ.: ($\Longrightarrow$) Έστω $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ γραμμικώς εξαρτημένο. Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}$. Διαλέγουμε m τον μεγαλύτερο αριθμό από το 1 έως το k τέτοιον ώστε $\lambda_m \neq 0$. Τότε εφόσων $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_k = 0$ έπεται ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m = \mathbf{0}$. Άρα λύνοντας την εξίσωση ως προς v_m, παίρνουμε

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} v_2 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} v_{m-1},$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι $v_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{m-1} \rangle$.

Αποδ.: ($\Longleftarrow$) Αν για κάποιο $m \leq k$ έχουμε

$$v_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{m-1} \rangle,$$

τότε $v_m = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{m-1} v_{m-1}$. Κατά συνέπεια $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{m-1} v_{m-1} + (-1) v_m = \mathbf{0}$, κι έτσι συμπεραίνουμε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Άρα από την παρατήρηση 3.6.5(1) και τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.□

Πρόταση 3.7.4: Έστω $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του V. Εάν $F = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, τότε ο αριθμός των στοιχείων του F είναι $\leq k$.

Αποδ.: Πρέπει να δείξουμε ότι $s \leq k$. Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων

$$G_1 = \{u_s, v_1, v_2, \ldots, v_k\}.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $u_s \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, άρα από την πρόταση 3.6.3 το G_1 είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Από την πρόταση 3.7.3 συνάγουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα v του G_1 που να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγουμένων. Το v δεν μπορεί να είναι το u_s διότι σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να ισούται με μηδέν (όμως $u_s \neq 0$ διότι αλλιώς το F θα ήταν γραμμικώς εξαρτημένο). Επομένως το v ισούται με κάποιο από τα $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Αλλάζοντας τη σειρά τους μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $v = v_k$. Έτσι

$$v_k \in \langle u_s, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \rangle.$$

Έστω τώρα

$$E_1 = \{u_s, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\langle E_1 \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$. Θέτουμε

$$G_2 = \{u_{s-1}, u_s, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}.$$

Επειδή $u_{s-1}, u_s \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, το G_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένο. Από την πρόταση 3.7.3 έχουμε ότι υπάρχει $v \in G_2$ τέτοιο ώστε το v να ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα προηγούμενα. Όμως το v δεν μπορεί να είναι το u_{s-1} (διότι $u_{s-1} \neq 0$), ούτε το u_s διότι τα u_{s-1}, u_s είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα το v ισούται με ένα από τα $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$. Αλλάζοντας τη σειρά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v = v_{k-1}$. Άρα $v_{k-1} \in \langle u_{s-1}, u_s, v_1, v_2, \ldots, v_{k-2} \rangle$ και κατά συνέπεια

$$\langle u_{s-1}, u_s, v_1, v_2, \ldots, v_{k-2} \rangle = \langle u_s, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Υποθέτουμε ότι $s > k$. Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για k ήματα, παίρνουμε

$$\langle u_{s-k+1}, u_{s-k+2}, \ldots, u_s \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Άρα $u_{s-k} \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \langle u_{s-k+1}, u_{s-k+2}, \ldots, u_s \rangle$. Όμως καταλήξαμε σε άτοπο διότι το $\{u_1, u_2 \ldots, u_s\}$ εξ' υποθέσεως είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα $s \leq k$.$\square$

Θεώρημα 3.7.5: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος (πεπερασμένα παραγόμενος) και $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ δύο βάσεις του V. Τότε οι $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Εξ' ορισμού έχουμε ότι

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle = V.$$

Όμως το $\mathcal{B}$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\langle u_1, u_2, \ldots, u_m \rangle$, συνεπώς από την πρόταση 3.7.4 παίρνουμε $n \leq m$. Όμοια επειδή το $\mathcal{B}'$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$, έπεται ότι $m \leq n$. Άρα

$m = n.\square$

Ορισμός 3.7.6: Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$. Ο αριθμός των διανυσμάτων κάθε βάσης του V ονομάζεται **διάσταση** του V και συμβολίζεται με $\dim_{\mathbb{k}} V$ (ή απλά με $\dim V$).

Παραδείγματα: (i) Μια βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η κανονική $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, όπου $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,...,$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Άρα $\dim \mathbb{R}^n = n$.

(ii) Μια βάση του $\mathbb{R}[x]_n$ είναι η $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, επομένως $\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$.

(iii) Ο $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{C}$. Μια βάση του είναι το $\{1\}$. Επομένως $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$=1.

(iv) Ο $\mathbb{C}$ είναι επίσης διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Μια βάση του είναι το $\{1, i\}$. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$=2.

Πόρισμα 3.7.7: Η βάση κάθε διανυσματικού χώρου περιέχει μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων.

Αποδ.: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του V. Τότε επειδή ο αριθμός διανυσμάτων της βάσης ισούται με $\dim V$, από την πρόταση 3.7.4, συμπεραίνουμε ότι $k \leq \dim V$. $\square$

Πρόταση 3.7.8: Έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε υπάρχουν διανύσματα $y_1, y_2, \ldots, y_{n-m}$ τπυ V τέτοια ώστε το σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_{n-m}\}$ να αποτελεί βάση του V.

Αποδ.: Υποθέτουμε ότι ο V παράγεται από το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Επειδή τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την πρόταση 3.7.4 συμπεραίνουμε ότι $m \leq n$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = x_1, x_2, \ldots, x_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

Τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ παράγουν τον V, επομένως και το S παράγει τον V. Αν το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε η πρόταση αποδείχτηκε. Αν όμως είναι γραμμικώς εξαρτημένο τότε από την πρόταση 3.7.3 ένα από τα διανύσματα του S γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγουμένων. Αυτό πρέπει να είναι ένα από τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ διότι τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αλλάζοντας τη σειρά των $v_1, v_2, \ldots, v_n$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό το διάνυσμα είναι το v_n. Αν θέσουμε

$$S' = x_1, x_2, \ldots, x_m, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\},$$

τότε $v_n \in \langle S' \rangle$ και κατά συνέπεια το S' παράγει τον V. Αν τώρα το S' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο τότε η πρόταση αποδείχτηκε. Αν το S' δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο S'. Έτσι όμοια βρίσκουμε ένα σύνολο S'' κατά ένα διάνυσμα λιγότερο από το S' το οποίο περιέχει τα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ και παράγει τον V. Αν το S'' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο η πρόταση αποδείχτηκε αλλιώς συνεχίζουμε τη διαδικασία για το S''. Επειδή το σύνολο S που ξεκινήσαμε είναι πεπερασμένο αυτή η διαδικασία μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα δώσει ένα σύνολο το οποίο θα είναι βάση του V και θα περιέχει τα $x_1, x_2, \dots, x_m$.□

Πόρισμα 3.7.9: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n.

(i) Κάθε σύνολο n γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V αποτελεί βάση του.

(ii) Κάθε σύνολο n διανυσμάτων που παράγουν τον V αποτελεί βάση του.

Αποδ.: (i) Από την παραπάνω πρόταση (3.7.8), κάθε σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V. Επειδή όμως $\dim V = n$, έπεται ότι n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν βάση του V.

(ii) Από την απόδειξη του θεωρήματος 3.7.2, κάθε σύνολο που παράγει τον V περιέχει μια βάση του. Επειδή όμως $\dim V = n$, έπεται ότι τα n διανύσματα που παράγουν τον V αποτελούν βάση του.□

Πόρισμα 3.7.10: Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης n. Έστω U διανυσματικός υπόχωρος του V διάστασης n. Τότε $U = V$.

Αποδ.: Επειδή $\dim U = n$, υπάρχει μια βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ του U. Από το πόρισμα 3.7.9(i) συμπεραίνουμε ότι το $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ αποτελεί βάση του V. Άρα

$$V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = U.$$

Λήμμα 3.7.11: Έστω U υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε

$$\dim U \leq \dim V.$$

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ μια βάση του U και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια βάση του V. Επειδή τα $u_1, u_2, \dots, u_m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ από την πρόταση 3.7.4 έπεται ότι $m \leq n$, δηλαδή ότι $\dim U \leq \dim V$.□

Θεώρημα 3.7.12: Έστω W_1, W_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Αποδ.: Από την πρόταση 3.5.4 έχουμε ότι το $W_1 \cap W_2$ είναι υπόχωρος του V. Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ μια βάση του $W_1 \cap W_2$. Από την πρόταση 3.7.8 συμπεραίνουμε ότι η βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ μπορεί να επεκταθεί σε δυο βάσεις του W_1 και W_2 αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το $\{v_1, v_2, \dots, v_r, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι μια βάση του W_1 και το $\{v_1, v_2, \dots, v_r, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ είναι μια βάση του W_2. Δηλαδή $\dim W_1 = r + n$ και $\dim W_2 = r + m$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r, x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ είναι μια βάση του $W_1 + W_2$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\dim(W_1 + W_2) = r + n + m$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι το S παράγει το $W_1 + W_2$: Έστω $w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ με $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$. Επειδή $w_1 \in W_1$ υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n \in \Bbbk$ τέτοια ώστε

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r + \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \cdots + \lambda'_n x_n. \quad (1)$$

Επίσης, επειδή $w_2 \in W_2$ υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_m \in \Bbbk$ τέτοια ώστε

$$w_1 = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r + \mu'_1 y_1 + \mu'_2 y_2 + \cdots + \mu'_m y_m. \quad (2)$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$w = w_1 + w_2 = (\lambda_1+\mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_r+\mu_r)v_r + \lambda'_1 x_1 + \cdots + \lambda'_n x_n + \mu'_1 y_1 + \cdots + \mu'_m y_m,$$

δηλαδή $w \in \langle S \rangle$. Άρα το $W_1 + W_2$ παράγεται από το S.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j x_j + \sum_{k=1}^{m} \lambda''_k y_k = 0. \quad (3)$$

Τότε έχουμε

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j x_j = -\sum_{k=1}^{m} \lambda''_k y_k \in W_1 \cap W_2,$$

επειδή το αριστερό μέλος της εξίσωσης ανήκει στο W_1 και το δεξί στο W_2. Εφόσων το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ είναι μια βάση του $W_1 \cap W_2$ υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r \in \Bbbk$ τέτοια ώστε

$$-\sum_{k=1}^{m} \lambda''_k y_k = \sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i \Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} \lambda''_k y_k + \sum_{i=1}^{r} \mu_i v_i = 0.$$

Εφόσων τώρα το σύνολο $v_1, v_2, \ldots, v_r, y_1, y_2, \ldots, y_m$ είναι μια βάση του W_2 και συνεπώς είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, έχουμε $\lambda''_1 = \cdots = \lambda''_m = \mu_1 = \cdots = \mu_r = \mathbf{0}$. Από την εξίσωση (3), αντικαθιστώντας $\lambda''_1 = \cdots = \lambda''_m = \mathbf{0}$ παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j x_j = 0.$$

Όμως επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_r, x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι βάση του W_1, άρα και γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = \lambda'_1 = \lambda'_2 = \cdots = \lambda'_n = \mathbf{0}$. Άρα το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Συνεπώς το S είναι μια βάση του $W_1 + W_2$. Άρα δείξαμε ότι $\dim(W_1+W_2) = r+n+m = \dim(w_1 \cap W_2) + \dim W_1 + \dim W_2$.$\square$

Θεώρημα 3.7.13: Έστω V διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Τότε κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης.

Αποδ.: Εφόσων $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι μια βάση του V, έχουμε $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$. Άρα επειδή $v \in V$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ τέτοια ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n. \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \Bbbk$ τέτοια ώστε

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n. \quad (2)$$

Αν αφαιρέσουμε την (2) από την (1) έχουμε

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n$$

και επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα έχουμε $\lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n$.$\square$

Ορισμός 3.7.14: Έστω V διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα για κάθε $v \in V$ υπάρχουν μοναδικά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Ονομάζουμε τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **συντεταγμένες** του $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Παραδείγματα: (i) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $(1, 1, 1)$ του $\mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ είναι $1, 0, 0$.

(ii) Οι συντεταγμένες του διανύσματος $2 - x$ του $\mathbb{R}[x]_1$ ως προς τη βάση $\{1 - x, 1 = x\}$ είναι $\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$.

III. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ
(ή γραμμικοί μετασχηματισμοί)

3.1. Ορισμός γραμμικής απεικόνισης.

Στο κεφάλαιο αυτό όλοι οι διανυσματικοί χώροι που αναφέρονται είναι πεπερασμένης διάστασης. Με $\mathbb{k}$ συμβολίζουμε το σώμα των ρητών ή των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών, δηλαδή $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός 3.1.1: Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$. Μια **γραμμική απεικόνιση** (ή γραμμικός μετασχηματισμός) f από τον V στον W είναι μια απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ τέτοια ώστε:

$$
\begin{array}{l}
(i)\ f(v+v') = f(v) + f(v') \quad \forall v, v' \in V, \\
(ii)\ f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall v \in V.
\end{array}
$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(V, W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο W. Αν $W = V$ συμβολίζουμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο V με $\mathcal{L}(V)$. Μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ ονομάζεται **ενδομορφισμός** διανυσματικών χώρων.

Παρατηρήσεις: (i) Αν f είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Πράγματι, εξ ορισμού έχουμε $f(v+v') = f(v) + f(v')$ για κάθε $v, v' \in V$. Άρα για $v = v' = \mathbf{0}$ έχουμε:

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) = 2f(\mathbf{0}),$$

και κατά συνέπεια $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Επομένως αν $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ τότε η f **ΔΕΝ** είναι γραμμική απεικόνιση.

(ii) Αν f είναι γραμμική απεικόνιση τότε:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).$$

Πράγματι από τις δύο ιδιότητες του ορισμού έχουμε:

$$
\begin{aligned}
f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\
&= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i).
\end{aligned}
$$

(iii) Οι ιδιότητες $(i), (ii)$ του ορισμού 3.1.1 μπορούν να γραφούν ισοδύναμα σε μια ιδιότητα ως εξής:

$$f(\lambda v + v') = \lambda f(v) + f(v') \quad \forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall v, v' \in V.$$

Θεώρημα 3.1.2 (Ύπαρξης γρ. απεικόνισης): Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$. Αν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι μια βάση του V και $\{w_1, \ldots, w_n\}$ είναι n οποιαδήποτε διανύσματα του W, τότε υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ τέτοια ώστε $f(v_i) = w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Αποδ.: Αν $v \in V$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ (μοναδικά ορισμένα) τέτοια ώστε $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ ως εξής:

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) := \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \quad (*).$$

Αν $v, v' \in V$, $\lambda \in \mathbb{k}$, τότε γράφουμε $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ με $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\lambda v + v') &= f(\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^n \mu_i v_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^n ((\lambda\lambda_i) + \mu_i) v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n ((\lambda\lambda_i) + \mu_i) w_i \quad \text{από } (*) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^n \mu_i w_i \\ &= \lambda f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γραμμική απεικόνιση. Από την εξίσωση $(*)$ προκύπτει ότι $f(v_i) = w_i$ για $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Αποδεικνύουμε τώρα την μοναδικότητα. Αν $g : V \longrightarrow W$ είναι μία άλλη γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $g(v_i) = w_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$ και αν $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του V, τότε

$$\begin{aligned} g(v) &= g(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \\ &= f(v). \end{aligned}$$

Άρα $g = f$.$\Box$

Παρατήρηση: Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι για να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ αρκεί να ορίσουμε την τιμή της f σε μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του V. Δηλαδή, αν γνωρίζουμε την τιμή μιας γραμμικής απεικόνισης $f : V \longrightarrow W$ σε μια βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του V, τότε γνωρίζουμε την τιμή της f σε κάθε $v \in V$.

Παραδείγματα: (i) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε: $f(1,0,0) = (1,2)$, $f(0,1,0) = (-1,1)$ και $f(0,0,1) = (2,-3)$. Να υπολογιστεί η τιμή της f σε κάθε διάνυσμα $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Έχουμε,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) \\ &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ &= x(1,2) + y(-1,1) + z(2,-3) \\ &= (x - y + 2z, 2x + y - 3z). \end{aligned}$$

Άρα $f(x,y,z) = (x - y + 2z, 2x + y - 3z)$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x,y,z) = (x + y, y - z).$$

Δείχνουμε ότι η f είναι γραμμική. Έχουμε

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + (x',y',z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= ((x + x') + (y + y'), (y + y') - (z + z')) \\ &= (x + y, y - z) + (x' + y', y' - z') \\ &= f(x,y,z) + f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{k}$, $f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$. Άρα η f είναι γραμμική απεικόνιση.

(iii) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x,y,z) = (x + 1, y).$$

Η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση διότι:

$$f(2(1,0,0)) = (3,0),$$

ενώ $f(1,0,0) = (2,0)$ και κατά συνέπεια

$$2f(1,0,0) = (4,0) \neq (3,0).$$

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: βλέπουμε ότι $f(0,0,0) = (1,0) \neq (0,0)$, άρα από την παρατήρηση (i) η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση.

(iv) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x,y) = (x^2, y^2).$$

Η f δεν είναι γραμμική απεικόνιση διότι:

$$f(2(1,1)) = f(2,2) = (4,4),$$

ενώ $f(1,1) = (1,1)$ και κατά συνέπεια

$$2f(1,1) = (2,2) \neq (4,4).$$

(v) Έστω $D_n : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_n$ η απεικόνιση (παραγώγιση) τέτοια ώστε

$$D_n(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Η D_n είναι γραμμική απεικόνιση διότι για κάθε $\lambda \in \Bbbk$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&D_n(\lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n)) \\
&= D_n((\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + b_1)x + \cdots + (\lambda a_n + b_n)x^n) \\
&= \lambda a_1 + b_1 + 2(\lambda a_2 + b_2)x + \cdots + n(\lambda a_n + b_n)x^{n-1} \\
&= \lambda D_n(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + D_n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n).
\end{aligned}$$

3.2. Πίνακας γραμμικής απεικόνισης.

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\Bbbk$, με $\dim_{\Bbbk} V = n$ και $\dim_{\Bbbk} W = m$. Έστω

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

διατεταγμένες βάσεις των V, W αντίστοιχα. Θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$. Οι εικόνες των διανυσμάτων της βάσης $f(v_j)$ είναι διανύσματα του W, για $j = 1, 2, \ldots, n$, επομένως υπάρχουν $\alpha_{ij} \in \Bbbk$ ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$) τέτοια ώστε:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i.$$

Ο πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m \times n}(\Bbbk)$ ονομάζεται **πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$** και τον συμβολίζουμε

$$A = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Είναι προφανές ότι ο πίνακας A της f εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Δηλαδή αν $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$ είναι δύο άλλες βάσεις των V, W αντίστοιχα, τότε ο πίνακας της f ως προς αυτές τις βάσεις είναι

$$A_1 = (f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1').$$

Στο τέλος αυτής της παραγράφου (πρόταση 3.2.4) θα δούμε, για έναν ενδομορφισμό f του V ποιά είναι η σχέση των πινάκων του f, ως προς δύο διαφορετικές βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ του V. Δηλαδή ποιά είναι η σχέση μεταξύ του $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ και του $(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

Παραπάνω αντιστοιχήσαμε σε μία γραμμική απεικόνιση f έναν πίνακα $A = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Τώρα αντίστροφα θα ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση $f_A : V \longrightarrow W$ έτσι ώστε ο πίνακας της f_A ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ των V, W αντίστοιχα, να είναι ο A. Ορίζουμε την απεικόνιση f_A με

$$f_A(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Τότε από το θεώρημα 3.1.2 η f_A είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που έχει αυτή την ιδιότητα. Έτσι υπάρχει μια «1-1» και «επί» αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathcal{L}(V, W)$ των γραμμικών απεικονίσεων από το V στο W και του συνόλου $M_{m \times n}(\Bbbk)$ των πινάκων $m \times n$. Δηλαδή:

$$\{A \in M_{m \times n}(\Bbbk)\} \longleftrightarrow \{f_A : V \longrightarrow W \text{ γραμμική απεικόνιση}\}$$

Αν $f \in \mathcal{L}(V)$ και $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του V τότε θα γράφουμε $(f; \mathcal{B})$ αντί $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ για τον πίνακα του f ως προς την βάση $\mathcal{B}$.

Παραδείγματα: (i) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z).$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση. Υπολογίζουμε τον πίνακα της f ως προς τις κανονικες βάσεις $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ και $\mathcal{B}_1' = \{(1,0), (0,1)\}$ των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα. Έχουμε:
$f(1,0,0) = (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$
$f(0,1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$
$f(0,0,1) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1)$.
Συνεπώς ο πίνακας της f είναι:

$$(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τώρα δύο άλλες βάσεις των $\mathbb{R}^3$ και $\mathbb{R}^2$ αντίστοιχα: $\mathcal{B}_2 = \{(1,0,-1), (1,1,1), (1,0,0)\}$ και $\mathcal{B}_2' = \{(0,1), (1,0)\}$. Έχουμε:
$f(1,0,-1) = (2,1) = 1(1,0) + 2(0,1)$
$f(1,1,1) = (1,3) = 3(0,1) + 1(1,0)$
$f(0,0,1) = (1,2) = 2(0,1) + 1(1,0)$.
Συνεπώς ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2'$ είναι:

$$(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2') = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Θεωρούμε τον **ταυτοτικό** ενδομορφισμό (ταυτοτική απεικόνιση) $\mathrm{Id} : V \longrightarrow V$ με

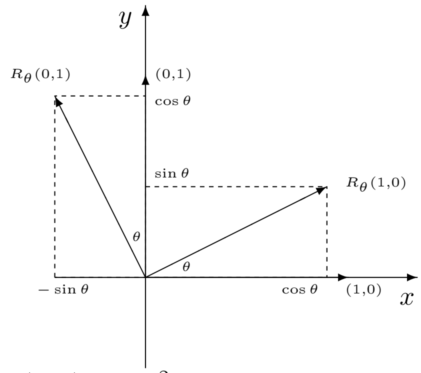
$$\mathrm{Id}(v) = v \quad \text{για κάθε } v \in V.$$

Εάν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του V, είναι προφανές ότι ο πίνακας του Id ως προς την $\mathcal{B}$ είναι ο ταυτοτικός. Δηλαδή

$$(\mathrm{Id}; \mathcal{B}) = I.$$

(iii) Θεωρούμε την απεικόνιση $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ της στροφής ενός διανύσματος στο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ (βλέπε σχήμα).

Έχουμε:
$R_\theta(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$
$R_\theta(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.



Επομένως η εικόνα ενός διανύσματος (x, y) του $\mathbb{R}^2$ είναι:

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η R_θ είναι γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας της R_θ ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$ είναι:

$$(R_\theta; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(iv) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση της παραγώγισης (βλέπε Παράδειγμα (v) στην παράγραφο 3.1):

$$D_n : \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_n.$$

Ο πίνακας της D_n ως προς την κανονική βάση είναι:

$$(D_n; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 3.2.1: Έστω V, V', V'' διανυσματικοί χώροι διάστασης n υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $f : V \longrightarrow V'$ και $g : V' \longrightarrow V''$. Αν $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{B}''$ είναι βάσεις των V, V' και V'' αντίστοιχα τότε

$$((g \circ f); \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = (g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ και $\mathcal{B}'' = \{v''_1, v''_2, \ldots, v''_n\}$. Θέτουμε

$$A = (a_{ij}) = (g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') \text{ και } B = (b_{ij}) = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Τότε αν $C = (c_{ij}) = AB$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(v_j) &= g(f(v_j)) \\
&= g(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} v'_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} g(v'_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \sum_{l=1}^{n} a_{lk} v''_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{lk} b_{kj}) v''_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} c_{lj} v''_l.
\end{aligned}$$

Άρα $((g \circ f); \mathcal{B}, \mathcal{B}'')_{lj} = c_{lj}$, δηλαδή

$$((g \circ f); \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = AB = (g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').\square$$

Πόρισμα 3.2.2: Έστω $f : V \longrightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του διανυσματικού χώρου V. Ο f είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο πίνακας του f ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον έχουμε:

$$(f^{-1}; \mathcal{B}) = (f; \mathcal{B})^{-1}.$$

Αποδ.: ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο f είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει $f^{-1} : V \longrightarrow V$ τέτοιος ώστε

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id},$$

όπου $\mathrm{Id} : V \longrightarrow V$ είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός του V. Από την παραπάνω ισότητα, αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του V, έχουμε

$$((f \circ f^{-1}); \mathcal{B}) = (\mathrm{Id}; \mathcal{B}) = I$$

και από την πρόταση 3.2.1 συμπεραίνουμε ότι

$$(f; \mathcal{B})(f^{-1}; \mathcal{B}) = (\mathrm{Id}; \mathcal{B}) = I,$$

επομένως ο πίνακας του f είναι αντιστρέψιμος και έχουμε $(f; \mathcal{B})^{-1} = (f^{-1}; \mathcal{B})$.

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας του f ως προς μια βάση $\mathcal{B}$, είναι αντιστρέψιμος. Τότε αν g είναι ο ενδομορφισμός του V με πίνακα τον $(f^{-1}; \mathcal{B})$, από την πρόταση 3.2.1 έχουμε

$$((f \circ g); \mathcal{B}) = (f; \mathcal{B})(g; \mathcal{B}) = (f; \mathcal{B})(f^{-1}; \mathcal{B}) = I = (\mathrm{Id}; \mathcal{B}),$$

άρα $f \circ g = \mathrm{Id}$, δηλαδή ο f είναι αντιστρέψιμος.$\Box$

Ορισμός 3.2.3: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ δύο βάσεις του V. Ονομάζουμε **πίνακα αλλαγής βάσης** από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$ τον πίνακα του ταυτοτικού ενδομορφισμού $\mathrm{Id} : V \longrightarrow V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.

Παράδειγμα: Έστω $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ και $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$. Έχουμε,

$\mathrm{Id}(1,0,0) = (1,0,0) = \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0) + (-\frac{1}{2})(0,1,1)$
$\mathrm{Id}(0,1,0) = (0,1,0) = (-\frac{1}{2})(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0) + \frac{1}{2}(0,1,1)$
$\mathrm{Id}(0,0,1) = (0,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,1) + (-\frac{1}{2})(1,1,0) + \frac{1}{2}(0,1,1)$
τότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$ είναι ο εξής:

$$(\mathrm{Id};\mathcal{B},\mathcal{B}') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση: Επειδή ο πίνακας του ταυτοτικού ενδομορφισμού ως προς μία βάση $\mathcal{B}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας από την πρόταση 3.2.1 προκύπτει ότι $(\mathrm{Id};\mathcal{B},\mathcal{B}')(\mathrm{Id};\mathcal{B}',\mathcal{B}) = (\mathrm{Id};\mathcal{B}',\mathcal{B}') = I$ και κατά συνέπεια ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$ είναι ο αντίστροφος του πίνακα αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$.

3.2.4 Πρόταση: Έστω $f : V \longrightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του διανυσματικού χώρου V. Αν $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ είναι δύο βάσεις του V και $(f;\mathcal{B})$, $(f;\mathcal{B}')$ οι πίνακες του f ως προς $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ αντίστοιχα τότε έχουμε:

$$(f;\mathcal{B}') = P^{-1}(f;\mathcal{B})P,$$

όπου $P = (\mathrm{Id};\mathcal{B}',\mathcal{B})$ είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$.

Αποδ.: Θεωρούμε την ακόλουθη σύνθεση συναρτήσεων:

$$\underset{\mathcal{B}'}{V} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{f} \underset{\mathcal{B}}{V} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \underset{\mathcal{B}'}{V}.$$

Έχουμε

$$f = \mathrm{Id} \circ f \circ Id.$$

Συνεπώς από την πρόταση 3.2.1 συνάγουμε ότι

$$(f;\mathcal{B}') = (\mathrm{Id};\mathcal{B},\mathcal{B}')(f;\mathcal{B})(\mathrm{Id};\mathcal{B}',\mathcal{B}).$$

Αν θέσουμε $P = (\mathrm{Id};\mathcal{B}',\mathcal{B})$ τον πίνακα αλλαγής βάσης της βάσης $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$ τότε ο P^{-1} είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης της βάσης $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$. Άρα,

$$(f;\mathcal{B}') = P^{-1}(f;\mathcal{B})P.\Box$$

Παρατήρηση 3.2.5: Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευτεί και για γραμμικές απεικονίσεις $f : V \longrightarrow W$ ως εξής: Αν $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ είναι βάσεις του V και $\mathcal{B}', \mathcal{B}'_1$ είναι βάσεις του W, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P_1 = (\mathrm{Id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ και $P_2 = (\mathrm{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$ τέτοιοι ώστε

$$(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = P_2(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')P_1^{-1}.$$

3.3. Ομοιότητα πινάκων.

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε (πρόταση 3.2.4) ότι δύο πίνακες A, B που αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση ικανοποιούν τη συνθήκη $A = P^{-1}BP$, όπου P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης. Στην παράγραφο αυτή εισάγουμε την έννοια της ομοιότητας δύο πινάκων για να περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ των πινάκων μιας γραμμικής απεικόνισης ως προς δύο διαφορετικές βάσεις.

Ορισμός 3.3.1 Έστω A, B τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$. Λέμε ότι ο A είναι **όμοιος** με τον B αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας $C \in M_n(\mathbb{k})$ πίνακας αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε:

$$A = CBC^{-1}.$$

Λήμμα 3.3.2 Η ομοιότητα είναι σχέση ισοδυναμίας στον $M_n(\mathbb{k})$.

Αποδ.: Για να δείξουμε ότι η ομοιότητα είναι σχέση ισοδυναμίας θα πρέπει να δείξουμε ότι η ομοιότητα είναι **αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική**.

(i) Η ομοιότητα είναι αυτοπαθής: Πράγματι, ο A είναι όμοιος με τον εαυτό του διότι $A = IAI^{-1}$.

(ii) Η ομοιότητα είναι συμμετρική (δηλαδή αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε και ο B είναι όμοιος με τον A): Αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε υπάρχει $P \in M_n(\mathbb{k})$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Άρα, $B = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$, συνεπώς ο B είναι όμοιος με τον A.

(iii) Η ομοιότητα είναι μεταβατική (δηλαδή αν ο A είναι όμοιος με τον B και ο B είναι όμοιος με τον C, τότε ο A είναι όμοιος με τον C): Αν ο A είναι όμοιος με τον B τότε υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Επίσης αν ο B είναι όμοιος με τον C, τότε υπάρχει Q αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $B = QCQ^{-1}$. Άρα αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε ότι $A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$. Δηλαδή ο πίνακας A είναι όμοιος με τον C.$\Box$

Θεώρημα 3.3.3: Έστω V διανυσματικός χώρος διάτασης n και A, B δύο πίνακες $n \times n$. Οι πίνακες A, B αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση $f : V \longrightarrow V$ ως προς δύο βάσεις του V αν και μονον αν οι A, B είναι όμοιοι.

Αποδ.: $(\Longrightarrow)$ Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ δύο βάσεις του V τέτοιες ώστε:

$$(f; \mathcal{B}) = A \text{ και } (f; \mathcal{B}') = B.$$

Έστω P ο πίνακας αλλαγής βάσης. Τότε από την πρόταση 3.2.4 έχουμε

$$A = PBP^{-1},$$

δηλαδή οι A, B είναι όμοιοι.

($\Longleftarrow$) Έστω A, B δύο όμοιοι πίνακες $n \times n$. Τότε υπάρχει P αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ βάση του V και f_A ο γραμμικός ενδομορφισμός του V τέτοιος ώστε $(f_A; \mathcal{B}) = A$. Επίσης έστω $f_P : V \longrightarrow V$ ο γραμμικός ενδομορφισμός του V τέτοιος ώστε $(f_P; \mathcal{B}) = P$. Επειδή ο P είναι αντιστρέψιμος από το πόρισμα 3.2.2 έπεται ότι ο f_P είναι αντιστρέψιμος.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα διανύσματα $\{f_P(v_1), f_P(v_2), \dots, f_P(v_n)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω

$$\lambda_1 f_P(v_1) + \lambda_2 f_P(v_2) + \cdots + \lambda_n f_P(v_n) = \mathbf{0}.$$

Λόγω γραμμικότητας της f_P προκύπτει ότι

$$f_P(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \mathbf{0} = f_P(\mathbf{0}) \quad (1).$$

Όμως επειδή η f_P είναι αντιστρέψιμη έπεται ότι είναι «1-1», άρα από την εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$. Όμως επειδή τα $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διότι είναι βάση του V) έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Άρα τα διανύσματα $\{f_P(v_1), f_P(v_2), \dots, f_P(v_n)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Από το πόρισμα 2.7.9 (i) επειδή $\dim V = n$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{B}' = \{f_P(v_1), f_P(v_2), \dots, f_P(v_n)\}$ είναι μια βάση του V. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\mathcal{B}'$ στη $\mathcal{B}$ ισούται με τον P. Συνεπώς από την πρόταση 3.2.4 έχουμε ότι

$$(f_A; \mathcal{B}') = P^{-1}(f_A; \mathcal{B})P = P^{-1}AP = B.\square$$

3.4 Πυρήνας και εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\Bbbk$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση:

$$f : V \longrightarrow W.$$

Ορισμός 3.4.1 Ονομάζουμε **πυρήνα** της γραμμικής απεικόνισης f το εξής υποσύνολο του V:

$$\ker f = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}.$$

Ορισμός 3.4.2: Ονομάζουμε **εικόνα** της f το εξής υποσύνολο του W:

$$\operatorname{Im} f = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

Λήμμα 3.4.3: (i) Ο $\ker f$ είναι υπόχωρος του V.
(ii) Ο $\operatorname{Im} f$ είναι υπόχωρος του W.

Αποδ.: (i) Για κάθε $v, v' \in \ker f$ έχουμε

$$f(v+v') = f(v) + f(v') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

άρα $v + v' \in \ker f$. Για κάθε $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{k}$,

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda.\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

άρα $\lambda v \in \ker f$. Συνεπώς ο $\ker f$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V.

(ii) Για κάθε $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$ υπάρχουν $v_1, v_2 \in V$ τέτοια ώστε

$$w_1 = f(v_1) \text{ και } w_2 = f(v_2).$$

Άρα

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im} f.$$

Για κάθε $w \in \operatorname{Im} f$, $\lambda \in \mathbb{k}$ υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $w = f(v)$. Κατά συνέπεια $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \in \operatorname{Im} f$.□

Λήμμα 3.4.4: Αν τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ παράγουν τον V, τότε τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ παράγουν τον $\operatorname{Im} f$.

Αποδ.: Έστω $w \in \operatorname{Im} f$. Εξ ορισμού υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $w = f(v)$. Επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ παράγουν τον V, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$. Συνεπώς επειδή η f ειναι γραμμική απεικόνιση έχουμε:

$$w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_n f(v_n),$$

δηλαδή το w ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$.□

Θεώρημα 3.4.5: Έστω $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε έχουμε:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f.$$

Αποδ.: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_s$ μια βάση του $\ker f$. Τότε από την πρόταση 2.7.8 μπορούμε να βρούμε διανύσματα $w_1, w_2, \ldots, w_t$ του V τέτοια ώστε τα $v_1, v_2, \ldots, v_s, w_1, w_2, \ldots, w_t$ να αποτελούν βάση του V. Τότε από το Λήμμα 3.4.4 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \langle f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_s), f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_t) \rangle \\
&= \langle 0, 0, \ldots, 0, f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_t) \rangle \\
&= \langle f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_t) \rangle.
\end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_t)$ αποτελούν βάση του $\operatorname{Im} f$. Από την παραπάνω ισότητα αρκεί να δείξω ότι τα $f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_t)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έστω ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{k}$, τέτοια ώστε:

$$\lambda_1 f(w_1) + \lambda_2 f(w_2) + \cdots + \lambda_t f(w_t) = \mathbf{0}.$$

Θέτουμε

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_t w_t.$$

Τότε το w είναι ένα διάνυσμα του V. Έχουμε

$$f(w) = \lambda_1 f(w_1) + \lambda_2 f(w_2) + \cdots + \lambda_t f(w_t) = \mathbf{0},$$

άρα $w \in \ker f$. Επειδή τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_s$ είναι βάση του $\ker f$, μπορούμε να βρούμε $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε

$$w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_s v_s,$$

άρα

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_t w_t = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_s v_s,$$

απ' όπου γράφουμε ότι:

$$\mathbf{0} = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_s v_s - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 - \cdots - \lambda_t w_t.$$

Επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_s, w_1, w_2, \ldots, w_t$ είναι βάση του V, έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_t = 0$. Έτσι τα $f(w_1), f(w_2), \ldots, f(w_t)$ αποτελούν βάση του $\operatorname{Im} f$. Δηλαδή έχουμε

$\dim \ker f = s$,

$\dim \operatorname{Im} f = t$,

$\dim V = s + t.\square$

3.5 Τάξη πίνακα και γραμμικής απεικόνισης

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{k}$. Οι στήλες $c_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$ του πίνακα A, για $i = 1, 2, \ldots, n$, μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{k}^m$. Συνεπώς παράγουν έναν υπόχωρο του $\mathbb{k}^m$ με διάσταση $\leq m$. Ορίζουμε την τάξη (rank) ενός πίνακα A ως εξής:

3.5.1 Ορισμός: Τάξη (rank) ή βαθμός ενός πίνακα A λέγεται η διάσταση του χώρου που παράγεται από τις στήλες του A και συμβολίζεται με $\operatorname{rank}(A)$ ή $r(A)$.

3.5.2 Λήμμα: Έστω $v_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$, $v_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})$,...,$v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$, n διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{k}^m$ και $P = (p_{ij})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας $m \times m$. Θετουμε

$$v'_i = Pv_i = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

για κάθε $i = 1, 2, ..., n$, θεωρώντας τα $v'_1, v'_2, \ldots, v'_n$ ως διανύσματα του $\mathbb{k}^m$. Έστω $W = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ και $W' = \langle v'_1, v'_2, \ldots, v'_n \rangle$. Τότε $\dim W = \dim W'$.

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ μια βάση του W. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f_P : W \longrightarrow V$ με $f_P(w_i) = Pw_i$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}' = \{f_P(w_1), f_P(w_2), \ldots, f_P(w_k)\}$ είναι μια βάση του W'.

α) Θα δείξουμε ότι τα $f_P(w_1), f_P(w_2), \ldots, f_P(w_k)$ παράγουν το W': Έστω $w' \in W'$, τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} w' &= \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' + \cdots + \lambda_n v_n' \\ &= \lambda_1 P v_1 + \lambda_2 P v_2 + \cdots + \lambda_n P v_n. \end{aligned}$$

Όμως επειδή τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι διανύσματα του W και $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ είναι μια βάση του W, έπεται ότι κάθε v_i (για $i = 1, 2, \ldots, n$) γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, w_2, \ldots, w_k$. Δηλαδή υπάρχουν $\mu_{ij} \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε:

$$v_i = \mu_{i1} w_1 + \mu_{i2} w_2 + \cdots + \mu_{ik} w_k,$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, k$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} w' &= \lambda_1 P(\mu_{11} w_1 + \cdots + \mu_{1k} w_k) + \lambda_2 P(\mu_{21} w_1 + \cdots + \mu_{2k} w_k) + \cdots + \lambda_n P(\mu_{n1} w_1 + \cdots + \mu_{nk} w_k) \\ &= (\lambda_1 \mu_{11} + \lambda_2 \mu_{21} + \cdots + \lambda_n \mu_{n1}) P w_1 + \cdots + (\lambda_1 \mu_{1k} + \lambda_2 \mu_{2k} + \cdots + \lambda_n \mu_{nk}) P w_k \\ &= (\lambda_1 \mu_{11} + \lambda_2 \mu_{21} + \cdots + \lambda_n \mu_{n1}) f_P(w_1) + \cdots + (\lambda_1 \mu_{1k} + \lambda_2 \mu_{2k} + \cdots + \lambda_n \mu_{nk}) f_P(w_k). \end{aligned}$$

Άρα τα $f_P(w_1), f_P(w_2), \ldots, f_P(w_k)$ παράγουν το W'.

β) Δείχνουμε ότι τα τα $f_P(w_1), f_P(w_2), \ldots, f_P(w_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: Έστω

$$\lambda_1 f_P(w_1) + \lambda_2 f_P(w_2) + \cdots + \lambda_k f_P(w_k) = \mathbf{0}.$$

Λόγω γραμμικότητας της f_P προκύπτει ότι

$$f_P(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_k w_k) = \mathbf{0} = f_P(\mathbf{0}) \quad (1).$$

Όμως επειδή η f_P είναι αντιστρέψιμη (διότι ο P είναι αντιστρέψιμος) έπεται ότι είναι «1-1», άρα από την εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_k w_k = \mathbf{0}$. Όμως επειδή τα $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διότι είναι βάση του W) έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Άρα τα διανύσματα $\{f_P(w_1), f_P(w_2), \ldots, f_P(w_k)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Συνεπώς, τα διανύσματα $\{f_P(w_1), f_P(w_2), \ldots, f_P(w_k)\}$ αποτελούν βάση του W', άρα $\dim W' = k = \dim W$.$\square$

3.5.3 Πρόταση: Αν P_1 είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας $m \times m$ και P_2 ένας αντιστρέψιμος πίνακας $n \times n$, τότε

$$\operatorname{rank}(P_1 A) = \operatorname{rank}(A P_2) = \operatorname{rank}(A),$$

για κάθε πίνακα A $m \times n$.

Αποδ.: Ο πίνακας A γράφεται: $A = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ οι στήλες του πίνακα A. Έχουμε $P_1 A = (P_1 c_1, P_1 c_2, \ldots, P_1 c_n)$, όπου $P_1 c_1, P_1 c_2, \ldots, P_1 c_n$

οι στήλες του πίνακα $P_1 A$. Από το λήμμα 3.5.2 επειδή ο πίνακας P_1 είναι αντιστρέψιμος τα διανύσματα $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ και τα διανύσματα $\{P_1 c_1, P_1 c_2, \ldots, P_1 c_n\}$ παράγουν υπόχωρους ίδιας διάστασης. Άρα $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(P_1 A)$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AP_2)$.$\square$

Πόρισμα 3.5.4: Αν A, B είναι όμοιοι πίνακες, τότε $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

Αποδ.: Επειδή οι A, B είναι όμοιοι πίνακες, υπάρχει P αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $A = PBP^{-1}$. Δηλαδή έχουμε $AP = PB$ και κατά συνέπεια $\mathrm{rank}(AP) = \mathrm{rank}(PB)$. Όμως από την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(AP)$ και $\mathrm{rank}(PB) = \mathrm{rank}(B)$. Άρα $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.$\square$

Ορισμός 3.5.5: Έστω $f : V \longrightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση. Ονομάζουμε **τάξη** ή βαθμό της f την τάξη του πίνακα της f ως προς δύο βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ των V, W αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Αν επιλέξουμε δύο διαφορετικές βάσεις $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_1'$ των V, W αντίστοιχα, τότε από την παρατήρηση 3.3.4 υπάρχουν P_1, P_2 αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε:

$$(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = P_2 (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') P_1^{-1}. \qquad (1)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}((f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')) &= \mathrm{rank}(P_2 (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')) \quad \text{από πρόταση 3.5.2.} \\ &= \mathrm{rank}(P_2 (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') P^{-1}) \quad \text{από πρόταση 3.5.2.} \\ &= \mathrm{rank}((f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1')). \quad \text{από (1)} \end{aligned}$$

Άρα η τάξη μιας γραμμικής απεικόνισης δεν εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων.

3.6 Ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$ με $\dim_{\mathbb{k}} V = n$ και $\dim_{\mathbb{k}} W = m$.

Ορισμός 3.6.1: Μια απεικόνιση $f : V \longrightarrow W$ θα λέγεται **ισομορφισμός** διανυσματικών χώρων αν:
(i) η f είναι γραμμική,
(ii) η f είναι «1-1» και
(iii) η f είναι «επί».

Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός από έναν διανυσματικό χώρο V σ' ένα διανυσματικό χώρο W θα λέμε ότι οι διανυσματικοί χώροι V, W είναι **ισόμορφοι** και θα συμβολίζουμε $V \cong W$.

Αν $V = W$ και $f : V \longrightarrow V$ ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω ιδιότητες τότε θα λέμε ότι η f είναι ένας **αυτομορφισμός** του διανυσματικού χώρου V.

Πρόταση 3.6.2: Έστω V ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$, με $\dim V = n$. Τότε ο V είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{k}^n$.

Αποδ.: Έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{k}^n$. Ορίζουμε $f : V \longrightarrow \mathbb{k}^n$ την γραμμική απεικόνιση με $f(v_i) = e_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Θα δείξουμε ότι η f είναι «1-1» και «επί». Πρώτα το «1-1»: Έστω $v, v' \in V$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{k}$ και $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n \in \mathbb{k}$ τέτοια ώστε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ και $v' = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \cdots + \lambda'_n v_n$. Αν $f(v) = f(v')$, τότε $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = f(\lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \cdots + \lambda'_n v_n)$ και κατά συνέπεια $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \lambda'_1 f(v_1) + \lambda'_2 f(v_2) + \cdots + \lambda'_n f(v_n)$. Άρα

$$\begin{aligned} & \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \cdots + \lambda'_n e_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \lambda'_1) e_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) e_2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n) e_n = 0. \end{aligned}$$

Επειδή τώρα τα $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έπεται ότι $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, ..., $\lambda_n = \lambda'_n$.$\square$

Πρόταση 3.6.3: Έστω $f : V \longrightarrow V$ ένας ενδομορφισμός του V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι αυτομορφισμός.

(ii) Η f είναι «1-1».

(iii) $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

(iv) Η f είναι αντιστρέψιμη.

(v) Αν $[f]$ είναι ο πίνακας της f, τότε $\det[f] \neq 0$.

Αποδ.:$(i) \Longrightarrow (ii)$ Προφανές από τον ορισμό.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Υποθέτουμε ότι η f είναι «1-1». Έστω $v \in \ker f$. Τότε $f(v) = \mathbf{0}$. Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση έπεται ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Άρα $f(v) = f(\mathbf{0})$ και κατά συνέπεια $v = \mathbf{0}$ επειδή η f είναι «1-1». Άρα $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n$ μια βάση του V. Θα δείξουμε ότι τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \mathbf{0},$$

τότε επειδή η f είναι γραμμική απικόνιση έχουμε

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \mathbf{0}$$

και κατά συνέπεια επειδή $\ker f = \{\mathbf{0}\}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, δηλαδή τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επειδή τα $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ είναι n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\operatorname{Im} f$ απο το πόρισμα 2.7.9.(i) $\dim \operatorname{Im} f \geq n$. Όμως $\dim V = n$, άρα από το πόρισμα 2.7.10 συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Im} f = V$, δηλαδή η f είναι «επί». Άρα η f είναι αυτομορφισμός.

$(i) \Longrightarrow (iv)$ Έχουμε ότι η f είναι «1-1» και «επί». Άρα υπάρχει η $f^{-1} : W \longrightarrow V$, δηλαδή η f είναι αντιστρέψιμη.

$(iv) \Longrightarrow (ii)$ Έστω ότι $f(v) = f(v')$. Επειδή η f είναι αντιστρέψιμη, έπεται ότι υπάρχει η f^{-1}. Συνεπώς, $(f^{-1} \circ f)(v) = (f^{-1} \circ f)(v')$. Άρα, $v = v'$, δηλαδή η f είναι «1-1».

$(iv) \Longleftrightarrow (v)$ Από το πόρισμα 3.2.2 έχουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη αν και μόνον αν ο πίνακας της f ως προς οποιαδήποτε βάση του V είναι αντιστρέψιμος. Όμως γνωρίζουμε από το κεφάλαιο των οριζουσών ότι ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός.$\square$

Παραδείγματα: (i) Έστω $V = \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ το επίπεδο Oxz και $W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ το επίπεδο Oxy. Έχουμε

$$V \cong W.$$

Πράγματι έστω $f : V \longrightarrow W$ τέτοιος ώστε $f(x, 0, y) = (x, y, 0)$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

(ii) Έχουμε

$$\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R}).$$

Πράγματι θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Η f είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Έστω τώρα V, W διανυσματικοί χώροι με $\dim_k V = n$ και $\dim_k W = m$.

Πρόταση 3.6.4: Ο $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Αποδ.: Στον $\mathcal{L}(V, W)$ ορίζουμε την πράξη της πρόσθεσης:

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}(V, W), v \in V.$$

Επίσης ορίζουμε την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$(\lambda f)(v) = \lambda f(v) \quad \lambda \in \mathbb{k}, v \in V.$$

Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη η επαλήθευση των ιδιοτήτων του διανυσματικού χώρου.$\square$

Θεώρημα 3.6.5: Έχουμε

$$\mathcal{L}(V, W) \cong M_{m \times n}(\mathbb{k}).$$

Επιπλέον $\dim \mathcal{L}(V, W) = mn$.

Αποδ.: Έστω $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ βάσεις των V, W αντίστοιχα. Ορίζουμε μια απεικόνιση:

$$\varphi : \mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{k})$$

έτσι ώστε $\varphi(f) = (f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, όπου $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ είναι ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ του V και W αντίστοιχα.

Πρώτα δείχνουμε ότι η φ είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι, έστω $f, g \in \mathcal{L}(V, W), \lambda \in \mathbb{k}$. Τότε έχουμε:

$$\varphi(\lambda f + g) = ((\lambda f + g); \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') + (g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda\varphi(f) + \varphi(g).$$

Τώρα δείχνουμε ότι η φ είναι «επί». Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{k})$. Αν $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ τότε ορίζουμε την γραμμική απικόνιση $f_A \in \mathcal{L}(V, W)$ έτσι ώστε:

$$f_A(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i \quad \text{για κάθε } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Είναι προφανές από τον ορισμό του πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης ότι

$$\varphi(f_A) = (f_A; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A.$$

Άρα η φ είναι «επί».

Επίσης δείχνουμε ότι η φ είναι «1-1». Πράγματι, υποθέτουμε $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ τέτοιοι ώστε $\varphi(f) = \varphi(g)$. Τότε αν $(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (\alpha_{ij})$ και $(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (\beta_{ij})$, έχουμε

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \text{για κάθε } i, j.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} w_i = g(v_j)$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Όμως επειδή οι f, g είναι γραμμικές απεικονίσεις και τα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ αποτελούν βάση του V, συμπεραίνουμε ότι $f(v) = g(v)$ για κάθε $v \in V$. Άρα $f = g$.

Τέλος επειδή $\dim_{\mathbb{k}} M_{m\times n}(\mathbb{k}) = mn$, τότε θα έχουμε και $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{L}(V, W) = mn$.$\square$

3.7 Δυϊκός χώρος

Έστω V διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{k}$. Το σώμα $\mathbb{k}$ μπορεί το ίδιο να θεωρηθεί διανυσματικός χώρος (διάστασης 1) υπεράνω του $\mathbb{k}$.

Ορισμός 3.7.1: Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}(V, \mathbb{k})$ των γραμμικών απεικονίσεων $f : V \longrightarrow \mathbb{k}$ λέγεται **δυϊκός** χώρος του V και συμβολίζεται με V^*. Οι γραμμικές απεικονίσεις $f : V \longrightarrow \mathbb{k}$ λέγονται **γραμμικές μορφές** του χώρου V επί του $\mathbb{k}$.

Παρατήρηση 3.7.2: Αν η διάσταση του διανυσματικού χώρου V είναι n τότε από το θεώρημα 3.5.4, ο διανυσματικός χώρος V^* έχει διάσταση $n.1 = n$.

Παράδειγμα 3.7.3: Υπολογίστε το δυϊκό χώρο του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Έστω

$$f(e_1) = a_1, \quad f(e_2) = a_2, \quad \ldots, \quad f(e_n) = a_n.$$

Αν $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, συνεπώς

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i. \qquad (1)$$

Άρα κάθε στοιχείο $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζει μια γραμμική μορφή του $\mathbb{R}^n$ σύμφωνα με τον τύπο (1), την οποία συμβολίζουμε με f_a. Άρα

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}^n\}.$$

Π.χ. ο δυϊκός χώρος του $\mathbb{R}^2$ είναι οι απεικονίσεις με τύπο $f(x, y) = ax + by$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και ο δυϊκός χώρος του $\mathbb{R}^3$ είναι οι απεικονίσεις με τύπο $f(x, y, z) = ax + by + cz$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.7.4: Έστω $M_n(\Bbbk)$ ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\Bbbk$. Για κάθε πίνακα $A = (a_{ij})$ ορίζουμε το **ίχνος** του, $\operatorname{tr} A$ (trace) ως εξής:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Η απεικόνιση $A \longmapsto \operatorname{tr} A$ είναι μια γραμμική μορφή του χώρου $M_n(\Bbbk)$, διότι αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$, έχουμε

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}((a_{ij} + b_{ij})) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

και

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \operatorname{tr}((\lambda a_{ij})) = \sum_{i}^n (\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \operatorname{tr} A.$$

Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ μια βάση του V. Ορίζουμε τις γραμμικές μορφές $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*$ από τις τιμές τους στα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}$ ως εξής:

$$\begin{array}{cccc} v_1^*(v_1) = 1, & v_1^*(v_2) = 0 & \ldots, & v_1^*(v_n) = 0 \\ v_2^*(v_1) = 0, & v_2^*(v_2) = 1 & \ldots, & v_2^*(v_n) = 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_n^*(v_1) = 0, & v_n^*(v_2) = 0 & \ldots, & v_n^*(v_n) = 1 \end{array}.$$

Οι γραμμικές μορφές v_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες διότι αν $\lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \cdots + \lambda_n v_n^* = \mathbf{0}$, τότε για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \cdots + \lambda_n v_n^*)(v_j) &= \lambda_1 v_1^*(v_j) + \lambda_2 v_2^*(v_j) + \cdots + \lambda_n v_n^*(v_j) \\ &= \lambda_j v_j^*(v_j) \\ &= \lambda_j \\ &= \mathbf{0}(v_j) = 0. \end{aligned}$$

Επειδή $\dim V^* = n$, το σύνολο $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*\}$ είναι μια βάση του V^* την οποία ονομάζουμε **δυϊκή** βάση της βάσης $\mathcal{B}$.