

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Σημειώσεις

Κωνσταντίνος Γκίκας

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σάμος 2024



© 2024 Κωνσταντίνος Γκίκας, kgkikas@aegean.gr

Έκδοση 0.6

Οι σημειώσεις είναι πρόχειρες και βασίζονται στις διαλέξεις του μαθήματος «Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις» στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Εάν βρείτε οποιοδήποτε λάθος, μη διστάσετε να έρθετε σε επαφή μαζί μου, ώστε να το διορθώσω. Θα υπάρχουν πολλά μικρά λάθη. Το αρχείο δεν είναι τελικό και είναι υπό συνεχή διαμόρφωση.

Περιεχόμενα

1 Προκαταρκτικά	5
1.1 Υποθέσεις	5
1.2 Γενικές μορφές ΜΔΕ	5
1.3 Βασικά Παραδείγματα	6
1.4 Ασκήσεις	7
2 ΜΔΕ 1^{ης} τάξης	9
2.1 Επίλυση με τη μέθοδο των ισοσταθμικών καμπυλών	9
2.2 Επίλυση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών	9
2.3 Χρόνος Θραύσης	14
2.4 Ασκήσεις	16
3 Ταξινόμηση ΜΔΕ 2^{ης} τάξης	19
4 Κυματική Εξίσωση	23
4.1 Γενική μορφή της λύσης	23
4.2 Ο τύπος του D'Alembert	24
4.3 Μέθοδος της ενέργειας	26
4.4 Ανάκλαση κυμάτων	27
4.5 Η κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα	28
4.6 Μη ομογενής κυματική εξίσωση	29
4.7 Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών	31
4.8 Ασκήσεις	35
5 Εξίσωση Θερμότητας ή Διάχυσης	39
5.1 Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών	39
5.2 Αρχή μεγίστου Ελαχίστου	44
5.3 Ενεργειακή Μέθοδος	46
5.4 Θεμελιώδης Λύση	48
5.5 Το ομογενές πρόβλημα στην ευθεία	49
5.6 Το μη ομογενές πρόβλημα στην ευθεία	52
5.7 Ασκήσεις	58
6 Εξίσωση Laplace	59
6.1 Τύποι του Green	59
6.1.1 Ενεργειακή μέθοδος	61
6.2 Αρμονικές Συναρτήσεις	62
6.2.1 Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου	62

6.2.2	Ιδιότητα της Μέσης Τιμής	64
6.2.3	Ισχυρή Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου	67
6.3	Η εξίσωση Laplace στο ορθογώνιο	67
6.4	Η εξίσωση Laplace στο δίσκο	71
6.5	Θεμελιώδης Λύση	78
6.5.1	Η συνάρτηση Green και ο πυρήνας Poisson στον Δίσκο και την Μπάλα	82
6.6	Ασκήσεις	84
α'	Σειρές Fourier	87

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

1.1 Υποθέσεις

Θα συμβολίζουμε με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή 3) ένα ανοικτό σύνολο. Θα λέμε ότι $u \in C^k(\Omega)$, όπου $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, αν είναι k -φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Εδώ συμβολίζουμε με $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο Ω . Τέλος, θα λέμε ότι $u \in C^\infty(\Omega)$ αν $u \in C^k(\Omega) \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Έστω $u \in C^2(\Omega)$ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Στις σημειώσεις αυτές θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}.$$

α) Όπου συναντάμε πρώτης τάξης παραγώγου, δηλαδή u_x, u_y , θα υποθέτουμε ότι είναι συνεχώς παραγωγίσιμες.

β) Όπου συναντάμε δεύτερης τάξης παραγώγου, δηλαδή $u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{yx}$, θα υποθέτουμε ότι είναι συνεχώς παραγωγίσιμες.

1.2 Γενικές μορφές ΜΔΕ

Έστω $U \subset \mathbb{R}^5$ ένα ανοικτό σύνολο και $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Μια γενική μορφή ΜΔΕ 1^{ης} τάξης είναι

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Παράδειγμα 1.2.1.

i) $u_x + u_y = 0$ (εξίσωση μεταφοράς),

ii) $yu_x + u_y = \sin(xy)$,

iii) $u_t + uu_x = 0$ (εξίσωση Hopf).

Έστω $O \subset \mathbb{R}^8$ ένα ανοικτό σύνολο και $F : O \rightarrow \mathbb{R}$. Μια γενική μορφή ΜΔΕ 2^{ης} τάξης είναι

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Παράδειγμα 1.2.2.

- i) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (εξίσωση Laplace).
 ii) $u_t - u_{xx} = 0$ (εξίσωση θερμότητας ή διάχυσης),
 iii) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (κυματική εξίσωση).

Θα λέμε ότι ο \mathcal{L} είναι ένας διαφορικός τελεστής, αν είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει μια συνάρτηση σε μια άλλη συνάρτηση. Παραδείγματος χάριν, αν

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$

τότε $\mathcal{L}(u) = u_x + xu_y + u_{xy}$. Ο \mathcal{L} θα λέγεται γραμμικός αν $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$ και $\mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$. Η εξίσωση $\mathcal{L}(u) = 0$ θα λέγεται ομογενής και η εξίσωση $\mathcal{L}(u) = f(x, y)$ μη ομογενής.

1.3 Βασικά Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.3.1. $u_x(x, y) = 0$ στον \mathbb{R}^2 .

Λύση. Ολοκληρώνουμε ως προς x για να πάρουμε

$$\int u_x(x, y) dx = \int 0 dx = c_0,$$

όπου $c_0 \in \mathbb{R}$. Επίσης $\int u_x(x, y) dx = u(x, y) + c(y)$, όπου c μια συνεχή συνάρτηση στον \mathbb{R} . Παρατηρείστε ότι $\frac{\partial(u(x, y) + c(y))}{\partial x} = u_x(x, y)$. Άρα συνολικά έχουμε

$$u(x, y) = c_0 - c(y).$$

Παράδειγμα 1.3.2. $u_{xx}(x, y) = 0$ στον \mathbb{R}^2 .

Λύση. Ολοκληρώνουμε ως προς x για να πάρουμε

$$\int u_{xx}(x, y) dx = \int 0 dx = c_0,$$

όπου $c_0 \in \mathbb{R}$. Επίσης $\int u_{xx}(x, y) dx = u_x(x, y) + c(y)$, όπου c μια συνεχή συνάρτηση στον \mathbb{R} . Παρατηρείστε ότι $\frac{\partial(u_x(x, y) + c(y))}{\partial x} = u_{xx}(x, y)$. Άρα συνολικά έχουμε

$$u_x(x, y) = c_0 - c(y).$$

Ολοκληρώνοντας πάλι την τελευταία εξίσωση ως προς x παίρνουμε

$$\int u_x(x, y) dx = \int (c_0 - c(y)) dx = (c_0 - c(y))x + c_1(y)$$

και $\int u_x(x, y) dx = u(x, y) + c_2(y)$, όπου c_1, c_2 δυο συνεχείς συναρτήσεις στον \mathbb{R} . Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε

$$u(x, y) = (c_0 - c(y))x + c_1(y) - c_2(y).$$

Παράδειγμα 1.3.3. $u_{xy}(x,y) = 0$ στον \mathbb{R}^2 .

Λύση. Ολοκληρώνουμε ως προς x για να πάρουμε

$$\int u_{xy}(x,y)dx = \int 0dx = c_0,$$

όπου $c_0 \in \mathbb{R}$. Επίσης $\int u_{xy}(x,y)dx = u_y(x,y) + c(y)$, όπου c μια συνεχή συνάρτηση στον \mathbb{R} . Άρα,

$$u_y(x,y) = c_0 - c(y).$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς y για να πάρουμε

$$u(x,y) = \int (c_0 - c(y))dy + g(x) = f(y) + g(x),$$

όπου g είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $f(y) = \int (c_0 - c(y))dy$.

Παράδειγμα 1.3.4. $u_{xx}(x,y) + u(x,y) = 0$ στον \mathbb{R}^2 .

Λύση. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $v''(t) + v(t) = 0$ στο \mathbb{R} έχει λύση $v(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα η λύση της εξίσωσης είναι

$$u(x,y) = c_3(y) \cos x + c_4(y) \sin x,$$

όπου c_3, c_4 συνεχείς συναρτήσεις. □

1.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1.4.1. Προσδιορίστε την γενική λύση των εξισώσεων στον \mathbb{R}^2 :

i) $uu_{xy} + u_x u_y = 0$,

ii) $3u_y + u_{xy} = 0$.

Κεφάλαιο 2

ΜΔΕ 1^{ης} τάξης

2.1 Επίλυση με τη μέθοδο των ισοσταθμικών καμπυλών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$au_x + bu_y = 0 \quad \text{στον } \mathbb{R}^2.$$

Θα θέλαμε να την λύσουμε με την μέθοδο των ισοσταθμικών καμπυλών. Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : u(x, y) = c\} \neq \emptyset$. Για $(x_0, y_0) \in \sigma$, γνωρίζουμε ότι το $\nabla u(x_0, y_0) = (u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0))$ είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο (x_0, y_0) . Δηλαδή αν υπάρχει καμπύλη $c : (-1, 1) \rightarrow \sigma$ τέτοια ώστε $c(0) = (x_0, y_0)$ και $c'(0) = (a_1, b_1)$ να ισχύει

$$\nabla u(x_0, y_0) \cdot (a_1, b_1) = 0 \Leftrightarrow a_1 u_x(x_0, y_0) + b_1 u_y(x_0, y_0) = 0.$$

Έτσι αν επιλέξουμε $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(a, b)$, πάνω σε αυτή την ευθεία θα θέλαμε

$$\frac{du(c(t))}{dt} = u_x(x(t), y(t))x'(t) + u_y(x(t), y(t))y'(t) = u_x(x(t), y(t))a + u_y(x(t), y(t))b = 0.$$

Δηλαδή θα θέλαμε η u να είναι σταθερή κατά μήκος της ευθείας $c(t)$. Αυτή η ευθεία σε x, y μεταβλητές γράφεται $bx - ay = bx_0 - ay_0 = k$. Άρα επειδή η u είναι σταθερή κατά το μήκος της ευθείας c , θα έχουμε

$$u(c(t)) = u(x(t), y(t)) = f(k) = f(bx(t) - ay(t)),$$

όπου f μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Άρα η γενική λύση δίδεται από

$$u(x, y) = f(bx - ay).$$

2.2 Επίλυση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

Παράδειγμα 2.2.1. Έστω $b \neq 0$. Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} au_x + bu_y = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, y_1) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $y_1 \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη με $c(s) = (x(s), y(s))$, η οποία θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Θέτουμε $z(s) = u(x(s), y(s))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z'(s) = u_x(x(s), y(s))x'(s) + u_y(x(s), y(s))y'(s).$$

Παρατηρούμε ότι αν $x'(s) = a$, $y'(s) = b$ και η u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (2.2.1), τότε $z'(s) = 0$. Άρα θα θέλαμε, η καμπύλη c να επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται το σύστημα

$$\begin{cases} x'(s) = a, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \\ y'(s) = b, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ y(0) = y_1, \\ z'(s) = 0, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, y_1) = f(x_0). \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ανωτέρω σύστημα ικανοποιείται για $x(s) = as + x_0$, $y(s) = bs + y_1$ και $z(s) = f(x_0)$. Έστω $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$. Θα θέλαμε να βρούμε \tilde{s} και x_0 ώστε

$$\tilde{x} = x(\tilde{s}) \quad \text{και} \quad \tilde{y} = y(\tilde{s}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\tilde{s} = (\tilde{y} - y_1)/b$ και $x_0 = \tilde{x} - a(\tilde{y} - y_1)/b$. Έπεται ότι

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x(\tilde{s}), y(\tilde{s})) = z(\tilde{s}) = f(x_0) = f(\tilde{x} - a(\tilde{y} - y_1)/b).$$

Άρα η λύση δίδεται από τον τύπο

$$u(x, y) = f(x - a(y - y_1)/b).$$

□

Παρατήρηση 2.2.2. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του Παραδείγματος 2.2.1 δίδονται από $c(s; x_0) = (x(s; x_0), y(s)) = (as + x_0, bs + y_1)$ και ειδικότερα από $x(y; x_0) = a(y - y_1)/b + x_0$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος. Επιπλέον, είναι παράλληλες ευθείες (δεν τέμνονται) και καλύπτουν όλο τον \mathbb{R}^2 , το οποίο είναι το χωρίο που θα θέλαμε να λύσουμε το πρόβλημα. Τα δύο τελευταία είναι ισοδύναμα με την μοναδική λύση του συστήματος

Θα δούμε αργότερα ότι αν οι χαρακτηριστικές καμπύλες τέμνονται ή δεν καλύπτουν όλο το χωρίο που θα θέλαμε να λύσουμε την διαφορική εξίσωση, τότε μέσω αυτής της μεθόδου δεν μπορούμε να βρούμε μια λύση η οποία να είναι ορισμένη σε όλο το χωρίο που μελετάμε το πρόβλημα.

Παράδειγμα 2.2.3. Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} u_x + yu_y = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0,y) = f(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Λύση. Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη με $c(s) = (x(s), y(s))$, η οποία θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Θέτουμε $z(s) = u(x(s), y(s))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z'(s) = u_x(x(s), y(s))x'(s) + u_y(x(s), y(s))y'(s).$$

Παρατηρούμε ότι αν $x'(s) = 1$, $y'(s) = y$, και u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (2.2.2), τότε $z'(s) = 0$. Άρα θα θέλαμε, η καμπύλη c να επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται το σύστημα

$$\begin{cases} x'(s) = 1, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ x(0) = 0, \\ y'(s) = y(s), & \text{στο } \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0, \\ z'(s) = 0, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ z(0) = u(x(0), y(0)) = u(0, y_0) = f(x_0). \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ανωτέρω σύστημα ικανοποιείται για $x(s) = s$, $y(s) = y_0 e^s$ και $z(s) = f(x_0)$. Έστω $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$. Θα θέλαμε να βρούμε \tilde{s} και x_0 ώστε

$$\tilde{x} = x(\tilde{s}) \quad \text{και} \quad \tilde{y} = y(\tilde{s}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\tilde{s} = \tilde{x}$ και $y_0 = e^{-\tilde{x}}\tilde{y}$. Έπεται ότι

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x(\tilde{s}), y(\tilde{s})) = z(\tilde{s}) = f(x_0) = f(e^{-\tilde{x}}\tilde{y}).$$

Άρα η λύση δίδεται από τον τύπο

$$u(x,y) = f(e^{-x}y).$$

□

Παρατήρηση 2.2.4. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του Παραδείγματος 2.2.3 δίδονται από $c(s; y_0) = (x(s), y(s; y_0)) = (s, y_0 e^s)$ και ειδικότερα από $\gamma(x; y_0) = y_0 e^x$, όπου $y_0 \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος. Επιπλέον, δεν τέμνονται και καλύπτουν όλο τον \mathbb{R}^2 , το οποίο είναι το χωρίο που θα θέλαμε να λύσουμε το πρόβλημα.

Παράδειγμα 2.2.5. Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} u_y - \frac{y}{x}u_x + \frac{y}{x^2}u = -\frac{y}{x}, & \text{στο } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x > 0\}, \\ u(x,x) = g(x), & \text{στο } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x > 0\}. \end{cases}$$

Λύση. Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη με $c(s) = (x(s), y(s))$, η οποία θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Θέτουμε $z(s) = u(x(s), y(s))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z'(s) = u_x(x(s), y(s))x'(s) + u_y(x(s), y(s))y'(s).$$

Παρατηρούμε ότι αν $y' = 1$, $x' = -y/x$, και η u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (2.2.3), τότε $z' = -\frac{y}{x^2}z - \frac{y}{x}$. Άρα θα θέλαμε, η καμπύλη c να επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται το σύστημα

$$\begin{cases} x'(s) = -y(s)/x(s), & \text{στο } I, \\ x(0) = x_0 > 0, \\ y'(s) = 1, & \text{στο } I, \\ y(0) = x_0 > 0, \\ z'(s) = -\frac{y(s)}{x^2(s)}z(s) - \frac{y(s)}{x(s)}, & \text{στο } I, \\ z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, x_0) = f(x_0). \end{cases}$$

όπου I ένα κατάλληλο διάστημα με $0 \in I$, το οποίο θα προσδιοριστεί αργότερα. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ανωτέρω σύστημα ικανοποιείται για $y(s) = s + x_0$ και

$$x'(s)x(s) = -(s + x_0) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2(s)}{2}\right)' = -\left(\frac{(s + x_0)^2}{2}\right)' \Leftrightarrow x^2(s) = -(s + x_0)^2 + 2x_0^2.$$

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι $(s + x_0)^2 \leq 2x_0^2 \Leftrightarrow -(1 + \sqrt{2})x_0 \leq s \leq (\sqrt{2} - 1)x_0$. Επίσης θα πρέπει $y(s) \geq x(s) > 0$, επειδή θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x > 0\}$. Άρα $x(s) = \sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}$ και $I = [0, (\sqrt{2} - 1)x_0]$. Τώρα

$$z'(s) + \frac{s + x_0}{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}z(s) = -\frac{s + x_0}{\sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}}.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία εξίσωση με $(2x_0^2 - (x_0 + s)^2)^{-1/2}$, για να πάρουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{z(s)}{\sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}}\right)' &= -\frac{s + x_0}{2x_0^2 - (x_0 + s)^2} = \left(\frac{1}{2} \ln(2x_0^2 - (x_0 + s)^2)\right)' \\ \Leftrightarrow z(s) &= \frac{\sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2} \ln(2x_0^2 - (x_0 + s)^2)}{2} + A\sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}, \end{aligned}$$

όπου A μια σταθερά. Τώρα,

$$z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, x_0) = x_0 = x_0 \ln x_0 + Ax_0 \Leftrightarrow A = 1 - \ln x_0.$$

Άρα ο τύπος του z δίδεται από

$$z(s) = \frac{\sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2} \ln(2x_0^2 - (x_0 + s)^2)}{2} + (1 - \ln x_0) \sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}.$$

Έστω (\tilde{x}, \tilde{y}) με $\tilde{y} > \tilde{x}$. Θα θέλαμε να βρούμε \tilde{s} και x_0 ώστε

$$\tilde{x} = x(\tilde{s}) \quad \text{και} \quad \tilde{y} = y(\tilde{s}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\tilde{s} + x_0 = \tilde{y}$ και $\tilde{x} = \sqrt{2x_0^2 - \tilde{y}^2} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2}}$. Έπεται ότι

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(x(\tilde{s}), y(\tilde{s})) = z(\tilde{s}) = \tilde{x} \ln \tilde{x} + (1 - \ln \sqrt{\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2}}) \tilde{x}.$$

Άρα η λύση δίδεται από τον τύπο

$$u(x, y) = x \ln x + (1 - \ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}) x.$$

□

Παρατήρηση 2.2.6. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του Παραδείγματος 2.2.5 δίδονται από $c(s; y_0) = (x(s; x_0), y(s; x_0)) = (\sqrt{2x_0^2 - (x_0 + s)^2}, x_0 + s)$ για κάθε $s \in [0, (\sqrt{2} - 1)x_0]$ όπου $x_0 > 0$ είναι μια παράμετρος. Ειδικότερα περιγράφονται από την σχέση $x^2 + y^2 = 2x_0^2$ με $y > x > 0$. Επιπλέον, δεν τέμνονται και καλύπτουν όλο το χωρίο που θα θέλαμε να λύσουμε το πρόβλημα.

Παράδειγμα 2.2.7. Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$(2.2.4) \quad \begin{cases} u_t + uu_x = -u, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = -\frac{x}{2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Λύση. Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη με $c(s) = (x(s), t(s))$, η οποία θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Θέτουμε $z(s) = u(x(s), t(s))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_y(x(s), t(s))t'(s).$$

Παρατηρούμε ότι αν $x'(s) = z$, $t'(s) = 1$ και u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (2.2.4), τότε $z'(s) = -z(s)$. Άρα θα θέλαμε, η καμπύλη c να επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται το σύστημα

$$\begin{cases} x'(s) = z(s), & \text{στο } \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \\ t'(s) = 1, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ t(0) = 0, \\ z'(s) = -z(s), & \text{στο } \mathbb{R}, \\ z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, 0) = \frac{x_0}{2}. \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ανωτέρω σύστημα ικανοποιείται για $t(s) = s$, $z(s) = -\frac{x_0}{2}e^{-s}$ και

$$x'(s) = z(s) = -\frac{x_0}{2}e^{-s} \Rightarrow x(s) = \frac{x_0}{2}(1 + e^{-s}).$$

Έστω $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^2$. Θα θέλαμε να βρούμε \bar{s} και x_0 ώστε

$$\bar{x} = x(\bar{s}) \quad \text{και} \quad \bar{t} = t(\bar{s}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\bar{s} = \bar{t}$ και $x_0 = \frac{2\bar{x}}{1+e^{-\bar{t}}}$. Έπεται ότι

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = u(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = z(\bar{s}) = -\frac{\bar{x}}{1+e^{-\bar{t}}}e^{-\bar{t}}.$$

Άρα η λύση δίδεται από τον τύπο

$$u(x, t) = -\frac{x}{1+e^{-t}}e^{-t}.$$

□

Παρατήρηση 2.2.8. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες του Παραδείγματος 2.2.7 δίδονται από $c(s; x_0) = (x(s; x_0), t(s)) = (\frac{x_0}{2}(1 + e^{-s}), s)$ και ειδικότερα από $x(t; x_0) = \frac{x_0}{2}(1 + e^{-t})$, όπου $y_0 \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος. Επιπλέον, δεν τέμνονται και καλύπτουν όλο τον \mathbb{R}^2 , το οποίο είναι το χωρίο που θα θέλαμε να λύσουμε το πρόβλημα.

2.3 Χρόνος Θραύσης

Στην υποενοότητα αυτή, θα μελετήσουμε σε ένα ενδεικτικό πρόβλημα, τι συμβαίνει όταν τέμνονται οι χαρακτηριστικές καμπύλες.

Έστω $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $b'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(2.3.1) \quad \begin{cases} u_t + b(u)u_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο.

Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη με $c(s) = (x(s), t(s))$, η οποία θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Θέτουμε $z(s) = u(x(s), t(s))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s).$$

Παρατηρούμε ότι αν $x'(s) = b(z(s))$, $t'(s) = 1$ και u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (2.3.1), τότε $z'(s) = 0$. Άρα θα θέλαμε, η καμπύλη c να επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται το σύστημα

$$\begin{cases} x'(s) = b(z(s)), & \text{στο } (0, \infty), \\ x(0) = x_0, \\ t'(s) = 1, & \text{στο } (0, \infty), \\ t(0) = 0, \\ z'(s) = 0, & \text{στο } (0, \infty), \\ z(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = \varphi(x_0). \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ανωτέρω σύστημα ικανοποιείται για $t(s) = s$, $z(s) = \varphi(x_0)$ και $x(s; x_0) = b(\varphi(x_0))s + x_0$

Έστω $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Θα θέλαμε να βρούμε \tilde{s} και x_0 ώστε

$$(2.3.2) \quad \tilde{x} = x(\tilde{s}) \quad \text{και} \quad \tilde{t} = t(\tilde{s}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\tilde{s} = \tilde{t}$ και $\tilde{x} = b(\varphi(x_0))\tilde{s} + x_0$. Εδώ παρατηρούμε ότι το σύστημα μπορεί είτε να μην έχει λύση είτε η λύση να μην είναι μοναδική, δηλαδή οι χαρακτηριστικές να τέμνονται. Έστω ότι λύνεται το σύστημα (2.3.2), τότε

$$u(\tilde{x}, \tilde{t}) = u(x(\tilde{s}), t(\tilde{s})) = z(\tilde{s}) = \varphi(x_0) = \varphi(\tilde{x} - b(\varphi(x_0))\tilde{t}) = \varphi(\tilde{x} - b(u(\tilde{x}, \tilde{t}))\tilde{t}).$$

Δηλαδή, η λύση δίδεται σε πεπλεγμένη μορφή,

$$u(x, t) = \varphi(x - b(u(x, t))t).$$

Υποθέτουμε ότι η λύση είναι υπαρκτή και είναι ομαλή, τότε

$$u_x = \varphi'(x - b(u(x, t))t)(1 - b'(u(x, t))u_x(x, t)t) \Leftrightarrow u_x = \frac{\varphi'(x - b(u(x, t))t)}{\varphi'(x - b(u(x, t))t) + b'(u(x, t))t}.$$

Παρατηρούμε ότι αν φ' παίρνει αρνητικές τιμές, τότε ο παρανομαστής του τελευταίου κλάσματος μπορεί να μηδενίζεται, το οποίο συνεπάγει ότι η λύση δεν είναι ομαλή. Ειδικότερα, αν υποθέσουμε ότι φ γνησίως φθίνουσα και $x_1 > x_0$ τότε

$$x(t; x_0) = x(t; x_1) \Leftrightarrow b(\varphi(x_0))t + x_0 = b(\varphi(x_1))t + x_1 \Leftrightarrow t = \frac{x_1 - x_0}{b(\varphi(x_0)) - b(\varphi(x_1))}.$$

Επομένως, επειδή η b και η φ είναι γνησίως αύξουσα και φθίνουσα αντίστοιχα, έχουμε $b(\varphi(x_0)) - b(\varphi(x_1)) > 0$ το οποίο συνεπάγει ότι οι χαρακτηριστικές τέμνονται για θετικούς χρόνους. Επίσης, η λύση θα έπρεπε να ικανοποιεί

$$\varphi(x_0) = u(x(t; x_0), t) = u(x(t; x_1), t) = \varphi(x_1),$$

που είναι αδύνατο αφού $\varphi(x_0) > \varphi(x_1)$. Η τελευταία παρατήρηση εξηγεί τι συμβαίνει όταν οι χαρακτηριστικές τέμνονται, δηλαδή, οι λύσεις δεν ορίζονται στο σημείο που τέμνονται οι χαρακτηριστικές.

Ο ελάχιστος χρόνος στον οποίο θα τέμνονται οι χαρακτηριστικές θα λέγεται χρόνος θραύσης.

Παράδειγμα 2.3.1. Έστω $b(u) = u$ και

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x < 0, \\ 2-x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{αν } x > 1. \end{cases}$$

Τότε $u(x, t) = \varphi(x - ut)$ και οι χαρακτηριστικές ικανοποιούν

$$x(t; x_0) = \begin{cases} 2t + x_0, & \text{αν } x_0 < 0, \\ (2 - x_0)t + x_0, & \text{αν } 0 \leq x_0 \leq 1, \\ t + x_0, & \text{αν } x_0 > 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι ο ελάχιστος χρόνος που τέμνονται οι χαρακτηριστικές μεταξύ τους είναι για $t = 1$. Πραγματικά έστω $x_1 \leq 0$ και $0 < x_2 < 1$, τότε

$$x(t; x_1) = x(t; x_2) \Leftrightarrow 2t + x_1 = (2 - x_2)t + x_2 \Leftrightarrow t = \frac{x_2 - x_1}{x_2} = 1 - \frac{x_1}{x_2} \geq 1.$$

Όμοια δείχνουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις. Τώρα αν $0 < x_1 < x_2 < 1$ τότε

$$x(t; x_1) = x(t; x_2) \Leftrightarrow (2 - x_1)t + x_1 = (2 - x_2)t + x_2 \Leftrightarrow t = 1,$$

δηλαδή οι χαρακτηριστικές τέμνονται στο $(2, 1)$. Τώρα για $t < 1$ η λύση ορίζεται κανονικά και ο τύπος της είναι

$$u(x, t) = \begin{cases} 2, & \text{αν } x < 2t, \\ \frac{2-x}{1-t}, & \text{αν } 2t \leq x \leq 1+t, \\ 1, & \text{αν } x > t+1. \end{cases}$$

Παρατηρήστε εδώ ότι η λύση δεν είναι ομαλή γιατί έχουμε πάρει μη ομαλή αρχική συνθήκη φ . Αλλά στα χωρία που είναι ομαλή ικανοποιεί την εξίσωση. Σε πιο προχωρημένα μαθήματα ΜΔΕ, μπορούμε να δούμε ότι η λύση αυτή μπορεί να ορισθεί κανονικά με την ασθενή έννοια.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1. Βρείτε την λύση των κάτωθι προβλημάτων.

i)

$$\begin{cases} u_x + \frac{u_y}{(1+x^2)} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) = f(y), & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u, & \text{στο } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 > 0\}, \\ u(x, x^2) = 1, & \text{στο } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 > 0\}. \end{cases}$$

iv)

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2, & \text{στο } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\}, \\ u(x, -x) = x, & \text{στο } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}. \end{cases}$$

Ορίσετε η λύση στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\}$;

Άσκηση 2.4.2. Βρείτε την λύση του κάτωθι προβλήματος με την μέθοδο των χαρακτηριστικών.

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} yu_x + xu_y = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) = e^{-y^2}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- i) Προσδιορίστε το χωρίο που καλύπτουν οι χαρακτηριστικές καμπύλες.
 ii) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $v(x, y) = f(x^2 - y^2)$ ικανοποιεί την $yu_x + xv_y = 0$ στο \mathbb{R}^2 .

iii) Ορίστε κατάλληλα την f για να δείξετε ότι το πρόβλημα (2.4.1) δεν έχει μοναδική λύση.

Άσκηση 2.4.3. Προσδιορίστε τον χρόνο θραύσης και το σύνολο που εκρήγνυται η λύση του κάτωθι προβλήματος.

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = -2x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Κεφάλαιο 3

Ταξινόμηση ΜΔΕ 2^{ης} τάξης

Στην ενότητα αυτή θα ταξινομήσουμε τις γραμμικές ΜΔΕ 2^{ης} τάξης. Η γενική μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης σε ένα ανοικτό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι

$$(3.0.1) \quad a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = f \quad \text{στο } \Omega,$$

όπου $a_{ij}, a_i, a_0, f \in C(\Omega)$ για $i, j = 1, 2$ και $a_{12} = a_{21}$. Σε κάθε $(x, y) \in \Omega$ η εξίσωση θα λέγεται

- Ελλειπτική, αν $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$.
- Υπερβολική, αν $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$.
- Παραβολική, αν $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$.

Η ονομασία προέρχεται από την αντίστοιχη ταξινόμηση των καμπυλών

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0$$

όπου συντελεστές $a_{ij}, a_i, a_0 \in \mathbb{R}$ είναι σταθεροί αριθμοί.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων στο $\Omega = \mathbb{R}^2$ είναι

- Ελλειπτική, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Εξίσωση Laplace).
- Υπερβολική, $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (Κυματική Εξίσωση).
- Παραβολική, $u_t - u_{xx} = 0$ (Εξίσωση Θερμότητας ή διάχυσης).

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $a_{11} \neq 0$ ή $a_{12} \neq 0$ ή $a_{22} \neq 0$ και $\Omega = \mathbb{R}^2$. Θέτουμε

$$\xi = ax + by,$$

$$n = cx + dy,$$

με $ad - cb \neq 0$. Το ανωτέρω πρόβλημα μπορεί να λυθεί ως προς x, y συναρτήσει των ξ, n . Δηλαδή

$$x = \tilde{a}\xi + \tilde{b}n,$$

$$y = \tilde{c}\xi + \tilde{d}n,$$

όπου

$$\bar{a} = \frac{d}{da-bc}, \quad \bar{b} = \frac{-b}{da-bc}, \quad \bar{c} = \frac{-c}{da-bc} \quad \text{και} \quad \bar{d} = \frac{a}{da-bc}.$$

Υποθέτουμε ότι $a_{11} \neq 0$. Θέτουμε $v(\xi, n) = \frac{u(\bar{a}\xi + \bar{b}n, \bar{c}\xi + \bar{d}n)}{a_{11}}$. Θα δείξουμε ότι με κατάλληλη επιλογή των a, b, c, d οδηγούμαστε στις ακόλουθες τρεις εξισώσεις.

i)

$$v_{\xi\xi} + v_{nn} + b_1 v_\xi + b_2 v_n + b_0 v = \frac{f(\bar{a}\xi + \bar{b}n, \bar{c}\xi + \bar{d}n)}{a_{11}} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\text{αν} \quad a_{12}^2 < a_{11}a_{22}.$$

ii)

$$v_{\xi\xi} - v_{nn} + b_1 v_\xi + b_2 v_n + b_0 v = \frac{f(\bar{a}\xi + \bar{b}n, \bar{c}\xi + \bar{d}n)}{a_{11}} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\text{αν} \quad a_{12}^2 > a_{11}a_{22}.$$

iii) Αν $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$

$$v_{\xi\xi} + v_{nn} + b_1 v_\xi + b_2 v_n + b_0 v = \frac{f(\bar{a}\xi + \bar{b}n, \bar{c}\xi + \bar{d}n)}{a_{11}} \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^2,$$

$$\text{αν} \quad a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_n \frac{\partial n}{\partial x} = av_\xi + cv_n, \\ u_{xx} &= a^2 v_{\xi\xi} + 2acv_{n\xi} + c^2 v_{nn}, \\ u_{yy} &= b^2 v_{\xi\xi} + 2bdv_{n\xi} + d^2 v_{nn}, \\ u_{xy} &= abv_{\xi\xi} + (bc + ad)v_{n\xi} + cdv_{nn}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}u_{xy} + \frac{a_{22}}{a_{11}}u_{yy} &= (a^2 + \frac{a_{22}}{a_{11}}b^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}ab)v_{\xi\xi} + (2ac + 2bd\frac{a_{22}}{a_{11}} \\ &\quad + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}(bc + ad))v_{n\xi} + (c^2 + \frac{a_{22}}{a_{11}}d^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}cd)v_{nn}. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $b = 0, a = 1, c = -\frac{a_{12}}{a_{11}}d$ και

$$d^2 \left(\frac{a_{22}a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}^2} \right) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad a_{22}a_{11} - a_{12}^2 > 0, \\ -1, & \text{αν} \quad a_{22}a_{11} - a_{12}^2 < 0, \\ 0, & \text{αν} \quad a_{22}a_{11} - a_{12}^2 = 0. \end{cases}$$

iv) Αν $a_{11} = a_{22} = 0$ και $a_{12} \neq 0$ επιλέγουμε $a = -d = 1$, $b = c = 1$ και η (3.0.1) γίνεται για $V(\xi, n) = \frac{u(\tilde{a}\xi + \tilde{b}n, \tilde{c}\xi + \tilde{d}n)}{2a_{12}}$

$$V_{\xi\xi} - V_{nn} + b_1 V_\xi + b_2 V_n + b_0 V = \frac{f(\tilde{a}\xi + \tilde{b}n, \tilde{c}\xi + \tilde{d}n)}{2a_{12}} \quad \text{στο } \mathbb{R}^2.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση (3.0.1) με μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών ανάγεται στην κανονική μορφή των i)- iv).

Κεφάλαιο 4

Κυματική Εξίσωση

4.1 Γενική μορφή της λύσης

Έστω $c > 0$. Θα θέλαμε να βρούμε την γενική λύση της κυματικής εξίσωσης

$$(4.1.1) \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = v_t - cv_x = 0,$$

όπου $v = u_t + cu_x$. Με την μέθοδο των χαρακτηριστικών εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} v_t - cv_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ v(x, 0) = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

δίδεται από $v(x, t) = h(x + ct)$, όπου $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ομαλή συνάρτηση.

Τώρα θεωρούμε το πρόβλημα

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} u_t + cu_x = h(x + ct), & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Θα το λύσουμε με την μέθοδο των χαρακτηριστικών. Έστω $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια ομαλή καμπύλη με $c(s) = (x(s), t(s))$, η οποία θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Θέτουμε $z(s) = u(x(s), t(s))$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$z'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s).$$

Παρατηρούμε ότι αν $x'(s) = c$, $t'(s) = 1$, και u ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (4.1.2), τότε $z'(s) = h(x(s) + ct(s))$. Άρα θα θέλαμε, η καμπύλη c να επιλεγεί ώστε να ικανοποιείται το σύστημα

$$\begin{cases} x'(s) = c, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \\ t'(s) = 1, & \text{στο } \mathbb{R}, \\ t(0) = 0, \\ z'(s) = h(x(s) + ct(s)), & \text{στο } \mathbb{R}, \\ z(0) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = f(x_0). \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το ανωτέρω σύστημα ικανοποιείται για $t(s) = s$, $x(s) = cs + x_0$ και

$$\begin{aligned} z(s) &= \int_0^s h(x(r) + ct(r))dr + f(x_0) = \int_0^s h(2cr + x_0)ds + f(x_0) \\ & \quad (\text{θέτουμε } \varrho = 2cr + x_0) = \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{2cs+x_0} h(\varrho)d\varrho + f(x_0). \end{aligned}$$

Έστω $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^2$. Θα θέλαμε να βρούμε \bar{s} και x_0 ώστε

$$\bar{x} = x(\bar{s}) \quad \text{και} \quad \bar{t} = t(\bar{s}),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με $\bar{s} = \bar{t}$ και $\bar{x} - c\bar{t} = x_0$. Επομένως,

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = u(x(\bar{s}), t(\bar{s})) = z(\bar{s}) = \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{2c\bar{s}+x_0} h(\varrho)d\varrho + f(x_0) = \frac{1}{2c} \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} h(\varrho)d\varrho + f(\bar{x} - c\bar{t}),$$

δηλαδή η λύση δίδεται από

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\varrho)d\varrho + f(x-ct) = \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} h(\varrho)d\varrho + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 h(\varrho)d\varrho + f(x-ct).$$

Θέτοντας $F(x) = \frac{1}{2c} \int_0^x h(\varrho)d\varrho$ και $G(x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 h(\varrho)d\varrho + f(x)$, βλέπουμε ότι η γενική μορφή της λύσης της κυματικής εξίσωσης είναι

$$(4.1.3) \quad u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

4.2 Ο τύπος του D'Alembert

Θεώρημα 4.2.1 (Τύπος του D'Alembert). Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ και $\psi \in C(\mathbb{R})$. Τότε το ανωτέρω πρόβλημα έχει λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ η οποία δίδεται από

$$(4.2.2) \quad u(x, t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Απόδειξη. Έστω $F, G \in C^2(\mathbb{R})$. Τότε η συνάρτηση

$$u(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

είναι λύση της κυματικής εξίσωσης (4.1.1). Στην συνέχεια θα επιλέξουμε κατάλληλα τις F, G ώστε η u να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (4.2.1).

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $u_t(x, t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$, από τις αρχικές συνθήκες οδηγούμαστε στο σύστημα

$$(4.2.3) \quad \begin{cases} u(x, 0) = F(x) + G(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = cF'(x) - cG'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Τώρα,

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} cF'(x) - cG'(x) = \psi(x) &\Leftrightarrow F'(x) = \frac{1}{c}\psi(x) + G'(x) \Leftrightarrow \int_0^x F'(s) ds = \int_0^x \frac{1}{c}\psi(s) + G'(s) ds \\ &\Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + G(x) + F(0) - G(0). \end{aligned}$$

Από την (4.2.3) και την τελευταία ισότητα έχουμε

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} G(x) = -F(x) + \varphi(x) &= -\frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds - G(x) + \varphi(x) + G(0) - F(0) \\ &\Leftrightarrow G(x) = -\frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{\varphi(x) + G(0) - F(0)}{2}. \end{aligned}$$

Από τις (4.2.4) και (4.2.5) έχουμε

$$\begin{aligned} u(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct) &= \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + G(x+ct) + F(0) - G(0) + G(x-ct) \\ &= \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.2.2. Παρατηρούμε ότι η τιμή της u στο σημείο (x^*, t^*) εξαρτάται από τις τιμές της φ στα σημεία $x^* \pm ct^*$ και από τις τιμές της ψ στο διάστημα $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$. Αν αλλάξω τις αρχικές συνθήκες στο $\mathbb{R} \setminus [x^* - ct^*, x^* + ct^*]$, τότε η νέα λύση που θα δίδεται από την (4.2.2) θα ισούται με $u(x^*, t^*)$ στο σημείο (x^*, t^*) .

Η περιοχή που ορίζεται από το χωρίο

$$(4.2.6) \quad \Delta = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq t^*, x^* - c(t^* - t) \leq x \leq x^* + c(t^* - t)\}$$

λέγεται **περιοχή εξάρτησης του σημείου** (x^*, t^*) . Τέλος, παρατηρήστε ότι οι ευθείες $x = x^* \pm c(t^* - t)$ είναι οι χαρακτηριστικές ευθείες που εμφανίζονται στην απόδειξη της γενικής μορφής της λύσης (4.1.3), οι οποίες περνούν από το (x^*, t^*) .

4.3 Μέθοδος της ενέργειας

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της ενέργειας για να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (4.2.1) έχει μοναδική λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Θέτουμε

$$E_{\Delta}(t) = \frac{1}{2} \int_{x^*-c(t^*-t)}^{x^*+c(t^*-t)} u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t) dx \quad \forall t \in [0, t^*],$$

όπου Δ έχει οριστεί στην (4.2.6) Ισχυριζόμαστε ότι

$$(4.3.1) \quad E'_{\Delta}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Πράγματι, για $x_{\pm}(t) = x^* \pm c(t^* - t)$, έχουμε

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} E'_{\Delta}(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{x_-(t)}^{x_+(t)} u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (x'_+(t)(u_t^2(x_+(t), t) + c^2 u_x^2(x_+(t), t)) - x'_-(t)(u_t^2(x_-(t), t) + c^2 u_x^2(x_-(t), t))) \\ &\quad + \int_{x_-(t)}^{x_+(t)} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)) dx) \\ &= -\frac{c}{2} \underbrace{((u_t^2(x_+(t), t) + c^2 u_x^2(x_+(t), t)) + (u_t^2(x_-(t), t) + c^2 u_x^2(x_-(t), t)))}_{=I_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_{x_-(t)}^{x_+(t)} u_t(x, t) u_{tt}(x, t) dx}_{=I_2} + \underbrace{\int_{x_-(t)}^{x_+(t)} c^2 u_x(x, t) u_{xt}(x, t) dx}_{=I_3}. \end{aligned}$$

Τώρα κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} I_3 &= [u_x(\cdot, t) u_t(\cdot, t)]_{x_-(t)}^{x_+(t)} - \int_{x_-(t)}^{x_+(t)} \underbrace{c^2 u_{xx}(x, t)}_{=u_{tt}(x, t)} u_t(x, t) dx \\ &= (c^{\frac{3}{2}} u_x(x_+(t), t))(c^{\frac{1}{2}} u_t(x_+(t), t)) - (c^{\frac{3}{2}} u_x(x_-(t), t))(c^{\frac{1}{2}} u_t(x_-(t), t)) - \underbrace{\int_{x_-(t)}^{x_+(t)} c^2 u_{tt}(x, t) u_t(x, t) dx}_{=I_2} \\ &\leq \frac{c}{2} I_1 - I_2, \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|a||b| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Από την (4.3.2) και (4.3.3) έπεται η σχέση (4.3.1).

Από την (4.3.1), παίρνουμε

$$(4.3.4) \quad E_{\Delta}(t) \leq E_{\Delta}(0) = \frac{1}{2} \int_{x^*-ct^*}^{x^*+ct^*} u_t^2(x, 0) + c^2 u_x^2(x, 0) dx = \frac{1}{2} \int_{x^*-ct^*}^{x^*+ct^*} \psi_t^2(x) + c^2 |\varphi'(x)|^2 dx \quad \forall t \in [0, t^*].$$

Παρατηρούμε ότι αν $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ τότε $E_{\Delta}(t) = 0 \quad t \in [0, t^*]$.

Θεώρημα 4.3.1. Το πρόβλημα (4.2.1) έχει μοναδική λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Απόδειξη. Την ύπαρξη την έχουμε ήδη αποδείξει. Μένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα. Έστω το πρόβλημα έχει δύο λύσεις $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Θέτουμε $w = u_1 - u_2$, τότε μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ικανοποιεί το πρόβλημα

$$(4.3.5) \quad \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ w(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ w_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Έστω $(x^*, t^*) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Από την (4.3.4) έπεται

$$\begin{aligned} \int_{x^*-c(t^*-t)}^{x^*+c(t^*-t)} w_t^2(x, t) + c^2 w_x^2(x, t) dx = 0 \quad \forall t \in [0, t^*] &\Leftrightarrow \int_0^{t^*} \int_{x^*-c(t^*-t)}^{x^*+c(t^*-t)} w_t^2(x, t) + c^2 w_x^2(x, t) dx dt = 0 \\ &\Leftrightarrow w_t(x, t) = w_x(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Delta \Leftrightarrow w(x, t) = c_0 \quad \forall (x, t) \in \Delta \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $c_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $w(x, 0) = 0$, έπεται $w(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Delta$. Όμως $(x^*, t^*) \in \Delta$, άρα $w(x^*, t^*) = 0$. Επειδή το (x^*, t^*) τυχόν, έπεται $w \equiv 0$ στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Τώρα, η $\tilde{w}(x, t) = w(x, -t)$ ικανοποιεί το πρόβλημα (4.3.5), άρα $\tilde{w} \equiv 0$ στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το $w \equiv 0$ στο $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$. \square

4.4 Ανάκλαση κυμάτων

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, \infty), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in [0, \infty), \\ u(0, t) = 0 & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi \in C^2([0, \infty))$ και $\psi \in C([0, \infty))$. Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε ότι

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0.$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την μέχρι τώρα θεωρία, θα πρέπει το πρόβλημα (4.4.1), να επεκταθεί με ένα κατάλληλο τρόπο και για $x < 0$. Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε τις περιττές επεκτάσεις των φ, ψ . Ειδικότερα θέτουμε

$$\varphi_{odd} = \begin{cases} \varphi(x), & \text{αν } x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

και

$$\psi_{odd} = \begin{cases} \psi(x), & \text{αν } x \geq 0, \\ -\psi(-x), & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Τώρα, θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \varphi_{\text{odd}}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = \psi_{\text{odd}}(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του D'Alembert (4.2.2), θα πρέπει $\varphi_{\text{odd}} \in C^2(\mathbb{R})$ και $\psi_{\text{odd}} \in C^1(\mathbb{R})$. Επειδή $\psi(0) = \varphi(0)$, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $\varphi_{\text{odd}}, \psi_{\text{odd}} \in C^1(\mathbb{R})$. Ωστόσο, για να ισχύει $\varphi_{\text{odd}} \in C^2(\mathbb{R})$ θα πρέπει να υποθέσουμε ότι $\varphi''(0) = 0$.

Σε αυτή την υποενότητα υποθέτουμε ότι $\varphi''(0) = 0$.

Από τον τύπο του D'Alembert (4.2.2) έχουμε

$$(4.4.2) \quad v(x, t) = \frac{\varphi_{\text{odd}}(x+ct) + \varphi_{\text{odd}}(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(s) ds,$$

εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $v(x, t) = v(-x, t)$, άρα $v(0, t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Η λύση u είναι ο περιορισμός της v στο $[0, \infty) \times [0, \infty)$, δηλαδή

$$u(x, t) = v(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, \infty) \times [0, \infty).$$

Ειδικότερα έχουμε

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds, & \text{αν } 0 \leq x < ct, \\ \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, & \text{αν } ct \leq x. \end{cases}$$

Πράγματι, αν $ct < x$ τότε $\varphi_{\text{odd}}(x+ct) = \varphi(x+ct)$, $\varphi_{\text{odd}}(x-ct) = \varphi(x-ct)$ και $\psi_{\text{odd}}(s) = \psi(s) \forall s \in [x-ct, x+ct]$, το οποίο συνεπάγεται $\int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(s) ds = \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$. Από την (4.4.2), οδηγούμαστε εύκολα στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αν $x < ct$, τότε $\varphi_{\text{odd}}(x+ct) = \varphi_{\text{odd}}(x+ct)$, $\varphi_{\text{odd}}(x-ct) = -\varphi(ct-x)$, $\psi_{\text{odd}}(s) = \psi(s) \forall s \in [0, x+ct]$ και $\psi_{\text{odd}}(s) = -\psi(-s) \forall s \in [x-ct, 0]$. Άρα,

$$\begin{aligned} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(s) ds &= \int_0^{x+ct} \psi_{\text{odd}}(s) ds + \int_{x-ct}^0 \psi_{\text{odd}}(s) ds = \int_0^{x+ct} \psi(s) ds - \underbrace{\int_{x-ct}^0 \psi(-s) ds}_{\text{θέτουμε } r=-s} \\ &= \int_0^{x+ct} \psi(s) ds - \int_0^{ct-x} \psi(s) ds = \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Από την (4.4.2) και τις τελευταίες σχέσεις, μπορούμε εύκολα να δείξουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

4.5 Η κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο διάστημα

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(4.5.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi \in C^2([0, l])$ και $\psi \in C([0, l])$. Για λόγους συμβατότητας υποθέτουμε ότι

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Για να χρησιμοποιήσουμε την μέχρι τώρα θεωρία, θα πρέπει το πρόβλημα (4.5.1), να επεκταθεί με ένα κατάλληλο τρόπο σε όλο το \mathbb{R} . Πρώτα θα θεωρήσουμε τις περιττές επεκτάσεις των φ, ψ στο $[-l, x)$ όπως στην προηγούμενη ενότητα, δηλαδή

$$\varphi_{odd} = \begin{cases} \varphi(x), & \text{αν } 0 \leq x \leq l, \\ -\varphi(-x), & \text{αν } -l \leq x < 0, \end{cases}$$

και

$$\psi_{odd} = \begin{cases} \psi(x), & \text{αν } 0 \leq x \leq l, \\ -\psi(-x), & \text{αν } -l \leq x < 0. \end{cases}$$

Μετά παίρνουμε τις περιοδικές επεκτάσεις των $\varphi_{odd}, \psi_{odd}$ με περίοδο $2l$. Οι επεκτάσεις αυτές δίδονται από τον τύπο

$$\varphi_{ext}(x) = \varphi_{odd}\left(x - \left[\frac{x+l}{2l}\right]2l\right) \quad \text{και} \quad \psi_{ext}(x) = \psi_{odd}\left(x - \left[\frac{x+l}{2l}\right]2l\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι $\varphi_{ext}(x) = \varphi_{odd}(x)$ και $\psi_{ext}(x) = \psi_{odd}(x)$ για κάθε $x \in [-l, l]$. Επίσης $\varphi_{ext}(x+2l) = \varphi_{ext}(x)$ και $\psi_{ext}(x+2l) = \psi_{ext}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τέλος $\varphi_{ext}, \psi_{ext} \in C^1(\mathbb{R})$. Όπως πριν για να ισχύει $\varphi_{ext} \in C^2(\mathbb{R})$, θα πρέπει να υποθέσουμε επιπλέον $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Σε αυτή την υποενότητα υποθέτουμε ότι $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Τώρα, θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \varphi_{ext}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = \psi_{ext}(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Από τον τύπο του D'Alembert (4.2.2) έχουμε

$$v(x, t) = \frac{\varphi_{ext}(x+ct) + \varphi_{ext}(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{ext}(s) ds,$$

εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $v(x, t) = v(-x, t)$, άρα $v(0, t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Επίσης η v είναι $2l$ περιοδική ως προς x , δηλαδή $v(x+2l, t) = v(x, t)$ για κάθε $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Η λύση u είναι ο περιορισμός της v στο $[0, l] \times [0, \infty)$, δηλαδή

$$u(x, t) = v(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, l] \times [0, \infty).$$

4.6 Μη ομογενής κυματική εξίσωση

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ w_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου $f \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ και $\psi \in C(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι η λύση δίδεται από

$$w(x, t) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Η λύση που ψάχνουμε θα είναι της μορφής $w = u + v$ όπου η u ικανοποιεί την (4.2.1) και δίδεται από

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Άρα, v θα ικανοποιεί την

$$(4.6.1) \quad \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Θεώρημα 4.6.1. Η λύση $v \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ του προβλήματος (4.6.1) δίδεται από

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα Green. Θέτουμε

$$\Delta = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tau \leq t, x - c(t - \tau) \leq y \leq x + c(t - \tau)\}.$$

Γνωρίζουμε ότι από το θεώρημα Green, αν $P, Q \in C^1(\Delta)$ τότε

$$\iint_{\Delta} P_y - Q_t d\tau dy = \int_{\partial\Delta} P d\tau + Q dy,$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος λαμβάνεται κατά την θετική φορά, δηλαδή την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού. Ειδικότερα, θέτουμε $c_1(s) = (x + c(t - s), s)$ για $s \in [0, t]$, $c_2(s) = (x - c(t - s), s)$ για $s \in [0, t]$ και $c_3(s) = (s, 0)$ για $s \in [x - ct, x + ct]$. Τότε,

$$\int_{\partial\Delta} P d\tau + Q dy = \int_{c_1} P d\tau + Q dy - \int_{c_2} P d\tau + Q dy + \int_{c_3} P d\tau + Q dy.$$

Για $P(y, \tau) = -c^2 v_y(y, \tau)$ και $Q(y, \tau) = -v_\tau(y, \tau)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau &= \iint_{\Delta} v_{\tau\tau}(y, \tau) - c^2 v_{yy}(y, \tau) d\tau dy \\ &= - \int_{c_1} c^2 v_y(y, \tau) d\tau - v_\tau(y, \tau) dy + \int_{c_2} c^2 v_y(y, \tau) d\tau \\ &\quad - v_\tau(y, \tau) dy - \int_{c_3} c^2 v_y(y, \tau) d\tau - v_\tau(y, \tau) dy. \end{aligned}$$

Τώρα, για $c_3(s) = (y_3(s), \tau_3(s)) = (s, 0)$ για $s \in [x - ct, x + ct]$, έχουμε

$$\int_{c_3} c^2 v_y(y, \tau) d\tau + v_\tau(y, \tau) dy = \int_{x-ct}^{x+ct} c^2 v_y(s, 0) \tau'_3(s) + v_\tau(s, 0) y'_3(s) ds = 0,$$

αφού $\tau'_3(s) = 0$ και $v_\tau(s, 0) = 0$.

Για $c_1(s) = (y_1(s), \tau_1(s)) = (x + c(t - s), s)$ για $s \in [0, t]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{c_1} c^2 v_y(y, \tau) d\tau + v_\tau(y, \tau) dy &= \int_0^t c^2 v_y(y_1(s), \tau_1(s)) \tau'_1(s) + v_\tau(y_1(s), \tau_1(s)) y'_1(s) ds \\ &= \int_0^t c^2 v_y(y_1(s), \tau_1(s)) - c v_\tau(y_1(s), \tau_1(s)) ds \\ &= -c \int_0^t (v_y(y_1(s), \tau_1(s)), v_\tau(y_1(s), \tau_1(s))) \cdot (y'_1(s), \tau'_1(s)) ds = -c \int_0^t \frac{dv(c_1(s))}{ds} ds \\ &= -c(v(c_1(t)) - v(c_1(0))) = -c(v(x, t) - v(x + ct, 0)) = -c v(x, t), \end{aligned}$$

αφού $v(y, 0) = 0 \forall y \in \mathbb{R}$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι

$$\int_{c_2} c^2 v_y(y, \tau) d\tau + v_\tau(y, \tau) dy = c v(x, t).$$

Συνδυάζοντας όλα τα ανωτέρω, έχουμε

$$\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y, \tau) dy d\tau = 2c v(x, t),$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

4.7 Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών

Σε αυτήν την υποενότητα θα λύσουμε την κυματική εξίσωση σε ένα φραγμένο χωρίο με την μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών. Απαραίτητο εργαλείο για την μέθοδο αυτή είναι οι Σειρές Fourier, τις οποίες παρουσιάζουμε στο παράρτημα α'.

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(4.7.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Ψάχνουμε την γενική λύση $u \in C^2([0, \pi] \times [0, \infty))$ της μορφής

$$(4.7.2) \quad u(x, t) = X(x)T(t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty).$$

Προφανώς θα θέλαμε $u \not\equiv 0$, άρα θα υπάρχει $(x_0, t_0) \in (0, \pi) \times (0, \infty)$ ώστε $X(x_0)T(t_0) \neq 0$. Επομένως, η u ικανοποιεί

$$(4.7.3) \quad T''(t)X(x) - c^2 X''(x)T(t) = 0, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty).$$

Επειδή $T(t_0) \neq 0$, έπεται

$$X''(x) = \frac{T''(t_0)}{c^2 T(t_0)} X(x), \quad x \in (0, \pi).$$

Από τις συνοριακές συνθήκες στο (4.7.1), έχουμε $X(0)T(t_0) = X(\pi)T(t_0) = 0 \Leftrightarrow X(0) = X(\pi) = 0$. Τώρα, θέτουμε $\lambda = \frac{T''(t_0)}{c^2 T(t_0)}$ και θέλουμε να βρούμε μια **μη τετριμμένη λύση** του προβλήματος

$$(4.7.4) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το λ .

i) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (4.7.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Επειδή $X(0) = X(\pi) = 0$, έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα απορρίπτεται αυτή η περίπτωση γιατί οδηγούμαστε μόνο στη τετριμμένη λύση.

ii) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (4.7.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Επειδή $X(0) = X(\pi) = 0$, έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα απορρίπτεται κι αυτή η περίπτωση γιατί οδηγούμαστε μόνο στη τετριμμένη λύση.

iii) Υποθέτουμε ότι $\lambda < 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (4.7.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{|\lambda|x} + c_2 \sin \sqrt{|\lambda|x}.$$

Επειδή $X(0) = 0$, έπεται ότι $c_1 = 0$. Από την $X(\pi) = 0$, έπεται $X(\pi) = c_2 \sin \sqrt{|\lambda|\pi} = 0$. Επομένως για να μην οδηγηθούμε στην τετριμμένη λύση θα θέλαμε $c_2 \neq 0$ και

$$\sin \sqrt{|\lambda|\pi} = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda = -k^2.$$

Άρα η λύση που κρατάμε είναι $X(x) = c_2 \sin kx$. Για $\lambda = -k^2$, από την (4.7.3) και (4.7.4), παίρνουμε

$$T''(t) - c^2 \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=-k^2} T(t) = 0 \Leftrightarrow T''(t) - c^2 k^2 T(t) = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης δίδεται από $T(t) = b_1 \cos ckt + b_2 \sin ckt$.

Συνοψίζοντας, κάθε διαχωρίσιμη λύση (separable solution) της (4.7.1), δηλαδή της μορφής (4.7.2), δίδεται από

$$u(x, t) = (b_1 \cos ckt + b_2 \sin ckt) \sin kx, \quad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}.$$

Από τη γραμμικότητα της κυματικής εξίσωσης μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos ckt + \frac{b_k}{ck} \sin ckt \right) \sin kx$$

είναι λύση της (4.7.1) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μορφή λύσεως του προβλήματος (4.7.1), λύνουμε το πρόβλημα του επόμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα 4.7.1.

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & , \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = -\sin x + 6 \sin 5x, & x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = \sin 3x + 5 \sin 8x, & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

Λύση. Ψάχνουμε λύση της μορφής $u(x, t) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos 2kt + \frac{b_k}{2k} \sin 2kt) \sin kx$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα θα θέλαμε να ικανοποιείται

$$-\sin x + 6 \sin 5x = u_n(x, 0) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \quad \Leftrightarrow a_1 = -1, a_5 = 6 \quad a_k = 0 \quad \forall k \neq 1, 5.$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^n (-2kb_k \sin 2kt + b_k \cos 2kt) \sin kx$, θα θέλαμε να ικανοποιείται

$$\sin 3x + 5 \sin 8x = \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \quad \Leftrightarrow a_3 = 1, a_8 = 5 \quad a_k = 0 \quad \forall k \neq 3, 8.$$

Άρα η λύση δίδεται από

$$u(x, t) = -\cos 2t \sin x + 6 \cos 10t \sin 5x + \sin 6t \sin 3x + 5 \sin 16t \sin 8x.$$

□

Τώρα θα δούμε πως σχετίζονται οι σειρές Fourier με την λύση του προβλήματος,

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi \in C^2([0, \pi])$, $\psi \in C([0, \pi])$ και

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0.$$

Από την υποενότητα 4.5, έχουμε

$$(4.7.5) \quad u(x, t) = v(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty),$$

όπου η v ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \varphi_{ext}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v_t(x, 0) = \psi_{ext}(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\varphi_{ext} \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi_{ext} \in C^1(\mathbb{R})$ είναι περιττές, 2π -περιοδικές και ικανοποιούν $\varphi_{ext}(x) = \varphi(x)$ και $\psi_{ext}(x) = \psi(x)$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Η λύση v δίδεται από τον τύπο του D'Alembert (4.2.2)

$$(4.7.6) \quad v(x, t) = \frac{\varphi_{ext}(x+ct) + \varphi_{ext}(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{ext}(s) ds.$$

Αφού φ_{ext} είναι περιττή έχουμε

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}(x) \cos kx dx = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

και

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{ext}(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Από το θεώρημα α'.0.5, έχουμε

$$\varphi_{ext}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Επομένως,

$$(4.7.7) \quad \frac{\varphi_{ext}(x+ct) + \varphi_{ext}(x-ct)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \frac{\sin k(x+ct) + \sin k(x-ct)}{2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos ckt \sin kx.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin(a+b) + \sin(b-a) = 2 \cos a \sin b$.

Όμοια έχουμε

$$(4.7.8) \quad \psi_{ext}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin kx,$$

ομοιόμορφα στο \mathbb{R} , όπου

$$\tilde{b}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin kx dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Επειδή η σύγκλιση της σειράς (4.7.8) είναι ομοιόμορφη, έχουμε

$$(4.7.9) \quad \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_{ext}(s) ds = \int_{x-ct}^{x+ct} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \sin kx dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{b}_k \sin ks ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{b}_k (\cos k(x-ct) - \cos k(x+ct))}{k} \\ = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{b}_k \sin ckt \sin kx}{k}.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$.

Από τις (4.7.5), (4.7.6), (4.7.7) και (4.7.9), έπεται

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \cos ckt + \frac{\tilde{b}_k}{ck} \sin ckt \right) \sin kx.$$

4.8 Ασκήσεις

Άσκηση 4.8.1. (Η εξίσωση Laplace είναι αναλλοίωτη σε περιστροφές). Έστω $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια λύση της εξίσωσης Laplace

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^2.$$

Για $\theta \in [0, 2\pi)$, θέτουμε $\xi = x \cos \theta + y \sin \theta$ και $n = -x \sin \theta + y \cos \theta$. Δείξτε ότι η $v(\xi, n) = u(x(\xi, n), y(\xi, n))$ είναι λύση της ανωτέρω εξίσωσης.

Άσκηση 4.8.2. Να λυθούν τα προβλήματα

i)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^{x+t}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = -2x, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = e^x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = \sin 2x, & x \geq 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

iii)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x + 3 \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

iv)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & -t < x < t, t > 0, \\ u(t, t) = \varphi(t), & t \geq 0, \\ u(-t, t) = \psi(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου φ, ψ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $[0, \infty)$ και $\varphi(0) = \psi(0)$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την γενική λύση της κυματικής εξίσωσης.

Άσκηση 4.8.3. Έστω $c > 0$ και $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου φ, ψ ομαλές συναρτήσεις.

i) Δείξτε ότι αν φ, ψ είναι δυο περιττές συναρτήσεις τότε και η λύση u είναι περιττή συνάρτηση ως προς το x .

ii) Δείξτε ότι αν φ, ψ είναι δυο περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο l , τότε και η λύση u είναι μια περιοδική συνάρτηση ως προς το x με περίοδο l .

Άσκηση 4.8.4. (Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα). Έστω $c > 0$ και $u_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi_i(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi_i(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου φ_i, ψ_i ομαλές συναρτήσεις για $i = 1, 2$. Δείξτε ότι

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| + t \sup_{y \in \mathbb{R}} |\psi_1(y) - \psi_2(y)| \quad \forall t \geq 0.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του d' Alembert.

Άσκηση 4.8.5. Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

όπου φ, ψ ομαλές συναρτήσεις.

Υπόδειξη. Θέστε $s = t$ και $y = ax + bt$ για κατάλληλα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε να δείξετε ότι η συνάρτηση $v(y, s) = u(x(y, s), t(y, s))$ λύνει την $v_{ss} - v_{yy} = 0$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τον τύπο του d' Alembert.

Άσκηση 4.8.6. Έστω $c > 0$. Δείξτε ότι το ακόλουθο πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$.

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου $f \in C([0, l] \times [0, \infty))$, $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^1([0, l])$ και $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$. Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την ενέργεια E του συστήματος στο διάστημα $[0, l]$, η οποία δίδεται από

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l w_t^2(x, t) + c^2 w_x^2(x, t) dx \quad \forall t \geq 0,$$

για να δείξετε ότι $E'(t) \leq 2E(t)$, όπου w ομαλή λύση του ανωτέρω προβλήματος με $f \equiv \varphi \equiv \psi \equiv 0$.

Άσκηση 4.8.7. Προσδιορίστε τις λύσεις των κάτωθι προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών.

i)

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & 2 \sin x - \sin 2x + 3 \sin 5x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) = & 3 \sin 2x + \sin 4x - 5 \sin 6x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = & 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = & 2 \sin \pi x - \sin 3\pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t(x, 0) = & 3 \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = & u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Υπόδειξη. Θέστε $y = \pi x$, $v(y, t) = u(y/\pi, t)$ και λύστε ως προς v .

Άσκηση 4.8.8. Προσδιορίστε τη λύση του κάτωθι προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών.

$$\begin{cases} u_{tt} - \pi^2 u_{xx} + 2u_t = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) = & 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Άσκηση 4.8.9. Προσδιορίστε τη λύση του κάτωθι προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών.

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) = & \sin^2 x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Άσκηση 4.8.10. Προσδιορίστε τη λύση του κάτωθι προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών.

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & 2 \cos x + \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) = & 3 \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = & u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Κεφάλαιο 5

Εξίσωση Θερμότητας ή Διάχυσης

Σε αυτήν την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε ένα καινούριο συμβολισμό. Έστω $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ δυο διαστήματα και $u : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $u(x, t)$. Θα λέμε ότι η $u \in C_1^2(I_1 \times I_2)$, αν $u, u_x, u_{xx}, u_t \in C(I_1 \times I_2)$.

5.1 Μέθοδος Χωρισμού Μεταβλητών

Σε αυτήν την υποενότητα θα λύσουμε την εξίσωση θερμότητας σε ένα φραγμένο χωρίο με την μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών. Απαραίτητο εργαλείο για την μέθοδο αυτή είναι οι Σειρές Fourier, τις οποίες παρουσιάζουμε στο παράρτημα α'.

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Ψάχνουμε την γενική λύση $u \in C_1^2([0, \pi] \times [0, \infty))$ της μορφής

$$(5.1.2) \quad u(x, t) = X(x)T(t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty).$$

Προφανώς θα θέλαμε $u \not\equiv 0$, άρα θα υπάρχει $(x_0, t_0) \in (0, \pi) \times (0, \infty)$ ώστε $X(x_0)T(t_0) \neq 0$. Επομένως, η u ικανοποιεί

$$(5.1.3) \quad T'(t)X(x) - c^2 X''(x)T(t) = 0, \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty).$$

Επειδή $T(t_0) \neq 0$, έπεται

$$X''(x) = \frac{T'(t_0)}{c^2 T(t_0)} X(x), \quad x \in (0, \pi).$$

Από τις συνοριακές συνθήκες στο (5.1.1), έχουμε $X(0)T(t_0) = X(\pi)T(t_0) = 0 \Leftrightarrow X(0) = X(\pi) = 0$. Τώρα, θέτουμε $\lambda = \frac{T'(t_0)}{c^2 T(t_0)}$ και θέλουμε να βρούμε μια **μη τετριμμένη** λύση του προβλήματος

$$(5.1.4) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, \pi), \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το λ .

i) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (5.1.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Επειδή $X(0) = X(\pi) = 0$, έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα απορρίπτεται αυτή η περίπτωση γιατί οδηγούμαστε μόνο στη τετριμμένη λύση.

ii) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (5.1.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Επειδή $X(0) = X(\pi) = 0$, έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα απορρίπτεται κι αυτή η περίπτωση γιατί οδηγούμαστε μόνο στη τετριμμένη λύση.

iii) Υποθέτουμε ότι $\lambda < 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (5.1.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{|\lambda|x} + c_2 \sin \sqrt{|\lambda|x}.$$

Επειδή $X(0) = 0$, έπεται ότι $c_1 = 0$. Από την $X(\pi) = 0$, έπεται $X(\pi) = c_2 \sin \sqrt{|\lambda|\pi} = 0$. Επομένως για να μην οδηγηθούμε στην τετριμμένη λύση θα θέλαμε $c_2 \neq 0$ και

$$\sin \sqrt{|\lambda|\pi} = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda = -k^2.$$

Άρα η λύση που κρατάμε είναι $X(x) = c_2 \sin kx$. Για $\lambda = -k^2$, από την (5.1.3) και (5.1.4), παίρνουμε

$$T'(t) - c^2 \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=-k^2} T(t) = 0 \Leftrightarrow T'(t) + c^2 k^2 T(t) = 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης δίδεται από $T(t) = b_1 e^{-c^2 k^2 t}$.

Συνοψίζοντας, κάθε διαχωρίσιμη λύση (separable solution) της (5.1.1), δηλαδή της μορφής (5.1.2), δίδεται από

$$u(x, t) = b_1 e^{-c^2 k^2 t} \sin kx, \quad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}.$$

Από τη γραμμικότητα της κυματικής εξίσωσης μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx$$

είναι λύση της (5.1.1) για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μορφή λύσεως του προβλήματος (5.1.1), λύνουμε το πρόβλημα του επόμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα 5.1.1.

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & , \quad (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = -\sin x + 6 \sin 5x, & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Λύση. Ψάχνουμε λύση της μορφής $u(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-4k^2 t} \sin kx$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα θα θέλαμε να ικανοποιείται

$$-\sin x + 6 \sin 5x = u_n(x, 0) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx \quad \Leftrightarrow a_1 = -1, a_5 = 6 \quad a_k = 0 \quad \forall k \neq 1, 5.$$

Άρα η λύση δίδεται από

$$u(x, t) = -e^{-4t} \sin x + 6e^{-100t} \sin 5x.$$

□

Τώρα θα δούμε πως σχετίζονται οι σειρές Fourier με την λύση του προβλήματος,

$$(5.15) \quad \begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi \in C^1([0, \pi])$ και

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0,$$

για λόγους συμβατότητας. Συμβολίζουμε με φ_{ext} την περιττή και 2π -περιοδική επέκταση της φ (δες υποενότητα 4.5). Αφού φ_{ext} είναι περιττή έχουμε

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}(x) \cos kx dx = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

και

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{ext}(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Επειδή $\varphi_{ext} \in C^1(\mathbb{R})$, από το Θεώρημα α'.0.5, έχουμε

$$\varphi_{ext}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

ομοίμορφα στο \mathbb{R} . Από την ανισότητα Bessel (α'.0.2) έχουμε ότι

$$(5.16) \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{ext}^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi^2 dx,$$

άρα $b_k \rightarrow 0$ το οποίο συνεπάγει την ύπαρξη $M > 0$ έτσι ώστε

$$|b_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx,$$

Έστω $a > 0$ και $t > a$. Τότε έχουμε $|b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx| \leq M e^{-c^2 k^2 a}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M e^{-c^2 k^2 a}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M} e^{-c^2 k a} = 0 < 1.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M e^{-c^2 k^2 a}$ συγκλίνει. Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει $u : \mathbb{R} \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε $u_n \rightarrow u$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R} \times [a, \infty)$, δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x,t) \in \mathbb{R} \times [a, \infty)} |u_n(x,t) - u(x,t)| = 0.$$

Συμβολίζουμε $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^n b_k e^{-c^2 k^2 t} k \cos kx$$

και $|b_k k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx| \leq M k e^{-c^2 k^2 a}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M k e^{-c^2 k^2 a}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{M k} e^{-c^2 k a} = 0 < 1.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} M k e^{-c^2 k^2 a}$ συγκλίνει. Από το θεώρημα Weierstrass έπεται ότι υπάρχει $\tilde{u} : \mathbb{R} \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε $u_n \rightarrow \tilde{u}$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R} \times [a, \infty)$. Από γνωστό θεώρημα της ανάλυσης έπεται ότι

$$\tilde{u} = u_x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial (b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx)}{\partial x}.$$

Όμοια δείχνουμε ότι για κάθε $t > a$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$u_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\partial^2 b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx)}{\partial x^2} \quad \text{και} \quad u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\partial b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx)}{\partial t},$$

το οποίο συνεπάγει $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R} \times [a, \infty)$. Όμοια δείχνουμε ότι $u \in C^n(\mathbb{R} \times [a, \infty))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επειδή τα ανωτέρω ισχύουν για κάθε $a > 0$, έπεται ότι $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ και $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \varphi_{ext}(x)$.

Τώρα θα δείξουμε ότι

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, 0) \\ t > 0}} u(x,t) = u(x, 0),$$

δηλαδή $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Αφού φ_{ext} είναι περιττή έχουμε ότι φ'_{ext} είναι άρτια. Άρα

$$\tilde{b}_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'_{ext}(x) \sin kx dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'_{ext}(x) dx = \varphi_{ext}(\pi) - \varphi_{ext}(-\pi) = \varphi(\pi) + \varphi(\pi) = 0$$

και

$$\begin{aligned} \bar{a}_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'_{\text{ext}}(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{\text{ext}}(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi'(x) \cos kx dx = \\ &\quad \text{(ολοκλήρωση κατά μέρη)} \quad = -k \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx = -kb_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Bessel (α'.0.2) έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'_{\text{ext}}|^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\varphi'_{\text{ext}}|^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\varphi'|^2 dx.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, έχουμε

$$(5.1.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |kb_k| k^{-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|kb_k|^2 + k^{-2}}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |kb_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \right) < \infty.$$

Άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} |b_k| = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |b_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης από συνέχεια της $v_{n_0}(x, t) = \sum_{k=1}^{n_0} b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $|x - x_0|^2 + t^2 < \delta^2$ να ισχύει

$$|v_{n_0}(x, t) - v_{n_0}(x_0, 0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Άρα, αν $|x - x_0|^2 + t^2 < \delta^2$ έπεται

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u(x_0, 0)| &= \left| v_{n_0}(x, t) - v_{n_0}(x_0, 0) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k \sin kx_0 \right| \\ &\leq \left| v_{n_0}(x, t) - v_{n_0}(x_0, 0) \right| + \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx \right| + \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k \sin kx_0 \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |b_k \sin kx_0| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2 \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |b_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνοψίζουμε ότι έχουμε αποδείξει στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.2. Το πρόβλημα (5.1.5) έχει λύση $u \in C^l([0, \pi] \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty))$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$, n οποία δίδεται από την $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx$, όπου

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad \text{ομοιόμορφα στο } [0, \pi].$$

Τέλος για κάθε $n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύει

$$\frac{\partial^{n+m} u(x, t)}{\partial x^n \partial t^m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} (b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx)}{\partial x^n \partial t^m} \quad \forall (x, t) \in [0, \pi] \times (0, \infty)$$

και ομοιόμορφα στο $[0, \pi] \times [\varepsilon, \infty)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Παρατήρηση 5.1.3. Εν αντιθέσει με την λύση της κυματικής εξίσωσης, βλέπουμε ότι η ομαλότητα της λύσης της εξίσωσης θερμότητας στο $[0, \pi] \times (0, \infty)$ δεν επηρεάζεται από την αρχική συνθήκη φ και $u \in C^l([0, \pi] \times (0, \infty))$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 5.1.4. Για κάθε $\forall(x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty)$, από την (5.1.7), έχουμε

$$|u(x, t)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k e^{-c^2 k^2 t} \sin kx| \leq e^{-c^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|,$$

άρα $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, \pi]} u(x, t) = 0$.

Παρατήρηση 5.1.5. Κάνοντας μικρές τροποποιήσεις στην απόδειξη του θεωρήματος 5.1.2, μπορούμε να δείξουμε ότι ίδιο αποτέλεσμα, αν υποθέσουμε ότι $\varphi \in C([0, \pi])$ και η φ' υπάρχει στο $[0, \pi]$ εκτός από πεπερασμένου το πλήθος σημεία και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι (δες ορισμό α'.0.4) για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

Παράδειγμα 5.1.6. Βρείτε τη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Λύση. Παρατηρούμε $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ και $\varphi \in C^1([0, \pi])$. Άρα

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx = \frac{4(1 - (1)^k)}{\pi k^3} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad \text{ομοιόμορφα στο } [0, \pi].$$

Η λύση δίδεται από

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(1 - (1)^k)}{\pi k^3} e^{-c^2 k^2 t} \sin kx.$$

□

5.2 Αρχή μεγίστου Ελαχίστου

Έστω $l, T > 0$, $I = (0, l)$ και $I_T = (0, l) \times (0, T]$, το παραβολικό σύνορο του I_T ορίζεται από

$$\mathcal{P}I_T = (\{0, l\} \times [0, T]) \cup ([0, l] \times \{0\}),$$

δηλαδή δεν περιέχει το άνω μέρος του ορθογωνίου.

Θεώρημα 5.2.1 (Αρχή Μεγίστου Ελαχίστου). Έστω $c > 0$ και $u \in C_1^2(I_T) \cap C([0, l] \times [0, T])$.

(i) Αν $u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) \leq 0$ για κάθε $(x, t) \in I_T$ τότε

$$u(x, t) \leq \max_{(x, t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) \quad \forall (x, t) \in I_T.$$

(ii) Αν $u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) \geq 0$ για κάθε $(x, t) \in I_T$ τότε

$$u(x, t) \geq \min_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) \quad \forall (x, t) \in I_T.$$

(iii) Αν $u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0$ για κάθε $(x, t) \in I_T$ τότε

$$\min_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) \leq u(x, t) \leq \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) \quad \forall (x, t) \in I_T.$$

Απόδειξη. (i) Έστω $\varepsilon > 0$, θέτουμε $w_\varepsilon(x, t) = u(x, t) + \varepsilon x^2$, τότε

$$(5.2.1) \quad \frac{\partial w_\varepsilon(x, t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_\varepsilon(x, t)}{\partial x^2} = u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) - 2\varepsilon \leq -2\varepsilon < 0, \quad \forall (x, t) \in I_T.$$

Τώρα, w_ε είναι συνεχής στο $[0, l] \times [0, T]$, οπότε υπάρχει $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in [0, l] \times [0, T]$ έτσι ώστε $w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \max_{(x,t) \in [0,l] \times [0,T]} w_\varepsilon(x, t)$.

Τώρα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(a) $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in (0, l) \times (0, T)$. Τότε $\frac{\partial w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial x} = 0$, επειδή η w_ε παίρνει μέγιστο στο $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$. Τώρα η συνάρτηση $g(x) = w_\varepsilon(x, t_\varepsilon)$, παίρνει μέγιστο στο $x_\varepsilon \in (0, l)$, άρα $g'(x_\varepsilon) = 0$ και $g''(x_\varepsilon) \leq 0$ το οποίο είναι ισοδύναμο με $\frac{\partial w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial^2 w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial x^2} \leq 0$. Άρα,

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial x^2} = -c^2 \frac{\partial^2 w_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{\partial x^2} \geq 0,$$

το οποίο αντιτίθεται στην (5.2.1). Επομένως, $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathcal{P}I_T$.

(b) $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in (0, l) \times \{T\}$. Τότε $t_\varepsilon = T$ και

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x_\varepsilon, T)}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{w_\varepsilon(x_\varepsilon, T+h) - w_\varepsilon(x_\varepsilon, T)}{h} \geq 0,$$

επειδή $w_\varepsilon(x_\varepsilon, t) - w_\varepsilon(x_\varepsilon, T) \leq 0$ για κάθε $t \in [0, T]$ και $h < 0$. Επίσης, ακολουθώντας το ίδιο επιχείρημα με εκείνο της περίπτωσης (i), μπορούμε να δείξουμε ότι $\frac{\partial^2 w_\varepsilon(x_\varepsilon, T)}{\partial x^2} \leq 0$. Επομένως,

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x_\varepsilon, T)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_\varepsilon(x_\varepsilon, T)}{\partial x^2} \geq 0,$$

το οποίο αντιτίθεται με την (5.2.1). Επομένως, $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathcal{P}I_T$.

Άρα δείξαμε ότι

$$\begin{aligned} u(x, t) + \varepsilon x^2 = w_\varepsilon(x, t) &\leq \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} w_\varepsilon(x, t) = \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} (u(x, t) + \varepsilon x^2) \\ &\leq \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) + \varepsilon l^2 \quad \forall (x, t) \in [0, l] \times [0, T]. \end{aligned}$$

Στέλλοντας το ε στο 0, έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (u(x, t) + \varepsilon x^2) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) + \varepsilon l^2 \right) = \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, l] \times [0, T].$$

(ii) Θέτουμε $v(x, t) = -u(x, t)$, τότε $v_t(x, t) - c^2 v_{xx}(x, t) \leq 0$ για κάθε $(x, t) \in I_T$ και από το πρώτο μέρος του θεωρήματος παίρνουμε

$$-u(x, t) = v(x, t) \leq \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} v(x, t) = \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} -u(x, t) = - \min_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} u(x, t) \quad \forall (x, t) \in I_T,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

(iii) Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των (i) και (ii). \square

Μια εφαρμογή της αρχής μεγίστου ελαχίστου είναι η μοναδικότητα, όπως περιγράφεται στο κάτωθι θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.2. Έστω $l, T > 0$. Τότε το κάτωθι πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση $u \in C_1^2(I_T) \cap C([0, l] \times [0, T])$.

$$(5.2.2) \quad \begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in I_T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = g(t), & t \in [0, T], \\ u(l, t) = h(t), & t \in [0, T], \end{cases}$$

όπου $f \in C(I_T)$, $\varphi \in C([0, l])$, $g, h \in C([0, T])$, $\varphi(0) = g(0)$ και $\varphi(l) = h(0)$.

Απόδειξη. Έστω το πρόβλημα (5.2.2) έχει δύο λύσεις $u_1, u_2 \in C_1^2(I_T) \cap C([0, l] \times [0, T])$. Τότε η $w = u_1 - u_2$, ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} w_t - c^2 w_{xx} = 0, & (x, t) \in I_T, \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ w(0, t) = w(l, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Από την αρχή μεγίστου ελαχίστου έπεται

$$0 = \min_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} w(x, t) \leq w(x, t) \leq \max_{(x,t) \in \mathcal{P}I_T} w(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in I_T,$$

Επομένως $w \equiv 0 \Leftrightarrow u_1 \equiv u_2$ στο $[0, l] \times [0, T]$. \square

5.3 Ενεργειακή Μέθοδος

Θεώρημα 5.3.1. Έστω $l > 0, I = [0, l]$. Υποθέτουμε ότι $u \in C_1^2([0, l] \times (0, \infty)) \cap C([0, l] \times [0, \infty))$, είναι μια λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $\varphi \in C([0, l])$. Θέτουμε

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l u^2(x, t) dx.$$

Τότε $E'(t) \leq 0$ για κάθε $t > 0$ και

$$(5.3.1) \quad E(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2(x) dx.$$

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι επειδή $u \in C_1^2([0, l] \times (0, \infty))$, έχουμε

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^l u^2(x, t) dx \right) = \int_0^l u_t(x, t) u(x, t) dx \\ &= c^2 \int_0^l u_{xx}(x, t) u(x, t) dx \\ (\text{από ολοκλήρωση κατά παράγοντες}) &= c^2 \left([u_x(\cdot, t) u(\cdot, t)]_0^l - \int_0^l u_x^2(x, t) dx \right) \\ &= c^2 \left(\underbrace{u_x(l, t) u(l, t)}_{=0} - \underbrace{u_x(0, t) u(0, t)}_{=0} - \int_0^l u_x^2(x, t) dx \right) \\ &= - \int_0^l u_x^2(x, t) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Επομένως $E(t) \leq E(s)$ για κάθε $0 < s < t$. Όμως η $u \in C([0, l] \times [0, \infty))$, άρα

$$E(t) \leq \lim_{s \rightarrow 0^+} E(s) = \frac{1}{2} \int_0^l \lim_{s \rightarrow 0^+} u^2(x, s) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \varphi^2(x) dx,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης.

Θεώρημα 5.3.2. Έστω $l > 0$, $I = [0, l]$ Τότε το κάτωθι πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση $u \in C_1^2([0, l] \times (0, \infty)) \cap C([0, l] \times [0, \infty))$.

$$(5.3.2) \quad \begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = g(t) & t \in [0, \infty), \\ u(l, t) = h(t) & t \in [0, \infty), \end{cases}$$

όπου $f \in C([0, l] \times (0, \infty))$, $\varphi \in C([0, l])$, $g, h \in C^1([0, \infty))$, $\varphi(0) = g(0)$ και $\varphi(l) = h(0)$.

Απόδειξη. Έστω το πρόβλημα (5.3.2) έχει δύο λύσεις $u_1, u_2 \in C_1^2([0, l] \times (0, \infty)) \cap C([0, l] \times [0, \infty))$. Τότε η $w = u_1 - u_2$, ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} w_t - c^2 w_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Από την (5.3.1), έπεται

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l w^2(x, t) dx \leq 0,$$

επομένως $w \equiv 0 \Leftrightarrow u_1 \equiv u_2$. \square

5.4 Θεμελιώδης Λύση

Έστω $c, \lambda > 0$ και $u \in C_1^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$(5.4.1) \quad u_t - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Τότε η $v(x, t) = u(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2})$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας (5.4.1). Αυτό υποδεικνύει τη σημαντικότητα του όρου $\frac{x}{\sqrt{t}}$. Τέλος επειδή και η $v(-x, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας, θα θέλαμε οι λύσεις να είναι άρτιες ως προς x και να έχουν τη μορφή $v(x, t) = f(\frac{x}{\sqrt{t}})$, όπου $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ είναι μια άρτια και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο \mathbb{R} . Τέλος, θα θέλαμε $\int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) dx = c_0$ όπου c_0 για κάθε $t > 0$, όμως τότε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = 2 \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx \\ &\quad (\text{θέτουμε } r = \frac{x}{\sqrt{t}}) = 2\sqrt{t} \int_0^{\infty} f(r) dr. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, ψάχνουμε λύσεις της μορφής

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right), \\ w_{xx}(x, t) &= \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \\ 0 &= w_t(x, t) - c^2 w_{xx}(x, t) = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \left(f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) - c^2 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Θέτοντας $r = \frac{x}{\sqrt{t}}$, αρκεί να λύσουμε

$$f''(r) + \frac{1}{2}(f(r) + rf'(r)) = 0 \quad \text{στο } (-\infty, \infty).$$

Τώρα παρατηρούμε ότι

$$0 = f''(r) + \frac{1}{2}(f(r) + rf'(r)) = c^2 f''(r) + \frac{1}{2}(rf'(r))' \Leftrightarrow f'(r) + \frac{1}{2c^2}(rf'(r)) = c_1,$$

για κάποια $c_1 \in \mathbb{R}$. Όμως $f \in C^2(\mathbb{R})$, άρα $c_1 = \lim_{r \rightarrow 0} f'(r) + \frac{1}{2c^2}(rf'(r)) = f'(0) = 0$, αφού η f άρτια. Επομένως $c_1 = 0$.

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τη τελευταία εξίσωση με $e^{\frac{r^2}{4c^2}}$, τότε

$$e^{\frac{r^2}{4c^2}} f'(r) + \frac{e^{\frac{r^2}{4c^2}}}{2c^2} rf'(r) = 0 \Leftrightarrow (e^{\frac{r^2}{4c^2}} f(r))' = 0 \Leftrightarrow f(r) = Ae^{-\frac{r^2}{4c^2}},$$

για κάποια σταθερά $A \in \mathbb{R}$. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα ανωτέρω, έχουμε ότι η λύση θα είναι

$$w(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

Τέλος, θα θέλαμε να επιλέξουμε την A έτσι ώστε

$$\frac{A}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}} dx = 1.$$

Θέτουμε $r = \frac{x}{\sqrt{4c^2 t}}$, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}} dx = \sqrt{4c^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{4c^2 \pi},$$

άρα επιλέγουμε $A = \frac{1}{\sqrt{4c^2 \pi}}$.

Ορισμός 5.4.1. Η συνάρτηση

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4c^2 \pi t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}},$$

καλείται **θεμελιώδης λύση** της εξίσωσης θερμοότητας (5.4.1).

5.5 Το ομογενές πρόβλημα στην ευθεία

Θεώρημα 5.5.1. Έστω $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη. Τότε η συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(5.5.1) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, t) \psi(y) dy$$

ικανοποιεί:

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ και

$$(5.5.2) \quad \frac{\partial^{n+m} u(x, t)}{\partial x^n \partial t^m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} \Phi(x - y, t)}{\partial x^n \partial t^m} \psi(y) dy \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad \text{και} \quad n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(ii) $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(iii)

$$(5.5.3) \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, 0) \\ t > 0}} u(x, t) = \psi(x_0).$$

Απόδειξη. Αφού η ψ είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$(5.5.4) \quad |\psi(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Έστω $a, b > 0$ και $a < t < b + a$, θεωρούμε $h \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|h| < \frac{a}{2}$. Θέτουμε

$$\Phi_h(x, t) = \frac{\Phi(x - y, t + h) - \Phi(x - y, t)}{h},$$

τότε γνωρίζουμε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x, t) = \varphi_t(x - y, t)$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(5.5.5) \quad \begin{aligned} u_t(x, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x - y, t + h) - u(x - y, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(x, t) \psi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x, t) \psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_t(x - y, t) \psi(y) dy. \end{aligned}$$

Θα το δείξουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Δηλαδή θα δείξουμε την ύπαρξη μιας μη αρνητικής και ολοκληρώσιμης συνάρτησης g στο \mathbb{R} , έτσι ώστε

$$(5.5.6) \quad (|\Phi_h(x - y, t)| + |\Phi_t(x - y, t)|) |\psi(y)| \leq g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \text{ και } h \in (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}).$$

Τότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης εξασφαλίζει την ύπαρξη του κάτωθι ορίου,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_h(x, t) \psi(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \Phi_h(x, t) \psi(y) dy.$$

Πρώτα, θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $A_1 > 0$ που εξαρτάται από το x, c, b και a έτσι ώστε να ισχύει

$$(5.5.7) \quad |\varphi_t(x - y, s)| \leq A_1(1 + y^2) e^{-\frac{y^2}{8(b+a)c^2}} \quad \forall \frac{a}{2} < s < b + a.$$

Παρατηρούμε ότι $|x - y|^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq -x^2 + \frac{y^2}{2}$. Επίσης $|x - y|^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2(1 + x^2)(1 + y^2)$ και

$$e^{-\frac{|x-y|^2}{4c^2s}} \leq e^{\frac{x^2}{4c^2s}} e^{-\frac{y^2}{8c^2s}} \leq e^{\frac{x^2}{2c^2a}} e^{-\frac{y^2}{8(b+a)c^2}}.$$

Στη συνέχεια υπολογίζοντας την μερική παράγωγο και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ανισότητες, εύκολα μπορούμε να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα (5.5.7). Τώρα από το θεώρημα μέσης τιμής ως προς t , έπεται ότι υπάρχει $s \in (t + h, t)$ αν $h < 0$ ή $s \in (t, t + h)$ αν $h > 0$ τέτοιο ώστε

$$(5.5.8) \quad |\Phi_h(x, t)| = \left| \frac{\Phi(x - y, t + h) - \Phi(x - y, t)}{h} \right| = |\Phi_t(x - y, s)| \leq A_1(1 + y^2) e^{-\frac{y^2}{8(b+a)c^2}},$$

από την (5.5.7). Συνδυάζοντας την (5.5.7), (5.5.8) και (5.5.4), παίρνουμε την (5.5.6) με $g(y) = 2MA_1(1 + y^2) e^{-\frac{y^2}{8(b+a)c^2}}$. Η $g(y)$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} . Άρα από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται η (5.5.5).

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε την (5.5.2).

(ii) Από την (5.5.2) έχουμε

$$u_t(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\Phi_t(x-y, t) - c^2 \Phi_{xx}(x-y, t)) \psi(y) dy = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

αφού $\Phi_t(x-y, t) - c^2 \Phi_{xx}(x-y, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(iii) Θα αποδείξουμε το όριο (5.5.3), χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δηλαδή, για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < \sqrt{|x-x_0|^2 + t^2} < \delta_0$ να ισχύει

$$(5.5.9) \quad |u(x, t) - \psi(x_0)| < \varepsilon.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y, t) dy \stackrel{\text{Θέτουμε } r=x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(r, t) dr = 1.$$

Άρα,

$$(5.5.10) \quad |u(x, t) - \psi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y, t) (\psi(y) - \psi(x_0)) dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy.$$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|y-x_0| < \delta$ να ισχύει

$$(5.5.11) \quad |\psi(y) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Γράφουμε

$$(5.5.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy = \int_{-\infty}^{-\delta+x_0} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \int_{-\delta+x_0}^{\delta+x_0} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \int_{\delta+x_0}^{\infty} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy.$$

Από την (5.5.11) έχουμε

$$(5.5.13) \quad \int_{-\delta+x_0}^{\delta+x_0} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy \leq \int_{-\delta+x_0}^{\delta+x_0} \Phi(x-y, t) \frac{\varepsilon}{2} dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τώρα αν $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ και $|y-x_0| \geq \delta$ τότε

$$|y-x_0| = y-x+x-x_0 \leq |y-x| + |x-x_0| \leq |y-x| + \frac{\delta}{2} \leq |y-x| + \frac{|y-x_0|}{2} \Rightarrow \frac{|y-x_0|}{2} \leq |y-x|.$$

Άρα, $e^{-\frac{|x-y|^2}{4c^2t}} \leq e^{-\frac{|x_0-y|^2}{16c^2t}}$ το οποίο συνεπάγει

$$\Phi(x-y, t) \leq \frac{1}{\sqrt{4c^2\pi t}} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{16c^2t}}.$$

Από τη τελευταία ανισότητα και (5.5.4), έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-\delta+x_0} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \int_{\delta+x_0}^{\infty} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy \\ & \leq 2M \left(\int_{-\infty}^{-\delta+x_0} \Phi(x-y, t) dy + \int_{\delta+x_0}^{\infty} \Phi(x-y, t) dy \right) \\ & \leq \frac{2M}{\sqrt{4c^2\pi t}} \left(\int_{-\infty}^{-\delta+x_0} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{16c^2t}} dy + \int_{\delta+x_0}^{\infty} e^{-\frac{|x_0-y|^2}{16c^2t}} dy \right) \\ & \quad (\text{Θέτουμε } r = \frac{y-x_0}{\sqrt{t}}) = \frac{4M}{\sqrt{4c^2\pi}} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16c^2}}. \end{aligned}$$

Τώρα, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16c^2}} dr = \int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{32c^2}} e^{-\frac{r^2}{32c^2}} dr \leq \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{\delta^2}{32c^2\sqrt{t}}} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{32c^2}} dr \right) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{-\frac{\delta^2}{32c^2\sqrt{t}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{32c^2}} dr \right) = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\sup_{x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})} \int_{-\infty}^{-\delta+x_0} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \sup_{x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})} \int_{\delta+x_0}^{\infty} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy \right) = 0.$$

Επομένως υπάρχει $0 < \delta_0 < \frac{\delta}{2}$ έτσι ώστε αν $0 < t < \delta_0$ να ισχύει

$$(5.5.14) \quad \sup_{x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})} \int_{-\infty}^{-\delta+x_0} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy + \sup_{x \in (x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2})} \int_{\delta+x_0}^{\infty} \Phi(x-y, t) |\psi(y) - \psi(x_0)| dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τις (5.5.10), (5.5.12), (5.5.11), (5.5.13) και (5.5.14), φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα (5.5.9). \square

5.6 Το μη ομογενές πρόβλημα στην ευθεία

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} w_t - c^2 w_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ w(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Η λύση που ψάχνουμε θα είναι της μορφής $w = u + v$ όπου η u δίδεται από την (5.5.1). Άρα, η v θα ικανοποιεί την

$$(5.6.1) \quad \begin{cases} v_t - c^2 v_{xx} = f(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Η μορφή της λύσης θα βρεθεί κάνοντας χρήση την αρχή του Duhamel. Έστω $f \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ μια φραγμένη συνάρτηση. Πρώτα ψάχνουμε να βρούμε τη λύση του προβλήματος

$$(5.6.2) \quad \begin{cases} v_t(x, t; s) - c^2 v_{xx}(x, t; s) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (s, \infty), \\ v(x, s; s) = f(x, s), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Θέτοντας $\tau = t - s$, τότε η $V(x, \tau) = v(x, \tau + s; s)$ ικανοποιεί

$$\begin{cases} V_\tau(x, \tau) - c^2 V_{xx}(x, \tau) = 0, & (x, \tau) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ V(x, 0) = f(x, s), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

άρα από την (5.5.1), η V δίδεται από

$$V(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, \tau) f(y, s) dy$$

ή ισοδύναμα η λύση του (5.6.2) δίδεται από

$$v(x, t; s) = V(x, t - s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy.$$

Η αρχή του Duhamel ισχυρίζεται ότι η λύση $v(x, t)$ του προβλήματος (5.6.1) μπορεί να κατασκευαστεί ολοκληρώνοντας την $v(x, t; s)$ ως προς s , δηλαδή

$$(5.6.3) \quad v(x, t) = \int_0^t v(x, t; s) ds = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds.$$

Η μέθοδος αυτή κατασκευής λύσεων είναι γενική και δεν ακολουθείται μόνο για την εξίσωση θερμότητας. Προφανώς δεν αποτελεί απόδειξη ύπαρξης λύση, αλλά σου δίνει την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθήσει κάποιος για να βρει την λύση του προβλήματος (5.6.1). Χάρην ευκολίας, θα αποδείξουμε ότι όντως είναι λύση του προβλήματος (5.6.1), υποθέτοντας ότι η $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ και έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$

Θεώρημα 5.6.1. Έστω η $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Τότε η συνάρτηση $v : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δίδεται από (5.6.3) ικανοποιεί:

(i) $v \in C_1^2(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

(ii) $v_t - c^2 v_{xx} = f(x, t)$ στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(iii)

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0,0) \\ t > 0}} v(x, t) = 0.$$

Απόδειξη. (i) Αφού η $f \in C_1^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ σημαίνει ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε

$$(5.6.4) \quad f(x, t) = f_t(x, t) = f_x(x, t) = f_{xx}(x, t) = 0 \quad \text{αν } |x| > R \text{ ή } t > R.$$

Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$(5.6.5) \quad |f(x, t)| + |f_t(x, t)| + |f_x(x, t)| + |f_{xx}(x, t)| \leq M.$$

Έστω $t_1 > t_2$, από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $s \in (t_2, t_1)$ έτσι ώστε

$$(5.6.6) \quad \left| \frac{f(x, t_1) - f(x, t_2)}{t_1 - t_2} \right| = |f_t(x, s)| \leq M.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών ως προς $S = t - s$ και $Y = x - y$, έχουμε

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(Y, S) f(x - Y, t - S) dY dS = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

Τώρα έστω $|h| < \frac{t}{2}$,

$$(5.6.7) \quad \begin{aligned} \frac{v(x, t+h) - v(x, t)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\underbrace{\int_0^{t+h} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds}_{=I_{1,h}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{h} \left(\underbrace{\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds}_{=I_{2,h}} \right). \end{aligned}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$(5.6.8) \quad \lim_{h \rightarrow 0} I_{1,h} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x - y, 0) dy.$$

Έστω $h > 0$, τότε

$$(5.6.9) \quad \begin{aligned} I_{1,h} &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds = \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) dy ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) (f(x - y, t + h - s) ds) \right) dy. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) f(x - y, t + h - s) ds &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) (f(x - y, t + h - s) - f(x - y, 0) + f(x - y, 0)) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) (f(x - y, t + h - s) - f(x - y, 0)) ds \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) f(x - y, 0) ds. \end{aligned}$$

Επειδή η $\Phi \in C(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) f(x - y, 0) ds = \Phi(y, t) f(x - y, 0).$$

Τώρα επειδή $|h| < \frac{t}{2}$ έχουμε ότι $\frac{t}{2} \leq t+h \leq \frac{3t}{2}$. Από την (5.6.5) και την τελευταία ανισότητα έπεται

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f(x-y, 0)| \Phi(y, s) ds \leq \frac{M}{\sqrt{2c^2 \pi t}} e^{-\frac{y^2}{6c^2 t}} =: g(y).$$

Όμως η $g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο \mathbb{R} , επομένως από την κυριαρχημένη σύγκλιση έπεται

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) f(x-y, 0) ds dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy.$$

Από την (5.6.6), έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) (f(x-y, t+h-s) - f(x-y, 0)) ds \right| &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) |f(x-y, t+h-s) - f(x-y, 0)| ds \\ &\leq g(y) \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (t+h-s) ds = \frac{g(y)h}{2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(5.6.10) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_t^{t+h} \Phi(y, s) (f(x-y, t+h-s) - f(x-y, 0)) ds dy \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 0.$$

Συνδυάζοντας τις (5.6.9)-(5.6.10), έχουμε ότι

$$(5.6.11) \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} I_{1,h} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy.$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$(5.6.12) \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} I_{1,h} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy.$$

Από τις (5.6.11) και (5.6.12) έπεται η (5.6.8).

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το $\lim_{h \rightarrow 0} I_{2,h}$. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-y, t+h-s) - f(x-y, t-s)}{h} = f_t(x-y, t-s)$$

και από την (5.6.6) έχουμε

$$\Phi(y, s) \left| \frac{f(x-y, t+h-s) - f(x-y, t-s)}{h} \right| \leq M \Phi(y, s).$$

Συνάρτηση $M\Phi(y, s)$ είναι μη αρνητική ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R} \times (0, t)$, άρα από το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$(5.6.13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} I_{2,h} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_t(x-y, t-s) dy ds.$$

Από τις (5.6.7), (5.6.8) και (5.6.13) έχουμε

$$(5.6.14) \quad v_t(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x, t+h) - v(x, t)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_t(x-y, t-s) dy ds.$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$(5.6.15) \quad v_x = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_x(x-y, t-s) dy ds \quad \text{και} \quad v_{xx} = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_{xx}(x-y, t-s) dy ds.$$

(ii) Από τις (5.6.14) και (5.6.15) έχουμε

$$(5.6.16) \quad v_t - c^2 v_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_t(x-y, t-s) dy ds - c^2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_{xx}(x-y, t-s) dy ds.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι από τον κανόνα της αλυσίδας για $\tau = t-s$, έχουμε για $g(\tau) = f(x-y, t-s)$, $f_t(x-y, \tau) = g'(t-s) \frac{\partial(t-s)}{\partial t} = g'(t-s)$ και $f_s(x-y, t-s) = g'(t-s) \frac{\partial(t-s)}{\partial s} = -g'(t-s)$. Άρα, $f_t(x-y, t-s) = -f_s(x-y, t-s)$. Όμοια έχουμε $f_{xx}(x-y, t-s) = f_{yy}(x-y, t-s)$. Επομένως η (5.6.16) γίνεται

$$v_t - c^2 v_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, t) f(x-y, 0) dy - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_s(x-y, t-s) dy ds - c^2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_{yy}(x-y, t-s) dy ds.$$

Τώρα από την (5.6.4) $f_y(R+1, t-s) = f_y(-R-1, t-s) = f(R+1, t-s) = f(-R-1+x, t-s) = 0$. Έτσι, από ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_{yy}(x-y, t-s) dy &= \int_{-R-1+x}^{R+1+x} \Phi(y, s) f_{yy}(x-y, t-s) dy \\ &= [\Phi(\cdot, s) f_y(x-\cdot, t-s)]_{-R-1+x}^{R+1+x} - \int_{-R-1+x}^{R+1+x} \Phi_y(y, s) f_y(x-y, t-s) dy \\ &= \Phi(R+1+x, s) f_y(-R-1, t-s) - \Phi(-R-1+x, s) f_y(R+1, t-s) - \int_{-R-1+x}^{R+1+x} \Phi_y(y, s) f_y(x-y, t-s) dy \\ &= \int_{-R-1+x}^{R+1+x} \Phi_{yy}(y, s) f(x-y, t-s) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yy}(y, s) f(x-y, t-s) dy. \end{aligned}$$

Έστω $0 < \varepsilon < t$. Τότε

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_s(x-y, t-s) dy ds = \underbrace{\int_0^\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_s(x-y, t-s) dy ds}_{=J_{1,\varepsilon}} + \underbrace{\int_\varepsilon^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y, s) f_s(x-y, t-s) dy ds}_{J_{2,\varepsilon}}.$$

Από την (5.6.6) έχουμε

$$|j_{1,\varepsilon}| \leq \int_0^\varepsilon \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,s) |f_s(x-y,t-s)| dy ds \leq M \int_0^\varepsilon \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,s) dy ds = M\varepsilon,$$

οπότε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j_{1,\varepsilon} = 0.$$

Από ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_\varepsilon^t \Phi(y,s) f_s(x-y,t-s) ds = - \int_\varepsilon^t \Phi_s(y,s) f(x-y,t-s) ds + \Phi(y,t) f(x-y,0) - \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} J_{2,\varepsilon} &= \int_{-\infty}^\infty \int_\varepsilon^t \Phi(y,s) f_s(x-y,t-s) ds dy = - \int_{-\infty}^\infty \int_\varepsilon^t \Phi_s(y,s) f(x-y,t-s) ds dy + \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,t) f(x-y,0) dy \\ &\quad - \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy}_{j_{3,\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Τώρα

$$j_{3,\varepsilon} = \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,\varepsilon) (f(x-y,t-\varepsilon) - f(x-y,t)) dy + \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t) dy.$$

Από την (5.6.6) έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,\varepsilon) (f(x-y,t-\varepsilon) - f(x-y,t)) dy \right| &\leq \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,\varepsilon) |f(x-y,t-\varepsilon) - f(x-y,t)| dy \\ &\leq M\varepsilon \int_{-\infty}^\infty \Phi(y,\varepsilon) dy = M\varepsilon \end{aligned}$$

και από την (5.5.3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty \Phi_s(y,\varepsilon) f(x-y,t) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^\infty \Phi_s(x-y,\varepsilon) f(y,t) dy = f(x,t).$$

Άρα,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} j_{3,\varepsilon} = f(x,t).$$

Συνδυάζοντας όλα τα ανωτέρω έχουμε,

$$v_t - c^2 v_{xx} = J_{1,\varepsilon} + J_{3,\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

άρα

$$v_t - c^2 v_{xx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (J_{1,\varepsilon} + J_{3,\varepsilon}) = f(x,t).$$

(iii) Από την (5.6.5)

$$|v(x,t)| \leq \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \Phi(x-y,t-s) |f(y,s)| dy ds \leq \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \Phi(x-y,t-s) M dy ds = Mt,$$

στέλνοντας το t στο 0 έχουμε το ζητούμενο. □

5.7 Ασκήσεις

Άσκηση 5.7.1. Προσδιορίστε τη λύση του κάτωθι προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών.

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & 2 \sin x - \sin 2x + 3 \sin 5x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Άσκηση 5.7.2. Προσδιορίστε τη λύση του κάτωθι προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών.

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{εάν } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \text{εάν } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases} \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Άσκηση 5.7.3. Έστω $c > 0$ και $u_1, u_2 \in C_1^2((0, \pi) \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty))$ λύσεις του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & \varphi_i(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου φ_i είναι συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_i(0) = \varphi_i(\pi) = 0$ για $i = 1, 2$ και $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$. Δείξτε ότι

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t) \quad \forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty).$$

Άσκηση 5.7.4. Έστω $u \in C_1^2((0, \pi) \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty))$, η οποία ικανοποιεί την

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = & 1, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$(1 - e^{-8t/\pi^2}) \frac{x(\pi - x)}{2} \leq u(t, x) \leq \frac{x(\pi - x)}{2} \quad \forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty).$$

Άσκηση 5.7.5. Έστω $c > 0$ και $u_1, u_2 \in C_1^2((0, \pi) \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty))$ λύσεις του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = & 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = & \varphi_i(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = & u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου φ_i είναι συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_i(0) = \varphi_i(\pi) = 0$ για $i = 1, 2$. Δείξτε ότι

$$\max_{x \in [0, \pi]} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in [0, \pi]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \quad \forall t \geq 0.$$

Κεφάλαιο 6

Εξίσωση Laplace

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή 3) είναι ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε $u \in C^2(\Omega)$ ο τελεστής Laplace συμβολίζεται με Δ και δίδεται από

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y), \text{ αν } n = 2 \quad \text{και} \quad \Delta u(x, y, z) = u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) \text{ αν } n = 3.$$

Αν $\Delta u = 0$ στο Ω , τότε η u καλείται **αρμονική** στο Ω . Τέλος αν η μη ομογενής εξίσωση $-\Delta u = h$ στο Ω , καλείται εξίσωση Poisson.

Στη συνέχεια θα λέμε ότι $f \in C(\partial\Omega)$ αν $f \in C(A)$ όπου A είναι μια ανοικτή περιοχή του $\partial\Omega$.

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε κυρίως τις αρμονικές εξισώσεις. Για το σκοπό αυτό, απαραίτητο εργαλείο είναι οι τύποι του Green, οι οποίοι παρουσιάζονται στην επόμενη υποενότητα.

6.1 Τύποι του Green

Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τους τύπους του Green οι οποίοι θα είναι χρήσιμοι για την συνέχεια. Οι τύποι αυτού είναι άμεση συνέπεια των θεωρημάτων απόκλισης.

Το επόμενο θεώρημα απόκλισης είναι μια επαναδιατύπωση του θεωρήματος του Green.

Θεώρημα 6.1.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό σύνολο με ομαλό σύνορο. Υποθέτουμε ότι $P, Q \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ και $F = (P, Q)$ τότε

$$(6.1.1) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot n ds,$$

όπου n συμβολίζει μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n στο $\partial\Omega$. Εδώ ds συμβολίζει το στοιχειώδες μήκος στο $\partial\Omega$.

Το επόμενο θεώρημα είναι το γνωστό Θεώρημα απόκλισης του Gauss

Θεώρημα 6.1.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό σύνολο με ομαλό σύνορο. Υποθέτουμε ότι $P, Q, R \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ και $F = (P, Q, R)$ τότε

$$(6.1.2) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz = \int_{\partial\Omega} F \cdot n dS,$$

όπου n συμβολίζει το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Εδώ dS συμβολίζει το στοιχειώδες εμβαδόν στο $\partial\Omega$.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε τους τύπους του Green.

Θεώρημα 6.1.3 (Τύποι του Green). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό σύνολο με ομαλό σύνορο. Συμβολίζουμε με n το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Υποθέτουμε ότι $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, τότε ισχύουν τα κάτωθι:

(i)

$$\int_{\Omega} \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

(ii)

$$(6.1.3) \quad \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx dy = - \int_{\Omega} v \Delta u dx dy + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

(iii)

$$(6.1.4) \quad \int_{\Omega} u \Delta v dx dy - \int_{\Omega} v \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

όπου $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ συμβολίζει την κατά κατεύθυνση παράγωγο.

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $F = \nabla u = (u_x, u_y)$, τότε $\operatorname{div} F = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$. Το επιθυμητό αποτέλεσμα έπεται από την (6.1.1).

(ii) Θέτουμε $F = v \nabla u = (v u_x, v u_y)$, τότε $\operatorname{div} F = v(u_{xx} + u_{yy}) + v_x u_x + v_y u_y = v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v$. Το επιθυμητό αποτέλεσμα έπεται από την (6.1.1).

(iii) Από το (ii) έχουμε

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx dy - \int_{\Omega} v \Delta u dx dy = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx dy + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx dy - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

το οποίο είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

Χρησιμοποιώντας την (6.1.2) αντί της (6.1.1) αποδεικνύουμε το ίδιο αποτέλεσμα στον \mathbb{R}^3 .

Θεώρημα 6.1.4 (Τύποι του Green). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό σύνολο με ομαλό σύνορο. Συμβολίζουμε με n το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Υποθέτουμε ότι $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, τότε ισχύουν τα κάτωθι:

(i)

$$\int_{\Omega} \Delta u dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

(ii)

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx dy dz = - \int_{\Omega} v \Delta u dx dy dz + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

(iii)

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx dy dz - \int_{\Omega} v \Delta u dx dy dz = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

όπου $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ συμβολίζει την κατά κατεύθυνση παράγωγο.

6.1.1 Ενεργειακή μέθοδος

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή 3) είναι ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό σύνολο με ομαλό σύνορο, $f \in C(\Omega)$ και $g \in C(\partial\Omega)$. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(6.1.5) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του Green για να δείξουμε ότι το πρόβλημα (6.1.5) έχει το πολύ μια λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Θα υποθέσουμε ότι $n = 2$. Η απόδειξη για $n = 3$ είναι ίδια και την παραλείπουμε.

Έστω ότι έχει δύο λύσεις $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, τότε η $w = u_1 - u_2$ ικανοποιεί την

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{στο } \Omega, \\ w = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Τότε από την (6.1.3) παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla w \, dx \, dy = - \int_{\Omega} w \Delta w \, dx \, dy + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n} \, ds = 0, \quad \forall w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}),$$

άρα $|\nabla w| = 0$. Τώρα αφού το Ω είναι συνεκτικό έπεται ότι για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega$ υπάρχει μια C^1 καμπύλη $c : [0, 1] \rightarrow \Omega$ με τύπο $c(t) = (x(t), y(t))$, έτσι ώστε $c(0) = (x_1, y_1)$ και $c(1) = (x_2, y_2)$. Τότε

$$w(x_2, y_2) - w(x_1, y_1) = \int_0^1 \frac{dw(c(t))}{dt} dt = \int_0^1 \nabla w((x(t), y(t))) \cdot c'(t) dt = 0.$$

άρα $w(x_2, y_2) = w(x_1, y_1)$ και επειδή $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega$ τυχόντα σημεία έπεται ότι η w είναι σταθερή στο Ω . Όμως $w = 0$ στο $\partial\Omega$, επομένως $w \equiv 0$.

Άσκηση 6.1.5. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό σύνολο με ομαλό σύνορο και $g \in C(\partial\Omega)$. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στο } \Omega, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

έχει το πολύ μια λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Αν υπάρχει $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε $v = g$ στο $\partial\Omega$, τότε

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, dy \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \, dy.$$

Λύση.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \, dy &= \int_{\Omega} |\nabla[(v-u) + u]|^2 \, dx \, dy = \int_{\Omega} |\nabla(v-u)|^2 \, dx \, dy + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, dy + 2 \int_{\Omega} \nabla(v-u) \cdot \nabla u \, dx \, dy \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \, dy + 2 \int_{\Omega} \nabla(v-u) \cdot \nabla u \, dx \, dy, \end{aligned}$$

άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\int_{\Omega} \nabla(v-u) \cdot \nabla u dx dy = 0$. Θα το δείξουμε χρησιμοποιώντας την (6.1.3). Πράγματι,

$$\int_{\Omega} \nabla(v-u) \nabla u dx dy = - \int_{\Omega} (v-u) \Delta u dx dy + \int_{\partial\Omega} (v-u) \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

□

6.2 Αρμονικές Συναρτήσεις

6.2.1 Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου

Θεώρημα 6.2.1 (Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και φραγμένο σύνολο και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

(i) Αν $-\Delta u \leq 0$ στο Ω τότε

$$u(x,y) \leq \max_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

(ii) Αν $-\Delta u \geq 0$ στο Ω τότε

$$u(x,y) \geq \min_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

(iii) Αν $-\Delta u = 0$ στο Ω τότε

$$\min_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) \leq u(x,y) \leq \max_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

Απόδειξη. (i) Επειδή το Ω είναι φραγμένο, υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $\bar{\Omega} \subset \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}$.

Έστω $\varepsilon > 0$, θέτουμε $w_{\varepsilon}(x,y) = u(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$, τότε

$$(6.2.1) \quad -\Delta w_{\varepsilon}(x,y) = -\Delta u(x,y) - 4\varepsilon \leq -4\varepsilon < 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Επειδή η w_{ε} είναι συνεχής στο Ω , υπάρχει $(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}) \in \Omega$ έτσι ώστε

$$w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}) = \max_{(x,y) \in \Omega} w_{\varepsilon}(x,y).$$

Υποθέτουμε ότι $(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}) \in \Omega$. Τότε υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $[x_{\varepsilon} - a, x_{\varepsilon} + a] \times [y_{\varepsilon} - a, y_{\varepsilon} + a] \subset \Omega$. Αφού η w_{ε} παίρνει μέγιστο στο $(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon})$, η συνάρτηση $g(x) = w_{\varepsilon}(x, y_{\varepsilon})$, παίρνει μέγιστο στο $x_{\varepsilon} \in (x_{\varepsilon} - a, x_{\varepsilon} + a)$, άρα $g'(x_{\varepsilon}) = 0$ και $g''(x_{\varepsilon}) \leq 0$ το οποίο είναι ισοδύναμο με $\frac{\partial w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon})}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial^2 w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon})}{\partial x^2} \leq 0$. Όμοια δείχνουμε ότι $\frac{\partial w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon})}{\partial y} = 0$ και $\frac{\partial^2 w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon})}{\partial y^2} \leq 0$. Άρα,

$$-\Delta w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}) \geq 0,$$

το οποίο αντιτίθεται στην (6.2.1). Επομένως, $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \partial\Omega$. Ειδικότερα, δείξαμε

$$u(x, t) + \varepsilon x^2 = w_\varepsilon(x, t) \leq \max_{(x, y) \in \partial\Omega} w_\varepsilon(x, y) = \max_{(x, y) \in \partial\Omega} (u(x, y) + \varepsilon x^2) \leq \max_{(x, y) \in \partial\Omega} u(x, y) + \varepsilon R^2 \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Στέλλοντας το ε στο 0, έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, δηλαδή

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (u(x, t) + \varepsilon x^2) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\max_{(x, y) \in \partial\Omega} u(x, y) + \varepsilon R^2) = \max_{(x, y) \in \partial\Omega} u(x, t) \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

(ii) Θέτουμε $v(x, y) = -u(x, y)$, τότε $-\Delta v(x, y) \leq 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$ και από το πρώτο μέρος του θεωρήματος παίρνουμε

$$-u(x, y) = v(x, y) \leq \max_{(x, y) \in \partial\Omega} v(x, y) = \max_{(x, y) \in \Omega} -u(x, y) = -\min_{(x, y) \in \Omega} u(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

(iii) Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των (i) και (ii). □

Όμοια αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.2 (Αρχή Μεγίστου Ελαχίστου). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ανοικτό και φραγμένο σύνολο και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(i) Αν $-\Delta u \leq 0$ στο Ω τότε

$$u(x, y, z) \leq \max_{(x, y, z) \in \partial\Omega} u(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \overline{\Omega}.$$

(ii) Αν $-\Delta u \geq 0$ στο Ω τότε

$$u(x, y, z) \geq \min_{(x, y, z) \in \partial\Omega} u(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \overline{\Omega}.$$

(iii) Αν $-\Delta u = 0$ στο Ω τότε

$$\min_{(x, y, z) \in \partial\Omega} u(x, y, z) \leq u(x, y, z) \leq \max_{(x, y, z) \in \partial\Omega} u(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \overline{\Omega}.$$

Μια εφαρμογή της αρχής μεγίστου ελαχίστου είναι η απόδειξη ότι το κάτωθι πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση.

Πρόταση 6.2.3. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή 3) ανοικτό και φραγμένο σύνολο, $f \in C(\Omega)$ και $g \in C(\partial\Omega)$. Τότε το πρόβλημα

$$(6.2.2) \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

έχει το πολύ μια λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε $n = 2$. Η απόδειξη για $n = 3$ είναι ίδια και την παραλείπουμε. Έστω ότι το πρόβλημα (6.2.2) έχει δύο λύσεις $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Τότε η $w = u_1 - u_2$ ικανοποιεί

$$\begin{cases} -\Delta w = 0, & \text{στο } \Omega, \\ w = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Από την αρχή μεγίστου ελαχίστου (Θεώρημα 6.2.1) έχουμε

$$0 = \min_{(x,y) \in \partial\Omega} w(x,y) \leq w(x,y) \leq \max_{(x,y) \in \partial\Omega} w(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \bar{\Omega},$$

άρα $w \equiv 0$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.2.2 Ιδιότητα της Μέσης Τιμής

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $r > 0$ τότε συμβολίζουμε με $D(\mathbf{x}_0, r)$ τον κυκλικό δίσκο με κέντρο \mathbf{x}_0 , δηλαδή

$$D(\mathbf{x}_0, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}.$$

Θεώρημα 6.2.4. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Έστω $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\bar{D}(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$. Αν η $u \in C^2(\Omega)$ είναι αρμονική στο Ω τότε

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(\mathbf{x}_0, r)} u(x, y) ds \quad \forall r \leq r_0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(\mathbf{x}_0, r)} u(x, y) ds$$

και $c(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) = (x(t), y(t))$. Τότε $c : [0, 2\pi] \rightarrow \partial D(\mathbf{x}_0, r)$ είναι μια 1-1 και επί καμπύλη και $c'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$. Επομένως $ds = \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt = r dt$ και

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt.$$

Επειδή $g(s, t) = u(x_0 + s \cos t, y_0 + s \sin t) \in C^1([0, r_0] \times [0, 2\pi])$, έχουμε

$$\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)}{\partial r} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) dt.$$

Τώρα το διάνυσμα $n(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial D(\mathbf{x}_0, r)$ στο σημείο $(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} (6.2.3) \quad \varphi'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{D(\mathbf{x}_0, r)} \Delta u dx dy = 0, \end{aligned}$$

επειδή $\Delta u = 0$ στο Ω . Άρα φ σταθερή στο $(0, r_0]$. Το οποίο συνεπάγει ότι

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \varphi(\varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \varrho \cos t, y_0 + \varrho \sin t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} u(x_0 + \varrho \cos t, y_0 + \varrho \sin t) dt = u(x_0, y_0),\end{aligned}$$

για κάθε $r \leq r_0$. Η προτελευταία ισότητα αποδεικνύεται ως εξής: Αρχικά παρατηρούμε ότι η $g(\varrho, t) = u(x_0 + \varrho \cos t, y_0 + \varrho \sin t) \in C^1([0, r_0] \times [0, 2\pi])$ και είναι φραγμένη στο $[0, r_0] \times [0, 2\pi]$. Επομένως,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} u(x_0 + \varrho \cos t, y_0 + \varrho \sin t) = u(x_0, y_0),$$

λόγω συνέχειας. Έτσι, μπορούμε να επικαλεστούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για να συμπεράνουμε ότι

$$(6.2.4) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \varrho \cos t, y_0 + \varrho \sin t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} u(x_0 + \varrho \cos t, y_0 + \varrho \sin t) dt.$$

□

Έστω $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ και $r > 0$ τότε συμβολίζουμε με $B(\mathbf{X}_0, r)$ την σφαίρα με κέντρο \mathbf{X}_0 , δηλαδή

$$B(\mathbf{X}_0, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}.$$

Όμοια αποδεικνύουμε.

Θεώρημα 6.2.5. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Έστω $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $B(\mathbf{X}_0, r_0) \subset \Omega$. Αν η $u \in C^2(\Omega)$ είναι αρμονική στο Ω τότε

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{X}_0, r)} u(x, y, z) dS \quad \forall r \leq r_0.$$

Τα τελευταία δύο θεωρήματα ισχύουν και αντίστροφα.

Θεώρημα 6.2.6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $u \in C^2(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$, ισχύει

$$(6.2.5) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(\mathbf{x}_0, r)} u(x, y) ds \quad \forall r \leq r_0.$$

Τότε η u είναι αρμονική στο Ω .

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η u δεν είναι αρμονική στο Ω . Άρα υπάρχει $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ τέτοιο ώστε $\Delta u(x_0, y_0) \neq 0$. Επομένως υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ και

$$\Delta u > 0 \quad \text{ή} \quad \Delta u < 0 \quad \text{στο} \quad D(\mathbf{x}_0, r).$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε $\Delta u > 0$ στο $D(\mathbf{x}_0, r)$. Από υπόθεση έχουμε

$$u(x_0, y_0) = \varphi(s) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(\mathbf{x}_0, s)} u(x, y) ds \quad \forall s \leq r,$$

άρα από την (6.2.3) παίρνουμε

$$0 = \varphi'(s) = \int_{D(\mathbf{x}_0, s)} \Delta u dx dy > 0.$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Όμοια αποδεικνύουμε

Θεώρημα 6.2.7. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $u \in C^2(\Omega)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{B(\mathbf{X}_0, r)} \subset \Omega$, ισχύει

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(\mathbf{X}_0, r)} u(x, y, z) dS \quad \forall r \leq r_0.$$

Τότε u είναι αρμονική στο Ω .

Τέλος η ιδιότητα της μέσης τιμής ισχύει για του κυκλικούς δίσκους και τις σφαίρες αντίστοιχα.

Θεώρημα 6.2.8. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Έστω $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D(\mathbf{x}_0, r)} \subset \Omega$. Αν $u \in C^2(\Omega)$ είναι αρμονική στο Ω τότε

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(\mathbf{x}_0, r)} u(x, y) dx dy \quad \forall r \leq r_0.$$

Απόδειξη. Γράφουμε, το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(\mathbf{x}_0, r)} u(x, y) dx dy &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_{\partial D(\mathbf{x}_0, \rho)} u(x, y) ds d\rho \\ (\text{από (6.2.5)}) &= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi \rho u(x_0, y_0) d\rho = u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6.2.9. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Έστω $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{B(\mathbf{X}_0, r)} \subset \Omega$. Αν $u \in C^2(\Omega)$ είναι αρμονική στο Ω τότε

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{B(\mathbf{X}_0, r)} u(x, y, z) dx dy dz \quad \forall r \leq r_0.$$

6.2.3 Ισχυρή Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου

Θεώρημα 6.2.10 (Ισχυρή Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ή 3) είναι ένα ανοικτό και φραγμένο συνεκτικό σύνολο. Υποθέτουμε ότι $n u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ είναι αρμονική στο Ω . Αν n συνάρτηση u παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο Ω , τότε είναι σταθερή.

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε μόνο για $n = 2$ η απόδειξη για $n = 3$ είναι ίδια και παραλείπεται. Υποθέτουμε ότι παίρνει μέγιστο στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, δηλαδή

$$u(x_0, y_0) = \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} u(x, y).$$

Έστω $r > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D(\mathbf{x}_0, r)} \subset \Omega$. Όποτε από την ιδιότητα της μέσης τιμής έχουμε

$$0 = M - u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(\mathbf{x}_0, r)} M - u(x, y) dx dy,$$

και επειδή $M \geq u(x, y)$ στο $\bar{\Omega}$, έχουμε $u = M$ στο $D(\mathbf{x}_0, r)$.

Έστω $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, επειδή το Ω συνεκτικό και φραγμένο, έπεται ότι υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_i \in \Omega$ $i = 0, \dots, k$ και $s > 0$ τέτοια ώστε

$$\overline{D(\mathbf{x}_i, s)} \subset \Omega \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\} \quad \mathbf{x}_{i+1} \in D(\mathbf{x}_i, s) \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{x}}$$

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης έχουμε $u(\mathbf{x}_1) = M$ άρα $u = M$ στο $D(\mathbf{x}_1, s)$, όμως $u(\mathbf{x}_2) = M$ επειδή $\mathbf{x}_2 \in D(\mathbf{x}_1, s)$, άρα $u = M$ στο $D(\mathbf{x}_2, s)$. Συνεχίζοντας ομοίως έχουμε ότι $u = M$ στο $D(\mathbf{x}_{k-1}, s)$, όμως $\tilde{\mathbf{x}} \in D(\mathbf{x}_{k-1}, s)$, άρα $u(\tilde{\mathbf{x}}) = M$. Επειδή το $\tilde{\mathbf{x}}$ τυχόν έχουμε ότι $n u$ είναι σταθερή στο Ω .

Αν $n u$ παίρνει ελάχιστο στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, τότε $n -u$ παίρνει μέγιστο στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ και επομένως είναι σταθερή στο Ω . \square

6.3 Η εξίσωση Laplace στο ορθογώνιο

Σε αυτήν την υποενότητα θα λύσουμε την εξίσωση Laplace στο ορθογώνιο $[0, a] \times [0, b]$ με την μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(6.3.1) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & y \in [0, b], \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, a], \end{cases}$$

Ψάχνουμε την γενική λύση $u \in C^2([0, a] \times [0, b])$ της μορφής

$$(6.3.2) \quad u(x, y) = X(x)Y(y), \quad (x, y) \in [0, a] \times [0, b].$$

Προφανώς θα θέλαμε $u \neq 0$, άρα θα υπάρχει $(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$ ώστε $X(x_0)Y(y_0) \neq 0$. Επομένως, $n u$ ικανοποιεί

$$(6.3.3) \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0, \quad (x, y) \in (0, a) \times (0, b).$$

Επειδή $Y(y_0) \neq 0$, έπεται

$$X''(x) = -\frac{Y''(y_0)}{Y(y_0)}X(x), \quad x \in (0, a).$$

Από τις συνοριακές συνθήκες στο (6.3.1), έχουμε $X(0)Y(y_0) = X(a)Y(y_0) = 0 \Leftrightarrow X(0) = X(a) = 0$. Τώρα, θέτουμε $\lambda = -\frac{Y''(y_0)}{Y(y_0)}$ και θέλουμε να βρούμε μια μη τετριμμένη λύση του προβλήματος

$$(6.3.4) \quad \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, & x \in (0, a) \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases}$$

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το λ .

i) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (6.3.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Επειδή $X(0) = X(a) = 0$, έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα απορρίπτεται αυτή η περίπτωση γιατί οδηγούμαστε μόνο στη τετριμμένη λύση.

ii) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (6.3.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Επειδή $X(0) = X(a) = 0$, έπεται ότι $c_1 = c_2 = 0$. Άρα απορρίπτεται κι αυτή η περίπτωση γιατί οδηγούμαστε μόνο στη τετριμμένη λύση.

iii) Υποθέτουμε ότι $\lambda < 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (6.3.4) δίδεται από

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{|\lambda|x} + c_2 \sin \sqrt{|\lambda|x}.$$

Επειδή $X(0) = 0$, έπεται ότι $c_1 = 0$. Από την $X(a) = 0$, έπεται $X(a) = c_2 \sin \sqrt{|\lambda|}a = 0$. Επομένως για να μην οδηγηθούμε στην τετριμμένη λύση θα θέλαμε $c_2 \neq 0$ και

$$\sin \sqrt{|\lambda|}a = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{a} \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2.$$

Άρα η λύση που κρατάμε είναι $X(x) = c_2 \sin \frac{k\pi x}{a}$.

Για $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, από την (6.3.3) και (6.3.4), παίρνουμε

$$Y'' + \frac{X''(x_0)}{X(x_0)} Y(y) = 0 \Leftrightarrow Y''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y(y) = 0, \quad y \in (0, b).$$

$$= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$$

Γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης δίδεται από $Y(y) = b_1 e^{\frac{k\pi y}{a}} + b_2 e^{-\frac{k\pi y}{a}}$. Επειδή

$$X(x_0)Y(0) = 0 \Leftrightarrow Y(0) = 0,$$

έπεται $b_1 = -b_2$

Συνοψίζοντας, κάθε διαχωρίσιμη λύση (separable solution) της (6.3.1), δηλαδή της μορφής (6.3.2), δίδεται από

$$u(x, t) = b_1 \left(e^{\frac{k\pi y}{a}} - e^{-\frac{k\pi y}{a}} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} = 2b_1 \sinh \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N}.$$

Από τη γραμμικότητα της εξίσωσης Laplace μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k \sinh \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

είναι λύση της (6.3.1) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 6.3.1.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = & 0, & (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi), \\ u(0, y) = u(\pi, y) = & 0, & y \in [0, 2\pi], \\ u(x, 0) = & 0 & x \in [0, \pi], \\ u(x, 2\pi) = & 3 \sin x - 5 \sin 2x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Λύση. Ψάχνουμε λύση της μορφής

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k \sinh ky \sin kx.$$

Οπότε

$$u_n(x, 2\pi) = \sum_{k=1}^n a_k \sinh 2k\pi \sin kx = 3 \sin x - 5 \sin 2x.$$

Άρα $a_1 = 3/\sinh 2\pi$ και $a_2 = -5/\sinh 4\pi$ και $a_k = 0$ για $k \neq 1, 2$. Επομένως η λύση δίδεται από

$$u(x, y) = \frac{3 \sinh y \sin x}{\sinh 2\pi} - \frac{5 \sinh 2y \sin 2x}{\sinh 4\pi}.$$

Τώρα θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$(6.3.5) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = & 0, & (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \\ u(0, y) = u(a, y) = & 0, & y \in [0, b], \\ u(x, 0) = & 0, & x \in [0, a], \\ u(x, b) = & f(x), & x \in [0, a], \end{cases}$$

όπου $f \in C^1([0, a])$ και

$$f(0) = f(a) = 0,$$

για λόγους συμβατότητας. Θέτουμε $\varphi(y) = f\left(\frac{ya}{\pi}\right) \forall y \in [0, \pi]$. Συμβολίζουμε με φ_{ext} την περιττή και 2π -περιοδική επέκταση της φ (δες υποενότητα 4.5). Αφού φ_{ext} είναι περιττή έχουμε

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}(y) \cos ky dy = 0 \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

και

$$\begin{aligned} b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}(y) \sin ky dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{ext}(y) \sin ky dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin ky dy \\ &\quad (\text{θέτουμε } x = \frac{ya}{\pi}) = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin k \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin k \frac{\pi x}{a} dx \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Άρα, επειδή $\varphi_{ext} \in C^1(\mathbb{R})$, από το Θεώρημα α'.0.5, έχουμε

$$\varphi_{ext}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin ky,$$

ομοιόμορφα στο \mathbb{R} . Επομένως

$$f(x) = \varphi_{ext}\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right),$$

ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Από την ανισότητα Bessel (α'.0.2) και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $x = \frac{ya}{\pi}$ έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{ext}^2 dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_{ext}^2 dy = \frac{2}{a} \int_0^a f^2(x) dx.$$

άρα $b_k \rightarrow 0$ το οποίο συνεπάγει την ύπαρξη $M > 0$ έτσι ώστε

$$|b_k| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον, όπως την (5.1.7), μπορούμε να δείξουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty.$$

Θέτουμε

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\sinh \frac{k\pi y}{a}}{\sinh \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$0 \leq \frac{\sinh \frac{k\pi y}{a}}{\sinh \frac{k\pi b}{a}} \leq \frac{e^{-\frac{k\pi(b-y)}{a}} - e^{-\frac{k\pi b+y}{a}}}{1 - e^{-\frac{2k\pi b}{a}}} \leq \frac{e^{-\frac{k\pi(b-y)}{a}}}{1 - e^{-\frac{2\pi b}{a}}}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $0 < y < b - \varepsilon$. Τότε έχουμε

$$\left| b_k \frac{\sinh \frac{k\pi y}{a}}{\sinh \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a} \right| \leq \frac{M e^{-\frac{k\pi \varepsilon}{a}}}{1 - e^{-\frac{2\pi b}{a}}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{Mk^m e^{-\frac{k\pi\epsilon}{a}}}{1 - e^{-\frac{2\pi b}{a}}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{Mk^m e^{-\frac{k\pi\epsilon}{a}}}{1 - e^{-\frac{2\pi b}{a}}}} e^{-\frac{k\pi\epsilon}{a}} = e^{-\frac{k\pi\epsilon}{a}} < 1, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Mk^m e^{-\frac{k\pi\epsilon}{a}}}{1 - e^{-\frac{2\pi b}{a}}}$$

συγκλίνει για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα του Weierstrass και ακολουθώντας το ίδιο επιχείρημα με εκείνο στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2, μπορούμε να δείξουμε το κάτωθι αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.3.2. Το πρόβλημα (6.3.5) έχει λύση $u \in C^l([0, a] \times [0, b)) \cap C([0, a] \times [0, b])$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$, n οποια δίδεται από την

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh \frac{k\pi y}{a}}{\sinh \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

όπου

$$b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin k \frac{\pi x}{a} dx \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \text{ ομοιόμορφα στο } [0, a].$$

Τέλος για κάθε $n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύει

$$\frac{\partial^{n+m} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} \left(b_k \frac{\sinh \frac{k\pi y}{a}}{\sinh \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a} \right)}{\partial x^n \partial y^m} \quad \forall (x, y) \in [0, a] \times [0, b)$$

και ομοιόμορφα στο $[0, a] \times [0, b - \epsilon]$ για κάθε $\epsilon \in (0, b)$.

6.4 Η εξίσωση Laplace στο δίσκο

Σε αυτήν την υποενότητα θα λύσουμε την εξίσωση Laplace στο δίσκο $D(\mathbf{0}, a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$ με την μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$(6.4.1) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } D(\mathbf{0}, a), \\ u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) & (\xi, \eta) \in \partial D(\mathbf{0}, a). \end{cases}$$

Θέτουμε $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ για $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$. Τότε

$$(6.4.2) \quad f(\xi, \eta) = f(a \cos \theta, a \sin \theta) =: g(\theta) \quad \forall (x, y) \in \partial D(\mathbf{0}, a).$$

Επίσης, από τον κανόνα της αλυσίδας μπορούμε να δείξουμε ότι αν u είναι λύση του προβλήματος (6.4.1), τότε η $v(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ είναι λύση του προβλήματος

$$(6.4.3) \quad \begin{cases} v_{rr} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\theta\theta}}{r^2} = 0, & (r, \theta) \in (0, a) \times \mathbb{R}, \\ v(a, \theta) = g(\theta) & \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Από την (6.4.2) είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η g είναι 2π -περιοδική. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Ψάχνουμε την γενική λύση της εξίσωσης στην (6.4.3), η οποία ανήκει στο $C^2([0, a] \times \mathbb{R})$, είναι 2π -περιοδική ως προς θ και είναι της μορφής

$$(6.4.4) \quad v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (r, \theta) \in [0, a] \times \mathbb{R}.$$

Προφανώς θα θέλαμε $v \not\equiv 0$, άρα θα υπάρχει $(r_0, \theta_0) \in (0, a) \times \mathbb{R}$ ώστε $R(r_0)\Theta(\theta_0) \neq 0$. Επομένως, η v ικανοποιεί

$$(6.4.5) \quad R''(r)\Theta(\theta) + r^{-1}R'(r)\Theta(\theta) + r^{-2}R(r)\Theta''(\theta) = 0, \quad (r, \theta) \in (0, a) \times \mathbb{R}.$$

Επειδή $R(r_0) \neq 0$, έπεται

$$\Theta''(\theta) = -\frac{R''(r_0) + r_0^{-1}R'(r_0)}{R(r_0)}\Theta(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Τώρα, θέτουμε $\lambda = -\frac{R''(r_0) + r_0^{-1}R'(r_0)}{R(r_0)}$ και θέλουμε να βρούμε μια **μη τετριμμένη λύση** και 2π -περιοδική λύση στο πρόβλημα

$$(6.4.6) \quad \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για το λ .

i) Υποθέτουμε ότι $\lambda > 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (6.4.6) δίδεται από

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\theta} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\theta}.$$

Απορρίπτεται γιατί δεν είναι 2π -περιοδική.

ii) Υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (6.3.4) δίδεται από

$$\Theta(x) = c_1 \theta + c_2.$$

Επειδή θα πρέπει να είναι 2π -περιοδική, έπεται ότι $c_1 = 0$.

iii) Υποθέτουμε ότι $\lambda < 0$. Τότε η λύση της εξίσωσης στην (6.3.4) δίδεται από

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \sqrt{|\lambda|}\theta + c_2 \sin \sqrt{|\lambda|}\theta.$$

Επειδή θα πρέπει να είναι 2π -περιοδική, έχουμε

$$\sqrt{|\lambda|}2\pi = 2k\pi \quad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lambda = -k^2.$$

Άρα η λύση που κρατάμε είναι $\Theta(\theta) = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta$. Για $\lambda = -k^2$ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, από την (6.4.5) και (6.4.6), παίρνουμε

$$R''(r) + r^{-1}R'(r) + \underbrace{\frac{\Theta''(\theta_0)}{\Theta(\theta_0)}}_{=-k^2} r^{-2}R(r) = 0 \Leftrightarrow R''(r) + r^{-1}R'(r) - k^2 r^{-2}R(r) = 0, \quad r \in (0, a).$$

Γενική λύση της τελευταίας εξίσωσης δίδεται από $R(r) = b_1 r^k + b_2 r^{-k}$ αν $k \neq 0$ και $R(r) = b_2 \ln r + b_1$ αν $k = 0$. Επειδή θέλουμε την λύση φραγμένη $b_2 = 0$. Συνοψίζοντας, κάθε διαχωρίσιμη λύση (separable solution) της (6.4.3), η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις μας, δίδεται από

$$v(r, \vartheta) = r^k (c_1 \cos k\vartheta + c_2 \sin k\vartheta), \quad \text{για κάποιο } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Από τη γραμμικότητα της εξίσωσης Laplace μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η

$$v_n(r, \vartheta) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n r^k (\tilde{a}_k \cos k\vartheta + \tilde{b}_k \sin k\vartheta),$$

είναι λύση της (6.4.3) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τώρα, από το Θεώρημα α'.0.5, έχουμε

$$g(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) \quad \text{ομοιόμορφα στο } \mathbb{R},$$

όπου

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{και} \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta) \sin k\vartheta d\vartheta \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Άρα θα θέλαμε η λύση να έχει την μορφή

$$v(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

για να ικανοποιεί την

$$v(a, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) = g(\vartheta).$$

Δουλεύοντας όπως τα Θεωρήματα 5.1.2 και 6.3.2, μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.4.1. Το πρόβλημα (6.4.3) έχει λύση $v \in C^l([0, a] \times \mathbb{R}) \cap C([0, a] \times \mathbb{R})$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$, η οποία δίδεται από την

$$(6.4.7) \quad v(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta),$$

όπου

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta) \cos k\vartheta d\vartheta \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{και} \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\vartheta) \sin k\vartheta d\vartheta \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Τέλος για κάθε $n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ισχύει

$$\frac{\partial^{n+m} v(r, \vartheta)}{\partial r^n \partial \vartheta^m} = \frac{\partial^{n+m} \frac{a_0}{2}}{\partial r^n \partial \vartheta^m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^{n+m} \left(\left(\frac{r}{a} \right)^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) \right)}{\partial r^n \partial \vartheta^m} \quad \forall (r, \vartheta) \in [0, a) \times \mathbb{R}$$

και ομοιόμορφα στο $[0, a - \varepsilon] \times \mathbb{R}$ για κάθε $\varepsilon \in (0, a)$.

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε την σειρά μέσω μιας συνέλιξης με τον πυρήνα Poisson στο δίσκο. Ειδικότερα, γράφουμε

$$a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) (\cos k\varphi \cos k\vartheta + \sin k\varphi \sin k\vartheta) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos k(\varphi - \vartheta) d\varphi.$$

Άρα

$$(6.4.8) \quad v(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) d\varphi.$$

Τώρα λαμβάνοντας υπόψιν ότι η g είναι φραγμένη στο $[0, 2\pi]$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Weierstrass ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi]} \left| \sum_{k=1}^n g(\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) - \sum_{k=1}^{\infty} g(\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) \right| = 0, \quad \forall (r, \vartheta) \in [0, a) \times [0, 2\pi].$$

Επομένως,

$$(6.4.9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} g(\varphi) \left(\frac{r}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) d\varphi.$$

Έτσι από τις (6.4.8) και (6.4.9) έπεται,

$$v(r, \vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^k \cos k(\varphi - \vartheta) \right) d\varphi.$$

Τώρα γράφουμε, $\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ και έστω $0 \leq t < 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos kx &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} t^k (e^{ikx} + e^{-ikx}) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k e^{-ikx} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{te^{ix}}{1 - te^{ix}} + \frac{te^{-ix}}{1 - te^{-ix}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{|1 - te^{-ix}|^2}. \end{aligned}$$

Για $t = \frac{r}{a}$ και $x = \varphi - \vartheta$, έχουμε

$$\frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2}{\left| 1 - \frac{r}{a} e^{-i(\varphi - \vartheta)} \right|^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2 - r^2}{|ae^{i\varphi} - re^{i\vartheta}|^2}.$$

Άρα,

$$v(r, \vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{a^2 - r^2}{|ae^{i\varphi} - re^{i\vartheta}|^2} d\varphi.$$

Οπότε, για $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, $\xi = a\cos\vartheta$, $n = a\sin\vartheta$ και $g(\vartheta) = f(a\cos\vartheta, a\sin\vartheta) = f(\xi, n)$ το από πάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γίνεται

$$(6.4.10) \quad u(x, y) = v(r, \vartheta) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2a\pi} \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} \frac{f(\xi, n)}{|x - \xi|^2 + |y - n|^2} ds(\xi, n).$$

Η συνάρτηση

$$P((x, y), (\xi, n)) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{2a\pi(|x - \xi|^2 + |y - n|^2)} \quad \text{για } (x, y) \in D(\mathbf{0}, a) \text{ και } (\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a)$$

λέγεται πυρήνας Poisson.

Παρατήρηση 6.4.2. Για $g \equiv 1$ στην (6.4.7), έχουμε $v(r, \vartheta) = 1$. Έτσι από την (6.4.10) έπεται ότι

$$(6.4.11) \quad \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} P((x, y), (\xi, n)) ds(\xi, n) = 1.$$

Τέλος δεν είναι δύσκολο να δείξουμε

$$P_{xx}((x, y), (\xi, n)) + P_{yy}((x, y), (\xi, n)) = 0 \quad \forall (x, y) \in D(\mathbf{0}, a) \text{ και } (\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a).$$

Πριν διατυπώσουμε το επόμενο

Θεώρημα 6.4.3. Έστω $a > 0$ και $g \in C(\partial D(\mathbf{0}, a))$. Τότε η συνάρτηση $u : D(\mathbf{0}, a) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$u(x, y) = \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} P((x, y), (\xi, n)) g(\xi, n) ds(\xi, n)$$

ικανοποιεί:

(i) $u \in C^\infty(D(\mathbf{0}, a))$ και για κάθε $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ισχύει

$$(6.4.12) \quad \frac{\partial^{n+m} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} g(\xi, n) \frac{\partial^{n+m} P((x, y), (\xi, n))}{\partial x^n \partial y^m} ds(\xi, n) \quad \forall (x, y) \in D(\mathbf{0}, a).$$

(ii) $\Delta u = 0$ στο $D(\mathbf{0}, a)$.

(iii)

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (\xi, n) \\ (x, y) \in D(\mathbf{0}, a)}} u(x, y) = g(\xi, n) \quad \forall (\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a).$$

Απόδειξη. (i) Έστω $(\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a)$, $(x, y) \in D(\mathbf{0}, a)$ και $|h| \in (0, \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{2})$. Επειδή η g είναι συνεχής σε μια περιοχή του $\partial\Omega$ έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|g(\xi, n)| \leq M \forall (\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a)$.

Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$(6.4.13) \quad \begin{aligned} \sqrt{(x+h-\xi)^2 + (y-n)^2} &\geq \sqrt{\xi^2 + n^2} - \sqrt{(x+h)^2 + y^2} = a - \sqrt{(x+h)^2 + y^2} \\ &\geq a - \sqrt{x^2 + y^2} - |h| \geq \frac{a - \sqrt{x^2 + y^2}}{2}. \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$(6.4.14) \quad \frac{\partial P((x, y), (\xi, n))}{\partial x} = -\frac{x}{a\pi(|x-\xi|^2 + |x-n|^2)} - \frac{(a^2 - x^2 - y^2)(x-\xi)}{a\pi(|x-\xi|^2 + |y-n|^2)^2}.$$

Από την (6.4.13) για $h = 0$ έχουμε ότι $\sqrt{|x-\xi|^2 + |x-n|^2} \geq a - \sqrt{x^2 + y^2}$. Επομένως,

$$\left| \frac{x}{a\pi(|x-\xi|^2 + |x-n|^2)} \right| \leq \frac{\overbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}^{<a}}{a\pi(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2} \leq \frac{1}{\pi(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

και

$$(6.4.15) \quad \begin{aligned} \left| \frac{(a^2 - x^2 - y^2)(x-\xi)}{a\pi(|x-\xi|^2 + |y-n|^2)^2} \right| &\leq \left| \frac{(a - \sqrt{x^2 + y^2})(a + \overbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}^{<a})\sqrt{|x-\xi|^2 + |y-n|^2}}{a\pi(|x-\xi|^2 + |y-n|^2)^2} \right| \\ &\leq \frac{2(a - \sqrt{x^2 + y^2})}{\pi(|x-\xi|^2 + |y-n|^2)^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2}{\pi(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2}. \end{aligned}$$

Από την (6.4.14)-(6.4.15) έχουμε ότι

$$\left| \frac{\partial P((x, y), (\xi, n))}{\partial x} \right| \leq \frac{3}{\pi(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2} \quad (x, y) \in D(\mathbf{0}, a) \text{ και } (\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a).$$

Επιπλέον, από το θεώρημα μέσης τιμής, την τελευταία ανισότητα και την (6.4.13) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left| g(\xi, n) \frac{P((x+h, y), (\xi, n)) - P((x, y), (\xi, n))}{h} \right| &= \left| g(\xi, n) \frac{\partial P((x+\tilde{h}, y), (\xi, n))}{\partial x} \right| \\ &\leq \frac{3M}{\pi(a - \sqrt{(x+\tilde{h})^2 + y^2})^2} \leq \frac{12M}{\pi(a - \sqrt{(x+\tilde{h})^2 + y^2})^2}, \end{aligned}$$

για κάποιο $|\tilde{h}| \in (0, |h|)$.

Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για να συμπεράνουμε

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} g(\xi, n) \frac{P((x+h, y), (\xi, n)) - P((x, y), (\xi, n))}{h} ds(\xi, n) \\ &= \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} g(\xi, n) \frac{\partial P((x, y), (\xi, n))}{\partial x} ds(\xi, n). \end{aligned}$$

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\frac{\partial^{n+m} u(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} g(\xi, n) \frac{\partial^{n+m} P((x, y), (\xi, n))}{\partial x^n \partial y^m} ds(\xi, n) \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(ii) Από την (6.4.12) έχουμε

$$\Delta u(x, y) = \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} g(\xi, n) \underbrace{(P_{xx}((x, y), (\xi, n)) + P_{yy}((x, y), (\xi, n)))}_{=0} ds(\xi, n) = 0 \quad \forall (x, y) \in D(\mathbf{0}, a).$$

(iii) Έστω $(\xi_0, n_0) \in \partial D(\mathbf{0}, a)$ και $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - \xi_0|^2 + |y - n_0|^2 < \delta_1^2$ και $(x, y) \in \partial D(\mathbf{0}, a)$ να ισχύει

$$|u(x, y) - g(\xi_0, \psi_0)| < \varepsilon.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι επειδή n g συνεχής στο (ξ_0, n_0) υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $(\xi, n) \in D((\xi_0, n_0), \delta) = \{(\xi, n) \in \mathbb{R}^2 : |\xi - \xi_0|^2 + |n - n_0|^2 < \delta\}$ να ισχύει

$$(6.4.16) \quad |g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)| < \varepsilon.$$

Από την (6.4.11), για κάθε $(x, y) \in D((\xi_0, n_0), \frac{\delta}{2}) \cap D(\mathbf{0}, a)$, έχουμε

$$\begin{aligned} |u(x, y) - g(\xi_0, \psi_0)| &= \left| \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} P((x, y), (\xi, n)) (g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)) ds(\xi, n) \right| \\ &\leq \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} P((x, y), (\xi, n)) |g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)| ds(\xi, n) \\ (6.4.17) \quad &= \int_{\partial D(\mathbf{0}, a) \cap D((\xi_0, n_0), \delta)} P((x, y), (\xi, n)) |g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)| ds(\xi, n) \\ &\quad + \int_{\partial D(\mathbf{0}, a) \setminus D((\xi_0, n_0), \delta)} P((x, y), (\xi, n)) |g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)| ds(\xi, n). \end{aligned}$$

Επίσης, από την (6.4.16) και (6.4.11) προκύπτει

$$\begin{aligned} (6.4.18) \quad \int_{\partial D(\mathbf{0}, a) \cap D((\xi_0, n_0), \delta)} P((x, y), (\xi, n)) |g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)| ds(\xi, n) &\leq \varepsilon \int_{\partial D(\mathbf{0}, a) \cap D((\xi_0, n_0), \delta)} P((x, y), (\xi, n)) ds(\xi, n) \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial D(\mathbf{0}, a)} P((x, y), (\xi, n)) ds(\xi, n) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Τώρα, από την τριγωνική ανισότητα για κάθε $(\xi, n) \in \partial D(\mathbf{0}, a) \setminus D((\xi_0, n_0), \delta)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta &\leq \sqrt{|\xi - \xi_0|^2 + |n - n_0|^2} = \sqrt{|\xi - x + x - \xi_0|^2 + |n - y + y - n_0|^2} \\ &\leq \sqrt{|\xi - x|^2 + |n - y|^2} + \sqrt{|x - \xi_0|^2 + |y - n_0|^2} \\ &\leq \sqrt{|\xi - x|^2 + |n - y|^2} + \frac{\delta}{2},\end{aligned}$$

από όπου συνεπάγεται $\frac{\delta}{2} \leq \sqrt{|\xi - x|^2 + |n - y|^2}$ και

$$\begin{aligned}P((x, y), (\xi, n)) &\leq 2 \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a\delta^2} = 2 \frac{(\sqrt{\xi_0^2 + n_0^2} - \sqrt{x^2 + y^2})(\sqrt{\xi_0^2 + n_0^2} + \sqrt{x^2 + y^2})}{a\delta^2} \\ &\leq 4 \frac{\sqrt{|\xi_0 - x|^2 + |n_0 - y|^2}}{\pi} < \frac{\varepsilon}{2\pi aM},\end{aligned}$$

εφόσον $\sqrt{|\xi_0 - x|^2 + |n_0 - y|^2} < \delta_1 = \min(\delta, \frac{\varepsilon}{8aM})$. Από τη τελευταία ανισότητα προκύπτει

$$(6.4.19) \quad \int_{\partial D(0, a) \setminus D((\xi_0, n_0), \delta)} P((x, y), (\xi, n)) |g(\xi, n) - g(\xi_0, n_0)| ds(\xi, n) \leq \frac{\varepsilon}{2a\pi} \int_{\partial D(0, a) \setminus D((\xi_0, n_0), \delta)} ds(\xi, n) \leq \varepsilon.$$

Από τις (6.4.17), (6.4.18) και (6.4.19) έπεται το ζητούμενο. □

6.5 Θεμελιώδης Λύση

Στη συνέχεια, ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ θα έχει την μορφή $x = (x_1, \dots, x_n)$. Επίσης θα συμβολίζουμε την ακτίνα με $r^2 = |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Αν $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ θα γράφουμε $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \dots + u_{x_n x_n}$ και $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$. Τέλος n μπάλα στον \mathbb{R}^n με κέντρο x_0 και ακτίνα $r > 0$ ορίζεται από

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Τώρα, θα θέλαμε να βρούμε μια ακτινικά συμμετρική λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ της εξίσωσης:

$$\Delta u = 0 \quad \text{στο } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Δηλαδή ψάχνουμε λύση της μορφής $v(r) = u(x)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}u_{x_i} &= v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \\ u_{x_i x_i} &= v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).\end{aligned}$$

Άρα,

$$(6.5.1) \quad 0 = \Delta u = v''(r) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Έπειτα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) $n = 2$. Τότε η εξίσωση (6.5.1) γίνεται

$$(rv'(r))' = 0 \Leftrightarrow v(r) = a \log r + b,$$

για κάποιες σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $n \geq 3$. Τότε η εξίσωση (6.5.1) γίνεται

$$(r^{n-1}v'(r))' = 0 \Leftrightarrow v(r) = \frac{A}{r^{n-2}} + B,$$

για κάποιες σταθερές $A, B \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 6.5.1. Η συνάρτηση

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{αν } n = 2, \\ \frac{1}{4\pi} |x|^{-1}, & \text{αν } n = 3, \end{cases}$$

θα λέγεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace.

Έστω $n = 2$ ή 3 , $r > 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα (αν υπάρχει) για κάθε $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r))$ με

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r)} f(y) dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{B(0, M) \setminus B(x_0, r)} f(y) dy.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι, αν υπάρχει το τελευταίο ολοκλήρωμα τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r)} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{B(x, M) \setminus B(x_0, r)} f(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 6.5.2. Έστω n $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ έχει συμπαγή φορέα στο \mathbb{R}^n . Τότε η συνάρτηση $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ n οποία δίδεται από

$$v(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, r)} \Phi(x-y) f(y) dy$$

ικανοποιεί:

(i) $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\Delta u = f(x)$ στο \mathbb{R}^n .

Απόδειξη. Θα το αποδείξουμε μόνο για $n = 2$. Για $n \geq 3$, η απόδειξη είναι όμοια και παραλείπεται.

(i) Αφού η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ έχει συμπαγή φορέα στο \mathbb{R}^2 σημαίνει ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε

$$(6.5.2) \quad f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x, y) = f_{x_2}(x, y) = f_{x_1 x_1}(x, y) = f_{x_2 x_2}(x, y) = 0 \quad \text{αν } x_1^2 + x_2^2 > R^2.$$

Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$(6.5.3) \quad |f(x_1, x_2)| + |f_{x_1}(x_1, x_2)| + |f_{x_2}(x_1, x_2)| + |f_{x_1 x_1}(x_1, x_2)| + |f_{x_2 x_2}(x_1, x_2)| \leq M \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Επίσης, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών ως προς $Y = x - y$ έχουμε

$$v(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,r)} \Phi(Y) f(x - Y) dY dS = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,r)} \Phi(y) f(x - y) dy ds.$$

Έστω $0 < |h| < 1$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $0 < |s| < |h|$ έτσι ώστε

$$(6.5.4) \quad \left| \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} \right| = |f_{x_1}(x_1 + s, x_2)| \leq M \chi_{\overline{B(0, R+1)}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\chi_{B(0, R+1)}(x) = 1$ αν $x \in \overline{B(0, R+1)}$ και $\chi_{B(0, R+1)}(x) = 0$ αλλιώς. Επιπλέον, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$(6.5.5) \quad |f_{x_1}(x_1 + s, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2)| \leq \varepsilon \chi_{B(0, R+1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{και} \quad |s| < \delta_1.$$

Επομένως, από τις (6.5.4) και (6.5.5) έπεται

$$\left| \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} - f_{x_1}(x_1, x_2) \right| \leq \varepsilon \chi_{B(0, R+1)}(x),$$

για κάθε $0 < |h| < \delta_1$. Οπότε, για $H = (h, 0)$ με $0 < |h| < \delta_1$, έχουμε

$$\begin{aligned} & \left| \frac{v(x_1 + h, x_2 + h) - v(x, t)}{h} - \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y) f_{x_1}(x - y) dy \right| \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y) \left(\frac{f(x + H - y) - f(x - y)}{h} - f_{x_1}(x - y) \right) dy \right| \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} |\Phi(y)| \left| \frac{f(x + H - y) - f(x - y)}{h} - f_{x_1}(x - y) \right| dy \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} |\Phi(y)| \varepsilon \chi_{B(0, R+1)}(x - y) dy = \varepsilon \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(x, R+1) \setminus B(0, R)} |\Phi(y)| dy \\ &= \varepsilon \int_0^{|\chi|+R+1} |\log r| dr = c(|\chi|, R) \varepsilon, \end{aligned}$$

όπου c μια σταθερά η οποία εξαρτάται από τα $|\chi|, R$. Επειδή $\varepsilon > 0$ τυχόν, συνεπάγεται

$$v_{x_1}(x_1, x_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_1 + h, x_2 + h) - v(x, t)}{h} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y) f_{x_1}(x - y) dy.$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$v_{x_2}(x_1, x_2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y) f_{x_2}(x - y) dy \quad \text{και} \quad v_{x_i x_j}(x_1, x_2) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y) f_{x_i x_j}(x - y) dy,$$

για $i, j = 1, 2$.

(ii) Από το (i), έχουμε

$$-\Delta v(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y) (-f_{x_1 x_1}(x - y) - f_{x_2 x_2}(x - y)) dy.$$

Έστω $0 < \varepsilon < 1$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,r)} \Phi(y)(-f_{x_1 x_1}(x-y) - f_{x_2 x_2}(x-y)) dy &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon) \setminus B(0,r)} \Phi(y)(-f_{x_1 x_1}(x-y) - f_{x_2 x_2}(x-y)) dy}_{=I_\varepsilon} \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)(-f_{x_1 x_1}(x-y) - f_{x_2 x_2}(x-y)) dy}_{=J_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Από την (6.5.3) έχουμε

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon| &\leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(0,\varepsilon) \setminus B(0,r)} |\Phi(y) (-f_{x_1 x_1}(x-y) - f_{x_2 x_2}(x-y))| dy \\ &\leq 2M \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{B(0,\varepsilon) \setminus B(0,r)} |\Phi(y)| dy = 2M \int_0^\varepsilon |\log r| dr = 2M\varepsilon(-\log \varepsilon + 1), \end{aligned}$$

επομένως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = 0.$$

Τώρα, από την (6.5.2), από το γεγονός ότι $-f_{x_1 x_1}(x-y) - f_{x_2 x_2}(x-y) = -f_{y_1 y_1}(x-y) - f_{y_2 y_2}(x-y)$ και την ταυτότητα του Green (6.1.4) έπεται

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{B(0,|x|+R+1) \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y)(-f_{y_1 y_1}(x-y) - f_{y_2 y_2}(x-y)) dy = - \int_{B(0,|x|+R+1) \setminus B(0,\varepsilon)} \underbrace{\Delta \Phi(y)}_{=0} f dy \\ &+ \int_{\partial(B(0,|x|+R+1) \setminus B(0,\varepsilon))} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial n} f(x-y) ds - \int_{\partial(B(0,|x|+R+1) \setminus B(0,\varepsilon))} \frac{\partial f(x-y)}{\partial n} ds \\ &= \underbrace{- \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial n_1} f(x-y) ds}_{J_{1,\varepsilon}} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f(x-y)}{\partial n_1} ds}_{J_{2,\varepsilon}}, \end{aligned}$$

όπου $n_1 = \frac{y}{|y|}$. Επιπλέον, από την (6.5.3) προκύπτει

$$|J_{2,\varepsilon}| \leq M \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| ds = M \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,\varepsilon)} |\log r| ds = M\varepsilon |\log \varepsilon|,$$

άρα

$$(6.5.6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{2,\varepsilon} = 0.$$

Επίσης,

$$J_{1,\varepsilon} = \frac{1}{2\varepsilon\pi} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1 - \varepsilon \cos \theta, y_2 - \varepsilon \sin \theta) d\theta$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη την (6.2.4), συμπεραίνουμε

$$(6.5.7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{1,\varepsilon} = f(x).$$

Συνδυάζοντας όλα τα ανωτέρω μπορούμε εύκολα να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

6.5.1 Η συνάρτηση Green και ο πυρήνας Poisson στον Δίσκο και την Μπάλα

Έστω $n = 2$ ή 3 . και $u \in C^2(B(0, R)) \cap C^1(\overline{B(0, R)})$. στην συνέχεια συμβολίζουμε με ds το στοιχειώδες μήκος του $\partial B(0, R)$ αν $n = 2$ ή το στοιχειώδες εμβαδόν αν $n = 3$. Τότε από την ταυτότητα του Green (6.1.4) έπεται

$$\begin{aligned} \int_{B(0, R) \setminus B(x, \varepsilon)} \Phi(x-y)(-\Delta u) dy &= - \int_{B(0, R) \setminus B(x, \varepsilon)} \underbrace{\Delta \Phi(y)}_{=0} u dy + \int_{\partial B(0, R)} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial n} u(y) ds \\ &\quad - \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial n_1} u(y) ds - \int_{\partial B(0, R)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} ds + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_1} ds, \end{aligned}$$

όπου $n = \frac{y}{|y|}$ και $n_1 = \frac{y-x}{|y-x|}$.

Όπως την απόδειξη των (6.5.6) και (6.5.7), μπορούμε να δείξουμε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} - \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial n_1} u(y) ds = u(x) \quad \text{και} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_1} ds = 0.$$

Οπότε συνδυάζοντας όλα τα ανωτέρω έχουμε

$$(6.5.8) \quad u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B(0, R) \setminus B(x, \varepsilon)} \Phi(x-y)(-\Delta u) dy - \int_{\partial B(0, R)} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial n} u(y) ds + \int_{\partial B(0, R)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} ds.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $\varphi^x \in C^2(\overline{B(0, R)})$ τέτοια ώστε

$$(6.5.9) \quad \begin{cases} \Delta \varphi^x(y) = 0, & \forall y \in B(0, R) \\ \varphi^x(y) = \Phi(x-y) & \forall y \in \partial B(0, R). \end{cases}$$

Τότε από την ταυτότητα του Green (6.1.4), έπεται

$$\int_{B(0, R)} \varphi^x(y)(-\Delta u) dy = \int_{\partial B(0, R)} \frac{\partial \varphi^x(y)}{\partial n} u(y) ds - \int_{\partial B(0, R)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} ds.$$

Επομένως από την (6.5.8) και την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B(0, R) \setminus B(x, \varepsilon)} (\Phi(x-y) - \varphi^x(y))(-\Delta u) dy - \int_{\partial B(0, R)} \frac{\partial (\Phi(x-y) - \varphi^x(y))}{\partial n} u(y) ds.$$

Η συνάρτηση

$$G(x, y) = \Phi(x-y) - \varphi^x(y), \quad \text{για } (x, y) \in \overline{B(0, R)} \text{ και } x \neq y$$

λέγεται συνάρτηση Green.

Η συνάρτηση

$$P(x, y) = - \frac{\partial (\Phi(x-y) - \varphi^x(y))}{\partial n} \quad \text{για } (x, y) \in B(0, R) \times \partial B(0, R),$$

λέγεται πυρήνας Poisson.

Τώρα θέτουμε $\tilde{x} = \frac{R^2 x}{|x|^2}$, τότε $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0, R)}$ για κάθε $x \in B(0, R)$. Ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση $\varphi^x(y) = \Phi\left(\frac{|x|}{R}(y - \tilde{x})\right)$ ικανοποιεί το πρόβλημα (6.5.9).

Πράγματι, $\Delta\varphi^x = 0$ στο $B(0, R)$ και για κάθε $y \in B(0, R)$ έχουμε

$$|x|^2|y - \tilde{x}|^2 = |x|^2(|y|^2 - 2R^2\frac{y \cdot x}{|x|^2} + \frac{R^4}{|x|^2}) = R^2(|x|^2 - 2y \cdot x + R^2) = R^2|x - y|^2,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\varphi^x(y) = \Phi(y - x)$.

Στη συνέχεια θέτουμε $a(n) = 2\pi$ αν $n = 2$ ή $a(n) = 4\pi$ αν $n = 3$. Για κάθε $y \in \partial B(0, R)$ έχουμε

$$\nabla\varphi^x(y) \cdot yR^{-1} = -\frac{1}{a(n)} \frac{(y - \tilde{x}) \cdot yR^{-1}}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^{n-2} (|y - \tilde{x}|)^n} = -\frac{1}{a(n)} \frac{(|x|^2 y - R^2 x) \cdot yR^{-3}}{\left(\frac{|x|}{R}|y - \tilde{x}|\right)^n} = -\frac{1}{a(n)} \frac{(|x|^2 y - R^2 x) \cdot yR^{-3}}{|y - x|^n}.$$

Επίσης,

$$\nabla_y \Phi(x - y) = \frac{1}{a(n)} \frac{x - y}{|x - y|^n}.$$

Οπότε,

$$P(x, y) = \frac{1}{a(n)R|x - y|^n} ((-x - y) \cdot y) - (|x|^2 y - R^2 x) \cdot yR^{-2} = \frac{R^2 - |x|^2}{a(n)R|x - y|^n}.$$

Ακολουθώντας την απόδειξη του (6.4.3) παίρνουμε το αντίστοιχο θεώρημα για $n = 3$.

Θεώρημα 6.5.3. Έστω $n = 3$, $R > 0$ και $g \in C(B(0, R))$. Τότε η συνάρτηση $u : B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$u(x) = \int_{\partial B(0, R)} P(x, y)g(y)ds(y)$$

ικανοποιεί:

(i) $u \in C^\infty(\partial B(0, R)) \cap C(\overline{\partial B(0, R)})$ και για κάθε $l, m, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ισχύει

$$\frac{\partial^{l+m+s} u(x)}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^s} = \int_{\partial B(0, R)} g(y) \frac{\partial^{n+m+s} P(x, y)}{\partial x_1^l \partial x_2^m \partial x_3^s} ds(y) \quad \forall x \in B(0, R).$$

(ii) $\Delta u = 0$ στο $B(0, R)$.

(iii)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \in B(0, R)}} u(x) = g(\xi) \quad \forall \xi \in \partial B(0, R).$$

6.6 Ασκήσεις

Άσκηση 6.6.1. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Δείξτε ότι για κάθε αρμονική συνάρτηση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ισχύει

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

όπου n συμβολίζει το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$.

Άσκηση 6.6.2. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y, z), & \text{στο } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

όπου n συμβολίζει το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Δείξτε ότι

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Άσκηση 6.6.3. Έστω $r > 0$ και $D(\mathbf{0}, r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(D(\mathbf{0}, r)) \cap C(D(\mathbf{0}, r))$ ικανοποιεί την

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } D(\mathbf{0}, r), \\ u(x, y) = x^2 + y^2 - xy, & (x, y) \in \partial D(\mathbf{0}, r). \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$\frac{r^2}{2} \leq u(x, y) \leq \frac{3r^2}{2}, \quad \forall (x, y) \in D(\mathbf{0}, r).$$

Άσκηση 6.6.4. Έστω $r > 0$ και $D(\mathbf{0}, r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$. Υποθέτουμε ότι $u \in C^2(D(\mathbf{0}, r)) \cap C(D(\mathbf{0}, r))$ ικανοποιεί την

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{2xy}{r^2}, & \text{στο } D(\mathbf{0}, r), \\ u = 0, & \text{στο } \partial D(\mathbf{0}, r). \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$|u(x, y)| \leq \frac{r^2 - x^2 - y^2}{4}, \quad \forall (x, y) \in \overline{D(\mathbf{0}, r)}.$$

Άσκηση 6.6.5. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών

$$\begin{cases} \Delta u - u = f, & \text{στο } \Omega, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases}$$

όπου $g \in C(\partial\Omega)$ και $f \in C(\overline{\Omega})$ μια μη αρνητική συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο, δείξτε ότι το ανωτέρω πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Άσκηση 6.6.6. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε το συνοριακό πρόβλημα τιμών

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases}$$

όπου $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\overline{\Omega})$ και $n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Χρησιμοποιώντας την ενεργειακή μέθοδο, δείξτε ότι το ανωτέρω πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Άσκηση 6.6.7. Έστω u μια αρμονική συνάρτηση στο \mathbb{R}^3 και $u(0,0,0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{\partial B(\mathbf{0},r)} u dS = 0,$$

όπου $\partial B(\mathbf{0},r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

Άσκηση 6.6.8. (Ανισότητα Harnack) Έστω $r > 0$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και $D(\mathbf{x}_0, r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < r^2\}$. Δείξτε ότι για κάθε μη αρνητική αρμονική συνάρτηση u στο $D(\mathbf{x}_0, 3r)$ ισχύει

$$\frac{u(\mathbf{x}_0)}{4} \leq u(x,y) \leq 4u(\mathbf{x}_0), \quad \forall (x,y) \in D(\mathbf{x}_0, r).$$

Άσκηση 6.6.9. Έστω $a > 0$, μέσω των σειρών Fourier, προσδιορίστε μια φραγμένη λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{στο } x^2 + y^2 > a^2, \\ u(a \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = f(\vartheta), & \text{στο } [0, 2\pi], \end{cases}$$

όπου $f \in C^1(\mathbb{R})$ μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π .

Άσκηση 6.6.10. Έστω $R > 0$ και $D(\mathbf{0}, R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$. Έστω $u \in C^2(D(\mathbf{0}, 2R))$ μια μη αρνητική αρμονική συνάρτηση στο $D(\mathbf{0}, 2R)$. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Poisson για να δείξετε ότι

$$\frac{R - \sqrt{x^2 + y^2}}{R + \sqrt{x^2 + y^2}} u(0,0) \leq u(x,y) \leq \frac{R + \sqrt{x^2 + y^2}}{R - \sqrt{x^2 + y^2}} u(0,0) \quad \forall (x,y) \in D(\mathbf{0}, R).$$

Παράρτημα α'

Σειρές Fourier

Έστω $a < b$, συμβολίζουμε με $L^2([a, b])$ το σύνολο των τετραγωνικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$, δηλαδή

$$L^2([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Θωρούμε ένα σύνολο συναρτήσεων $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset L^2([a, b])$. Το B θα λέγεται ορθοκανονικό υποσύνολο του $L^2[a, b]$ αν

$$(α'.0.1) \quad \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Έστω $f \in L^2([a, b])$ τότε οι αριθμοί

$$c_i = \int_a^b f \varphi_i dx \quad i \in \mathbb{N},$$

ονομάζονται συντελεστές Fourier ως προς το σύνολο B .

Οι συντελεστές Fourier c_i ικανοποιούν την κάτωθι ανισότητα.

Πρόταση α'.0.1 (Ανισότητα Bessel). *Ισχύει η ανισότητα*

$$(α'.0.2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\Phi_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, τότε

$$\int_a^b \Phi_n^2 dx = \int_a^b \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \Phi_n dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \varphi_i \Phi_n dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b \varphi_i \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx = \sum_{j=1}^n c_j^2,$$

από την (α'.0.1).

Τώρα θα δείξουμε ότι

$$\int_a^b (f - \Phi_n) \Phi_n dx = 0.$$

Πράγματι,

$$\int_a^b (f - \Phi_n)\Phi_n dx = \int_a^b f\Phi_n dx - \int_a^b \Phi_n^2 dx = \int_a^b f \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i - \sum_{i=1}^n c_i^2 = \sum_{i=1}^n c_i \underbrace{\int_a^b f \varphi_i dx}_{=c_i} - \sum_{i=1}^n c_i^2 = 0.$$

Από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\int_a^b f^2 dx = \int_a^b (f - \Phi_n + \Phi_n)^2 dx = \int_a^b (f - \Phi_n)^2 + \Phi_n^2 dx + 2 \underbrace{\int_a^b (f - \Phi_n)\Phi_n dx}_{=0} \geq \int_a^b \Phi_n^2 dx = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

Άρα

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \int_a^b f^2 dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \int_a^b f^2 dx,$$

□

Από τελευταία σχέση έπεται ότι $c_n \rightarrow 0$, αφού $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$. Επίσης αποδεικνύεται ότι υπάρχει $g \in L^2[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |g(x) - \Phi_n(x)|^2 dx = 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $g = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$. Προσοχή εδώ δεν θεωρούμε τη κατά σημείο σύγκλιση.

Ορισμός α'.0.2. Η Σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$ ονομάζεται σειρά Fourier της συνάρτησης f ως προς το ορθοκανονικό σύνολο B .

Θεωρούμε τώρα τον $L^2[-\pi, \pi]$ και το υποσύνολό του

$$A = \{c_k : k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\} \cup \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$$

με $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $c_k = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$ και $s_k = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από τις γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b), \quad 2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b) \quad \text{και}$$

$$2 \sin a \cos b = \sin(a + b) - \sin(a - b),$$

μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το σύνολο A είναι ορθοκανονικό. Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_i c_j dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \quad \forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_i s_j dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αν } i \neq j, \end{cases} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_i s_j dx = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{και } j \in \mathbb{N}.$$

Ορισμός α'.0.3. Έστω $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{και} \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Η σειρά Fourier ως προς την ορθοκανονική βάση A της f είναι

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Στη συνέχεια θα δούμε πότε έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς Fourier. Πριν διατυπώσουμε όμως το κεντρικό θεώρημα θα πρέπει να δώσουμε τον κάτωθι ορισμό.

Ορισμός α'.0.4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Έστω ότι υπάρχουν τα κάτωθι όρια σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(x+t), \quad f(x^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(x+t), \quad f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{και}$$

$$f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t}.$$

Οι αριθμοί $f'_+(x), f'_-(x)$ θα λέγονται **πλευρικοί παράγωγοι** της f στο σημείο x .

Θεώρημα α'.0.5. Έστω $f \in C(\mathbb{R})$ 2π -περιοδική συνάρτηση. Αν $n f'$ υπάρχει στο \mathbb{R} εκτός από πεπερασμένου το πλήθος σημεία σε κάθε φραγμένο διάστημα και αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι παντού, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = 0,$$

δηλαδή η σειρά Fourier ως προς την ορθοκανονική βάση A της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Βιβλιογραφία

- [1] Γ. Ακρίβης, Ν. Αλικάκος, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική.
- [2] Μ. Παπαδημητράκης, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Σημειώσεις*. <https://fourier.math.uoc.gr/~papadim/pde.pdf>
- [3] L. C. Evans, *Partial differential equations*. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749 pp. ISBN: 978-0-8218-4974-3.

