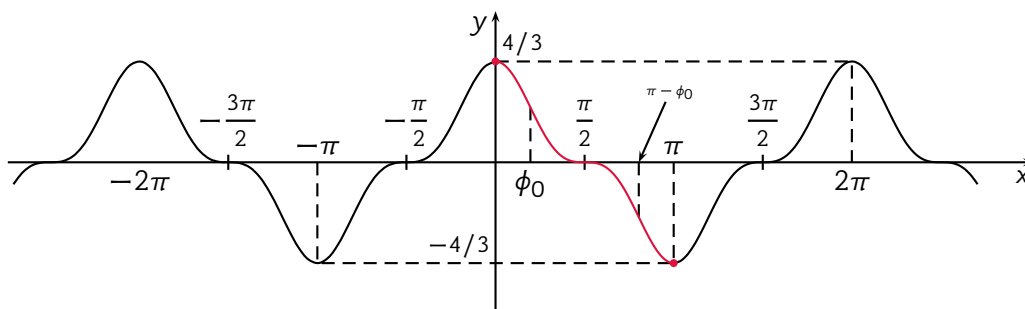


# Απειροστικός Λογισμός I

Σημειώσεις



Σάμος 2024

Έκδοση 0.15. Το αρχείο δεν είναι τελικό. Μπορεί να έχει λάθη ή παραλείψεις. Προς το παρόν είναι υπό συνεχή διαμόρφωση. Όλες οι παραπομπές είναι links για εύκολη περιήγηση. Όπου υπάρχουν links σε εξωτερικά αρχεία ή ιστοσελίδες δίνεται qrcode στο περιθώριο.

© Αντώνης Τσολομύτης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Καρλόβασι, Σάμος 2024.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b><math>\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}</math></b>	<b>6</b>
1.1	Αρχή του Αρχιμήδη . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Το σύνολο των πραγματικών Αριθμών</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Γενικά περί ακολουθιών</b>	<b>15</b>
3.1	Ακολουθίες και υπακολουθίες . . . . .	15
3.2	Πράξεις ακολουθιών . . . . .	17
3.3	Εφαρμογές και παραδείγματα . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Μονότονες ακολουθίες</b>	<b>22</b>
4.1	Ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	22
4.2	Εφαρμογές και παραδείγματα . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Φραγμένες ακολουθίες</b>	<b>26</b>
5.1	Ορισμοί και ιδιότητες . . . . .	26
5.2	Εφαρμογές και παραδείγματα . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Σύγκλιση ακολουθιών</b>	<b>32</b>
6.1	Μηδενικές ακολουθίες . . . . .	32
6.2	Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών . . . . .	33
6.3	Συγκλίνουσες ακολουθίες . . . . .	38
6.4	Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών . . . . .	39
6.5	Κριτήρια σύγκλισης . . . . .	43
6.6	Ακολουθίες με όριο το $+\infty$ ή $-\infty$ . . . . .	46
6.7	Η εκθετική συνάρτηση . . . . .	47
6.8	Βασικά όρια . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Συναρτήσεις</b>	<b>60</b>
<b>8</b>	<b>Όρια συναρτήσεων</b>	<b>62</b>
8.1	Όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$ . . . . .	62
8.2	Όριο σε πραγματικό αριθμό . . . . .	64
8.3	Ιδιότητες των ορίων . . . . .	67
8.4	Βασικά όρια . . . . .	69

#### 4 · ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

8.5	Όριο σύνθεσης συναρτήσεων . . . . .	70
8.6	Μερικές συνθήκες ύπαρξης ορίου . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Συνέχεια συναρτήσεων</b>	<b>73</b>
9.1	Ορισμός της συνέχειας . . . . .	73
9.1.1	Συνέπειες της ιδιότητας της συνέχειας . . . . .	75
9.2	Συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης . . . . .	76
9.3	Εφαρμογές της συνέχειας . . . . .	78
<b>10</b>	<b>Παράγωγος συνάρτησης</b>	<b>82</b>
10.1	Ορισμός και παραδείγματα . . . . .	82
10.2	Κανόνες παραγωγίσης . . . . .	84
10.3	Παράγωγοι ανώτερης τάξης . . . . .	86
<b>11</b>	<b>Εφαρμογές παραγώγων</b>	<b>90</b>
11.1	Τοπικά ακρότατα . . . . .	90
11.2	Θεωρήματα Μέσης Τιμής . . . . .	91
11.3	Απροσδιόριστες μορφές ορίων . . . . .	94
<b>12</b>	<b>Μελέτη συνάρτησης</b>	<b>98</b>
12.1	Μονοτονία συνάρτησης . . . . .	98
12.2	Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης . . . . .	99
12.3	Περί εφαπτόμενων ευθειών . . . . .	99
12.4	Κοίλα της γραφικής παράστασης . . . . .	102
12.5	Σημεία καμπής . . . . .	103
12.6	Ασύμπτωτες . . . . .	104
12.7	Μελέτη συνάρτησης . . . . .	104
<b>A'</b>	<b>limsup και liminf</b>	<b>109</b>
A'.1	Το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων . . . . .	109
A'.2	Ιδιότητες των limsup και liminf . . . . .	111
<b>B'</b>	<b>Ορισμός του συνόλου <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>115</b>
B'.1	Ορισμός του $\mathbb{R}$ . . . . .	116
<b>Γ'</b>	<b>Ο <math>e</math> είναι άρρητος</b>	<b>119</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>121</b>

# Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές έχουν ως στόχο να «απαντήσουν» σε κάποια από τα τρέχοντα προβλήματα διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού.

- Τόσο στα μαθήματα της Ανάλυσης όσο και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, είναι ανάγκη οι φοιτητές και οι φοιτήτριες να έχουν καλή γνώση των ακολουθιών. Το θέμα αυτό, μετά την αφαίρεση της σχετικής ύλης από την ύλη της Γ' Λυκείου, εκκρεμεί εδώ και πολλά χρόνια στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση. Συχνά αντιμετωπίζεται κάπως πρόχειρα και γρήγορα, ενώ θα μπορούσε κανείς να εκμεταλλευτεί το γεγονός ότι στη Γ' Λυκείου, αν μη τι άλλο οι μαθητές εξοικειώνονται με θέματα που αφορούν τον υπολογισμό ορίων ή τη μελέτη συναρτήσεων, ώστε να κερδηθεί χρόνος για την λεπτομερέστερη μελέτη των ακολουθιών.

Οι σημειώσεις αυτές, αναπτύσσουν αρκετά μεθοδικά τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών πριν φτάσουν να ασχοληθούν με τα θέματα των πραγματικών συναρτήσεων (όρια, συνέχεια, μελέτη συναρτήσεων).

- Οι αποδείξεις είναι προσεκτικά επιλεγμένες να είναι βέλτιστες, τόσο ως προς το μέγεθος όσο και ως προς την απλότητά τους. Παρόλα αυτά, διάφοροι συνάδελφοι συχνά αισθάνονται την ανάγκη να παρουσιάσουν εναλλακτικές αποδείξεις για διδακτικούς λόγους. Αυτές οι αποδείξεις δεν πρέπει να επηρεάσουν τη ροή του κειμένου και τη λιτότητα της προεπιλεγμένης απόδειξης. Όπου στο κείμενο υπάρχει το σύμβολο «εδ» που βλέπετε στο περιθώριο, αυτό είναι δεσμός προς μια εναλλακτική απόδειξη.

εδ

Οι φοιτητές και οι φοιτήτριες όμως πρέπει πρώτα να κατανοήσουν πλήρως την λιτή προεπιλεγμένη απόδειξη και μετά, εφόσον το επιθυμούν, να κινηθούν προς πιο σύνθετες αποδείξεις που εμπεριέχουν άλλους στόχους (συνήθως την εξοικείωση με άλλες τεχνικές και άλλες έννοιες).

Αντώνης Τσολομύτης  
Σάμος 2024

# Κεφάλαιο 1

## $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

**Αξίωμα 1.1** (Αρχή του ελαχίστου) Κάθε μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{N}$  έχει ελάχιστο στοιχείο.

**Θεώρημα 1.2** (Επαγωγή) Έστω ότι η  $p_n$  είναι μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό  $n \in \mathbb{N}$ . Αν η  $p_1$  είναι αληθής και για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$p_n \text{ αληθής} \Rightarrow p_{n+1} \text{ αληθής,}$$

τότε η  $p_n$  είναι αληθής για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

*Απόδειξη:* Αν δεν είναι αληθής η  $p_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , θέτουμε  $A = \{n \in \mathbb{N} : p_n \text{ όχι αληθής}\}$  και αυτό δεν είναι κενό. Από την αρχή του ελαχίστου το  $A$  έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Δηλαδή  $n_0 \in A$  αλλά  $n_0 - 1 \notin A$ . Άρα  $p_{n_0}$  όχι αληθής, αλλά  $p_{n_0-1}$  αληθής. Όμως  $n_0 \neq 1$  γιατί  $p_1$  αληθής. Άρα  $n_0 \geq 2$  οπότε  $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ . Τώρα όμως, αφού  $p_{n_0-1}$  αληθής, από την υπόθεση πρέπει και η  $p_{n_0-1+1} = p_{n_0}$  να είναι αληθής, άτοπο.  $\square$

**Παράδειγμα 1.3**  $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ .

**Παράδειγμα 1.4**  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$ .

**Παράδειγμα 1.5**  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .

**Πρόταση 1.6** Θεωρούμε ένα  $k \in \mathbb{N}$  και μια πρόταση  $p_n$  που εξαρτάται από τον φυσικό  $n \in \mathbb{N}$ . Αν  $p_k$  αληθής και ισχύει

$$p_n \text{ αληθής} \Rightarrow p_{n+1} \text{ αληθής,}$$

για κάθε  $n \geq k$  τότε η  $p_n$  είναι αληθής για κάθε  $n \geq k$ .

*Απόδειξη:* Θεωρούμε την πρόταση  $q_n = p_{n+k-1}$ ...

$\square$

**Παράδειγμα 1.7**  $2^n > n^3$  για κάθε  $n \geq 10$ .

## 1.1 Αρχή του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης στο έργο του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου Α'» στην πέμπτη «κοινή έννοια» γράφει το εξής (δείτε [1]):

Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μείζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιοῦτω, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

δηλαδή

Από δύο άνισα μεγέθη (μήκη γραμμών, εμβαδά επιφανειών, όγκοι στερεών) το μεγαλύτερο υπερέρχει από το μικρότερο κατά κάποιο μέγεθος που όταν ληφθεί πολλές φορές είναι δυνατόν να υπερέρχει από καθένα από τα δύο αρχικά μεγέθη.

Ο Αρχιμήδης δέχεται αυτή την αρχή για λόγους συντομίας μια και το συγκεκριμένο έργο έχει άλλο στόχο από τη θεμελίωση των αριθμητικών συνόλων. Το ότι το παραπάνω ισχύει στο σύνολο  $\mathbb{N}$  είναι φανερό από την κατασκευή του  $\mathbb{N}$ : για δύο διαφορετικούς φυσικούς  $k$  και  $m$ , αν είναι  $k > m$  τότε πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός  $n$  ώστε  $n(k - m) > k > m$ . Αυτό είναι φανερό για  $n = k + 1$  διότι αφού  $k > m$  έπεται ότι  $k - m \geq 1$ . Άρα

$$n(k - m) \geq n = k + 1 > k > m.$$

Ας δούμε την ίδια ιδιότητα στους ρητούς. Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε ρητό  $r$  υπάρχει φυσικός  $n$  με  $n > r$ . Πράγματι, αφού  $r$  ρητός, αν  $r \leq 0$  τότε φανερά  $1 > 0 \geq r$  και η ιδιότητα ισχύει για  $n = 1$ . Αν  $r > 0$  τότε υπάρχουν  $k, m$  φυσικοί ώστε  $r = k/m$ . Αν  $m = 1$  τότε ο  $n = k + 1$  ικανοποιεί τη ζητούμενη. Αν  $m \geq 2$  ο  $n = k$  ικανοποιεί τη ζητούμενη αφού  $k > k/m$  αν και μόνο αν  $m > 1$ .

Επιστρέφοντας στην ιδιότητα του Αρχιμήδη για τους ρητούς, αν  $r, s$  δυο ρητοί και  $r > s$  τότε  $r - s > 0$ . Όμως ο  $r/(r - s)$  είναι ρητός και από το προηγούμενο υπάρχει  $n$  φυσικός με  $n > r/(r - s)$ . Συνεπώς  $n(r - s) > r > s$ .

Για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού χρειαζόμαστε αυτή την ιδιότητα να ισχύει στο σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών αριθμών, την οποία συζητάμε στο επόμενο κεφάλαιο.

## Ασκήσεις

Άσκηση 1.1.1. Δείξτε ότι κάθε φραγμένο προς τα πάνω υποσύνολο του  $\mathbb{N}$  είναι πεπερασμένο. Ισχύει η ίδια ιδιότητα για το  $\mathbb{Z}$ ; για το  $\mathbb{Q}$ ;

Άσκηση 1.1.2. Αποδείξτε με επαγωγή ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ισχύει

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n.$$

(Υπόδειξη: αποδείξτε ξεχωριστά την περίπτωση  $n = 2$  γιατί θα χρειαστεί στο επαγωγικό βήμα.)

Άσκηση 1.1.3. Αποδείξτε ότι αν  $t_1, t_2, \dots, t_n$  οποιοιδήποτε θετικοί αριθμοί με  $t_1 t_2 \dots t_n = 1$  τότε  $t_1 + t_2 + \dots + t_n \geq n$ .

(Υπόδειξη: στο επαγωγικό βήμα, αν όλοι είναι ίσοι με 1 η ανισότητα είναι προφανής. Αν κάποιος είναι μικρότερος του 1, κάποιος θα είναι και μεγαλύτερος του 1 ώστε να έχουν όλοι γινόμενο ίσο με 1. Αλλάξτε τους θέση στο γινόμενο ώστε  $t_n < 1$  και  $t_{n+1} > 1$ . Τότε  $(t_{n+1} - 1)(1 - t_n) > 0$ . Συμπεράνετε ότι  $t_n t_{n+1} \leq t_n + t_{n+1} - 1$ . Εφαρμόστε τώρα την επαγωγική υπόθεση για τους  $n$  στο πλήθος αριθμούς  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, (t_n t_{n+1})$ .)

Άσκηση 1.1.4. Αποδείξτε με τη βοήθεια της προηγούμενης άσκησης την ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού μέσου: για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ισχύει

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

(Υπόδειξη:  $t_k = x_k / \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ )

Άσκηση 1.1.5. Δείξτε ότι η προηγούμενη άσκηση συνεπάγεται άμεσα ότι για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ισχύει

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n.$$

## Κεφάλαιο 2

# Το σύνολο των πραγματικών Αριθμών

Ο ορισμός του συνόλου των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$  από τους ρητούς δεν είναι απλός και θα τον αναβάλουμε για αργότερα (Παράρτημα Β'). Προς το παρόν θα υποκριθούμε ότι γνωρίζουμε το  $\mathbb{R}$  όπως κάναμε και στο Λύκειο. Επίσης θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τις τέσσερις πράξεις και τις αλγεβρικές τους ιδιότητες καθώς και τη διάταξη στο  $\mathbb{R}$ . Σημαντική αρχή είναι αυτή της τριχοτομίας, δηλαδή η ιδιότητα ότι αν  $a, b \in \mathbb{R}$  τότε είτε  $a < b$  είτε  $a = b$  είτε  $a > b$ .

Γνωστή επίσης θεωρούμε την τριγωνική ανισότητα, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση: για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Ξεκινάμε με την ακόλουθη θεμελιώδη ανισότητα.

**Πρόταση 2.1** (Ανισότητα Bernoulli) Για κάθε πραγματικό αριθμό  $\theta > -1$  και για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$(1 + \theta)^n \geq 1 + n\theta,$$

και ισότητα ισχύει μόνο όταν  $n = 1$  ή  $\theta = 0$ .

*Απόδειξη:* Αν  $\theta = 0$  ή  $n = 1$  η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Υποθέτουμε ότι  $\theta \neq 0$  και δείχνουμε ότι για κάθε  $n \geq 2$  ισχύει

$$(1 + \theta)^n > 1 + n\theta.$$

για  $n = 2$  η προηγούμενη είναι ισοδύναμη με την  $\theta^2 > 0$  που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για  $n$ . Για το επαγωγικό βήμα έχουμε

$$\begin{aligned} (1 + \theta)^{n+1} &= (1 + \theta)(1 + \theta)^n \\ &> (1 + \theta)(1 + n\theta) = 1 + (n + 1)\theta + \theta^2 \\ &> 1 + (n + 1)\theta, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

**Ορισμός 2.2** Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}$  λέγεται

- *άνω φραγμένο*, αν υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $x \leq M$ . Κάθε  $M$  που ικανοποιεί το προηγούμενο λέγεται *άνω φράγμα* του  $A$ . Ισοδύναμα λέμε ότι το  $A$  είναι *άνω φραγμένο από το  $M$* .
- *κάτω φραγμένο*, αν υπάρχει  $m \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $x \geq m$ . Κάθε  $m$  που ικανοποιεί το προηγούμενο λέγεται *κάτω φράγμα* του  $A$ . Ισοδύναμα λέμε ότι το  $A$  είναι *κάτω φραγμένο από το  $m$* .
- *φραγμένο*, αν είναι και *άνω φραγμένο* και *κάτω φραγμένο*.

**Παρατήρηση 2.3** Αν το σύνολο  $A$  είναι *άνω φραγμένο* από τον αριθμό  $M$  και  $M_1 \geq M$  ένας άλλος πραγματικός αριθμός, τότε και το  $M_1$  είναι *άνω φράγμα* του συνόλου  $A$ . Ένα *άνω φραγμένο* σύνολο δηλαδή, *δεν έχει μοναδικό άνω φράγμα!* Ομοίως και για τα *κάτω φραγμένα* σύνολα: αν το  $A$  είναι *κάτω φραγμένο* από τον αριθμό  $m$  και  $m_1 \leq m$  ένας άλλος πραγματικός αριθμός, τότε και το  $m_1$  είναι *κάτω φράγμα* του  $A$ .

**Παρατήρηση 2.4** Αν το  $M$  *δεν* είναι *άνω φράγμα* του  $A$ , αυτό σημαίνει ότι το  $A$  περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο  $x$  ώστε  $x > M$ .

Ομοίως, αν το  $m$  *δεν* είναι *κάτω φράγμα* του  $A$ , αυτό σημαίνει ότι το  $A$  περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο  $x$  ώστε  $x < m$ .

**Ορισμός 2.5** 1. Για ένα μη κενό και *άνω φραγμένο* σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$  λέμε ότι το  $s$  είναι το *ελάχιστο άνω φράγμα* του, αν το  $s$  είναι *άνω φράγμα* του  $A$  και *δεν* υπάρχει *άνω φράγμα* του  $A$  *γνησίως μικρότερο* του  $s$ . Αυτός ο αριθμός  $s$  ονομάζεται *supremum* του  $A$  (*άνω πέρας*) και γράφουμε  $s = \sup A$ .

2. Για ένα μη κενό και *κάτω φραγμένο* σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$  λέμε ότι το  $i$  είναι το *μέγιστο κάτω φράγμα* του, αν το  $i$  είναι *κάτω φράγμα* του  $A$  και *δεν* υπάρχει *κάτω φράγμα* του  $A$  *γνησίως μεγαλύτερο* του  $i$ . Αυτός ο αριθμός  $i$  ονομάζεται *infimum* του  $A$  (*κάτω πέρας*) και γράφουμε  $i = \inf A$ .

**Σημαντική Παρατήρηση 2.6** Αν λοιπόν  $s = \sup A$  τότε, αν  $\varepsilon > 0$  οποιοσδήποτε θετικός αριθμός το  $s - \varepsilon$  *δεν* είναι *άνω φράγμα* του  $A$ , αφού είναι *μικρότερο* από το *ελάχιστο άνω φράγμα*  $s$ . Δηλαδή (Παρατήρηση 2.4) υπάρχει  $x \in A$  ώστε  $x > s - \varepsilon$ .

Ομοίως, αν  $i = \inf A$  τότε, αν  $\varepsilon > 0$  οποιοσδήποτε θετικός αριθμός το  $i + \varepsilon$  *δεν* είναι *κάτω φράγμα* του  $A$ , αφού είναι *μεγαλύτερο* από το *μέγιστο κάτω φράγμα*  $i$ . Δηλαδή (Παρατήρηση 2.4) υπάρχει  $x \in A$  ώστε  $x < i + \varepsilon$ .

Θα αποδείξουμε στο Παράρτημα Β' ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$  κάθε μη κενό και *άνω φραγμένο* σύνολο  $A$  έχει *supremum*  $\sup A \in \mathbb{R}$ , και κάθε μη κενό *κάτω φραγμένο* σύνολο  $B$  έχει *infimum*  $\inf B \in \mathbb{R}$ . Αυτή την ιδιότητα για το  $\mathbb{R}$  τη λέμε *πληρότητα* ή ότι «το  $\mathbb{R}$  είναι πλήρες».

Αναβάλουμε την απόδειξη αυτής της ιδιότητας γιατί απαιτείται πρώτα να ορίσουμε αυστηρά το σύνολο  $\mathbb{R}$  από το  $\mathbb{Q}$ , κάτι που όπως είπαμε θα γίνει στο Παράρτημα Β'.

Μια πρώτη συνέπεια της πληρότητας του  $\mathbb{R}$  είναι ότι το υποσύνολο του  $\mathbb{N}$  δεν είναι άνω φραγμένο. Πράγματι, αν ήταν άνω φραγμένο θα είχε supremum. Ας το ονομάσουμε  $s$ . Τότε το  $s - 1$  δεν είναι άνω φράγμα του  $\mathbb{N}$ , οπότε υπάρχει  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $n > s - 1$ . Αλλά τότε ο φυσικός  $n + 1$  είναι γνήσια μεγαλύτερος του  $s$  οπότε το  $s$  δεν είναι άνω φράγμα του  $\mathbb{N}$ , που είναι άτοπο. Έτσι προκύπτει αμέσως το ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.7** (Αρχή του Αρχιμήδη) *Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  με  $a > b$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $n$  ώστε  $n(a - b) > a > b$ .*

*Απόδειξη:* Αν όχι τότε το  $a/(a-b)$  είναι άνω φράγμα του  $\mathbb{N}$ , άτοπο.  $\square$

**Παρατήρηση 2.8** Το προηγούμενο έχει της εξής απλή συνέπεια. Όσο μικρός και αν είναι ένας θετικός αριθμός  $\varepsilon$  και όσο μεγάλος και αν είναι ένας θετικός αριθμός  $M$  υπάρχει φυσικός  $n$  ώστε  $n\varepsilon > M$ . Πράγματι, εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για  $a = M/\varepsilon$  και  $b = 0$ .

Παρατηρήστε επίσης ότι τον ορισμό του supremum και infimum θα μπορούσαμε να τον διατυπώσουμε και για το σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$ . Εντούτοις το σύνολο  $\mathbb{Q}$  δεν είναι πλήρες, αφού περιέχει φραγμένα σύνολα χωρίς supremum και infimum εντός του  $\mathbb{Q}$ . Για να αποδειχθεί αυτό πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει ρητός  $n/m$  με  $n \in \mathbb{Z}$  και  $m \in \mathbb{N}$  ώστε  $(n/m)^2 = 2$ . Πράγματι έστω ότι υπάρχει και μετά από απλοποιήσεις υποθέτουμε ότι το κλάσμα  $n/m$  είναι ανάγωγο. Τότε ο  $n^2 = 2m^2$  είναι άρτιος, άρα και ο  $n$  (διότι κάθε περιττός στο τετράγωνο  $(2k - 1)^2 = 4(k^2 - k) + 1$  δίνει περιττό). Έστω λοιπόν  $n = 2k$ . Τότε  $(2k)^2 = 2m^2$  οπότε  $m^2 = 2k^2$  άρα και ο  $m^2$  είναι άρτιος, άρα και ο  $m$ , καταλήγοντας σε άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το  $n/m$  είναι ανάγωγο.

**Πρόταση 2.9** *Υπάρχει μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{Q}$  που δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (στο  $\mathbb{Q}$ ).*

*Απόδειξη:* Έστω ότι το  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$  (το οποίο είναι μη κενό, αφού  $1 \in A$ ) έχει ελάχιστο άνω φράγμα το  $a \in \mathbb{Q}$ . Έχουμε δείξει ότι  $a^2 \neq 2$ . Άρα είτε  $a^2 < 2$  είτε  $a^2 > 2$ . Θα δείξουμε ότι και οι δύο αυτές περιπτώσεις οδηγούν σε άτοπο.

*Περίπτωση 1:  $a^2 < 2$ .*

Φανερά  $a < 2$  αλλιώς, αν  $a \geq 2$  τότε  $2 > a^2 \geq 4$  άτοπο. Από την αρχή του Αρχιμήδη, υπάρχει ακέραιος  $n > 5/(2 - a^2)$ , ισοδύναμα  $5/n < 2 - a^2$ . Μα τότε, αφού  $a < 2$

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2}{n}a + \frac{1}{n^2} < a^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{5}{n} < a^2 + 2 - a^2 = 2.$$

Άρα  $a + 1/n \in A$  αλλά  $a + 1/n > a$  άτοπο, αφού το  $a$  είναι άνω φράγμα του  $A$ .

*Περίπτωση 2:*  $a^2 > 2$ .

Από την αρχή του Αρχιμήδη, υπάρχει ακέραιος  $n > (2a)/(a^2 - 2)$ , ισοδύναμα  $-2a/n > 2 - a^2$ . Ομοίως με πριν έχουμε

$$\left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} > a^2 + 2 - a^2 + 0 = 2,$$

άρα το  $a - 1/n$  είναι άνω φράγμα του  $A$  διότι αν  $x \in A$  και  $x \geq a - 1/n$  συνεπάγεται  $x^2 \geq (a - 1/n)^2 > 2$  άτοπο. Αλλά  $a - 1/n < a$  συνεπώς το  $a$  δεν είναι το ελάχιστο από τα άνω φράγματα του  $A$ , πάλι άτοπο.  $\square$

**Πρόταση 2.10** (Υπαρξη ακεραίου μέρους) *Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  υπάρχει μοναδικός ακέραιος  $m$ , που θα τον συμβολίζουμε με  $[x]$ , για τον οποίο ισχύει  $m \leq x < m + 1$ .*

*Απόδειξη:* Αν  $x \geq 0$  τότε το σύνολο  $A = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$  είναι μη κενό (Αρχή του Αρχιμήδη) και άρα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το  $n_0$ . Άρα  $x < n_0$ . Αλλά, αφού το  $n_0$  είναι το ελάχιστο του  $A$ , το  $n_0 - 1$  δεν ανήκει στο  $A$ , δηλαδή  $n_0 - 1 \leq x$ . Θέτουμε  $m = n_0 - 1$ .

Αν τώρα  $x < 0$  βρίσκουμε όπως πριν το  $n_0$  για το  $-x$ , οπότε θα ισχύει  $n_0 - 1 \leq -x < n_0$ . Συνεπώς  $n_0 < x \leq -n_0 + 1$ . Σε αυτή την περίπτωση, αν  $x = -n_0 + 1$  θέτουμε  $m = x = -n_0 + 1$  ενώ αν  $x < -n_0 + 1$  θέτουμε  $m = n_0$ . Φανερά και πάλι  $m \leq x < m + 1$ .

Μένει να δείξουμε ότι ο ακέραιος αυτός είναι μοναδικός. Αν υπάρχει και ένας άλλος, έστω ο  $m_1$  τότε  $m \leq x < m_1 + 1$  αλλά και  $m_1 \leq x < m + 1$ . Συνεπώς  $m < m_1 + 1$  αλλά και  $m_1 < m + 1$ , δηλαδή  $m \leq m_1$  και  $m_1 \leq m$ . Άρα  $m = m_1$ .  $\square$

**Πρόταση 2.11** (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς) *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $a < b$  υπάρχει ρητός  $r$  με  $a < r < b$ .*

*Απόδειξη:* Από την Αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός  $n > 1/(b - a)$ , ισοδύναμα  $na + 1 < nb$ . Από την Πρόταση 2.10, ισχύει

$$na < [na] + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Συνεπώς

$$a < \frac{[na] + 1}{n} < b.$$

Ο  $([na] + 1)/n$  όμως είναι ρητός και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.  $\square$

**Παρατήρηση 2.12** Αμέσως προκύπτει από το προηγούμενο ότι και οι άρρητοι είναι πυκνοί στο  $\mathbb{R}$ . Διότι αν δοθούν δυο αριθμοί  $a < b$  συνεπάγεται ότι  $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$  οπότε υπάρχει ρητός  $r$  με  $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$ , και συνεπώς ο άρρητος  $r + \sqrt{2}$  είναι ανάμεσα στα  $a$  και  $b$ .

Η Πρόταση 2.11 μαζί με την Αρχή του Αρχιμήδη μάς εγγυούνται την ύπαρξη  $k$ -ριζών των θετικών αριθμών για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .

**Πρόταση 2.13** Για κάθε πραγματικό αριθμό  $a > 0$  υπάρχει μοναδικός πραγματικός  $s$  ώστε  $s^k = a$ , τον οποίο ονομάζουμε  $k$ -ρίζα του  $a$ .

*Απόδειξη:* Η μοναδικότητα είναι φανερή αφού αν  $s_1 < s_2$  δυο  $k$ -ρίζες του  $a$  θα έχουμε  $a = s_1^k < s_2^k = a$  το οποίο είναι άτοπο.

Για την ύπαρξη τώρα, ο  $a = 1$  έχει  $k$ -ρίζα το 1. Θα υποθέσουμε ότι  $a > 1$ , αφού αν  $0 < a < 1$  θα εργαστούμε με το  $1/a > 1$ , και αν  $s$  η  $k$ -ρίζα του  $1/a$  το  $1/s$  είναι φανερά η  $k$ -ρίζα του  $a$ .

Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^k < a\}$ . Παρατηρούμε ότι  $1 \in A$  (άρα δεν είναι κενό) και φράσσεται άνω από το  $a$ : πράγματι, αν  $x \geq a$  συνεπάγεται ότι  $x \geq 1$ . Οπότε  $x^k \geq x \geq a$ . Άρα  $x \notin A$ . Συνεπώς  $A \subseteq (0, a]$ .

Θέτουμε  $s = \sup A$  και από τα προηγούμενα ισχύει  $s \in [1, a]$ . Αρκεί να δείξουμε ότι  $s^k \neq a$  και  $s^k \neq a$ .

*Περίπτωση 1.* Αν  $s^k > a$ , από την Αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός  $n > ks^k/(s^k - a)$  που είναι ισοδύναμη με την  $1 - (k/n) > a/s^k$ . Οπότε, από την ανισότητα Bernoulli θα έχουμε

$$\left(s \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k \geq s^k \left(1 - \frac{k}{n}\right) \geq a.$$

Αλλά  $s(1 - 1/n) < s$  οπότε υπάρχει  $x \in A$  με  $s(1 - 1/n) < x$ . Συνεπώς

$$a \leq \left(s \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k < x^k < a,$$

άτοπο.

*Περίπτωση 2.* Αν  $s^k < a$ , από την Αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός  $n > (ak/(a - s^k)) - 1$ . Ισοδύναμα  $s^k/a < 1 - k/(n+1)$ . Έτσι, και πάλι με την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$$\left(s \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k = \frac{s^k}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k} \leq \frac{s^k}{1 - \frac{k}{n+1}} < a.$$

Όμως στο διάστημα  $(s, s(1 + 1/n))$  υπάρχει ρητός σύμφωνα με την Πρόταση 2.11, έστω ο  $r$ . Τότε όμως  $r > s > 0$  και  $r^k < (s(1 + 1/n))^k < a$ , δηλαδή  $r \in A$  αλλά  $r > s$ , το οποίο είναι άτοπο.  $\square$

## Ασκήσεις

Άσκηση 2.0.1. Είναι ο αριθμός  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ρητός; Ίδια ερώτηση για τον αριθμό

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 2.ο.2. Δείξτε ότι μια ικανή συνθήκη για να ισχύει η σχέση:  $|\alpha - \beta| < \varepsilon$  για  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$ , είναι να υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  ώστε:  $|\alpha - x| < \varepsilon/2$  και  $|\beta - x| < \varepsilon/2$ . Είναι η συνθήκη αυτή αναγκαία; Αν ναι τότε βρείτε όλα τα  $x \in \mathbb{R}$  που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη.

Άσκηση 2.ο.3. Πραγματευτείτε την ύπαρξη της  $\sqrt{2}$  σαν infimum ενός κατάλληλου συνόλου  $A$ .

Άσκηση 2.ο.4. Αν  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , και θέσουμε  $-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$ , τότε  $\inf A = -\sup(-A)$

Άσκηση 2.ο.5. Δίνεται  $A = \{|\alpha\beta| : -2 < \alpha \leq 5, -4 < \beta \leq 3\}$ . Βρείτε, αν υπάρχουν τα  $\sup A$ ,  $\inf A$  και εξετάστε αν ανήκουν ή όχι στο  $A$ .

Άσκηση 2.ο.6. Αν  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  και το  $A$  δεν είναι φραγμένο προς τα πάνω, τότε ορίζουμε το  $\sup A$  να είναι το σύμβολο  $+\infty$ . Δείξτε ότι:  $\sup A = +\infty$  αν και μόνο αν ισχύει «για κάθε  $M \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $x \in A$  ώστε  $x > M$ ». Δώστε ανάλογο ορισμό για το  $\inf A = -\infty$ .

Άσκηση 2.ο.7. Αν θέλατε να επεκτείνετε τον ορισμό των  $\sup A$ ,  $\inf A$  στην περίπτωση  $A = \emptyset$ , τι θα προτείνατε; Πάρτε για δεδομένο ότι προτάσεις της μορφής « $\Pi_1 \Rightarrow \Pi_2$ » θεωρούνται αληθείς αν η πρόταση  $\Pi_1$  είναι ψευδής, ανεξάρτητα από το αν είναι αληθής ή όχι η  $\Pi_2$ .

## Κεφάλαιο 3

# Γενικά περί ακολουθιών

### 3.1 Ακολουθίες και υπακολουθίες

**Ορισμός 3.1** Κάθε συνάρτηση  $f : A \subseteq \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ , όπου το  $A$  είναι άπειρο σύνολο, λέγεται *ακολουθία πραγματικών αριθμών* ή απλά *ακολουθία*.

Για τις ακολουθίες δεν χρησιμοποιούμε το γράμμα  $f$ , αλλά γράμματα όπως  $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$  κλπ. Επίσης αντί να γράφουμε  $a(n)$  για την τιμή της  $a$  στο  $n \in \mathbb{N}$  γράφουμε  $a_n$ . Αν θέλουμε να αναφερθούμε σε μια ακολουθία, δεν γράφουμε «η ακολουθία  $a : A \mapsto \mathbb{R}$ » αλλά «η ακολουθία  $(a_n)_{n \in A}$ ». Αν  $A = \mathbb{N}$  εκτός από «η ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » μπορεί να γράψουμε και  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ . Αν δεν υπάρχει λόγος να δηλώσουμε το πεδίο ορισμού γράφουμε «η ακολουθία  $(a_n)$ ». Τέλος αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, για απλοποίηση του συμβολισμού, γράφουμε ακόμα και «η ακολουθία  $a_n$ » παραλείποντας και τις παρενθέσεις. Συχνά (αλλά όχι πάντα) το πεδίο ορισμού θα είναι όλο το σύνολο  $\mathbb{N}$ .

**Παράδειγμα 3.2** Η συνάρτηση  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $a_n = 1/n$  είναι μια ακολουθία. Έχουμε  $a_1 = 1, a_2 = 1/2, a_3 = 1/3$ , κλπ. Μια άλλη είναι η ακολουθία  $b_n = n!$  όπου  $b_1 = 1, b_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2, b_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, b_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ , κλπ.

**Ορισμός 3.3** Οι αριθμοί  $a_n$ , δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας  $(a_n)_{n \in A}$  για κάθε  $n \in A$  λέγονται *όροι* της ακολουθίας. Ο όρος  $a_n$  (δηλαδή η τιμή της ακολουθίας στο  $n$ ) ονομάζεται *n-στός όρος* ή *γενικός όρος* της ακολουθίας  $(a_n)_{n \in A}$ . Το σύνολο  $\{a_n : n \in A\}$  ονομάζεται *σύνολο των όρων της ακολουθίας*, ενώ για κάθε  $m \in \mathbb{N}$  κάθε σύνολο της μορφής  $\{a_n : n \in A \text{ και } n \geq m\}$  ονομάζεται *τελικό τμήμα της ακολουθίας*.

Μια ακολουθία ορίζεται είτε με έναν τύπο για τον  $n$ -στό της όρο (όπως  $a_n = 1/n$ ) είτε αναδρομικά (για παράδειγμα  $a_1 = 1$  και  $a_{n+1} = a_n/2$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ) είτε με άλλο τρόπο με τον οποίο καθορίζονται με ακρίβεια όλοι οι όροι της και όχι με την παράθεση λίγων όρων. Με το τελευταίο

εννοούμε ότι δεν έχει νόημα η φράση

«θεωρούμε την ακολουθία  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ »

διότι δεν είναι σαφές αν πρόκειται για την ακολουθία με τύπο  $1/n$  ή για την ακολουθία με τύπο

$$\frac{1}{n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

οι οποίες διαφέρουν από τον πέμπτο όρο και μετά ή κάποια άλλη που ξεκινάει με αυτούς τους όρους.

Αν περιορίσουμε μια ακολουθία σε ένα άπειρο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της τότε ο περιορισμός αυτός λέγεται *υπακολουθία* της αρχικής ακολουθίας.

**Ορισμός 3.4** Υποθέτουμε ότι η ακολουθία  $a_n$  είναι ορισμένη για κάθε  $n \in A \subseteq \mathbb{N}$ . Αν  $B$  άπειρο υποσύνολο του  $A$  τότε η ακολουθία  $a_n|_{n \in B}$  ονομάζεται *υπακολουθία* της  $a_n$ .

**Παράδειγμα 3.5** Θεωρήστε την ακολουθία  $a_n = 1/n$ . Αν αντί για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  χρησιμοποιήσουμε μόνο τους άρτιους  $n$  θα πάρουμε μια υπακολουθία της αρχικής. Αυτή η υπακολουθία είναι η  $a_n$  με  $n$  άρτιο. Επειδή κάθε άρτιος είναι της μορφής  $2n$  για  $n \in \mathbb{N}$  μπορούμε να πούμε ότι αυτή η υπακολουθία είναι η  $a_{2n} = 1/(2n)$ . Έτσι ενώ η  $a_n$  έχει όρους τους

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

η υπακολουθία  $a_{2n}$  έχει τους όρους

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

**Παράδειγμα 3.6** Θεωρούμε ένα (σταθερό)  $m \in \mathbb{N}$  και μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ορίζουμε την ακολουθία  $b_n = a_{m+n}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Η  $b_n$  είναι υπακολουθία της  $a_n$ , αφού φανερά

$$b_n = a_n |_{\{n \in \mathbb{N} : n > m\}}.$$

Παρατηρώντας ότι το σύνολο των όρων της  $b_n$  είναι το σύνολο

$$\{a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots\}$$

συμπεραίνουμε ότι κάθε τελικό τμήμα της  $a_n$  είναι υπακολουθία της!

**Ορισμός 3.7** (Ισότητα ακολουθιών) Δυο ακολουθίες  $(a_n)_{n \in A}$  και  $(b_n)_{n \in B}$  λέγονται ίσες αν  $A = B$  και  $a_n = b_n$  για κάθε  $n \in A$ .

## Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.1. Περιγράψτε τις υπακολουθίες των «άρτιων όρων» των ακολουθιών

$$n!, \quad (-1)^n.$$

Άσκηση 3.1.2. Δείξτε ότι η φράση

«θεωρούμε την ακολουθία 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, ...»

δεν αναφέρεται απαραίτητα σε μια υπακολουθία των πρώτων φυσικών αριθμών εξετάζοντας τους όρους της  $a_n = n^2 - n + 41$  μέχρι τον τεσσαρακοστό πρώτο όρο.

Ομοίως ελέγξτε ότι η ακολουθία  $b_n = n^2 - 79n + 1601$  παράγει πρώτους αριθμούς μέχρι τον ογδοηκοστό όρο, αλλά  $b_{81} = 1763 = 41 \cdot 43$ .

Άσκηση 3.1.3. Αν  $a_n$  είναι το πλήθος όλων των διαγωνίων ενός κυρτού  $n$ -γώνου, δείξτε επαγωγικά ότι  $a_n = (n^2 - 3n)/2$ .

## 3.2 Πράξεις ακολουθιών

Αν δυο ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  ορίζονται για κάθε  $n \in A \subseteq \mathbb{N}$  ορίζονται και όλες οι πράξεις μεταξύ τους με τον αναμενόμενο τρόπο.

**Ορισμός 3.8** Η ακολουθία  $s_n$  όπου  $s_n = a_n + b_n$  για κάθε  $n \in A$  ονομάζεται *άθροισμα* των ακολουθιών  $a_n$  και  $b_n$ . Η ακολουθία  $d_n = a_n - b_n$  ονομάζεται *διαφορά* των ακολουθιών  $a_n$  και  $b_n$ . Η ακολουθία  $p_n = a_n b_n$  για κάθε  $n \in A$  ονομάζεται *γινόμενο* των ακολουθιών  $a_n$  και  $b_n$ .

Αν  $a_n = 1/n^3$  και  $b_n = n^2$  τότε

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \frac{1}{n^3} + n^2 = \frac{1 + n^5}{n^3} \\ a_n - b_n &= \frac{1}{n^3} - n^2 = \frac{1 - n^5}{n^3} \\ a_n b_n &= \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ειδικά για το πηλίκο δύο ακολουθιών θα πρέπει να προσέξουμε ώστε η ακολουθία στον διαιρέτη να μην έχει μηδενικούς όρους.

**Ορισμός 3.9** Αν οι  $a_n$  και  $b_n$  είναι ακολουθίες με  $n \in A \subseteq \mathbb{N}$  και επιπλέον  $b_n \neq 0$  για κάθε  $n \in A$ , τότε η ακολουθία  $q_n = a_n/b_n$  ονομάζεται *πηλίκο* των ακολουθιών  $a_n$  και  $b_n$ .

Αν  $a_n = 1/n^3$  και  $b_n = n^2$  όπως παραπάνω, τότε ισχύει  $b_n = n^2 \neq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , οπότε ορίζεται το πηλίκο:  $a_n/b_n = 1/n^5$ .

Τέλος ορίζεται και η σύνθεση ακολουθιών ως εξής.

**Ορισμός 3.10** Αν η  $k_n$  είναι μια ακολουθία  $k_n : A \mapsto B$  όπου  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  και  $x_n$  μια ακολουθία με πεδίο ορισμού το  $B$ , τότε ορίζεται η ακολουθία  $c_n = x_{k_n}$  η οποία ονομάζεται *σύνθεση* των ακολουθιών  $k_n$  και  $x_n$ .

**Παρατήρηση 3.11** Αν για την ακολουθία  $k_n$  του προηγούμενου ορισμού ισχύει

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots,$$

δηλαδή  $k_n < k_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε η σύνθεση με την  $x_n$  είναι μια υπακολουθία της  $x_n$ . Πράγματι, αυτό είναι φανερό, αφού

$$x_{k_n} = x_n \Big|_{\{k_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Αυτό ισχύει και αντίστροφα: έστω ότι η  $y_n = x_n|_B$  μια υπακολουθία της  $x_n$ . Το σύνολο  $B$  γράφεται στη μορφή  $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$  με  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ , αφού το  $B$  έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το  $k_1$ , και στη συνέχεια το  $B \setminus \{k_1\}$  έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το  $k_2$ , και ούτω καθ' εξής (εδώ χρησιμοποιήσαμε την καλή διάταξη του  $\mathbb{N}$ ).

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες  $k_n = n^2 \in \mathbb{N}$  και  $x_n = 1/n$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\mathbb{N}$ . Η σύνθεσή τους είναι η ακολουθία  $c_n = x_{k_n} = x_{n^2}$ . Δηλαδή πρόκειται για υπακολουθία της  $x_n$ : η  $x_n$  έχει όρους

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots$$

ενώ η  $c_n = x_{n^2}$  έχει όρους

$$\frac{1}{1^2} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \dots$$

**Παρατήρηση 3.12** Αν θεωρήσουμε μια  $k_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  η οποία δεν ικανοποιεί την  $k_1 < k_2 < \dots$  τότε δεν είναι απαραίτητο η  $x_{k_n}$  να είναι υπακολουθία της  $x_n$ . Για παράδειγμα, αν  $k_n = 3$  σταθερή και  $x_n = 1/n$  τότε η σύνθεση  $x_{k_n}$  που έχει όρους τους  $1/3, 1/3, 1/3$  κλπ φανερά δεν είναι υπακολουθία της  $x_n$  που έχει όρους  $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$  κλπ. Αλλά ακόμα και αν το σύνολο τιμών της  $x_{k_n}$  είναι το ίδιο με αυτό της  $x_n$  πάλι η  $x_{k_n}$  μπορεί να μην είναι υπακολουθία της  $x_n$ . Για παράδειγμα, θεωρούμε την  $k_1 = 2, k_2 = 1 < k_1, k_n = n$  για κάθε  $n \geq 3$  και την ακολουθία  $x_n = 1/n$ . Το πεδίο τιμών της  $c_n = x_{k_n}$  είναι το ίδιο με αυτό της  $x_n$ . Έτσι αν ισχύει  $c_n = x_n|_B$  για κάποιο  $B \subseteq \mathbb{N}$ , ο μόνος τρόπος να ανήκει το  $1/2$  στο πεδίο τιμών της  $c_n$  είναι να ισχύει  $2 \in B$  (αφού η  $x_n$  ισούται με  $1/2$  μόνο για  $n = 2$ ). Αλλά τότε θα έπρεπε να ισχύει  $c_2 = x_2$  το οποίο είναι ψευδές, αφού

$$c_2 = x_{k_2} = x_1 = 1 \neq \frac{1}{2} = x_2.$$

### 3.3 Εφαρμογές και παραδείγματα

Πολλές φορές, παρόλο που η παράθεση πεπερασμένου πλήθους όρων δεν μπορεί να ορίσει μια ακολουθία, όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1, ορίζουμε ακολουθίες ως αθροίσματα, για παράδειγμα της μορφής

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

στο οποίο εμφανίζονται πεπερασμένο πλήθος όρων. Τέτοιες εκφράσεις όμως είναι σαφείς από τον γενικό προσθετέο που φαίνεται στον τελευταίο όρο της έκφρασης. Δηλαδή ο υπολογισμός της  $x_n$  απαιτεί να προσθέσουμε όλα τα κλάσματα  $1/k$  για  $k \in \mathbb{N}$  και  $k \leq n$ . Έτσι για να καταλάβουμε μέχρι ποιο κλάσμα προσθέτουμε κάθε φορά κοιτάμε τον τελευταίο όρο του αθροίσματος.

**Παράδειγμα 3.13** Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

Για να βρούμε τον πρώτο όρο κοιτάμε με τι ισούται το  $1/n$  όταν  $n = 1$ . Επειδή αυτό ισούται με  $1/1 = 1$  συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα θα σταματήσει στο 1, δηλαδή  $x_1 = 1$ . Για να βρούμε τον  $x_2$  παρατηρούμε ότι το  $1/n$  ισούται με  $1/2$  όταν  $n = 2$  άρα το άθροισμα θα σταματήσει στο  $1/2$ , δηλαδή  $x_2 = 1 + 1/2$ . Ομοίως  $x_3 = 1 + 1/2 + 1/3$ .

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μας δίνεται μια ακολουθία η οποία ορίζεται αναδρομικά, για παράδειγμα  $a_1 = 2$  και  $a_{n+1} = 2 + a_n/3$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , και πρέπει να βρούμε τον  $n$ -στο όρο της,  $a_n$  ως συνάρτηση του  $n$ . Στις απλούστερες αυτών των προβλημάτων η εξίσωση που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε τόσο την  $a_n$  όσο και την  $a_{n+1}$  με  $x$ , η οποία ονομάζεται «εξίσωση αναδρομής», έχει λύση. Τότε ακολουθούμε το τέχνασμα που παρουσιάζεται στα παρακάτω παραδείγματα. Μια γενικότερη θεωρία των γραμμικών αναδρομικών ακολουθιών παρουσιάζεται στο βιβλίο [7].

**Παράδειγμα 3.14** Βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας  $a_1 = 4$  και  $a_{n+1} = 2 + a_n/3$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Σχηματίζουμε την εξίσωση αναδρομής  $x = 2 + x/3$  η οποία έχει μοναδική λύση την  $x = 3$ . Στη συνέχεια αφαιρούμε τον αριθμό 3 και από τα δύο μέλη του αναδρομικού τύπου:

$$a_{n+1} - 3 = \left(2 + \frac{a_n}{3}\right) - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} a_n - 3 &= \frac{1}{3}(a_{n-1} - 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (a_{n-2} - 3) = \dots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 3) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

(Ο σωστός εκθέτης στην προτελευταία ισότητα είναι πράγματι  $n - 1$ : το βρίσκουμε παρατηρώντας ότι ο εκθέτης του κλάσματος  $1/3$  σε κάθε ισότητα αθροίζεται στο  $n$  όταν του προστεθεί ο δείκτης του όρου της ακολουθίας που είναι στην παρένθεση (για παράδειγμα  $2 + (n - 2) = n$ ).

Άρα ο γενικός όρος της  $a_n$  είναι  $a_n = 3 + (1/3)^{n-1}$ .

**Παράδειγμα 3.15** Βρείτε τον γενικό όρο της  $a_n$  με  $a_1 = 5$  και  $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n}$ .

Η εξίσωση αναδρομής  $x = 5 - 6/x$  έχει δύο λύσεις, τις 2 και 3. Αφαιρούμε από την αναδρομική εξίσωση της ακολουθίας τόσο τον 2 όσο και τον 3. Αφαιρώντας τον 2 μετά από πράξεις παίρνουμε

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{a_n}(a_n - 2),$$

και αφαιρώντας το 3,

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2}{a_n}(a_n - 3).$$

Τώρα θέλουμε να διαιρέσουμε κατά μέλη, αλλά για να το κάνουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε ότι κανένας όρος της  $a_n$  δεν ισούται με 3. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από την τελευταία. Αν  $a_{n+1} = 3$  για κάποιο  $n$  τότε  $a_n = 3$ . Δηλαδή αν κάποιος όρος της ακολουθίας ισούται με 3 τότε ισούται με 3 και ο προηγούμενος. Επαγωγικά θα καταλήξουμε σε άτοπο, αφού  $a_1 = 5 \neq 3$ .

Διαιρώντας λοιπόν κατά μέλη οδηγούμαστε στην

$$\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 3} = \frac{3}{2} \frac{a_n - 2}{a_n - 3}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{a_n - 2}{a_n - 3} &= \frac{3}{2} \frac{a_{n-1} - 2}{a_{n-1} - 3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a_{n-2} - 2}{a_{n-2} - 3} = \dots = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{a_1 - 2}{a_1 - 3} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς  $a_n$  (αφαιρούμε αριθμητές από παρονομαστές!) παίρνουμε αμέσως

$$a_n = 2 + \frac{3^n}{3^n - 2^n}.$$

**Παράδειγμα 3.16** Βρείτε τον γενικό όρο της  $a_n$  με  $a_1 = 5$  και  $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ .

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση αναδρομής  $x = (4x - 9)/(x - 2)$  είναι ισοδύναμη με την  $(x - 3)^2 = 0$  δηλαδή έχει διπλή ρίζα το 3. Σε αυτές τις περιπτώσεις κάνουμε το εξής τέχνασμα: πρώτα αφαιρούμε τη διπλή ρίζα για να καταλήξουμε στη σχέση

$$a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n - 2}.$$

Τώρα αντιστρέφουμε τους όρους:

$$\frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{a_n - 3 + 1}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_n - 3}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_{n-1} - 3} = 2 + \frac{1}{a_{n-2} - 3} = \dots = n - 1 + \frac{1}{a_1 - 3} = n - \frac{1}{2}.$$

Αντιστρέφοντας τους όρους της εξίσωσης και λύνοντας ως προς  $a_n$  παίρνουμε

$$a_n = 3 + \frac{2}{2n - 1}.$$

## Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.1. Γράψτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

και της

$$b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}.$$

Άσκηση 3.3.2. Βρείτε τον τύπο της υπακολουθίας των περιττών όρων των ακολουθιών:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad b_n = \cos(n\pi), \quad c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Άσκηση 3.3.3. Θεωρήστε την ακολουθία  $a_n = \log n$ . Βρείτε τους τύπους των υπακολουθιών

$$a_{n^2}, \quad a_{n^m}, \quad a_{2^n}, \quad a_{n!}.$$

Άσκηση 3.3.4. Βρείτε τους γενικούς τύπους των ακολουθιών  $a_n$ ,  $b_n$  και  $c_n$  που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

1.  $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}a_n, \quad a_1 = 2,$
2.  $b_{n+1} = 3 - \frac{2}{b_n}, \quad b_1 = 3,$
3.  $c_{n+1} = \frac{3c_n - 1}{4c_n + 7}, \quad c_1 = \frac{3}{4}.$

## Κεφάλαιο 4

# Μονότονες ακολουθίες

### 4.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με γενικό όρο  $a_n = (n-1)/n$ . Παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = a_n.$$

Δηλαδή για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_n < a_{n+1}$ . Για μια ακολουθία  $a_n$  με αυτή την ιδιότητα λέμε ότι η  $a_n$  είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

#### Ορισμός 4.1

- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *γνησίως αύξουσα*, και γράφουμε  $a_n \nearrow$ , αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_n < a_{n+1}$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *αύξουσα*, και γράφουμε  $a_n \uparrow$ , αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_n \leq a_{n+1}$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *γνησίως φθίνουσα*, και γράφουμε  $a_n \searrow$ , αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_n > a_{n+1}$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *φθίνουσα*, και γράφουμε  $a_n \downarrow$ , αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_n \geq a_{n+1}$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *γνησίως μονότονη* αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *μονότονη* αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι μια γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη· μια γνήσια αύξουσα είναι και αύξουσα, αφού αν  $a_n < a_{n+1}$  τότε  $a_n \leq a_{n+1}$  και ομοίως για τις γνήσια φθίνουσες. Το αντίστροφο

δεν είναι βεβαίως σωστό, αφού για παράδειγμα μια σταθερή ακολουθία  $a_n = 3$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  είναι και αύξουσα και φθίνουσα αλλά δεν είναι ούτε γνήσια αύξουσα ούτε γνήσια φθίνουσα.

Συχνά για να εξετάσουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας  $a_n$  εξετάζουμε αν οι διαφορές  $a_{n+1} - a_n$  έχουν το ίδιο πρόσημο για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Έτσι αν για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_{n+1} - a_n \geq 0$  τότε η  $a_n$  είναι αύξουσα, και ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις. Αν μας ενδιαφέρει απλά ο έλεγχος της μονοτονίας (και όχι απαραίτητα το είδος της) μπορούμε να εξετάσουμε αν το γινόμενο  $(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} - a_n)$  έχει σταθερό πρόσημο για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Αν αυτό συμβαίνει, φανερά η ακολουθία είναι μονότονη, αφού σε αυτή την περίπτωση κανένας παράγοντας  $(a_{n+2} - a_{n+1})$  δεν μπορεί να αλλάξει πρόσημο σε σχέση με τον  $(a_{n+1} - a_n)$ .

Επιπλέον για θετικές ακολουθίες  $a_n$  μπορούμε να εξετάζουμε αν ο λόγος  $a_{n+1}/a_n$  είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 ή μικρότερος ή ίσος του 1. Φανερά αν  $a_{n+1}/a_n \geq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  τότε η ακολουθία είναι αύξουσα, ενώ αν  $a_{n+1}/a_n \leq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  τότε η ακολουθία είναι φθίνουσα.

**Πρόταση 4.2** *Αν η ακολουθία  $a_n$  είναι μονότονη τότε κάθε υπακολουθία της έχει την ίδια μονοτονία με την  $a_n$ .*

*Απόδειξη:* Έστω ότι η  $c_n = a_{k_n}$  είναι υπακολουθία της  $a_n$  με  $k_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  με  $k_1 < k_2 < \dots$ , δηλαδή η  $k_n$  είναι γνήσια αύξουσα. Υποθέτουμε ότι η  $a_n$  είναι αύξουσα. Φανερά ισχύει

$$c_n = a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}} \leq a_{k_{n+2}} \leq \dots \leq a_{k_{n+1}} = c_{n+1},$$

οπότε και η  $c_n$  είναι αύξουσα. Ομοίως αν η  $a_n$  έχει οποιοδήποτε άλλο είδος μονοτονίας.  $\square$

Δεν είναι βεβαίως αλήθεια ότι κάθε ακολουθία είναι μονότονη. Για παράδειγμα, η ακολουθία  $a_n = (-1)^n/n$  δεν είναι αύξουσα, αφού  $a_3 = -1/3 < 1/2 = a_2$  αλλά ούτε και φθίνουσα, αφού  $a_1 = -1 < 1/2 = a_2$ . Παρατηρούμε όμως ότι η υπακολουθία των αρτίων όρων της  $a_{2n} = 1/(2n)$  είναι φθίνουσα (και των περιττών της όρων είναι αύξουσα). Βλέπουμε δηλαδή ότι παρόλο που η ίδια η  $a_n$  δεν έχει κανένα είδος μονοτονίας, εν τούτοις έχει τουλάχιστον μια μονότονη υπακολουθία. Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο και διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.3** *Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μια μονότονη υπακολουθία.*

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το σύνολο των σημείων κορυφής της ακολουθίας  $a_n$ :

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a_k \geq a_n \text{ για κάθε } n \geq k\}.$$

Αν το  $A$  είναι άπειρο σύνολο, έστω ότι περιέχει τα στοιχεία

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$$

Αφού το  $k_n$  είναι σημείο κορυφής (δηλαδή στοιχείο του  $A$ ) και  $k_{n+1} > k_n$  συμπεραίνουμε ότι  $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και συνεπώς η  $a_{k_n}$  είναι φθίνουσα.

Αν σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο  $A$  είναι πεπερασμένο. Έστω ότι  $m$  είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του. Τότε το  $k_1 := m + 1$  δεν ανήκει το  $A$  οπότε υπάρχει  $k_2 > k_1$  ώστε  $a_{k_1} < a_{k_2}$ . Αλλά τώρα  $k_2 > k_1 = m + 1$  οπότε  $k_2 \notin A$ . Έτσι υπάρχει  $k_3 > k_2$  ώστε  $a_{k_2} < a_{k_3}$ . Επαγωγικά, αν έχουμε ορίσει τον  $a_{k_n}$  για  $k_n > k_{n-1} \dots > k_1 = m + 1$  ισχύει  $k_n \notin A$ , οπότε υπάρχει  $k_{n+1} > k_n$  ώστε  $a_{k_n} < a_{k_{n+1}}$ . Επαγωγικά λοιπόν, ορίζεται η υπακολουθία  $a_{k_n}$  η οποία από την κατασκευή της είναι γνησίως αύξουσα.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η  $a_n$  έχει μια μονότονη υπακολουθία.  $\square$

## 4.2 Εφαρμογές και παραδείγματα

**Παράδειγμα 4.4** Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία  $a_n = (n^2 - 1)/(2n)$ .

Ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n(n+1)} > 0$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς η  $a_n$  είναι γνησίως αύξουσα.

Άλλος τρόπος:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{2n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = a_{n+1}.$$

**Παράδειγμα 4.5** Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία  $a_n$  με  $a_1 = 1$  και  $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ .

Ο έλεγχος γίνεται εύκολα με επαγωγή: για  $n = 1$  ισχύει

$$a_2 = \sqrt{1 + a_1} = \sqrt{2} > 1 = a_1.$$

Υποθέτοντας ότι  $a_{n+1} > a_n$ , έχουμε

$$a_{n+2} = \sqrt{1 + a_{n+1}} > \sqrt{1 + a_n} = a_{n+1}.$$

**Παράδειγμα 4.6** Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = (1 + 1/n)^n$  είναι γνησίως αύξουσα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli στην ακολουθία  $(1 - 1/n^2)^n$ .

Σύμφωνα με την υπόδειξη

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

άρα για κάθε  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

## Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ακολουθίες

$$a_n = 3n + 2$$

$$a_n = \frac{n+4}{n^2+1}$$

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$a_n = \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) (n+2)$$

$$a_n = 2^{n+2} \sin \frac{\theta}{2^n}, \text{ με } 0 < \theta < \pi/2$$

$$a_n = \frac{(2n)! \sqrt{n}}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

Άσκηση 4.2.2. Αποδείξτε ότι αν  $k_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ισχύει  $k_n \geq n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Άσκηση 4.2.3. Δίνεται μια ακολουθία  $a_k$  με  $k \in \mathbb{N}$ . Θέτουμε  $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$  και  $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ . Δείξτε ότι οι  $b_n$  και  $c_n$  είναι μονότονες.

## Κεφάλαιο 5

# Φραγμένες ακολουθίες

### 5.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Θεωρούμε την ακολουθία  $a_n = (n-1)/n$ . Παρατηρούμε ότι  $a_n = 1 - 1/n$ . Έτσι κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 1. Δηλαδή  $a_n = 1 - 1/n \leq 1$ . Για αυτή την ακολουθία λέμε ότι είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 1 ή ότι το 1 είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας. Παρατηρήστε ότι, αφού  $a_n \leq 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  άρα  $a_n \leq 2$  και  $a_n \leq \sqrt{3}$  και γενικώς  $a_n \leq M$  για κάθε  $M \geq 1$ . Έτσι το άνω φράγμα μιας ακολουθίας δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο αλλά αν μια ακολουθία έχει ένα άνω φράγμα τότε κάθε μεγαλύτερος από αυτό αριθμός είναι και αυτός άνω φράγμα της ακολουθίας. Για αυτό λέμε «ένα άνω φράγμα» και όχι «το άνω φράγμα» της  $a_n$ . Γενικότερα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

#### Ορισμός 5.1

- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *άνω φραγμένη* αν υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  ώστε  $a_n \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Το  $M$  λέγεται (ένα) άνω φράγμα της  $a_n$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *κάτω φραγμένη* αν υπάρχει  $m \in \mathbb{R}$  ώστε  $a_n \geq m$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Το  $m$  λέγεται (ένα) κάτω φράγμα της  $a_n$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη; δηλαδή, αν υπάρχουν  $M, m \in \mathbb{R}$  ώστε  $m \leq a_n \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .
- Μια ακολουθία  $a_n$  λέγεται *απολύτως φραγμένη* αν υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  ώστε  $|a_n| \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Φανερά από τον ορισμό, αν η  $a_n$  είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό  $M$  τότε και κάθε υπακολουθία της  $a_n$  είναι άνω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό  $M$ . Ομοίως, αν η  $a_n$  είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό  $m$  τότε και κάθε υπακολουθία της  $a_n$  είναι κάτω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό  $m$ .

Αν ο αριθμός  $b$  δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας  $a_n$ , αυτό σημαίνει ότι δεν είναι όλοι οι όροι της ακολουθίας μικρότεροι του  $b$ . Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος  $a_{n_0}$ , για κάποιο  $n_0 \in \mathbb{N}$ , ώστε  $b < a_{n_0}$ .

Ομοίως, αν ο αριθμός  $c$  δεν είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας  $a_n$ , αυτό σημαίνει ότι δεν είναι όλοι οι όροι της ακολουθίας μεγαλύτεροι του  $c$ . Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος  $a_{n_0}$ , για κάποιο  $n_0 \in \mathbb{N}$ , ώστε  $a_{n_0} < c$ .

**Παρατήρηση 5.2** Μια ακολουθία  $a_n$  που είναι φθίνουσα είναι άνω φραγμένη, αφού φανερά  $a_n \leq a_1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Ομοίως μια αύξουσα ακολουθία  $a_n$  είναι κάτω φραγμένη, αφού  $a_n \geq a_1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Πρόταση 5.3** Μια ακολουθία  $a_n$  είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απολύτως φραγμένη.

*Απόδειξη:* Αν η  $a_n$  είναι απολύτως φραγμένη, τότε υπάρχει ένας αριθμός  $M \in \mathbb{N}$  ώστε  $|a_n| \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Συνεπώς,  $-M \leq a_n \leq M$  και άρα η  $a_n$  είναι φραγμένη.

Αν η  $a_n$  είναι φραγμένη, τότε υπάρχουν αριθμοί  $m, M \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  να ισχύει  $m \leq a_n \leq M$ . Θέτουμε  $K = \max\{|m|, |M|\}$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

$$a_n \leq M \leq |M| \leq \max\{|m|, |M|\} = K,$$

και

$$a_n \geq m \geq -|m| \geq -\max\{|m|, |M|\} = -K.$$

Συνεπώς  $-K \leq a_n \leq K$ , δηλαδή  $|a_n| \leq K$ , ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

Όπως είπαμε και νωρίτερα τα φράγματα δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Αλλά δύο συγκεκριμένα φράγματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά:

**Ορισμός 5.4** Το ελάχιστο άνω φράγμα μιας άνω φραγμένης ακολουθίας  $(a_n)_{n \in A}$  συμβολίζεται με  $\sup a_n$  ή  $\sup_n a_n$  ή  $\sup_{n \in A} a_n$  και εκτός από ελάχιστο άνω φράγμα, ονομάζεται *άνω πέρας* ή *supremum* της  $a_n$ .

Το μέγιστο κάτω φράγμα μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας  $(a_n)_{n \in A}$ , συμβολίζεται με  $\inf a_n$  ή  $\inf_n a_n$  ή  $\inf_{n \in A} a_n$  και εκτός από μέγιστο κάτω φράγμα, ονομάζεται *κάτω πέρας* ή *infimum* της  $a_n$ .

Η ύπαρξη αυτών των φραγμάτων στο  $\mathbb{R}$  δεν έχει ακόμα αποδειχθεί. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε αυστηρά το  $\mathbb{R}$ , κάτι που θα γίνει στο Κεφάλαιο Β'. Προς το παρόν δεχόμαστε την ύπαρξή τους στο  $\mathbb{R}$ .

Πολύ σημαντική είναι η παρακάτω ιδιότητα που μας επιτρέπει να χειριζόμαστε αυτά τα ιδιαίτερα φράγματα, και χρησιμοποιείται συστηματικά όποτε και όπου αυτά εμφανίζονται.

**Παρατήρηση 5.5**

- Αν το  $s \in \mathbb{R}$  είναι το άνω πέρασ μιας ακολουθίας  $a_n$ , δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα της  $a_n$ , τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  το  $s - \varepsilon$ , ως μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος  $s$ , δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας! Άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $s - \varepsilon < a_{n_0}$ .
- Αν το  $i \in \mathbb{R}$  είναι το κάτω πέρασ μιας ακολουθίας  $a_n$ , δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα της  $a_n$ , τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  το  $i + \varepsilon$ , ως μεγαλύτερο του μεγίστου κάτω φράγματος  $i$ , δεν είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας! Άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $a_{n_0} < i + \varepsilon$ .

**Παρατήρηση 5.6** Αν μια ακολουθία  $a_n$  δεν είναι άνω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι το άνω πέρασ της είναι το  $+\infty$ . Γράφουμε  $\sup a_n = +\infty$ . Ομοίως, αν δεν είναι κάτω φραγμένη θεωρούμε ότι το κάτω πέρασ της είναι το  $-\infty$ , και γράφουμε  $\inf a_n = -\infty$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις, φανερά δεν ισχύει η Παρατήρηση 5.5, αφού πάντα  $-\infty < a_n < +\infty$ .

## 5.2 Εφαρμογές και παραδείγματα

**Παράδειγμα 5.7** Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες  $a_n = (3n^2 - 1)/(2n^2 + 1)$ ,  $b_n = (3n^2 + 1)/(2n^2 - 1)$ ,  $c_n = (3n^2 + 1)/(n^2 - 3)$  για  $n \geq 2$ , και  $d_n = (3n^2 + 1)/(n^2 - n - 1)$  για  $n \geq 2$ , είναι φραγμένες.

Φανερά και οι τέσσερις ακολουθίες είναι θετικές οπότε μένει να αποδειχθεί ότι είναι άνω φραγμένες. Για αυτό προσπαθούμε να μεγαλώσουμε τις ακολουθίες απλοποιώντας τις αλλά χωρίς να αλλάξουμε την τάξη μεγέθους αριθμητή και παρονομαστή. Έτσι έχουμε:

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{2n^2 + 1} \leq \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

συνεπώς η  $a_n$  είναι άνω φραγμένη από το  $3/2$ .

Για τη  $b_n$  δεν μπορούμε να κάνουμε ακριβώς το ίδιο τέχνασμα για το άνω φράγμα, διότι το να διαγράψουμε το  $+1$  από τον αριθμητή ή το  $-1$  από τον παρονομαστή δεν μεγαλώνει, αλλά μικραίνει το κλάσμα. Μπορούμε όμως να μεγαλώσουμε το  $+1$  του αριθμητή σε  $+n^2$  και να μικρύνουμε το  $-1$  του παρονομαστή με  $-n^2$ , αλλαγές που δεν αλλάζουν την τάξη μεγέθους των όρων του κλάσματος:

$$b_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - 1} \leq \frac{3n^2 + n^2}{2n^2 - n^2} = 4.$$

Για τη  $c_n$  δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $-3$  του παρονομαστή με  $-n^2$  όπως κάναμε στην  $b_n$  διότι θα μηδενιστεί ο παρονομαστής. Μπορούμε όμως να ελέγξουμε ότι  $3 < n^2/3$  για κάθε  $n \geq 3$ . Έτσι για  $n \geq 3$

$$c_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 - 3} \leq \frac{3n^2 + n^2}{n^2 - \frac{1}{3}n^2} = \frac{4n^2}{\frac{2}{3}n^2} = 6.$$

Η ακολουθία όμως ορίζεται για  $n \geq 2$ . Άρα για να βρούμε ένα άνω φράγμα πρέπει να ελέγξουμε μήπως το  $c_2$  είναι μεγαλύτερος του 6. Πράγματι  $c_2 = 13$ . Άρα

$$c_n \leq \max\{6, 13\} = 13.$$

Τέλος για την  $d_n$  αναζητούμε  $n_0$  ώστε  $n + 1 \leq n^2/2$  για κάθε  $n \geq n_0$  ώστε να απλοποιήσουμε τον παρονομαστή χρησιμοποιώντας ότι  $n^2 - n - 1 = n^2 - (n + 1) \geq n^2 - n^2/2 = n^2/2$ . Η  $n + 1 \leq n^2/2$  είναι ισοδύναμη με την  $n^2 - 2n - 2 \geq 0$  η οποία είναι αληθής για κάθε  $n \geq 3$  (η εξίσωση  $x^2 - 2x - 2 = 0$  είναι θετική για κάθε  $x > 1 + \sqrt{3} \approx 2,7320508$ ). Οπότε για κάθε  $n \geq 3$ ,

$$d_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 - n - 1} \leq \frac{3n^2 + n^2}{n^2 - \frac{1}{2}n^2} = 8.$$

Επειδή τώρα  $d_2 = 13$  συμπεραίνουμε ότι  $d_n \leq \max\{13, 8\} = 13$ .

**Παράδειγμα 5.8** Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $a_n$  με  $a_1 = 8$  και  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$  είναι άνω φραγμένη από το 8. Δείξτε ότι αν ο  $a_1$  δοθεί να είναι μικρότερος από τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης αναδρομής  $x = \sqrt{2 + x}$  τότε το ίδιο ισχύει και για τον γενικό όρο της  $a_n$ . Τέλος αποδείξτε ότι αν  $r > 0$  τότε κάθε ακολουθία με  $a_1 > 0$  και αναδρομικό τύπο  $a_{n+1} = \sqrt{r + a_n}$  είναι άνω φραγμένη από το  $\max\{a_1, \rho\}$  όπου  $\rho$  η μέγιστη ρίζα της εξίσωσης αναδρομής  $x = \sqrt{r + x}$ .

Πράγματι, για  $n = 1$  ισχύει  $a_1 = 8 \leq 8$ . Υποθέτουμε ότι  $a_n \leq 8$ . Τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 8} \leq \sqrt{16} = 4 \leq 8,$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Η εξίσωση αναδρομής έχει μεγαλύτερη ρίζα τον αριθμό  $x = 2$ . Αν  $a_1 \leq 2$  και υποθέσουμε ότι  $a_n \leq 2$  τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2,$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Τέλος, αν θέσουμε  $M = \max\{a_1, \rho\}$  φανερά  $a_1 \leq M$ . Και αν υποθέσουμε ότι  $a_n \leq M$  τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{r + a_n} \leq \sqrt{r + M} \leq M,$$

αφού η τελευταία είναι ισοδύναμη με την  $M^2 - M - r \geq 0$  η οποία είναι αληθής αφού το  $M$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τη μέγιστη ρίζα  $\rho$  της  $x^2 - x - r = 0$ .

**Παράδειγμα 5.9** Αποδείξτε (με κατάλληλη χρήση της ανισότητας Bernoulli) ότι η ακολουθία  $(1 + 1/2n)^n$  είναι άνω φραγμένη από το 2 και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η  $(1 + 1/n)^n$  είναι άνω φραγμένη από το 4.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n &= \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{2n+1}\right)} = \frac{2n+1}{n+1} \leq 2. \end{aligned}$$

Από το Παράδειγμα 4.6 η ακολουθία  $(1 + 1/n)^n$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n\right)^2 \leq 2^2 = 4.$$

**Παράδειγμα 5.10** Αποδείξτε ότι αν  $a_n$  αύξουσα ακολουθία και  $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$  τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  η ακολουθία  $a_n$  βρίσκεται τελικά στο διάστημα  $(s - \varepsilon, s]$ .

Χρησιμοποιούμε την Παρατήρηση 5.5: το  $s - \varepsilon$  δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας  $a_n$  άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq s$ . Αφού η  $a_n$  είναι αύξουσα, για κάθε  $n \geq n_0$  συμπεραίνουμε ότι  $s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$ , δηλαδή το ζητούμενο.

**Παράδειγμα 5.11** Αποδείξτε ότι η  $a_n = (n^2 + \sin(n\pi/2))/(n+1)$  δεν είναι άνω φραγμένη.

Έχουμε

$$\frac{n^2 + \sin(n\pi/2)}{n+1} \geq \frac{n^2 - 1}{n+1} = n - 1,$$

η οποία φανερά δεν είναι άνω φραγμένη.

## Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.1. Να εξετάσετε αν είναι φραγμένες οι παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{array}{ll} a_n = \frac{5 \sin(3n)}{4n} & a_n = \frac{n+1000}{n+100} \\ a_n = (-5)^{-n} & a_n = \frac{2n-1}{n+1} \\ a_n = \frac{n}{3^n} & a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \\ a_n = \frac{n+5}{2^n} & a_n = \frac{n^2 + 2n + 4}{n^3 + 2} \end{array}$$

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi) + n \sin(n+1)}{n^2 + n + 1}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n$$

Άσκηση 5.2.2. Να εξεταστούν ως προς το φράγμα οι ακολουθίες

$$a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n+b} \text{ με } a, b \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n+2}, \end{cases} \text{ για } n \in \mathbb{N}.$$

Άσκηση 5.2.3. Να εξεταστεί ως προς το φράγμα η ακολουθία  $a_n$  με  $a_1 = 1$  και

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + 6}{2a_n + 1}.$$

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι  $a_n > 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .)

Άσκηση 5.2.4. Για κάθε  $p > 0$  θέτουμε

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε  $p > 1$  η ακολουθία  $s_n$  είναι φραγμένη, αποδεικνύοντας (με επαγωγή) ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Επιπλέον για κάθε  $p > 0$  ισχύει

$$n^{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p}.$$

Ειδικά για  $p = 1$ , αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει

$$\frac{1}{2} \log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n.$$

Συμπεράνετε ότι για  $0 < p \leq 1$  η  $s_n$  δεν είναι φραγμένη. (Υπόδειξη: η περίπτωση  $0 < p < 1$  είναι εύκολη αν όλα τα κλάσματα του αθροίσματος αντικατασταθούν από το μικρότερο από αυτά. Αν όμως γίνει επαγωγικά, θα χρειαστεί η παρατήρηση ότι  $(n+1)^p n^{1-p} \geq n^p n^{1-p} = n$ .)

Άσκηση 5.2.5. Θεωρήστε μια αύξουσα ακολουθία  $a_n$  για την οποία υπάρχει  $c > 0$  ώστε  $a_{2n} - a_n \leq cn$ . Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $a_n/n$  είναι άνω φραγμένη. (Υπόδειξη: για κάθε ακέραιο  $k$  βρείτε πρώτα  $n$  ώστε  $2^{n-1} < k \leq 2^n$ . Επειδή η  $a_n$  είναι αύξουσα ισχύει  $a_k \leq a_{2^n}$ . Τώρα εφαρμόστε την υπόθεση.)

Άσκηση 5.2.6. Για μια ακολουθία  $a_n$  γράφουμε  $\sup a_n$  για το  $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  και  $\inf a_n$  για το  $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Δείξτε ότι για οποιοδήποτε δύο ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  ισχύει

$$\sup(a_n + b_n) \leq \sup a_n + \sup b_n$$

και

$$\inf(a_n + b_n) \geq \inf a_n + \inf b_n.$$

## Κεφάλαιο 6

# Σύγκλιση ακολουθιών

### 6.1 Μηδενικές ακολουθίες

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  κάθε διάστημα της μορφής  $(a, b)$  ώστε  $x \in (a, b)$  ονομάζεται μια ανοικτή περιοχή του  $x$  ή απλά περιοχή του  $x$ . Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε περιοχές ειδικού τύπου. Συγκεκριμένα παίρνουμε ένα θετικό αριθμό  $\varepsilon > 0$  και σχηματίζουμε την περιοχή  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  του  $x$ . Το  $x$  για αυτή την περιοχή ονομάζεται κέντρο της περιοχής και το  $\varepsilon$  ακτίνα της περιοχής. Περιοχές της μορφής  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  συμβολίζονται και με  $\varpi(x, \varepsilon)$ . Φανερά, αν  $x = 0$  τότε  $\varpi(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι  $y \in \varpi(x, \varepsilon)$  αν και μόνο αν  $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$  και ισοδύναμα  $|y - x| < \varepsilon$ . Με άλλα λόγια

$$\varpi(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \varepsilon\}.$$

Αν δοθεί ένα  $x$  και μια περιοχή του  $\varpi(x, \varepsilon)$ , λέμε ότι μια ακολουθία  $a_n$  περιέχεται τελικά σε αυτή την περιοχή αν υπάρχει ένα  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $a_n \in \varpi(x, \varepsilon)$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Για παράδειγμα, ας πάρουμε  $x = 0$  και  $a_n = 1/n$ . Βλέπουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  αν θέλουμε να ισχύει  $a_n \in \varpi(0, \varepsilon)$  θα πρέπει  $-\varepsilon < 1/n < \varepsilon$  ισοδύναμα  $n > 1/\varepsilon$ . Άρα, αν θέσουμε  $n_0 = [1/\varepsilon] + 1 \in \mathbb{N}$ , αν  $n \geq n_0 > 1/\varepsilon$  τότε  $a_n = 1/n \in \varpi(0, \varepsilon)$ . Έτσι, για κάθε  $\varepsilon > 0$  η ακολουθία  $a_n = 1/n$  βρίσκεται τελικά στην περιοχή  $\varpi(0, \varepsilon)$ . Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι η ακολουθία  $a_n$  είναι μηδενική ή ότι έχει όριο το μηδέν ή ότι συγκλίνει στο μηδέν:

**Ορισμός 6.1** Λέμε ότι μια ακολουθία  $a_n$  συγκλίνει στο μηδέν ή ότι είναι μηδενική ή ότι έχει όριο το μηδέν αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n| < \varepsilon$ . Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε  $a_n \rightarrow 0$  ή  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ή απλούστερα  $\lim a_n = 0$ .

**Παρατήρηση 6.2** Στον παραπάνω ορισμό είτε γράφουμε  $|a_n| < \varepsilon$ , είτε γράφουμε  $|a_n| \leq \varepsilon$  το νόημα του ορισμού δεν αλλάζει:

- Αν  $|a_n| < \varepsilon$  τότε προφανώς  $|a_n| \leq \varepsilon$ .

- Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό με  $\leq$  αντί για  $<$  και για  $\varepsilon/2$  τότε θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n| \leq \varepsilon/2$  και συνεπώς  $|a_n| < \varepsilon$ .

**Παράδειγμα 6.3** Η ακολουθία  $a_n = \frac{n \sin(\pi n/4) + 1}{n^2 + 1}$  είναι μηδενική.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$|a_n| = \frac{|n \sin(\pi n/4) + 1|}{n^2 + 1} \leq \frac{|n \sin(\pi n/4)| + 1}{n^2 + 1} \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1} \leq \frac{n + n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Έτσι αν  $\varepsilon > 0$  και θέλουμε να ισχύει  $|a_n| < \varepsilon$ , αρκεί να απαιτήσουμε  $2/n < \varepsilon$  ισοδύναμα  $n > 2/\varepsilon$ . Άρα αν θέσουμε  $n_0 = [2/\varepsilon] + 1$  τότε αν  $n \geq n_0 > 2/\varepsilon$  θα έχουμε  $|a_n| \leq 2/n < \varepsilon$ . Συνεπώς η  $a_n$  είναι μηδενική.

Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα μεγαλώσαμε το κλάσμα αλλά χωρίς να μεταβάλλουμε την τάξη του  $n$  ούτε στον αριθμητή ούτε στον παρονομαστή. Αυτή την τεχνική θα τη χρησιμοποιούμε τακτικά.

## Ασκήσεις

Άσκηση 6.1.1. Δείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

$$a_n = \frac{1}{2n^3} \quad a_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{5}}{n^2} \quad a_n = \frac{5 + \sin(n\pi/5)}{n^2 + n + 1}$$

$$a_n = \frac{\sin n + \cos(3n)}{n^2} \quad a_n = \frac{1}{n^s} \text{ όπου } s \in \mathbb{Q}_+$$

Άσκηση 6.1.2. Αποδείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

$$\frac{n-1}{n^2-1}, \quad \frac{n-1}{n^2+1}, \quad \frac{8n^2-1}{2n^3+3}, \quad \frac{8n^2+1}{2n^3-3}, \quad \frac{\sin(\sqrt{n}\pi) + \cos(\sqrt[4]{n}\pi)}{n},$$

$$\frac{n^{11/6} + n^{9/5} + n^{7/4} + n^{5/3} + n^{3/2} + 1}{n^2 - n + 1}.$$

Άσκηση 6.1.3. Αποδείξτε ότι αν μια ακολουθία  $a_n$  είναι φθίνουσα και μηδενική τότε  $a_n \geq 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

## 6.2 Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών

**Ιδιότητα 6.4** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  ισχύει

$$\lim a_n = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim |a_n| = 0.$$

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\lim a_n = 0$  και έστω ότι μας δόθηκε ένα  $\varepsilon > 0$ . Τότε επειδή μπορούμε να βρούμε  $n_0$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n| < \varepsilon$  συνεπάγεται ότι  $\lim |a_n| = 0$ .

Αντίστροφα, αν  $\lim |a_n| = 0$  και μας έχει δοθεί ένα  $\varepsilon > 0$ , βρίσκουμε  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n| < \varepsilon$ , οπότε επειδή  $|a_n| = |a_n|$ , συμπεραίνουμε ότι  $|a_n| < \varepsilon$ , και άρα  $\lim a_n = 0$ .  $\square$

**Ιδιότητα 6.5** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  αν  $\lim a_n = 0$  τότε η  $a_n$  είναι φραγμένη.

*Απόδειξη:* Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για  $\varepsilon = 1$ . Οπότε θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n| < 1$ . Δηλαδή ο αριθμός 1 αποτελεί άνω φράγμα για την ακολουθία  $|a_n|$  αλλά όχι για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$ , αλλά μόνο για τα  $n$  που είναι μεγαλύτερα ή ίσα με το  $n_0$ . Θέτουμε τώρα

$$M = \max\{1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$$

ώστε να είμαστε σίγουροι ότι

$$|a_n| \leq M$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Έτσι, η ακολουθία  $a_n$  είναι απολύτως φραγμένη και άρα φραγμένη.  $\square$

**Ιδιότητα 6.6** Για κάθε ακολουθία  $a_n$ , κάθε ακολουθία  $b_n$  και κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  αν  $\lim a_n = \lim b_n = 0$  τότε  $\lim(\lambda a_n \pm \mu b_n) = 0$ .

*Απόδειξη:* Υποθέτουμε ότι  $\lambda \neq 0 \neq \mu$ , και έστω ότι μας δόθηκε ένα  $\varepsilon > 0$ . Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης στο μηδέν για τις ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  χρησιμοποιώντας για « $\varepsilon$ » τα  $\varepsilon/2|\lambda| > 0$  και  $\varepsilon/2|\mu| > 0$  αντίστοιχα. Έτσι βρίσκουμε ένα  $n_1 \in \mathbb{N}$  για την  $a_n$  και ένα  $n_2$  για την  $b_n$  ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$\text{για κάθε } n \geq n_1 \text{ ισχύει } |a_n| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \quad (6.1)$$

και

$$\text{για κάθε } n \geq n_2 \text{ ισχύει } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}. \quad (6.2)$$

Θέτοντας  $n_0 = \max\{n_0, n_1\}$ , αν  $n \geq n_0$  θα ισχύουν ταυτόχρονα και η (6.1) και η (6.2). Οπότε για  $n \geq n_0$  θα έχουμε

$$|\lambda a_n \pm \mu b_n| \leq |\lambda a_n| + |\mu b_n| = |\lambda| |a_n| + |\mu| |b_n| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

**Ιδιότητα 6.7** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  αν  $\lim a_n = 0$  τότε  $\lim(\lambda a_n) = 0$ .

*Απόδειξη:* Άμεσο από την προηγούμενη ιδιότητα για  $\mu = 0$ .  $\square$

**Ιδιότητα 6.8** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και κάθε ακολουθία  $b_n$  θέτουμε

$$x_n = \max\{a_n, b_n\} \quad \text{και} \quad y_n = \min\{a_n, b_n\}.$$

Αν  $\lim a_n = 0$  και  $\lim b_n = 0$  τότε  $\lim x_n = 0$  και  $\lim y_n = 0$ .

*Απόδειξη:* Προκύπτει αμέσως από τις προηγούμενες ιδιότητες και τις σχέσεις

$$\max\{t, s\} = \frac{t + s + |t - s|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{t, s\} = \frac{t + s - |t - s|}{2}. \quad \square$$

**Ιδιότητα 6.9** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και κάθε ακολουθία  $b_n$  αν  $\lim a_n = 0$  και η  $b_n$  είναι φραγμένη, τότε  $\lim(a_n b_n) = 0$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι μας δόθηκε ένα  $\varepsilon > 0$ , και έστω ότι για τον αριθμό  $M$  ισχύει  $|b_n| \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της  $a_n$  στο 0 για  $\varepsilon/M > 0$  οπότε θα υπάρχει ένα  $n_0$  στο  $\mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n| < \varepsilon/M$ . Οπότε, αν  $n \geq n_0$  θα έχουμε

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Συνεπώς  $\lim(a_n b_n) = 0$ . □

**Ιδιότητα 6.10** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n \pm k} = 0$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\lim a_n = 0$ . Αν για  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n| < \varepsilon$  επειδή θα είναι  $n + k \geq n \geq n_0$ , θα ισχύει και η  $|a_{n+k}| < \varepsilon$ . Οπότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+k} = 0$ .

Για την  $\lim a_{n-k} = 0$  απλά θέτουμε  $n_1 = n_0 + k$ , και αν  $n \geq n_1$  θα ισχύει  $n - k \geq n_1 - k \geq n_0$ , οπότε  $|a_{n-k}| < \varepsilon$ , και άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-k} = 0$ . □

Γενικότερα έχουμε την εξής:

**Ιδιότητα 6.11** Αν η ακολουθία  $a_n$  είναι μηδενική κάθε υπακολουθία της είναι μηδενική.

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\lim a_n = 0$  και έστω ότι η  $k_n$  είναι μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία φυσικών αριθμών. Αν  $\varepsilon > 0$  τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - \ell| < \varepsilon$ . Αλλά από την Άσκηση 4.2.2. ισχύει  $k_n \geq n$ , οπότε αν  $n \geq n_0$  συνεπάγεται  $k_n \geq k_{n_0} \geq n_0$  οπότε  $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ . □

**Ιδιότητα 6.12** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και κάθε  $k \in \mathbb{N}$  αν  $\lim a_n = 0$  τότε  $\lim \sqrt[k]{|a_n|} = 0$ .

*Απόδειξη:* Αν μας δοθεί  $\varepsilon > 0$ , εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της  $a_n$  για  $\varepsilon^k$ . Έτσι θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  θα έχουμε  $|a_n| < \varepsilon^k$  οπότε  $|\sqrt[k]{|a_n|}| = \sqrt[k]{|a_n|} < \varepsilon$ . Δηλαδή  $\lim \sqrt[k]{|a_n|} = 0$ .  $\square$

**Ιδιότητα 6.13** (Κριτήριο σύγκρισης) Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και κάθε ακολουθία  $b_n$  αν  $0 \leq a_n \leq b_n$  για κάθε  $n \geq n_1$ , και  $\lim b_n = 0$  τότε  $\lim a_n = 0$ .

*Απόδειξη:* Για  $\varepsilon > 0$  έστω  $n_2 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  να ισχύει  $b_n < \varepsilon$ . Θέτουμε  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , οπότε αν  $n \geq n_0$  θα έχουμε

$$-\varepsilon < 0 \leq a_n \leq b_n < \varepsilon,$$

συνεπώς  $|a_n| < \varepsilon$ . Δηλαδή  $\lim a_n = 0$ .  $\square$

**Εφαρμογή 6.14** Για κάθε  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $\lambda^n \rightarrow 0$ .

*Απόδειξη:* Επειδή  $\lambda \in (0, 1)$  θα ισχύει  $1/\lambda > 1$ . Θέτουμε  $\theta = (1/\lambda) - 1 > 0$ , οπότε  $1/\lambda = 1 + \theta$ . Με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli (Πρόταση 2.1) έχουμε

$$\frac{1}{\lambda^n} = (1 + \theta)^n \geq 1 + n\theta,$$

και έτσι

$$0 < \lambda^n \leq \frac{1}{1 + n\theta}.$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική άρα και η  $\lambda^n$ .  $\square$

**Πρόταση 6.15** (Κριτήριο λόγου) Έστω ότι για μια ακολουθία με μη μηδενικούς όρους  $a_n$  υπάρχει ένα  $n_0 \in \mathbb{N}$  και ένα  $0 \leq \lambda < 1$ , ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \lambda.$$

Τότε  $\lim a_n = 0$ .

*Απόδειξη:* Αν  $n \geq n_0 + 1$  θα έχουμε

$$\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} \right| \cdots \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdots \lambda \quad (6.3)$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο δείκτης  $n$  στον αριθμητή του τελευταίου κλάσματος μπορεί να γραφτεί και ως  $n_0 + (n - n_0)$ , στο αριστερό σκέλος της ανισότητας το πλήθος των κλασμάτων είναι  $n - n_0$ . Άρα τόσα είναι και τα  $\lambda$  στο δεξιό σκέλος. Δηλαδή η (6.3) μπορεί να γραφτεί ως

$$\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} \right| \cdots \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leq \lambda^{n-n_0} = \lambda^{-n_0} \cdot \lambda^n. \quad (6.4)$$

Όμως στο αριστερό σκέλος της (6.4) έχουμε διαγραφές: κάθε αριθμητής διαγράφεται με τον παρονομαστή του επόμενου κλάσματος. Συνεπώς θα

διαγραφούν όλοι οι όροι εκτός από τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος και τον αριθμητή του τελευταίου. Έτσι η (6.4) γίνεται:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n_0}} \right| \leq \lambda^{-n_0} \cdot \lambda^n,$$

και ισοδύναμα  $|a_n| \leq (\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|)\lambda^n$ , για κάθε  $n \geq n_0 + 1$ . Επειδή  $\lambda \in (0, 1)$  ισχύει  $\lim \lambda^n = 0$  (Εφαρμογή 6.14), οπότε επειδή η ποσότητα  $\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|$  είναι σταθερή (ανεξάρτητη του  $n$ ), θα ισχύει  $\lim(\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|)\lambda^n = 0$ . Και έτσι  $\lim a_n = 0$ .  $\square$

**Παράδειγμα 6.16** Ποιο είναι το λάθος στην παρακάτω «απόδειξη» :

$1/3^n \rightarrow 0$  διότι

$$\left| \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Πρόταση 6.17** (Κριτήριο ρίζας) Έστω ότι για μια ακολουθία  $a_n$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε να ισχύει  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell < 1$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Τότε  $\lim a_n = 0$ .

*Απόδειξη:* Αυτό είναι φανερό, διότι θα ισχύει  $|a_n| \leq \ell^n$ , και από την Εφαρμογή 6.14 ισχύει  $\ell^n \rightarrow 0$ .  $\square$

## Ασκήσεις

Άσκηση 6.2.1. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = n \sin \frac{1}{n^2}$$

είναι μηδενική, χρησιμοποιώντας την ανισότητα  $|\sin x| \leq |x|$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άσκηση 6.2.2. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

είναι μηδενική, δείχνοντας πρώτα με επαγωγή ότι  $a_n < 1/\sqrt{3n}$ .

Άσκηση 6.2.3. Αν  $\lim a_n = 0$  δείξτε ότι  $\lim \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ .

Άσκηση 6.2.4. Δίνονται οι ακολουθίες  $a_n > 0$  και  $b_n > 0$  για τις οποίες ισχύει  $\lim a_n = \lim b_n = 0$ . Δείξτε ότι

$$\lim \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} = 0.$$

### 6.3 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Μια ακολουθία  $a_n$  θα λέγεται *συγκλίνουσα* με όριο τον αριθμό  $l$  αν η ακολουθία  $a_n - l$  είναι μηδενική. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

**Ορισμός 6.18** Λέμε ότι μια ακολουθία  $a_n$  *συγκλίνει στον αριθμό  $l$*  ή ότι *έχει όριο τον αριθμό  $l$*  ή ότι *τείνει στο  $l$*  αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n - l| < \varepsilon$ .

**Παρατήρηση 6.19** Παρατηρήστε ότι στον παραπάνω ορισμό είτε γράψουμε  $|a_n - l| < \varepsilon$ , είτε γράψουμε  $|a_n - l| \leq \varepsilon$  η ουσία του ορισμού δεν αλλάζει:

- Αν  $|a_n - l| < \varepsilon$  τότε προφανώς  $|a_n - l| \leq \varepsilon$ .
- Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό με  $\leq$  αντί για  $<$  και για  $\varepsilon/2$ , τότε θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - l| \leq \varepsilon/2$  και συνεπώς  $|a_n - l| < \varepsilon$ .

**Παρατήρηση 6.20** Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή στην ανισότητα  $|a_n - l| < \varepsilon$  και προσθέτοντας  $l$ , ο ορισμός του  $\lim a_n = l$  λέει ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα  $a_n \in \omega(l, \varepsilon)$ .

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι δεν γίνεται μια ακολουθία να συγκλίνει σε δύο διαφορετικούς αριθμούς.

**Πρόταση 6.21** Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $a_n \rightarrow l_1$ ,  $a_n \rightarrow l_2$  και  $l_1 \neq l_2$ . Θέτουμε  $\varepsilon = |l_1 - l_2|/3 > 0$  οπότε θα υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε

$$|a_n - l_1| < \varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3} \quad \text{για κάθε } n \geq n_1$$

και

$$|a_n - l_2| < \varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3} \quad \text{για κάθε } n \geq n_2.$$

Αλλά τότε για κάθε  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$  θα ισχύει

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(a_n - l_2) - (a_n - l_1)| \\ &\leq |a_n - l_2| + |a_n - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{3} + \frac{|l_1 - l_2|}{3} = \frac{2}{3}|l_1 - l_2|, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

**Πρόταση 6.22** Αν  $a_n \rightarrow l$  και  $a_{k_n}$  υπακολουθία της  $a_n$  τότε  $a_{k_n} \rightarrow l$ .

*Απόδειξη:* Αφού αν η  $a_n - l$  είναι μηδενική, είναι μηδενική και η  $a_{k_n} - l$  από την Ιδιότητα 6.11. □

## 6.4 Ιδιότητες συγκλιουσών ακολουθιών

**Ιδιότητα 6.23** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και  $\ell \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim(-a_n) = -\ell.$$

*Απόδειξη:* Επειδή  $|a_n - \ell| = |(-a_n) - (-\ell)|$  όποτε ισχύει  $|a_n - \ell| < \varepsilon$  θα ισχύει και  $|(-a_n) - (-\ell)| < \varepsilon$ .  $\square$

**Ιδιότητα 6.24** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και  $\ell \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim |a_n| = |\ell|.$$

*Απόδειξη:* Επειδή από την τριγωνική ανισότητα ισχύει  $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell|$ , αν για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $|a_n - \ell| < \varepsilon$  τότε  $||a_n| - |\ell|| < \varepsilon$ .  $\square$

**Ιδιότητα 6.25** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και  $\ell \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \eta \ a_n \ \text{είναι φραγμένη}.$$

*Απόδειξη:* Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας  $a_n$  για  $\varepsilon = 1$ . Έτσι θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - \ell| < 1$ . Από την τριγωνική ανισότητα, θα έχουμε ότι

$$|a_n| - |\ell| \leq ||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < 1,$$

Συνεπώς για κάθε  $n \geq n_0$  θα ισχύει  $|a_n| \leq 1 + |\ell|$ . Θέτουμε τώρα

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |\ell|\},$$

οπότε  $|a_n| \leq M$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Ιδιότητα 6.26** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  και  $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ισχύει

$$\lim a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \text{ τα} \\ a_n \text{ και } \ell \text{ είναι ομόσημοι.} \end{cases}$$

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\ell > 0$ . Αφού  $a_n \rightarrow \ell$  μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό της σύγκλισης για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ . Εφαρμόζουμε λοιπόν τον ορισμό για  $\varepsilon = \ell/2 > 0$ . Έτσι θα υπάρχει ένα  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - \ell| < \ell/2$ . Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή προκύπτει ότι  $-\ell/2 < a_n - \ell$  οπότε  $\ell/2 < a_n$ . Δηλαδή για κάθε  $n \geq n_0$  οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί.

Αν τώρα  $\ell < 0$ , από την Ιδιότητα 6.23 θα ισχύει ότι  $-a_n \rightarrow -\ell > 0$  οπότε από το προηγούμενο θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  η  $-a_n$  θα είναι θετική, οπότε η  $a_n$  θα είναι αρνητική.  $\square$

**Ιδιότητα 6.27** Έστω ότι οι ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  συγκλίνουν στα  $\ell_1$  και  $\ell_2$  αντίστοιχα, και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$\lim(\lambda a_n \pm \mu b_n) = \lambda \ell_1 \pm \mu \ell_2.$$

*Απόδειξη:* Έστω ότι μας δόθηκε ένα  $\varepsilon > 0$ . Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης των ακολουθιών  $a_n$  και  $b_n$  για  $\varepsilon/2(1+|\lambda|)$  και  $\varepsilon/2(1+|\mu|)$  αντίστοιχα:

- θα υπάρξει ένα  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  να ισχύει

$$|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)},$$

- θα υπάρξει ένα  $n_2 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_2$  να ισχύει

$$|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\mu|)}.$$

Οπότε θέτοντας  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , αν  $n \geq n_0$  θα ισχύει

$$\begin{aligned} |(\lambda a_n \pm \mu b_n) - (\lambda \ell_1 \pm \mu \ell_2)| &= |\lambda(a_n - \ell_1) \pm \mu(b_n - \ell_2)| \\ &\leq |\lambda| |a_n - \ell_1| + |\mu| |b_n - \ell_2| \\ &< |\lambda| \frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)} + |\mu| \frac{\varepsilon}{2(1+|\mu|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|\mu|}{1+|\mu|} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**Ιδιότητα 6.28** Έστω ότι οι ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  συγκλίνουν στα  $\ell_1$  και  $\ell_2$  αντίστοιχα. Θέτουμε

$$x_n = \max\{a_n, b_n\} \quad \text{και} \quad y_n = \min\{a_n, b_n\}.$$

Τότε  $\lim x_n = \max\{\ell_1, \ell_2\}$  και  $\lim y_n = \min\{\ell_1, \ell_2\}$ .

*Απόδειξη:* Όπως και στην αντίστοιχη ιδιότητα για τις μηδενικές ακολουθίες η απόδειξη είναι άμεση από τις σχέσεις

$$\max\{t, s\} = \frac{t + s + |t - s|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{t, s\} = \frac{t + s - |t - s|}{2}. \quad \square$$

**Ιδιότητα 6.29** Έστω ότι οι ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  συγκλίνουν στα  $\ell_1$  και  $\ell_2$  αντίστοιχα. Τότε

$$\lim(a_n b_n) = \ell_1 \ell_2.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι  $\ell_2 \neq 0$  τότε υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  ισχύει  $b_n \neq 0$  και

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| = |(a_n b_n - b_n \ell_1) + (b_n \ell_1 - \ell_1 \ell_2)| \quad (6.5)$$

$$= |b_n(a_n - \ell_1) + \ell_1(b_n - \ell_2)| \quad (6.6)$$

$$\leq |b_n| |a_n - \ell_1| + |\ell_1| |b_n - \ell_2|. \quad (6.7)$$

Αφού η  $b_n$  συγκλίνει, από την Ιδιότητα 6.25 θα είναι και φραγμένη. Άρα θα υπάρχει ένας αριθμός  $M > 0$  ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  να ισχύει  $|b_n| \leq M$ . Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την  $a_n$  για την ποσότητα  $\varepsilon/2M$ : θα υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  να ισχύει  $|a_n - \ell_1| < \varepsilon/2M$ . Ομοίως, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την  $b_n$  για την ποσότητα  $\varepsilon/2(1 + |\ell_1|)$ : θα υπάρχει  $n_2 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_2$  να ισχύει

$$|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)}.$$

Θέτοντας  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , αν  $n \geq n_0$  τότε συνεχίζοντας από την (6.7) θα έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \ell_1 \ell_2| &\leq |b_n| |a_n - \ell_1| + |\ell_1| |b_n - \ell_2| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_1| \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|\ell_1|}{1 + |\ell_1|} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη για τον λόγο ακολουθιών. Λόγω του προηγούμενου, και επειδή  $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$  αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για την ακολουθία  $1/b_n$ .

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης της  $b_n$  για την ποσότητα  $|\ell_2|/2$  και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, υπάρχει ένα  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  να ισχύει

$$|\ell_2| - |b_n| \leq ||\ell_2| - |b_n|| \leq |\ell_2 - b_n| = |b_n - \ell_2| < \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Έτσι για κάθε  $n \geq n_1$  θα έχουμε

$$|\ell_2| - |b_n| < \frac{|\ell_2|}{2}$$

και συνεπώς

$$|b_n| > \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Οπότε από τη μια μεριά έχουμε ότι για  $n \geq n_1$  ισχύει  $b_n \neq 0$ , και άρα ορίζεται το πηλίκο  $1/b_n$ , και από την άλλη μεριά

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|b_n - \ell_2|}{|b_n| |\ell_2|} < \frac{|b_n - \ell_2|}{\frac{|\ell_2|}{2} |\ell_2|} = \frac{2}{|\ell_2|^2} |b_n - \ell_2|.$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης της  $b_n$  ξανά, για την ποσότητα  $\varepsilon|\ell_2|^2/2$  θα υπάρχει  $n_2 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_2$  να ισχύει  $|b_n - \ell_2| < \varepsilon|\ell_2|^2/2$ . Επιλέγοντας  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ , αν  $n \geq n_0$  θα ισχύουν μαζί όλα τα παραπάνω και άρα θα έχουμε

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2} \right| \leq \frac{2}{|\ell_2|^2} |b_n - \ell_2| < \frac{2}{|\ell_2|^2} \varepsilon |\ell_2|^2 / 2 = \varepsilon. \quad \square$$

**Ιδιότητα 6.30** Για κάθε ακολουθία  $a_n \geq 0$  και  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\lim a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim a_n^k = \ell^k.$$

*Απόδειξη:* Έστω ότι μας έχει δοθεί ένα  $\varepsilon > 0$ . Αφού η  $a_n$  συγκλίνει θα είναι και φραγμένη, και άρα θα υπάρχει αριθμός  $M > 0$  ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  να ισχύει  $|a_n| \leq M$ . Έτσι θα ισχύει και  $|\ell| \leq M$  (γιατί;). Οπότε

$$\begin{aligned} |a_n^k - \ell^k| &= |a_n - \ell| |a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\ell + a_n^{k-3}\ell^2 + \dots + \ell^{k-1}| \\ &\leq |a_n - \ell| (|a_n^{k-1}| + |a_n^{k-2}\ell| + |a_n^{k-3}\ell^2| + \dots + |\ell^{k-1}|) \\ &\leq |a_n - \ell| \underbrace{(M^k + M^k + M^k + \dots + M^k)}_{k\text{-όροι}} \\ &\leq (kM^k)|a_n - \ell| \end{aligned} \quad (6.8)$$

Οπότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την ακολουθία  $a_n$  για την ποσότητα  $\varepsilon/kM^k$ , και βρίσκουμε ένα  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - \ell| < \varepsilon/kM^k$ . Έτσι συνεχίζοντας από την (6.8) θα έχουμε ότι για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει

$$|a_n^k - \ell^k| \leq (kM^k)|a_n - \ell| < (kM^k)\varepsilon/kM^k = \varepsilon. \quad \square$$

**Ιδιότητα 6.31** Για κάθε ακολουθία  $a_n \geq 0$  και  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\lim a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\ell}.$$

*Απόδειξη:* Έστω ότι μας έχει δοθεί ένα  $\varepsilon > 0$ . Αν  $\ell = 0$  τότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της  $a_n$  για το  $\varepsilon^k$ , οπότε βρίσκουμε ένα  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n| < \varepsilon^k$ . Οπότε  $|\sqrt[k]{a_n}| < \varepsilon$ .

Αν  $\ell > 0$  τότε παρατηρούμε ότι

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\ell} \right| = \frac{|a_n - \ell|}{\sqrt[k]{a_n}^{k-1} + \sqrt[k]{a_n}^{k-2}\sqrt[k]{\ell} + \dots + \sqrt[k]{\ell}^{k-1}} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{\ell}^{k-1}} |a_n - \ell|.$$

Έτσι, εφαρμόζουμε τον ορισμό σύγκλισης της  $a_n$  για την ποσότητα  $\varepsilon\sqrt[k]{\ell}^{k-1}$ . Βρίσκουμε λοιπόν  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να έχουμε

$$\left| \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\ell} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[k]{\ell}^{k-1}} |a_n - \ell| < \frac{1}{\sqrt[k]{\ell}^{k-1}} \varepsilon \sqrt[k]{\ell}^{k-1} = \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

**Ιδιότητα 6.32** Έστω ότι οι ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  συγκλίνουν στα  $l_1$  και  $l_2$  αντίστοιχα, και επιπλέον υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  να ισχύει  $a_n \leq b_n$ . Τότε  $l_1 \leq l_2$ .

*Απόδειξη:* Αν δεν ισχύει, τότε  $l_2 < l_1$  οπότε η ακολουθία  $b_n - a_n \geq 0$  δεν είναι ποτέ ομόσημη με το όριό της  $l_2 - l_1 < 0$  αντιφάσκοντας με την Ιδιότητα 6.26.  $\square$

**Πρόταση 6.33** (Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες) Έστω ότι οι ακολουθίες  $a_n$ ,  $b_n$  και  $c_n$  ικανοποιούν την ανισότητα

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

και ότι  $\lim a_n = \lim c_n = l$ . Τότε αναγκαστικά  $\lim b_n = l$ .

*Απόδειξη:* Από την  $a_n \leq b_n \leq c_n$  συμπεραίνουμε ότι  $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$ . Η  $c_n - a_n$  είναι συγκλίνουσα με όριο το μηδέν. Άρα και η  $b_n - a_n$  είναι συγκλίνουσα με όριο το μηδέν. Συνεπώς η  $b_n$  είναι συγκλίνουσα ως άθροισμα συγκλινουσών ( $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ ) και  $\lim b_n = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = 0 + l = l$ .  $\square$

**Πρόταση 6.34** (Οριακό κριτήριο λόγου) Αν για μια ακολουθία  $a_n$  με μη μηδενικούς όρους ισχύει  $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$ , τότε  $\lim a_n = 0$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\lim |a_{n+1}/a_n| = \ell \in (0, 1)$ . Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την ποσότητα  $(1 - \ell)/2 > 0$ . Τότε θα υπάρχει ένα  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $||a_{n+1}/a_n| - \ell| < (1 - \ell)/2$ . Αλλά τότε

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - \ell < \frac{1 - \ell}{2}$$

από όπου συνεπάγεται ότι

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \ell + \frac{1 - \ell}{2} = \frac{1 + \ell}{2} < 1.$$

Δηλαδή για κάθε  $n \geq n_0$  έχουμε ότι  $|a_{n+1}/a_n| < (1 + \ell)/2 < 1$ . Αυτό και η Πρόταση 6.15 συνεπάγονται ότι  $a_n \rightarrow 0$ .  $\square$

## 6.5 Κριτήρια σύγκλισης

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο αφορά τις ακολουθίες που είναι μονότονες και φραγμένες:

**Πρόταση 6.35** Αν η ακολουθία  $a_n$  είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα και μάλιστα  $a_n \rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Ομοίως, αν μια ακολουθία  $b_n$  είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα, και μάλιστα  $b_n \rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$ .

*Απόδειξη:* (Για τις ποσότητες  $\sup a_n$  και  $\inf a_n$  δείτε τον Ορισμό 5.4.)  
 Ας υποθέσουμε ότι η  $a_n$  είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Θέτουμε  $s = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ . Θα δείξουμε ότι  $a_n \rightarrow s$ . Αφού το  $s$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της  $a_n$ , συμπεραίνουμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  το  $s - \varepsilon$  δεν είναι άνω φράγμα της  $a_n$ . Άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $s - \varepsilon < a_{n_0}$ . Επειδή η  $a_n$  είναι αύξουσα, για κάθε  $n \geq n_0$  θα ισχύει  $a_{n_0} \leq a_n$ , οπότε  $s - \varepsilon < a_n$ . Αλλά φανερά  $a_n \leq s < s + \varepsilon$ , αφού το  $s$  είναι το άνω πέρασ των όρων της. Έτσι καταλήξαμε στο ότι για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει

$$s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon,$$

δηλαδή  $|a_n - s| < \varepsilon$ . Άρα  $a_n \rightarrow s$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι η  $b_n$  είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Εργαζόμαστε ομοίως: θέτουμε  $i = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$ . Αφού το  $i$  είναι το μέγιστο κάτω φράγμα της  $b_n$ , για κάθε  $\varepsilon > 0$  το  $i + \varepsilon$  δεν είναι κάτω φράγμα της  $b_n$ , άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $b_{n_0} < i + \varepsilon$ . Επειδή η  $b_n$  είναι φθίνουσα, για κάθε  $n \geq n_0$  θα ισχύει  $b_n \leq b_{n_0}$ , οπότε  $b_n < i + \varepsilon$ . Αλλά φανερά  $i - \varepsilon < i \leq b_n$ . Έτσι καταλήξαμε στο ότι για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει

$$i - \varepsilon < b_n < i + \varepsilon,$$

δηλαδή  $|b_n - i| < \varepsilon$ . Άρα  $b_n \rightarrow i$ . □

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές της παραπάνω πρότασης είναι το ακόλουθο:

**Πόρισμα 6.36** Η ακολουθία

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι συγκλίνουσα.

*Απόδειξη:* Η απόδειξη είναι άμεση από το γεγονός ότι η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (Παραδείγματα 4.6 και 5.9). □

Το όριο της παραπάνω ακολουθίας δεν είναι 1, διότι η ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\lim x_n = \sup x_n \geq x_1 = 2.$$

Το όριο αυτό έχει εξέχουσα σημασία για τα Μαθηματικά (μαζί με τους αριθμούς 0, 1,  $\pi$  και τη μιγαδική μονάδα  $i$ ). Ονομάζεται αριθμός του Euler και συμβολίζεται με  $e$ . Ο αριθμός αυτός είναι περίπου

$$e = 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69995 \dots$$

Ο αριθμός  $e$  (όπως και ο  $\pi$ ) είναι άρρητος και υπερβατικός, δηλαδή δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές (ο  $\sqrt{2}$  είναι άρρητος

αλλά δεν είναι υπερβατικός αφού είναι ρίζα του πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές  $x^2 - 2$ ). Η απόδειξη της υπερβατικότητας του  $e$  δεν είναι στους σκοπούς του παρόντος (δείτε στο [16]). Το ότι είναι όμως άρρητος θα το αποδείξουμε στο Παράρτημα Γ'.

**Θεώρημα 6.37** (Bolzano-Weierstraß) *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

*Απόδειξη:* Κάθε ακολουθία έχει μια μονότονη υπακολουθία σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, και επειδή η ακολουθία είναι φραγμένη, είναι φραγμένη και αυτή η μονότονη υπακολουθία της. Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα συγκλίνει.  $\square$

εδ

Όταν μια ακολουθία  $a_n$  συγκλίνει σε έναν αριθμό  $l$  τότε μετά από κάποιο δείκτη οι όροι της είναι «κοντά» στον αριθμό  $l$ . Συνεπώς είναι και μεταξύ τους «κοντά». Αυτή η τελευταία ιδιότητα ονομάζεται ιδιότητα Cauchy.

**Ορισμός 6.38** (Ακολουθία Cauchy) Μια ακολουθία  $a_n$  ονομάζεται *ακολουθία Cauchy* ή *βασική ακολουθία* αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n, m \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα ακόμα κριτήριο σύγκλισης.

**Θεώρημα 6.39** *Μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα στο  $\mathbb{R}$  αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

*Απόδειξη:* Αν υποθέσουμε ότι  $a_n \rightarrow l$  και  $\varepsilon > 0$  εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης όχι για το  $\varepsilon$  αλλά για το  $\varepsilon/2$ . Έτσι, υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - l| < \varepsilon/2$ . Άρα, αν  $n, m \geq n_0$  τότε ισχύει και η  $|a_n - l| < \varepsilon/2$  και η  $|a_m - l| < \varepsilon/2$ . Συνεπώς

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) - (a_m - l)| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα τώρα, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία  $a_n$  είναι ακολουθία Cauchy. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6.37, οπότε αποδεικνύουμε πρώτα ότι η  $a_n$  είναι φραγμένη: εφαρμόζουμε τον ορισμό της ιδιότητας Cauchy για  $\varepsilon = 1 > 0$ . Έτσι υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n, m \geq n_0$  ισχύει  $|a_n - a_m| < 1$ . Άρα αυτό ισχύει και για  $m = n_0$ . Συνεπώς

$$|a_n| - |a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1,$$

και άρα  $|a_n| \leq 1 + |a_{n_0}|$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Έτσι

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή η  $a_n$  είναι φραγμένη.

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß λοιπόν, η  $a_n$  έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω ότι αυτή είναι η  $a_{k_n}$  όπου  $k_n$  γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι  $a_{k_n} \rightarrow l$ . Θα δείξουμε ότι

$a_n \rightarrow \ell$  ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Έστω ότι  $\varepsilon > 0$ . Εφαρμόζουμε τον ορισμό της ιδιότητας Cauchy για το  $\varepsilon/2 > 0$ , οπότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n, m \geq n_0$  να ισχύει  $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ . Αλλά τότε, επειδή  $k_m \geq m \geq n_0$  (από την Άσκηση 4.2.2.), ισχύει

$$|a_n - a_{k_m}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n, m \geq n_0. \quad (6.9)$$

Τώρα εφαρμόζουμε τον ορισμό σύγκλισης της  $a_{k_n}$  στο  $\ell$  πάλι για το  $\varepsilon/2$ . Άρα υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε

$$\text{για κάθε } m \geq n_1 \text{ να ισχύει } |a_{k_m} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.10)$$

Έτσι, αν  $n \geq n_0$  και  $m = \max\{n_0, n_1\}$  θα ισχύει και η (6.9) και η (6.10). Άρα

$$\begin{aligned} |a_n - \ell| &= |(a_n - a_{k_m}) + (a_{k_m} - \ell)| \\ &\leq |a_n - a_{k_m}| + |a_{k_m} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Ένα άλλο κριτήριο που συχνά είναι χρήσιμη η άρνησή του είναι το ακόλουθο.

**Πρόταση 6.40** Μια ακολουθία  $a_n$  συγκλίνει στο  $\ell$  αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει και αυτή στο  $\ell$ .

*Απόδειξη:* Το ευθύ έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 6.22. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο, αφού η ίδια η  $a_n$  είναι υπακολουθία του εαυτού της.  $\square$

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης μας δίνει ένα κριτήριο μη σύγκλισης: Αν μια ακολουθία έχει δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικούς αριθμούς, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει. Για παράδειγμα, η  $a_n = (-1)^n$  δεν συγκλίνει διότι η υπακολουθία της  $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$  συγκλίνει στο 1, ενώ η υπακολουθία της  $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$  συγκλίνει στο  $-1$ . Ομοίως η ακολουθία  $x_n = \sin(7n\pi/8)$  δεν συγκλίνει. Η υπακολουθία της  $x_{16n} = \sin(7(2n\pi)) = 0$  συγκλίνει στο μηδέν. Ενώ η υπακολουθία

$$x_{16n+4} = \sin\left(14n\pi + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(14n\pi + 3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

συγκλίνει στο  $-1$ .

## 6.6 Ακολουθίες με όριο το $+\infty$ ή $-\infty$

**Ορισμός 6.41** Για μια ακολουθία  $a_n$  λέμε ότι *αποκλίνει στο  $+\infty$*  ή ότι *τείνει στο  $+\infty$*  όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n > M$ . Γράφουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  ή  $\lim a_n = +\infty$  ή  $a_n \rightarrow +\infty$ .

Συχνά αντί για  $+\infty$  γράφουμε απλά  $\infty$ .

**Ορισμός 6.42** Για μια ακολουθία  $a_n$  λέμε ότι *αποκλίνει στο  $-\infty$*  ή ότι *τείνει στο  $-\infty$*  όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n < -M$ . Γράφουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  ή  $\lim a_n = -\infty$  ή  $a_n \rightarrow -\infty$ .

**Παρατήρηση 6.43** Πολλές φορές λέγεται καταχρηστικά ότι η ακολουθία «συγκλίνει στο  $+\infty$ » αντί «αποκλίνει στο  $+\infty$ ». Ομοίως λέγεται καταχρηστικά ότι η ακολουθία «συγκλίνει στο  $-\infty$ » αντί «αποκλίνει στο  $-\infty$ ».

**Παράδειγμα 6.44** Η ακολουθία  $a_n = n^2$  αποκλίνει στο  $+\infty$ , διότι αν μας δοθεί ένα  $M > 0$  θα θέλουμε να ισχύει  $n^2 > M$  ισοδύναμα  $n > \sqrt{M}$ . Οπότε αν θέσουμε  $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$ , τότε για κάθε  $n \geq n_0$  θα ισχύει  $n \geq n_0 = [\sqrt{M}] + 1 > \sqrt{M}$  οπότε  $n^2 > M$ .

**Ιδιότητα 6.45**  $a_n \rightarrow +\infty$  αν, και μόνο αν, υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  ισχύει  $a_n > 0$  και  $1/a_n \rightarrow 0$ .

Ομοίως,  $a_n \rightarrow -\infty$  αν, και μόνο αν, υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  ισχύει  $a_n < 0$  και  $1/a_n \rightarrow 0$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\varepsilon > 0$  και  $a_n \rightarrow +\infty$ . Αν εφαρμόσουμε τον ορισμό για  $M = 1/\varepsilon > 0$  τότε θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n > 1/\varepsilon > 0$ . Από αυτό συμπεραίνουμε ότι  $a_n > 0$  και ότι  $|1/a_n| = 1/a_n < \varepsilon$ , δηλαδή  $1/a_n \rightarrow 0$ .

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει  $n_1 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_1$  να ισχύει  $a_n > 0$  και  $1/a_n \rightarrow 0$ . Έστω ότι  $M > 0$ . Θέτουμε  $\varepsilon = 1/M > 0$  και εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης  $1/a_n \rightarrow 0$ : θα υπάρχει  $n_2 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_2$  να ισχύει  $|1/a_n| < \varepsilon = 1/M$ , οπότε ισοδύναμα  $|a_n| > M$ . Θέτουμε  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  οπότε για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $a_n = |a_n| > M$ , δηλαδή  $a_n \rightarrow +\infty$ .

Για την περίπτωση  $a_n \rightarrow -\infty$  εργαζόμαστε ανάλογα. □

**Ιδιότητα 6.46** (α) Αν  $a_n \geq b_n$  και  $\lim b_n = +\infty$  τότε  $\lim a_n = +\infty$ .

(β) Αν  $a_n \leq b_n$  και  $\lim b_n = -\infty$  τότε  $\lim a_n = -\infty$ .

*Απόδειξη:* Αφού  $\lim b_n = +\infty$ , θα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $b_n > 0$  (Ιδιότητα 6.45) άρα και  $a_n > 0$ . Αλλά τώρα,  $0 < 1/a_n < 1/b_n \rightarrow 0$ . Συνεπώς, ισχύει  $0 < 1/a_n \rightarrow 0$  (Ιδιότητα 6.13), και άρα  $a_n \rightarrow +\infty$ .

Εργαζόμαστε ομοίως για το (β). □

## 6.7 Η εκθετική συνάρτηση

Σε αυτή την ενότητα θα θεμελιώσουμε την εκθετική συνάρτηση  $e^x$  με  $x \in \mathbb{R}$ , και θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες.

**Θεώρημα 6.47** Η ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  και για κάθε  $n > -x$  (άρα για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  αν  $x > -1$ ). Επιπλέον είναι και φραγμένη για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Κατά συνέπεια η  $x_n$  είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

την οποία ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση.

*Απόδειξη.* Αν  $n > -x$  τότε οι ποσότητες  $1 + x/n$  και  $1 + x/(n+1)$  είναι θετικές. Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(1 + x/n)^n}{(1 + x/(n+1))^n} \leq 1 + \frac{x}{n+1}.$$

Αλλά μεταφέροντας τον αριθμητή του αριστερού κλάσματος στον παρονομαστή, και εφαρμόζοντας την ανισότητα Βερνούλλι έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{(1 + x/n)^n}{(1 + x/(n+1))^n} &= \frac{1}{\left(\frac{n^2 + n + nx}{n^2 + n + nx + x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}}. \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι μικρότερη της ζητούμενης  $1 + x/(n+1)$  αν και μόνο αν

$$1 \leq 1 + \frac{x}{n+1} - \frac{nx}{(n+1)(n+x)} - \frac{nx^2}{(n+1)^2(n+x)}.$$

Απαλείφοντας τη μονάδα και παραγοντοποιώντας στα δεξιά, η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$0 \leq \frac{x^2}{(n+1)^2} \frac{1}{n+x},$$

η οποία είναι αληθής αφού  $n > -x$ . Η προηγούμενη ανισότητα είναι γνήσια εκτός αν  $x = 0$  άρα η  $x_n$  είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $n > -x$ .

Για το φράγμα τώρα, θέτουμε  $k_0 = \lceil |x| \rceil + 1 \in \mathbb{N}$ . Επειδή η  $x_n$  είναι αύξουσα και η  $(1 + 1/n)^n$  είναι αύξουσα με όριο το  $e$  (Πόρισμα 6.36) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{k_0}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{k_0}{k_0 n}\right)^{k_0 n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{k_0} \\ &\leq e^{k_0}, \end{aligned}$$

δηλαδή η  $x_n$  είναι φραγμένη.  $\square$

Στη συνέχεια θα «ταυτοποιήσουμε» τη συνάρτηση  $\exp(x)$  (θα προσπαθήσουμε να την κατανοήσουμε). Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

**Λήμμα 6.48** *Αν η ακολουθία  $b_n$  έχει την ιδιότητα  $\lim nb_n = 0$  τότε  $\lim(1 + b_n)^n = 1$ . Αν επιπλέον  $\lim a_n = 0$  και το όριο  $\lim(1 + a_n)^n$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  τότε  $\lim(1 + a_n + b_n)^n = \lim(1 + a_n)^n$ .*

*Απόδειξη:* Από την ταυτότητα διαφοράς δυνάμεων και την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |(1 + b_n)^n - 1| &= |b_n| |(1 + b_n)^{n-1} + (1 + b_n)^{n-2} + \dots + (1 + b_n) + 1| \\ &\leq |b_n| ((1 + |b_n|)^{n-1} + (1 + |b_n|)^{n-2} + \dots + (1 + |b_n|) + 1) \\ &\leq |b_n| n(1 + |b_n|)^{n-1}. \end{aligned}$$

Αλλά, αφού  $nb_n \rightarrow 0$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|nb_n| < 1$  δηλαδή  $|b_n| < 1/n$ . Συνεχίζοντας τις προηγούμενες ανισότητες για  $n \geq n_0$  συμπεραίνουμε ότι

$$|(1 + b_n)^n - 1| \leq |nb_n| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \rightarrow 0 \cdot e = 0.$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό,

$$|(1 + a_n + b_n)^n - (1 + a_n)^n| = (1 + a_n)^n \left| \left(1 + \frac{b_n}{1 + a_n}\right)^n - 1 \right|.$$

Αλλά η ακολουθία  $c_n = b_n/(1 + a_n)$  έχει την ιδιότητα  $nc_n \rightarrow 0$ . Έτσι από το προηγούμενο σκέλος της απόδειξης

$$\lim \left| \left(1 + \frac{b_n}{1 + a_n}\right)^n - 1 \right| = 0.$$

Οπότε  $\lim((1 + a_n + b_n)^n - (1 + a_n)^n) = 0$ , και επειδή το όριο  $\lim(1 + a_n)^n$  υπάρχει από την υπόθεση, υπάρχει και το  $\lim(1 + a_n + b_n)^n$  και ισχύει  $\lim(1 + a_n + b_n)^n = \lim(1 + a_n)^n$ .  $\square$

**Πρόταση 6.49** *Η συνάρτηση  $\exp$  έχει τις ιδιότητες:*

- (i)  $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $\exp(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(0) = 1$ , και  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .
- (iii)  $\exp(k) = e^k$  για κάθε  $k \in \mathbb{Z}$ , όπου  $e$  ο αριθμός Euler.
- (iv)  $(\exp(1/k))^k = e$ .

Απόδειξη: Για το (i) έχουμε

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \lim \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \right) \\ &= \lim \left( 1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2} \right)^n.\end{aligned}$$

Αλλά η  $(x+y)/n$  είναι μηδενική, το όριο  $(1 + (x+y)/n)^n$  υπάρχει, και η  $b_n = xy/n^2$  έχει την ιδιότητα  $nb_n \rightarrow 0$ . Συνεπώς, από το προηγούμενο λήμμα το παραπάνω όριο ισούται με το

$$\lim \left( 1 + \frac{x+y}{n} \right)^n = \exp(x+y).$$

Για το (ii), αν  $x \geq 0$  τότε

$$\exp(x) = \lim \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \geq \lim \left( 1 + n \frac{x}{n} \right) = 1 + x \geq 1.$$

Επίσης

$$\exp(-x)\exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = \lim \left( 1 + \frac{0}{n} \right)^n = 1.$$

Συνεπώς  $\exp(-x) = 1/\exp(x)$  και αν  $x < 0$  τότε  $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$ .

Για το (iii), επειδή  $\exp(-k) = 1/\exp(k)$  αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για  $k \in \mathbb{N}$ . Αλλά

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e \cdot e = e^2.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο  $k$ .

Για το (iv) με επαγωγή ισχύει

$$\begin{aligned}\exp(1/k)^k &= \exp\left(\frac{1}{k}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{k}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{k}\right) = \exp(1) \\ &= e.\end{aligned}$$

□

**Ορισμός 6.50** Για κάθε  $r \in \mathbb{Q}$  με  $r = m/n$  με  $m \in \mathbb{Z}$  και  $n \in \mathbb{N}$  ορίζουμε την ποσότητα  $e^r$  να είναι η  $(e^{1/n})^m$ .

Είναι λοιπόν φυσιολογικό να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 6.51** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ορίζουμε την ποσότητα  $e^x$  να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\exp(x) = \lim \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.49 η  $e^x$  έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες των δυνάμεων, όχι μόνο για ακέραιους εκθέτες αλλά για πραγματικούς εκθέτες.

Επίσης σύμφωνα με τα προηγούμενα εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες:

**Πρόταση 6.52** *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$e^x \geq 1 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ για κάθε } x < 1.$$

*Απόδειξη:* Η  $e^x \geq 1 + x$  είναι άμεση από τον ορισμό της  $e^x$  και την ανισότητα Bernoulli. Άρα  $e^{-x} \geq 1 + (-x)$  συνεπώς, αν  $x < 1$  παίρνουμε ότι  $e^x \geq 1/(1-x)$ .  $\square$

## 6.8 Βασικά όρια

**Πρόταση 6.53** *Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $|\lambda| < 1$  ισχύει  $\lambda^n \rightarrow 0$ .*

*Απόδειξη:* Για  $\lambda = 0$  είναι προφανές. Για  $0 < \lambda < 1$  είναι η Εφαρμογή 6.14. Για  $-1 < \lambda < 0$  ισχύει

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \rightarrow 0,$$

αφού  $0 < |\lambda| < 1$ . Άρα  $\lambda^n \rightarrow 0$ .  $\square$

**Πρόταση 6.54** *Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $\lambda > 1$  ισχύει  $\lambda^n \rightarrow +\infty$ , ενώ για  $\lambda \leq -1$  η  $\lambda^n$  δεν συγκλίνει.*

*Απόδειξη:* Αν  $\lambda > 1$  τότε  $0 < 1/\lambda < 1$  συνεπώς  $(1/\lambda)^n \rightarrow 0$ . Αλλά  $(1/\lambda)^n = 1/\lambda^n$  άρα  $\lambda^n \rightarrow +\infty$  από την Ιδιότητα 6.45.

Αν  $\lambda = -1$  η  $\lambda^n$  δεν συγκλίνει, αφού  $\lambda^{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1$  ενώ  $\lambda^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1) = -1 \rightarrow -1 \neq 1$ .

Αν  $\lambda < -1$  η  $\lambda^{2n} = (\lambda^2)^n \rightarrow +\infty$ , αφού  $\lambda^2 > 1$  ενώ  $\lambda^{2n+1} = \lambda(\lambda^{2n}) \rightarrow -\infty$ , αφού  $\lambda < 0$  και  $\lambda^{2n} \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Πρόταση 6.55** *Για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  με  $|\lambda| < 1$  ισχύει  $n\lambda^n \rightarrow 0$ . Επιπλέον, για κάθε  $p > 0$  ισχύει  $n^p \lambda^n \rightarrow 0$ .*

*Απόδειξη:*  $1/\sqrt{|\lambda|} > 1$  άρα υπάρχει  $\theta > 0$  ώστε  $\sqrt{|\lambda|}^{-1} = 1 + \theta$ . Έτσι, με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli έχουμε

$$n\lambda^n = \left( \frac{\sqrt{n}}{(1+\theta)^n} \right)^2 \leq \left( \frac{\sqrt{n}}{1+n\theta} \right)^2 \rightarrow 0.$$

Τέλος, για  $p > 0$  ισχύει

$$|n^p \lambda^n| = (n(|\lambda|^{1/p})^n)^p \rightarrow 0^p = 0,$$

αφού  $|\lambda|^{1/p} < 1$ .  $\square$

**Πόρισμα 6.56** Για κάθε πολυώνυμο  $p(x)$  και  $|\lambda| < 1$  ισχύει  $\lim p(n)\lambda^n \rightarrow 0$ .  $\square$

**Πρόταση 6.57** Για κάθε  $a > 0$  ισχύει  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ .

*Απόδειξη:* Αν  $a \geq 1$  τότε  $\sqrt[n]{a} \geq 1$ . Θέτουμε  $v_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ , οπότε  $a = (1 + v_n)^n$ . Από την ανισότητα Bernoulli

$$a = (1 + v_n)^n \geq 1 + nv_n$$

και λύνοντας ως προς  $v_n$ :

$$0 \leq v_n \leq \frac{a-1}{n}. \quad (6.11)$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική, οπότε από την Πρόταση 6.33,  $\lim v_n = 0$ . Έτσι

$$\sqrt[n]{a} = 1 + v_n \rightarrow 1 + 0 = 1. \quad \square$$

**Πρόταση 6.58**  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

*Απόδειξη:* Η ανισότητα (6.11) ισχύει για κάθε  $a > 1$  άρα και για  $a = \sqrt{n}$ . Συνεπώς για  $v_n = \sqrt[n]{\sqrt{n}} - 1$  ισχύει

$$0 \leq v_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Άρα (από την Πρόταση 6.33)  $\sqrt[n]{\sqrt{n}} \rightarrow 1$  συνεπώς (από την Ιδιότητα 6.30)  $\sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{\sqrt{n}})^2 \rightarrow 1$ .  $\square$

**Πρόταση 6.59** Αν  $a_n \rightarrow \ell > 0$ , τότε  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ .

*Απόδειξη:* Από τον ορισμό της σύγκλισης (για  $\varepsilon = \ell/2 > 0$ ), υπάρχει ένα  $n_0 \in \mathbb{R}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  τότε

$$|a_n - \ell| < \frac{\ell}{2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\ell}{2} < a_n < \frac{3\ell}{2},$$

και άρα,

$$\sqrt[n]{\ell/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3\ell/2}.$$

Από την Πρόταση 6.57 οι ακολουθίες  $\sqrt[n]{\ell/2}$  και  $\sqrt[n]{3\ell/2}$  συγκλίνουν στο 1, και άρα από το θεώρημα ισοσυγκλινοσών ακολουθιών συγκλίνει στο 1 και η  $\sqrt[n]{a_n}$ .  $\square$

**Πρόταση 6.60** Αν  $a_n \rightarrow 0$  τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos a_n = 1$ .

*Απόδειξη:* Χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} |\cos a_n - 1| &= |\cos a_n - \cos 0| = \left| -2 \sin \left( \frac{a_n + 0}{2} \right) \sin \left( \frac{a_n - 0}{2} \right) \right| \\ &= 2 \sin^2(a_n/2) \leq \frac{1}{2} a_n^2. \end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο.  $\square$

**Πρόταση 6.61** Αν  $a_n \rightarrow 0$  και  $a_n \neq 0$  τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

*Απόδειξη:* Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\cos \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$$

που ισχύει για κάθε  $0 < \theta < \pi/2$ . Πράγματι, θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο (ακτίνας 1) κέντρου  $O$  με τον άξονα των εφαπτομένων κάθετο στην  $x$ -άξονα στο σημείο  $A(1, 0)$ . Φέρνουμε την  $OB$  ώστε η γωνία  $AOB$  να είναι ίση με  $\theta \in (0, \pi/2)$  και έστω  $C$  η τομή της επέκτασης της  $OB$  με τον άξονα των εφαπτομένων. Φανερά το τρίγωνο  $OBA$  περιέχεται στον κυκλικό τομέα  $OBA$  και αυτός περιέχεται στο τρίγωνο  $OAC$ . Έτσι, συγκρίνονται τα εμβαδά τους:

$$|OAB| = \frac{1}{2} \sin \theta \leq \frac{\theta}{2\pi} \pi \leq |OAC| = \frac{1}{2} \tan \theta,$$

όπου το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι το ποσοστό της γωνίας  $\theta$  ως προς τον πλήρη κύκλο γωνίας  $2\pi$  του εμβαδού του κύκλου  $\pi$ . Άρα

$$\sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

απ' όπου προκύπτει η παραπάνω ανισότητα.

Η  $a_n$  τείνει στο 0 οπότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε  $0 < a_n < \pi/2$  για κάθε  $n \geq n_0$  άρα για αυτά τα  $n$  ισχύει

$$\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1.$$

Παίρνοντας τώρα όρια προκύπτει η ζητούμενη με τη βοήθεια της Πρότασης 6.60.  $\square$

**Πρόταση 6.62** Για κάθε ακολουθία  $a_n \neq 0$  με  $a_n \rightarrow 0$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1.$$

*Απόδειξη:* Από την Πρόταση 6.52, για κάθε  $-1 < x < 1$  ισχύει

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}. \quad (6.12)$$

Χρησιμοποιώντας την  $a_n$  στη θέση του  $x$  (αφού μετά από κάποιο δείκτη θα βρίσκεται στο διάστημα  $(-1, 1)$ , λόγω του ότι  $a_n \rightarrow 0$ ) προκύπτει

$$1 \leq \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \leq \frac{1}{1 - a_n}$$

για τους θετικούς όρους της  $a_n$ , και

$$1 \geq \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \geq \frac{1}{1 - a_n}$$

για τους αρνητικούς όρους της  $a_n$ . Παίρνοντας όρια σε κάθε περίπτωση, προκύπτει το ζητούμενο.  $\square$

Για τις επόμενες προτάσεις λείπει ο αυστηρός ορισμός του λογαρίθμου. Εν τούτοις θα δεχθούμε προσωρινά ως «γνωστή» τη συνάρτηση του λογαρίθμου με τις ιδιότητές της όπως διδάσκεται στο Λύκειο, μέχρι το Κεφάλαιο 9 στο οποίο θα οριστεί αυστηρά.

**Πρόταση 6.63** Για κάθε  $a > 1$  και για κάθε  $p, q > 0$  οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:

$$\frac{\log n}{n}, \quad \frac{\log n}{n^p}, \quad \frac{\log^q n}{n^p}, \quad \frac{\log_a n}{n}, \quad \frac{\log_a n}{n^p}, \quad \frac{\log_a^q n}{n^p}.$$

*Απόδειξη:* Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα  $\log x \leq x - 1$  που ισχύει για κάθε  $x \geq 1$  και προκύπτει άμεσα από την  $1 + x \leq e^x$ . Έχουμε:

$$0 \leq \frac{\log n}{n} = \frac{2 \log n^{1/2}}{n} \leq \frac{2(\sqrt{n} - 1)}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \rightarrow 0,$$

$$0 \leq \frac{\log n}{n^p} = \frac{(2/p) \log(n^{p/2})}{n^p} \leq \frac{2}{p} \frac{n^{p/2} - 1}{n^p} = \frac{2}{p} \frac{1}{n^{p/2}} - \frac{2}{p} \frac{1}{n^p} \rightarrow 0,$$

και

$$0 \leq \frac{\log^q n}{n^p} = \left( \frac{\log n}{n^{p/q}} \right)^q \rightarrow 0.$$

Τα κλάσματα με τους λογαρίθμους βάσης  $a > 1$  προκύπτουν από τα προηγούμενα και τον τύπο  $\log_a n = (\log n)/(\log a)$ .  $\square$

**Πρόταση 6.64** Αν  $a > 1$ ,  $a_n \rightarrow 0$  και  $a_n > -1$  τότε  $\log_a(1 + a_n) \rightarrow 0$ .

*Απόδειξη:* Από τη σχέση  $\log_a x = (\log x)/(\log a)$  αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για  $a = e$ . Αλλά αυτό προκύπτει άμεσα από τις ανισότητες  $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$  που προκύπτει λογαριθμίζοντας τη σχέση (6.12) (δείτε και Πρόταση 9.24 μετά τον αυστηρό ορισμό του λογαρίθμου).  $\square$

**Πρόταση 6.65** Αν  $a_n \rightarrow 0$ ,  $a_n \neq 0$  και  $a_n > -1$  τότε

$$\frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \rightarrow 1.$$

*Απόδειξη:* Από την ανισότητα  $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$  προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \leq 1$$

για τους θετικούς όρους της  $a_n$ , και

$$\frac{1}{1 + a_n} \geq \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} \geq 1$$

για τους αρνητικούς όρους της  $a_n$ . Παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο.

□.

## Ασκήσεις

**Άσκηση 6.8.1.** Χρησιμοποιείτε το θεώρημα των ισοσυγκλιουσών ακολουθιών (Πρόταση 6.33) για να βρείτε το όριο των ακολουθιών

$$1. a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

$$2. b_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

$$3. c_n = \sqrt[n]{\beta_k n^k + \beta_{k-1} n^{k-1} + \dots + \beta_1 n + \beta_0}, \text{ όπου } \beta_i > 0 \text{ για } i = 1, 2, \dots, k.$$

$$4. d_n = \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}}.$$

(Παρατηρήστε ότι  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$ .)

**Άσκηση 6.8.2.** Αν το  $[x]$  συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού  $x$  (δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν είναι μεγαλύτερος του  $x$ ), αποδείξτε χρησιμοποιώντας ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nx]}{n} = x.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  η ποσότητα  $[nx]/n$  είναι ρητός αριθμός. Συμπεράνετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  υπάρχει ακολουθία ρητών που συγκλίνει σε αυτόν.

**Άσκηση 6.8.3.** Αν  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $\sin x \neq -1/3$  υπολογίστε το όριο της

$$a_n = \frac{x}{1 + (3 \sin x)^{3n}},$$

διακρίνοντας περιπτώσεις για το αν η ποσότητα  $3 \sin x$  είναι απολύτως μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από το 1.

**Άσκηση 6.8.4.** Υπολογίστε τα όρια:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{4n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)^{2n}, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^n, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \log n}. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.8.5. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n} \right)^n.$$

(Υπόδειξη: βγάλτε έξω από την παρένθεση την ποσότητα  $\sqrt{n^2+1}/n$ .)

Άσκηση 6.8.6. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 6.59 για να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας  $a_n$  με

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\lambda^n + 2}{\lambda^{2n} + e^n}}$$

για τις διάφορες τιμές του  $\lambda > 0$ . (Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις  $0 < \lambda < 1$ ,  $1 \leq \lambda \leq \sqrt{e}$  και  $\lambda > \sqrt{e}$ .)

Άσκηση 6.8.7. Δείξτε ότι αν  $a_n \rightarrow +\infty$  τότε η  $a_n$  είναι κάτω φραγμένη. Ομοίως, δείξτε ότι αν  $a_n \rightarrow -\infty$  τότε η  $a_n$  είναι άνω φραγμένη.

Άσκηση 6.8.8. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{2n^6 + n + 1}}{3n^2 + 1} & \frac{2n^2(3n^3 - 5n + 6)}{(4n^4 - 1)(2n + 3)} \\ & \frac{\sqrt{5n^5 + 1}}{\sqrt[4]{3n^{10} + n + 1}} & \sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \\ & \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} & \sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n} \\ & \frac{n^2 3^n - 2n 9^{n+1} + 2}{3n 2^{n-1} + 5n^2 3^{2n} + 4^n} & \frac{a^n + 5b^n}{2a^n + 7b^n}, \quad a, b > 0 \\ & \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 + 1} & \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \\ & \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{n(1 + 2 + 3 + \dots + n)} \\ & \frac{1}{2^0 + 2^{n+1}} + \frac{1}{2 + 2^{n+1}} + \frac{1}{2^2 + 2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^n + 2^{n+1}} \\ & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) & \underbrace{\sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \dots \sqrt{3}}}}}}_{n\text{-ρίζικά}} \\ & \frac{(2n-1)!}{(3n+1)!} & n! \sin \frac{\lambda}{1} \sin \frac{\lambda}{2} \dots \sin \frac{\lambda}{n}, \quad \lambda \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt[n+3]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n} & \left(\frac{3n^2 + 4n}{4n^2 + 1}\right)^n \\ \left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^n & \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + 2} \\ \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2n}} & \sqrt[n+1]{n} \\ \sqrt[n]{\frac{n^2 + 2n}{2n^2 + 1}} & \sqrt[3n]{\frac{n^2 + 7n + 18}{8n + 4}} \end{array}$$

Άσκηση 6.8.9. Αν  $z_n \rightarrow 0$  βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

$$\frac{\sqrt[3]{1+z_n} - 1}{z_n} \quad \frac{(\lambda + z_n)^3 - \lambda^3}{z_n}, \quad \lambda > 0.$$

$$\frac{\sqrt{z_n + 1} - 1}{z_n}.$$

Άσκηση 6.8.10. Αποδείξτε ότι αν  $a_n, b_n > 0$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ ,  $a_n/b_n \rightarrow \ell > 0$  τότε  $\sqrt[n]{b_n} \rightarrow 1$ .

Άσκηση 6.8.11. Αποδείξτε ότι αν  $A \subseteq \mathbb{R}$ , υπάρχουν ακολουθίες  $s_n, i_n \in A$  με την  $s_n$  αύξουσα και την  $i_n$  φθίνουσα ώστε  $s_n \rightarrow \sup A$  και  $i_n \rightarrow \inf A$ . Αν επιπλέον τα  $\sup A$  και  $\inf A$  είναι σημεία συσσώρευσης του  $A$ , τότε μπορούμε να επιλέξουμε την  $s_n$  να είναι γνήσια αύξουσα και την  $i_n$  γνήσια φθίνουσα.

Άσκηση 6.8.12. Αποδείξτε ότι για κάθε  $a > 0$  η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \text{και} \quad x_1 = a,$$

συγκλίνει σε αριθμό  $x > 0$  με την ιδιότητα  $x^2 = a$ . (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για  $a \geq 1$  η  $x_n$  είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.)

Οι επόμενες δύο ασκήσεις δίνουν ένα αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού της  $n$ -στης ρίζας θετικού αριθμού, ορίζοντας μια ακολουθία που συγκλίνει ταχύτατα.

Άσκηση 6.8.13. Χρησιμοποιήστε τη μονοτονία της  $(1 + x/n)^n$  για να αποδείξετε ότι

$$\left( \frac{(n-1)x + a}{n} \right)^n \geq x^{n-1} a.$$

(Υπόδειξη: Διαιρέστε με  $x^n$  και τα δύο σκέλη της ζητούμενης για να αναχθείτε σε μια ανισότητα της μορφής  $(1 + (b-1)/n)^n \geq b$ .)

Άσκηση 6.8.14. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη ανισότητα για να αποδείξετε ότι

$$\left( \frac{(k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}}{k} \right)^k \geq a.$$

Με τη βοήθεια αυτού αποδείξετε ότι η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά με

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \quad \text{και} \quad x_1 = a \geq 1,$$

ικανοποιεί την ανισότητα  $a/x_n^k \leq 1$ . Στη συνέχεια δείξτε ότι συγκλίνει (είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη), και το όριό της  $x > 0$  έχει την ιδιότητα  $x^k = a$ .

Για  $0 < a < 1$  ορίζουμε την  $k$ -ρίζα του  $a$  εργαζόμενοι με τον  $1/a > 1$ .

Οι επόμενες δύο ασκήσεις παρέχουν ένα εναλλακτικό τρόπο για να αποδειχθεί ότι η ακολουθία  $x_n = (1 + x/n)^n$  είναι αύξουσα:

Άσκηση 6.8.15. Αποδείξτε ότι η  $x_n = (1 + x/n)^n$  είναι γνήσια αύξουσα για  $x > 0$  αποδεικνύοντας ότι  $x_{n+1}/x_n > 1$  ως εξής: γράψτε πρώτα

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)^n,$$

μεταφέρετε όλους τους όρους στον παρονομαστή (ώστε στον αριθμητή να μείνει μονάδα) και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 6.8.16. Αποδείξτε ότι η  $x_n = (1 + x/n)^n$  είναι γνήσια αύξουσα για  $x < 0$  και  $n > -x$  ως εξής: θεωρήστε την ακολουθία

$$y_n = \left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^n,$$

για κάθε  $n > |x| = -x$ , και γράφοντας

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{|x|}{n - |x|}\right)^n}{\left(1 + \frac{|x|}{n+1 - |x|}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{|x|}{n+1 - |x|}} \left(\frac{\frac{n}{n - |x|}}{\frac{n+1}{n+1 - |x|}}\right)^n$$

μεταφέρετε όλους τους όρους στον παρονομαστή (ο αριθμητής να μείνει μονάδα) και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli για να δείξετε ότι  $y_n/y_{n+1} \geq 1$ , δηλαδή η  $y_n$  είναι φθίνουσα. Στη συνέχεια παρατηρήστε ότι  $y_n = 1/x_n$ .

Άσκηση 6.8.17. Αποδείξτε με διαφορετικό τρόπο ότι η  $x_n = (1 + x/n)^n$  είναι γνήσιως αύξουσα αν  $x \neq 0$  και  $n > -x$  ως εξής: πολλαπλασιάστε την ανισότητα της Άσκησης 9.3.6 με  $(1+t)^n$  (για  $t > -1$ ) και στη συνέχεια αντικαταστήστε το  $t$  με  $x/(n+1)$ .

Άσκηση 6.8.18. Αποδείξτε με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 6.47 ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

είναι γνήσιως αύξουσα για κάθε  $x > -a$  και  $x \neq 0$ . Για να το καταφέρετε εύκολα, για  $x < y$  ξεκινήστε με την παράσταση  $\left(\frac{1+a/x}{1+a/y}\right)^{x/(y-x)}$ , μεταφέρετε τον αριθμητή στον παρονομαστή και προετοιμάστε την εφαρμογή της ανισότητας Bernoulli για πραγματικούς αριθμούς όπως στην Άσκηση 9.3.7. Μετά την εφαρμογή της Bernoulli η ποσότητα που θα προκύψει θα είναι μικρότερη της  $1 + a/y$  αν και μόνο αν

$$0 \leq \frac{a^2}{y^2} \frac{y-x}{x+a},$$

η οποία είναι αληθής αν  $x > -a$ , και δεν είναι γνήσια μόνο αν  $a = 0$ .

Άσκηση 6.8.19. Δίνονται δυο δοχεία όγκου  $2a$  λίτρων το καθένα, το δοχείο  $A$  και το δοχείο  $B$ . Το  $A$  περιέχει  $a$  λίτρα καθαρής αιθανόλης (οινόπνευμα) και το  $B$  περιέχει  $a$  λίτρα νερού. Λέμε ότι εκτελέσαμε μία πράξη όταν (μετά από ανακάτεμα του  $A$ ) αδειάσουμε το μισό περιεχόμενο του  $A$  στο  $B$  και στη συνέχεια (μετά από ανακάτεμα του  $B$ ) αδειάσουμε το μισό περιεχόμενο του  $B$  πίσω στο  $A$ . Να υπολογιστεί η ποσότητα αιθανόλης στο δοχείο  $B$  μετά από άπειρο πλήθος πράξεων καθώς και ο συνολικός όγκος του περιεχομένου του  $B$ . (Υπόδειξη: η απάντηση δεν είναι ότι το  $B$  θα περιέχει τη μισή ποσότητα αιθανόλης.)

Αποδείξτε όμως ότι η περιεκτικότητα του  $B$  σε αιθανόλη μετά από άπειρο πλήθος πράξεων θα είναι 50%.

# Κεφάλαιο 7

## Συναρτήσεις

Το κεφάλαιο υπάρχει μόνο και μόνο για να συμπληρώσει ελάχιστες έννοιες που λείπουν από το σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου. Έτσι, η έννοια της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού της, του πεδίου τιμών της, του συνόλου τιμών της, η ιδιότητα 1-1, η μονοτονία συνάρτησης (αύξουσα, φθίνουσα, γνήσια αύξουσα, γνήσια φθίνουσα) και οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων συμπεριλαμβανομένης της σύνθεσης θεωρούνται γνωστές από το Λύκειο. Εδώ θα τροποποιήσουμε την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων του σχολικού βιβλίου, θα προσθέσουμε την έννοια της φραγμένης συνάρτησης και την έννοια της ιδιότητας του «επί» ειδικά σε σχέση με την αντιστρεψιμότητα.

**Ορισμός 7.1** Δυο συναρτήσεις  $f : A \mapsto B$  και  $g : C \mapsto D$  λέγονται ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή  $A = C$ , έχουν το ίδιο πεδίο τιμών, δηλαδή  $B = D$  και  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in A = C$ .

Η διαφορά με το σχολικό βιβλίο είναι η απαίτηση να ταυτίζονται τα πεδία τιμών, συνθήκη που λείπει από το σχολικό βιβλίο και είναι απαραίτητη. Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο οι συναρτήσεις  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2$  και  $g : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$  με  $g(x) = x^2$  είναι ίσες, αλλά για εμάς δεν θα είναι ίσες γιατί έχουν διαφορετικά πεδία τιμών.

**Ορισμός 7.2** Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$  και πεδίο τιμών το σύνολο  $B \subseteq \mathbb{R}$  λέγεται

- *άνω φραγμένη* αν υπάρχει αριθμός  $M \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) \leq M$  για κάθε  $x \in A$ .
- *κάτω φραγμένη* αν υπάρχει αριθμός  $m \in \mathbb{R}$  ώστε  $m \leq f(x)$  για κάθε  $x \in A$ .
- *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.

**Πρόταση 7.3** Η συνάρτηση  $f : A \mapsto B$  είναι φραγμένη αν και μόνο αν η  $|f|$  είναι άνω φραγμένη.

*Απόδειξη:* Αν η  $|f|$  είναι άνω φραγμένη, υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  ώστε  $|f(x)| \leq M$  για κάθε  $x \in A$ . Συνεπώς  $-M \leq f(x) \leq M$  και η  $f$  είναι φραγμένη (πάνω από το  $M$  και κάτω από το  $m = -M$ ).

Αντίστροφα, αν η  $f$  είναι φραγμένη, υπάρχουν  $m, M \in \mathbb{R}$  ώστε  $m \leq f(x) \leq M$  για κάθε  $x \in A$ . Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε  $T = \max\{|m|, |M|\}$  τότε  $T \geq |M| \geq M$  και  $T \geq |m| \geq -m$  συνεπώς  $-T \leq m$ . Άρα

$$-T \leq m \leq f(x) \leq M \leq T,$$

δηλαδή  $-T \leq f(x) \leq T$  για κάθε  $x \in A$ , άρα  $|f(x)| \leq T$ . □

**Ορισμός 7.4** Μια συνάρτηση  $f : A \mapsto B$  λέγεται «επί του  $B$ » ή απλούτερα «επί» όταν για κάθε  $b \in B$  υπάρχει  $a \in A$  ώστε  $f(a) = b$ .

Δηλαδή η  $f$  είναι επί αν κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών της είναι τιμή της. Για παράδειγμα, η  $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  δεν είναι επί γιατί το  $-1$  είναι στο πεδίο τιμών της αλλά δεν είναι βεβαίως τιμή της  $f$ , αφού  $x^2 \neq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Αν μια συνάρτηση  $f : A \mapsto B$  είναι 1-1 και επί τότε ορίζεται η αντίστροφη  $f^{-1} : B \mapsto A$  ως εξής: για κάθε  $y \in B$ , αφού η  $f$  είναι επί, υπάρχει  $x \in A$  ώστε  $f(x) = y$ . Το  $x$  αυτό είναι μοναδικό, διότι η  $f$  είναι 1-1 (αν υπάρχει  $z \in A$  ώστε  $f(z) = y = f(x)$  από το 1-1 της  $f$  συμπεραίνουμε  $z = x$ ). Ορίζουμε λοιπόν  $f^{-1}(y) = x$ .

## Κεφάλαιο 8

# Όρια συναρτήσεων

### 8.1 Όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Το όριο μιας συνάρτησης  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  στο  $+\infty$  ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται το όριο των ακολουθιών. Εκεί το  $n$  κινείται προς το  $+\infty$  και εδώ το  $x$ . Άρα το πεδίο ορισμού  $A$  της  $f$  πρέπει να επιτρέπει κάτι τέτοιο. Θα πρέπει δηλαδή το  $A$  να περιέχει, όχι απαραίτητα όλους, αλλά οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς όπως το  $\mathbb{N}$  για τις ακολουθίες. Εξάλλου δεν έχει νόημα να μιλάμε για όριο καθώς το  $x$  τείνει στο  $+\infty$  αν το πεδίο ορισμού δεν το επιτρέπει. Για παράδειγμα, αν  $f(x) = \sqrt{1-x}$  η μεγαλύτερη επιτρεπόμενη τιμή του  $x$  είναι 1. Οπότε για αυτή τη συνάρτηση δεν έχει νόημα το όριο με το  $x$  να τείνει στο  $+\infty$ .

Ο αυστηρός ορισμός είναι πρακτικά ο ίδιος με το όριο ακολουθίας με μια μικρή προσθήκη που αφορά το παραπάνω πρόβλημα με το πεδίο ορισμού της  $f$ .

**Ορισμός 8.1** Αν η συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  έχει πεδίο ορισμού το  $A \subseteq \mathbb{R}$  με την ιδιότητα αυτό να περιέχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς, δηλαδή  $A \cap (t, +\infty) \neq \emptyset$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , τότε λέμε ότι το όριο της  $f$  στο  $+\infty$  ισούται με  $\ell \in \mathbb{R}$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  αν και μόνο αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $t \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $x \in A$  και  $x > t$  να ισχύει

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ομοίως,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  αν και μόνο αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $t \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $x < t$  να ισχύει  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ .

Ανάλογα ορίζουμε τις περιπτώσεις

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Για παράδειγμα, η τελευταία περίπτωση ισχύει όταν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $t \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $x < t$  να ισχύει  $f(x) < -M$ . Δείτε τον

αντίστοιχο ορισμό για ακολουθίες και γράψτε ως άσκηση τους ορισμούς για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Στην πράξη, όπως και στις ακολουθίες, ο έλεγχος για το αν ισχύει ο ορισμός για μια συγκεκριμένη συνάρτηση και ένα υπό εξέταση όριο, είναι να θεωρούμε δεδομένο το  $\varepsilon > 0$  και να αναζητούμε το κατάλληλο  $t$  μετά το οποίο (ή πριν το οποίο για την περίπτωση  $x \rightarrow -\infty$ ) ισχύει το συμπέρασμα του ορισμού.

**Παράδειγμα 8.2** (Όριο μονονύμων) Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

*Απόδειξη:* Για κάθε  $M > 1$  για κάθε  $x \geq M$  ισχύει  $x^n \geq M^n \geq M$  άρα από τον ορισμό  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .

Αν  $n = 2k$  είναι άρτιος φυσικός ( $k \geq 1$ ), για κάθε  $M > 1$  αν  $x \geq -M$  τότε  $x^2 \geq M^2$  οπότε  $x^n = (x^2)^k \geq M^{2k} \geq M$ . Δηλαδή από τον ορισμό  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .

Τέλος, αν  $n = 2k+1$  περιττός φυσικός αριθμός ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) και  $M > 1$ , αν  $x < -M$  τότε όπως και πριν  $x^{2k} \geq M$ , και αφού  $x < -1$  θα ισχύει  $x^n = x \cdot x^{2k} \leq xM < -M$ . Δηλαδή από τον ορισμό  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = -\infty$ .  $\square$

**Παράδειγμα 8.3** Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/x^n = 0$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $\varepsilon > 0$ . Θέτουμε  $t = 1/\sqrt[n]{\varepsilon}$ . Οπότε αν  $x > t$  ή  $x < -t$  ισχύει  $|x| > t$  άρα  $|x^n| > 1/\varepsilon$  ισοδύναμα  $|1/x^n| < \varepsilon$ , δηλαδή το συμπέρασμα.

**Παράδειγμα 8.4** (Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση) Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty.$$

*Απόδειξη:* Από την Πρόταση 6.52 για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $e^x \geq 1+x$  άρα για κάθε  $M \in \mathbb{R}$  αν  $x > M$  θα ισχύει και  $e^x > M$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ . Από αυτό, αν  $x \rightarrow -\infty$  για  $x < -1/\varepsilon$  συνεπάγεται  $-x > 1/\varepsilon$  οπότε  $e^{-x} > 1/\varepsilon$  ισοδύναμα  $0 < e^x < \varepsilon$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Τέλος για τον λογάριθμο, για κάθε  $M \in \mathbb{R}$  παίρνουμε  $x > e^M$  οπότε  $\log x > M$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$ .  $\square$

## Ασκήσεις

Άσκηση 8.1.1. Γράψτε τους ορισμούς των ορίων  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

## 8.2 Όριο σε πραγματικό αριθμό

Το όριο μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  περιγράφει την «εξέλιξη» των τιμών της  $f$  (και αν οι τιμές  $f(x)$  πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά ή όχι κάποια τιμή) όταν το  $x$  πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο  $x_0$ . Το  $x_0$  μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή  $\pm\infty$ . Για να έχει νόημα αυτή η συζήτηση θα πρέπει βεβαίως η  $f$  να έχει στο πεδίο ορισμού της στοιχεία οσοδήποτε κοντά στο  $x_0$ . Για παράδειγμα, δεν έχει νόημα να προσπαθούμε να σκεφτούμε πώς εξελίσσονται οι τιμές της  $\sqrt{x}$  καθώς το  $x$  πλησιάζει το  $-2$ , διότι το πεδίο ορισμού της  $\sqrt{x}$ , δηλαδή το  $[0, +\infty)$ , δεν περιέχει σημεία οσοδήποτε κοντά στο  $-2$ . Αυτή είναι η έννοια του σημείου συσσώρευσης ενός συνόλου:

**Ορισμός 8.5** Ένα σημείο  $x_0$  ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* ενός συνόλου  $A \subseteq \mathbb{R}$  αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  ισχύει

$$((x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)) \cap A \neq \emptyset.$$

Το «για κάθε  $\varepsilon > 0$ » εξασφαλίζει ότι οσοδήποτε κοντά στο  $x_0$  το  $A$  έχει στοιχεία διαφορετικά του  $x_0$ .

Το όριο το σκεφτόμαστε ως διαδικασία, ως εξέλιξη των τιμών της  $f$  προς κάποια τιμή (που θα την ονομάσουμε όριο αν μια τέτοια τιμή υπάρχει) και όχι ως «τελική τιμή» όταν το  $x$  γίνει ίσο με  $x_0$ , γιατί συχνά δεν επιτρέπεται το  $x$  να γίνει ίσο με το  $x_0$ . Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f(x) = (\sin x)/x$  και εξετάσουμε την εξέλιξη των τιμών της καθώς το  $x$  πλησιάζει οσοδήποτε κοντά το  $0$ , αυτό που εξετάζουμε δεν είναι κάποια τελική τιμή. Διότι βεβαίως δεν γίνεται για αυτή τη συνάρτηση να θέσουμε  $x = 0$ . Θα δούμε παρακάτω ότι αν το  $x$  πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο  $0$ , η  $f(x) = (\sin x)/x$  παίρνει τιμές οι οποίες πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο  $1$  (χωρίς ποτέ να είναι ίση με  $1$  και χωρίς ποτέ να μπορούμε να θέσουμε  $x = 0$ ).

**Ορισμός 8.6** Έστω ότι η  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A \subseteq \mathbb{R}$  και το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου  $A$ . Λέμε ότι η  $f$  έχει όριο  $\ell \in \mathbb{R}$  στο  $x_0$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  και  $|x - x_0| < \delta$  τότε

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ομοίως με πριν ορίζουμε τα όρια στο  $x_0$  να είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$ .

**Ορισμός 8.7** Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στον προηγούμενο ορισμό λέμε ότι το όριο στο  $x_0$  της  $f$  είναι  $+\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , αν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν το  $x$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$  και  $|x - x_0| < \delta$  τότε  $f(x) > M$ .

Επίσης λέμε ότι το όριό της στο  $x_0$  είναι  $-\infty$  και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , αν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν το  $x$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$  και  $|x - x_0| < \delta$  τότε  $f(x) < -M$ .

Η πρώτη βασική πρόταση μετά τους ορισμούς των ορίων είναι ότι όταν το όριο υπάρχει αυτό είναι μοναδικό.

**Πρόταση 8.8** (Μοναδικότητα ορίου) *Αν το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει αυτό είναι μοναδικό.*

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί  $l_1$  και  $l_2$  που ικανοποιούν τον ορισμό του ορίου της  $f$  στο  $x_0$ . Τότε, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , άρα και για  $\varepsilon = |l_1 - l_2|/2$ , υπάρχει  $\delta_1 > 0$  ώστε για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  και στο  $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$  να ισχύει  $|f(x) - l_1| < \varepsilon$ . Ομοίως, υπάρχει  $\delta_2 > 0$  ώστε για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  και στο  $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$  να ισχύει  $|f(x) - l_2| < \varepsilon$ . Έτσι αν θέσουμε  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , ισχύει  $\delta > 0$  και για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  και στο  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ισχύει και η

$$|f(x) - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

και η

$$|f(x) - l_2| < \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, για  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  παίρνουμε

$$|l_1 - l_2| \leq |l_2 - f(x)| + |f(x) - l_1| < \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2} = |l_1 - l_2|,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Οι περιπτώσεις  $l_1 = +\infty$ ,  $l_2 = -\infty$  και  $l_1 \in \mathbb{R}$ ,  $l_2 = \pm\infty$  αφήνονται ως άσκηση.  $\square$

Πολύ χρήσιμα είναι τα πλευρικά όρια σε πραγματικό αριθμό.

**Ορισμός 8.9** (Πλευρικό όριο από δεξιά) *Αν  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  και για κάθε  $\delta > 0$  ισχύει  $(x_0, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$  λέμε ότι η  $f(x)$  έχει όριο από δεξιά στο  $x_0$  τον αριθμό  $l$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $0 < x - x_0 < \delta$  να ισχύει  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .*

Ομοίως, λέμε ότι η  $f(x)$  έχει όριο από δεξιά στο  $x_0$  το  $+\infty$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ , αν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $0 < x - x_0 < \delta$  να ισχύει  $f(x) > M$ .

Ή, λέμε ότι η  $f(x)$  έχει όριο από δεξιά στο  $x_0$  το  $-\infty$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ , αν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $0 < x - x_0 < \delta$  να ισχύει  $f(x) < -M$ .

Εντελώς αντίστοιχος είναι ο ορισμός για το όριο από αριστερά:

**Ορισμός 8.10** (Πλευρικό όριο από αριστερά) *Αν  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  και για κάθε  $\delta > 0$  ισχύει  $(x_0 - \delta, x_0) \cap A \neq \emptyset$  λέμε ότι η  $f(x)$  έχει όριο από αριστερά στο  $x_0$  τον αριθμό  $l$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $0 < x_0 - x < \delta$  να ισχύει  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .*

Ομοίως, λέμε ότι η  $f(x)$  έχει όριο από αριστερά στο  $x_0$  το  $+\infty$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ , αν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $0 < x_0 - x < \delta$  να ισχύει  $f(x) > M$ .

Ή, λέμε ότι η  $f(x)$  έχει όριο από αριστερά στο  $x_0$  το  $-\infty$ , και γράφουμε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ , αν για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $0 < x_0 - x < \delta$  να ισχύει  $f(x) < -M$ .

Και πάλι κάθε πλευρικό όριο είναι μοναδικό με την ίδια απόδειξη με τις προφανείς τροποποιήσεις και αφήνεται ως άσκηση.

Το επόμενο θεώρημα μεταφέρει την έννοια του ορίου των συναρτήσεων στα όρια των ακολουθιών, και μας επιτρέπει έτσι να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις από τις ακολουθίες στον υπολογισμό των ορίων συναρτήσεων.

**Θεώρημα 8.11** (Αρχή της μεταφοράς) Για κάθε συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  και  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .
- (ii) για κάθε ακολουθία  $x_n \in A$  που συγκλίνει στο  $x_0$  η ακολουθία  $f(x_n)$  συγκλίνει στο  $\ell$ ,

είτε το  $x_0$  και το  $\ell$  είναι πραγματικοί ή  $\pm\infty$ .

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  και μια ακολουθία  $x_n \in A$  με  $x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ . Πρέπει να δείξουμε ότι  $f(x_n) \rightarrow \ell$ . Από τον ορισμό του ορίου της συνάρτησης για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $|x - x_0| < \delta$  τότε  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ . Αλλά  $x_n \rightarrow x_0$  άρα υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|x_n - x_0| < \delta$ . Άρα  $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ . Δηλαδή για κάθε  $\varepsilon > 0$  βρήκαμε  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε αν  $n \geq n_0$  τότε  $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ , συνεπώς  $f(x_n) \rightarrow \ell$ .

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η  $f$  στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  δεν έχει όριο το  $\ell \in \mathbb{R}$ . Άρα υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , για  $\delta = 1/n$  υπάρχει  $t_n \in A$  με  $|t_n - x_0| < \delta = 1/n$  ώστε  $|f(t_n) - \ell| \geq \varepsilon$ . Αυτό όμως αντιφάσκει με το (ii) αφού η συγκεκριμένη  $t_n$  συγκλίνει στο  $x_0$  αλλά η  $f(t_n)$  δεν συγκλίνει στο  $\ell$ .

Αν τώρα  $\ell = +\infty$ ,  $A \ni x_n \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$  και  $M \in \mathbb{R}$ , υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $|x - x_0| < \delta$  τότε  $f(x) \geq M$ . Αλλά, αφού  $x_n \rightarrow x_0$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να είναι  $|x_n - x_0| < \delta$ . Άρα για κάθε  $n \geq n_0$  ισχύει  $f(x_n) \geq M$  και συνεπώς  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ . Ενώ αντιστρόφως, αν η  $f$  δεν έχει όριο το  $+\infty$  στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  τότε υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  ώστε για κάθε  $\delta > 0$ , άρα και για  $\delta = 1/n$ , υπάρχει  $x_n \in A$  ώστε  $|x_n - x_0| < 1/n$  αλλά  $f(x_n) \leq M$  αντιφάσκοντας με το (ii), αφού η  $x_n$  τείνει στο  $x_0$  αλλά η  $f(x_n)$  δεν τείνει στο  $+\infty$ .

Ομοίως αντιμετωπίζουμε τις περιπτώσεις  $\ell = -\infty$ ,  $x_0 = +\infty$ ,  $x_0 = -\infty$  και αφήνονται ως άσκηση.  $\square$

## Ασκήσεις

Άσκηση 8.2.1. Αποδείξτε ότι δεν γίνεται μια συνάρτηση στο  $x_0$  να συγκλίνει και στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ , ούτε γίνεται να συγκλίνει σε ένα από τα  $\pm\infty$  και σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

Άσκηση 8.2.2. Αποδείξτε ότι το όριο όταν  $x \rightarrow +\infty$  μιας συνάρτησης  $f$  με κατάλληλο πεδίο ορισμού είναι μοναδικό. Ομοίως για  $x \rightarrow -\infty$ .

Άσκηση 8.2.3. Αποδείξτε σε κάθε περίπτωση ότι τα πλευρικά όρια όταν υπάρχουν είναι μοναδικά.

## 8.3 Ιδιότητες των ορίων

Στα παρακάτω θα γράφουμε  $\tilde{\mathbb{R}}$  για το σύνολο  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , το οποίο ονομάζουμε «εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών». Τα όρια συναρτήσεων ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες με τα όρια ακολουθιών, οι οποίες συνοψίζονται στην εξής πρόταση.

**Πρόταση 8.12** Έστω ότι οι  $f, g, h$  είναι συναρτήσεις από το  $A \subseteq \mathbb{R}$  στο  $\mathbb{R}$  και  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Τότε για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και εφόσον οι συναρτήσεις έχουν όριο στο  $x_0$ , ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- (i) Αν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , τότε υπάρχουν και τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f + \mu g)(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$  και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \mu \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

υπό τον όρο ότι τα αποτελέσματα στα δεξιά των ισοτήτων δεν οδηγούν σε απροσδιοριστίες της μορφής  $\infty - \infty$  ή  $0 \cdot (\pm\infty)$ .

- (ii) Αν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  και επιπλέον ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$  τότε υπάρχει και το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x)$  και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

- (iii) Αν  $g(x) \leq f(x)$  για κάθε  $x \in A$  και τα όρια και των δύο συναρτήσεων στο  $x_0$  υπάρχουν στο  $\tilde{\mathbb{R}}$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

- (iv) Αν  $f$  φραγμένη συνάρτηση και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = 0$ .

- (v) Αν το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει, τότε υπάρχει και το  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  και ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|$ .

Όλα τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που το  $x_0$  αντικατασταθεί με το  $+\infty$  ή το  $-\infty$ .

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εύκολα με την αρχή της μεταφοράς και αφήνεται ως άσκηση.  $\square$

**Πόρισμα 8.13** Αν  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  για κάθε  $x \in A$  και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) =: \ell \in \tilde{\mathbb{R}}$$

τότε το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει και ισούται με την κοινή τιμή  $\ell$ .

Απόδειξη: Από την υπόθεση ισχύει  $0 \leq f(x) - g(x) \leq h(x) - g(x)$  αλλά και  $\lim_{x \rightarrow x_0} (h(x) - g(x)) = 0$ . Άρα για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta_1 > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta_1$  ισχύει  $|h(x) - g(x)| < \varepsilon/2$ . Αλλά  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ , οπότε υπάρχει και  $\delta_2$  ώστε αν  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta_2$  ισχύει  $|g(x) - \ell| < \varepsilon/2$ . Έτσι, από την τριγωνική ανισότητα, αν  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  θα ισχύει

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - \ell| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει και ισούται με  $\ell$ .  $\square$

**Πρόταση 8.14** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  και  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Αν το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  τότε υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε στο σύνολο  $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  η  $f$  είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για  $\varepsilon = 1 >$ , και βρίσκουμε  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  να ισχύει  $|f(x) - \ell| < 1$ . Από την κάτω τριγωνική ανισότητα τώρα  $|f(x)| - |\ell| < 1$ , οπότε  $|f(x)| < 1 + |\ell|$ , δηλαδή η  $f$  είναι φραγμένη στο  $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .  $\square$

**Πρόταση 8.15** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  και  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Αν το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$  τότε υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε στο σύνολο  $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  η  $f$  παίρνει τιμές ομόσημες με το  $\ell$ .

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι  $0 < \ell \in \mathbb{R}$ . Θεωρούμε  $\delta > 0$  ώστε αν  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta$  να συνεπάγεται  $|f(x) - \ell| < \ell/2$ . Συνεπώς  $f(x) > \ell/2$  για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Ομοίως χειριζόμαστε και τις άλλες περιπτώσεις.  $\square$

**Πρόταση 8.16** Αν η συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  είναι μονότονη και το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$ , τότε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  υπάρχουν, και είτε είναι πραγματικοί αριθμοί είτε  $\pm\infty$ .

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι αύξουσα. Θέτουμε  $s = \sup\{f(x) : x < x_0\}$ . Αν  $s \in \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$  τότε το  $s - \varepsilon$  δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου  $C := \{f(x) : x < x_0\}$  οπότε υπάρχει  $x_1 < x_0$  ώστε  $s - \varepsilon < f(x_1)$ .

Θέτουμε  $\delta = x_0 - x_1 > 0$ . Τότε αν  $x_1 < x < x_0$  επειδή η  $f$  είναι αύξουσα θα ισχύει

$$s - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) < s + \varepsilon.$$

Άρα  $|f(x) - s| < \varepsilon$  και συνεπώς  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = s$ .

Αν  $s = +\infty$  για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $x_1 < x_0$  ώστε  $f(x_1) \geq M$ . Πάλι από το ότι η  $f$  έχει υποτεθεί αύξουσα, για κάθε  $x$  με  $x_1 < x < x_0$  θα ισχύει  $f(x) \geq f(x_1) \geq M$ . Άρα  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty = s$ .

Ομοίως για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.  $\square$

**Πόρισμα 8.17** Αν  $\Delta$  διάστημα του  $\mathbb{R}$  και η  $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$  είναι μονότονη τότε τα πλευρικά όρια υπάρχουν σε κάθε σημείο του  $\Delta$

*Απόδειξη:* Κάθε σημείο ενός διαστήματος είναι σημείο συσσώρευσής του, οπότε το η απόδειξη προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 8.16.  $\square$

**Πρόταση 8.18** Έστω ότι το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης  $f : A \mapsto \mathbb{R}$ . Το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Σε αυτή την περίπτωση το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ισούται με την κοινή τιμή τους.

*Απόδειξη:* Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο, για κάθε  $\varepsilon > 0$  βρίσκουμε  $\delta_1 > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$  να ισχύει  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ , και  $\delta_2 > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$  να ισχύει  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ . Θέτουμε  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  οπότε αν  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  φανερά  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  $\square$

## 8.4 Βασικά όρια

Τα παρακάτω βασικά όρια προκύπτουν αμέσως από την Αρχή της Μεταφοράς (Πρόταση 8.11) και τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες.

**Πρόταση 8.19** Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης της οποίας υπολογίζουμε το όριο στο  $x_0$ . Ισχύουν τα εξής:

- (i) Για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$ .
- (ii) Για κάθε  $k \in \mathbb{N}$  και  $x_0 \neq 0$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^{-k} = x_0^{-k}$ .
- (iii) Για κάθε  $r > 0$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^r = x_0^r$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{x_0}$ .
- (iv)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$ .
- (v)  $\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$ .

(vi) Αν  $x_0 > 0$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log x = \log x_0$ .

(vii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ .

(viii) Αν το  $x_0$  δεν είναι ρίζα του συνημιτόνου τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$ , και αν το  $x_0$  δεν είναι ρίζα του ημιτόνου τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0$ .  $\square$

**Παράδειγμα 8.20** (Όριο πολυωνύμων) Για κάθε πολυώνυμο  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  βαθμού  $n$  (δηλαδή  $a_n \neq 0$ ) ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \text{sign}(a_n) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n,$$

όπου  $\text{sign}(a_n)$  το πρόσημο του  $a_n$ . Δηλαδή το όριο αυτό είναι πάντα  $+\infty$  επί το πρόσημο του  $a_n$  αν  $x \rightarrow +\infty$ , είναι  $+\infty$  επί το πρόσημο του  $a_n$  αν  $x \rightarrow -\infty$  και  $n$  άρτιος, και είναι  $-\infty$  επί το πρόσημο του  $a_n$  αν  $x \rightarrow -\infty$  και  $n$  περιττός. Επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{p(x)} = 0.$$

Απόδειξη: Αν  $a_n = 1$  τότε για  $x \neq 0$  θα είναι

$$\frac{p(x)}{x^n} - 1 = \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Όμως, όλες οι συναρτήσεις στα δεξιά έχουν όριο στο  $\pm\infty$  το μηδέν από το Παράδειγμα 8.3 και το (i) της Πρότασης 8.12. Άρα και όλο το άθροισμα στα δεξιά έχει όριο το μηδέν πάλι από το (i) της ίδιας πρότασης. Συνεπώς  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (p(x)/x^n - 1) = 0$ . Προσθέτοντας το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 = 1$  παίρνουμε  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x)/x^n = 1$ . Πολλαπλασιάζοντας με το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  ή με το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$  αν  $n$  άρτιος ή με το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  αν  $n$  περιττός, παίρνουμε το αποτέλεσμα.

Αν το  $a_n > 0$  (αλλά όχι απαραίτητα ίσο με 1) ή  $a_n < 0$ , χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση

$$p(x) = a_n \left( x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right).$$

Τέλος, αφού το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x)$  είναι πάντα είτε  $+\infty$  είτε  $-\infty$  το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/p(x)$  είναι πάντα μηδέν.  $\square$

## 8.5 Όριο σύνθεσης συναρτήσεων

**Θεώρημα 8.21** Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $g : A \mapsto B$  και  $f : B \mapsto C$  με  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ . Θεωρούμε  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του  $A$  και υποθέτουμε ότι το  $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  υπάρχει και είναι σημείο συσσώρευσης του  $B$ . Αν το όριο  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) =: \ell$  υπάρχει, τότε υπάρχει και το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x)$  και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

*Απόδειξη:* Αν  $A \ni x_n \rightarrow x_0$  τότε  $y_0 = \lim g(x_n)$  από την αρχή της μεταφοράς για το όριο  $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Συνεπώς από την αρχή της μεταφοράς για το όριο  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$  με  $y_n = g(x_n)$  θα είναι  $f(g(x_n)) \rightarrow \ell$ . Αλλά  $f(g(x_n)) = (f \circ g)(x_n)$ , δηλαδή δείξαμε ότι αν  $x_n \rightarrow x_0$  τότε  $(f \circ g)(x_n) \rightarrow \ell$ . Από την αρχή της μεταφοράς το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ g)(x)$  υπάρχει και ισούται με  $\ell$ .  $\square$

## 8.6 Μερικές συνθήκες ύπαρξης ορίου

Όπως είδαμε στην απόδειξη(!) της Πρότασης 8.16 ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 8.22** *Αν η  $f$  είναι μονότονη και  $x_0$  σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της τότε τα πλευρικά όρια στο  $x_0$  υπάρχουν, και συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν η  $f$  είναι αύξουσα, τότε*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x < x_0} f(x).$$

(ii) *Αν η  $f$  είναι φθίνουσα, τότε*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf_{x < x_0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x). \quad \square$$

**Πρόταση 8.23** (Κριτήριο Cauchy) *Αν το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της  $f$  τότε το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$  αν και μόνο αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε αν  $|x_1 - x_0| < \delta$  και  $|x_2 - x_0| < \delta$ , με  $x_1, x_2$  στο πεδίο ορισμού της  $f$ , τότε  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .*

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  υπάρχει και ισούται με  $\ell \in \mathbb{R}$ . Τότε για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  με  $|x - x_0| < \delta$  ισχύει

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon/2.$$

Άρα, αν  $x_1$  και  $x_2$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  με  $|x_1 - x_0| < \delta$  και  $|x_2 - x_0| < \delta$  θα ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - \ell) - (f(x_2) - \ell)| \\ &\leq |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς (Θεώρημα 8.11). Θεωρούμε ακολουθία  $x_n$  στο πεδίο ορισμού της  $f$  που τείνει στο  $x_0$ . Αφού η  $f$  ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy άμεσα συμπεραίνουμε ότι η  $f(x_n)$  είναι ακολουθία Cauchy στο  $\mathbb{R}$  άρα έχει όριο, έστω το  $\ell$ . Μένει να δείξουμε ότι αν  $y_n$  μια οποιαδήποτε ακολουθία στο πεδίο ορισμού

της  $f$  που τείνει στο  $x_0$  θα συνεπάγεται ότι  $\lim f(y_n) = \ell$ . Όμως αφού  $x_n \rightarrow x_0$  και  $y_n \rightarrow x_0$ , για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|x_n - x_0| < \delta/2$  και  $|y_n - x_0| < \delta/2$ , και άρα, από την τριγωνική ανισότητα,  $|x_n - y_n| < \delta$ . Άρα  $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ . Δηλαδή  $\lim(f(y_n) - f(x_n)) = 0$ , και προσθέτοντας την  $\lim f(x_n) = \ell$  κατά μέλη προκύπτει  $\lim f(y_n) = \ell$ .  $\square$

## Ασκήσεις

Άσκηση 8.6.1. Μελετήστε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  όπου  $g(x) = P(x)/Q(x)$  μια ρητή συνάρτηση και  $x_0$  ρίζα του παρονομαστή. Ίδια ερώτηση για τα όρια όταν  $x \rightarrow +\infty$  ή  $x \rightarrow -\infty$ .

## Κεφάλαιο 9

# Συνέχεια συναρτήσεων

### 9.1 Ορισμός της συνέχειας

**Ορισμός 9.1** Μια συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  λέγεται συνεχής στο σημείο  $x_0 \in A$  αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta$  ισχύει  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Άμεσα προκύπτει ότι αν το  $x_0 \in A$  είναι και σημείο συσσώρευσης του συνόλου  $A$  τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Αν όμως το  $x_0$  δεν είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$  τότε η  $f$  είναι πάντα συνεχής στο  $x_0$ . Διότι, αφού δεν είναι σημείο συσσώρευσης υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε  $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$ . Οπότε το μόνο σημείο του πεδίου ορισμού  $A$  που ικανοποιεί την  $|x - x_0| < \delta$  είναι το ίδιο το  $x_0$  και φανερά  $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ . Έτσι ο έλεγχος της συνέχειας σε σημεία που δεν είναι σημεία συσσώρευσης περιττεύει. Οπότε στα επόμενα, για τον έλεγχο της συνέχειας σε ένα σημείο  $x_0$  θα υποθέτουμε πάντα ότι το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης.

Ομοίως ορίζεται και η πλευρική συνέχεια στο  $x_0$ :

**Ορισμός 9.2** Η  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  είναι αριστερά συνεχής στο  $x_0 \in A$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A$  με  $0 < x_0 - x < \delta$  ισχύει  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Η  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  είναι δεξιά συνεχής στο  $x_0 \in A$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A$  με  $0 < x - x_0 < \delta$  ισχύει  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Και πάλι όπως πριν, αν το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$  από αριστερά, δηλαδή  $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset$  για κάθε  $\delta > 0$  τότε η  $f$  είναι αριστερά συνεχής στο  $x_0$  αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ . και αν το  $x_0$  είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$  από δεξιά, δηλαδή  $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$  για κάθε  $\delta > 0$  τότε η  $f$  είναι δεξιά συνεχής στο  $x_0$  αν και μόνο αν  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

**Θεώρημα 9.3** (Αρχή της μεταφοράς) Μια συνάρτηση  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  είναι

συνεχής στο σημείο συσσώρευσης  $x_0 \in A$  αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία  $x_n \in A$  με  $x_n \rightarrow x_0$  ισχύει  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι  $x_n \rightarrow x_0$  με  $x_n \in A$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Θεωρούμε  $\varepsilon > 0$ . Από τη συνέχεια της  $f$  στο  $x_0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta$  συνεπάγεται  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Αλλά, αφού  $x_n \rightarrow x_0$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $|x_n - x_0| < \delta$ . Άρα  $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ , συνεπώς  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Αντιστρόφως, αν η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$  τότε υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε για κάθε  $\delta > 0$  υπάρχει  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta$  αλλά  $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ . Άρα αυτό ισχύει και αν διαλέξουμε  $\delta = 1/n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Δηλαδή υπάρχει  $x_n \in A$  με  $|x_n - x_0| < 1/n$  αλλά  $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ . Τότε όμως  $x_n \rightarrow x_0$  και  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ , άτοπο.  $\square$

Από την Αρχή της Μεταφοράς και τις ιδιότητες των ορίων ακολουθιών παίρνουμε άμεσα το ακόλουθο.

**Πρόταση 9.4** Θεωρούμε συναρτήσεις  $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$  οι οποίες είναι συνεχείς στο  $x_0 \in A$ . Τότε

(i) οι  $f \pm g, fg$  είναι συνεχείς στο  $x_0$ .

(i) αν υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$  τότε η  $1/g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ . Άρα και η  $f/g$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(i) αν  $k \in \mathbb{N}$  και υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ , τότε και η  $\sqrt[k]{f(x)}$ , ορισμένη στο  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ , είναι συνεχής στο  $x_0$ .  $\square$

Βέβαια η παραπάνω πρόταση μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με τον ορισμό της συνέχειας, κάτι που αφήνεται ως άσκηση (Άσκηση 9.3.1.).

**Πρόταση 9.5** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f : A \mapsto B$  και  $g : B \mapsto C$ , όπου η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 \in A$  και η  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0) \in B$ . Τότε η σύνθεση  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

*Απόδειξη:* Άμεση από την αρχή της μεταφοράς.  $\square$

Άρα αν η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $A$  και η  $g$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $B$ , τότε η  $g \circ f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $A$ .

**Πρόταση 9.6** Τα πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}$ .

*Απόδειξη:* Από την Πρόταση 9.4 αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε  $k = 1, 2, \dots$  η συνάρτηση  $f(x) = x^k$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}$  (για  $k = 0$  είναι τετριμμένο και αφήνεται ως άσκηση). Αυτό όμως έχει ήδη αποδειχθεί λόγω της αρχής της μεταφοράς στην Ιδιότητα 6.30 σελίδα 42.  $\square$

**Πρόταση 9.7** Οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt[k]{x}$  είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο στο  $[0, \infty)$ .

*Απόδειξη:* Από την αρχή της μεταφοράς αυτό έχει αποδειχθεί στην ιδιότητα 6.31 σελίδα 42.  $\square$

**Πρόταση 9.8** Η  $f(x) = e^x$  είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}$ .

*Απόδειξη:* Έστω ακολουθία  $x_n \rightarrow x_0$ . Πρέπει να δείξουμε ότι  $e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$ . Αλλά

$$e^{x_n} - e^{x_0} = e^{x_0}(x_n - x_0) \frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \rightarrow e^{x_0} \cdot 0 \cdot 1$$

από την Πρόταση 6.62 σελίδα 53.  $\square$

**Πρόταση 9.9** Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στα σημεία που ορίζονται.

*Απόδειξη:* Για την  $\cos x$  ισχύει

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

και η  $\cos x$  είναι φανερά συνεχής.

Για την  $\sin x$  ισχύει

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|$$

και η  $\sin x$  είναι φανερά συνεχής.

Για τις  $\tan x$  και  $\cot x$  το αποτέλεσμα προκύπτει από την Πρόταση 9.4.  $\square$

### 9.1.1 Συνέπειες της ιδιότητας της συνέχειας

**Πρόταση 9.10** Αν η συνάρτηση  $f$  ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  τότε η  $f$  είναι φραγμένη.

*Απόδειξη:* Αν δεν είναι, η  $|f|$  δεν είναι άνω φραγμένη (Πρόταση 7.3). Άρα, υπάρχει  $x_n \in [a, b]$  ώστε  $|f|(x_n) \rightarrow +\infty$ . Αλλά η  $x_n$  ως φραγμένη έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω ότι μια τέτοια υπακολουθία της είναι η  $x_{k_n}$  με όριο το  $\ell \in [a, b]$ . Η  $|f|$  όμως είναι συνεχής, οπότε η  $|f|(x_{k_n})$  θα έπρεπε να συγκλίνει στο  $|f(\ell)|$ , αλλά αυτή έχει όριο το  $+\infty$  ως υπακολουθία της  $|f|(x_n)$ , άτοπο.  $\square$

**Πρόταση 9.11** (Υπαρξη μεγίστου και ελαχίστου) Αν η συνάρτηση  $f$  ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  τότε η  $f$  παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν  $x_1$  και  $x_2 \in [a, b]$  ώστε  $f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$  και  $f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ .

*Απόδειξη:* Η  $f$  ως συνεχής είναι φραγμένη από την Πρόταση 9.10. Άρα  $s := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $i := \inf_{x \in [a, b]} f(x) \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε ακολουθίες  $x_n$  και  $y_n$  στο  $[a, b]$  ώστε  $f(x_n) \rightarrow s$  και  $f(y_n) \rightarrow i$ . Οι  $x_n$  και  $y_n$  ως φραγμένες έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες, έστω τις

$x_{k_n}$  και  $y_{m_n}$  με όρια τα  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχα. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε  $f(x_1) = \lim f(x_{k_n}) = s$ , αφού η  $f(x_{k_n})$  είναι υπακολουθία της  $f(x_n)$ . Ομοίως,  $f(x_2) = \lim f(y_{m_n}) = i$ , αφού η  $f(y_{m_n})$  είναι υπακολουθία της  $f(y_n)$ .  $\square$

**Παρατήρηση 9.12** Στην παραπάνω απόδειξη θα μπορούσαμε να αποφύγουμε τη χρήση ακολουθιών λέγοντας ότι αν το  $s$  δεν είναι στο σύνολο τιμών της  $f$ , τότε η συνάρτηση  $g(x) = 1/(s - f(x))$  είναι καλά ορισμένη (αφού  $f(x) \neq s$  για κάθε  $x \in [a, b]$ ) αλλά δεν είναι φραγμένη, άτοπο από την Πρόταση 9.10.

Το παρακάτω λήμμα λέει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση στο  $[a, b]$  «αλλάζει πρόσημο» από το  $a$  στο  $b$  τότε έχει αναγκαστικά ρίζα στο  $[a, b]$ :

**Λήμμα 9.13** Αν η συνάρτηση  $f$  ορίζεται και είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και  $f(a)f(b) \leq 0$  τότε υπάρχει  $x_0 \in [a, b]$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

*Απόδειξη:* Αν  $f(a) = 0$  ή  $f(b) = 0$  δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $f(a) > 0$  και  $f(b) < 0$  (αλλιώς εργαζόμαστε με την  $-f$ ).

Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{x \in [a, b] : f(x) \geq 0\} \subseteq [a, b]$ , το οποίο δεν είναι κενό αφού φανερά  $a \in A$ , και έστω  $s = \sup A$ . Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία  $s_n \in A$  με  $s_n \rightarrow s$  (Άσκηση 6.8.11.), από την αρχή της μεταφοράς θα συμπεράνουμε ότι  $f(s) \geq 0$ . Έτσι όμως  $s \neq b$  οπότε  $s < b$ . Αν τώρα  $f(s) > 0$ , ισχύει  $s + 1/n \notin A$  και τελικά  $s + 1/n \in [a, b]$ , αφού  $s < b$ , οπότε  $f(s + 1/n) < 0$ . Παίρνοντας όρια και χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς, προκύπτει  $f(s) \leq 0$ . Όμως  $f(s) \geq 0$  οπότε αναγκαστικά  $f(s) = 0$ .  $\square$

**Θεώρημα 9.14** (Ενδιάμεσης τιμής) Έστω ότι συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής στο  $[a, b]$ . Τότε για κάθε  $y$  στο διάστημα με άκρα τα  $f(a)$  και  $f(b)$  υπάρχει  $x \in [a, b]$  ώστε  $f(x) = y$ .

*Απόδειξη:* Είτε  $f(a) \leq y \leq f(b)$  είτε  $f(b) \leq y \leq f(a)$ , η συνάρτηση  $g(x) = f(x) - y$  είναι συνεχής και ικανοποιεί την

$$g(a)g(b) = (f(a) - y)(f(b) - y) \leq 0.$$

Άρα υπάρχει  $x \in [a, b]$  ώστε  $g(x) = 0$ .  $\square$

Η Πρόταση 9.11 μαζί με την Πρόταση 9.14 δίνουν άμεσα το ακόλουθο:

**Πόρισμα 9.15** Η εικόνα κλειστού διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα.  $\square$

## 9.2 Συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης

**Πρόταση 9.16** Αν  $\Delta$  διάστημα του  $\mathbb{R}$  και  $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$  συνεχής, τότε και το  $f(\Delta)$  είναι διάστημα του  $\mathbb{R}$ .

*Απόδειξη:* Αν το  $f(\Delta)$  είναι μονοσύνολο (της μορφής  $[y_0, y_0]$ , δηλαδή η  $f$  είναι σταθερή) το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι το  $f(\Delta)$  δεν είναι μονοσύνολο. Θεωρούμε μια ακολουθία  $i_n \in f(\Delta)$  με  $i_n \rightarrow i = \inf f(\Delta)$  και μια  $s_n \in f(\Delta)$  με  $s_n \rightarrow s = \sup f(\Delta)$  (Άσκηση 6.8.II.). Τελικά θα ισχύει  $i_n < s_n$  διότι το  $f(\Delta)$  δεν είναι μονοσύνολο, οπότε  $\inf f(\Delta) < \sup f(\Delta)$ , ενώ φανερά  $f(\Delta) \subseteq [i, s]$  όπου αν το  $i$  ή το  $s$  είναι άπειρα αλλάζουμε τα κλειστά άκρα σε ανοικτά.

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής,  $(i_n, s_n) \subseteq f(\Delta) \subseteq [i, s]$ , άρα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (i_n, s_n) \subseteq f(\Delta) \subseteq [i, s].$$

Αφήνεται ως εύκολη άσκηση ότι  $(i, s) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (i_n, s_n)$ . Συνεπώς

$$(i, s) \subseteq f(\Delta) \subseteq [i, s]$$

αλλάζοντας τα κλειστά άκρα σε ανοικτά αν  $i$  ή  $s$  είναι  $-\infty, +\infty$  αντίστοιχα. Άρα το  $f(\Delta)$  έχει τέσσερις δυνατότητες να είναι ένα από τα  $(i, s)$ ,  $(i, s]$ ,  $[i, s)$  ή  $[i, s]$  ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

**Πρόταση 9.17** *Αν  $\Delta$  διάστημα του  $\mathbb{R}$  και  $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$  συνεχής και 1-1 τότε είτε  $f$  γνήσια αύξουσα είτε γνήσια φθίνουσα.*

*Απόδειξη:* Έστω ότι υπάρχουν δυο σημεία  $a < b$  στο  $\Delta$  με  $f(a) < f(b)$ . Θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι γνήσιως αύξουσα στο  $\Delta$ . Έστω λοιπόν δυο σημεία  $x, y \in \Delta$  με  $x < y$ . Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε  $t \in [0, 1]$  ισχύει ότι το  $(1-t)a + tx$  ανήκει στο διάστημα με άκρα τα  $a$  και  $x$ , άρα βρίσκεται στο  $\Delta$  και το  $(1-t)b + ty$  ανήκει στο διάστημα με άκρα τα  $b$  και  $y$ , άρα βρίσκεται και αυτό στο  $\Delta$ . Επίσης, φανερά  $(1-t)a + tx < (1-t)b + ty$ , αφού  $a < b$  και  $x < y$ . Θέτουμε

$$F(t) = f((1-t)a + tx) - f((1-t)b + ty).$$

Επειδή η  $f$  είναι 1-1 έπεται ότι η  $F$  δεν μηδενίζεται στο  $[0, 1]$ . Αλλά φανερά είναι συνεχής οπότε δεν αλλάζει πρόσημο από το 0 στο 1. Επειδή  $F(0) = f(a) - f(b) < 0$  συμπεραίνουμε  $f(x) - f(y) = F(1) < 0$ .  $\square$

**Πρόταση 9.18** *Αν  $\Delta$  διάστημα του  $\mathbb{R}$  και  $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$  μονότονη τότε η  $f^{-1} : f(\Delta) \mapsto \Delta$  έχει την ίδια μονοτονία με την  $f$ .*

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι αύξουσα. Αν η  $f^{-1}$  δεν είναι αύξουσα τότε υπάρχουν  $y_1 < y_2$  στο  $f(\Delta)$  ώστε  $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ . Αλλά αφού η  $f$  είναι αύξουσα συμπεραίνουμε ότι  $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$ , άτοπο.  $\square$

**Πρόταση 9.19** *Έστω ότι το  $\Delta$  είναι ένα διάστημα στο  $\mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$  είναι 1-1 και συνεχής στο  $\Delta$ . Τότε η  $f^{-1} : f(\Delta) \mapsto \Delta$  είναι συνεχής στο  $f(\Delta)$ .*

*Απόδειξη:* Από την Πρόταση 9.16 το  $f(\Delta)$  είναι διάστημα. Η  $f$  είναι γνήσια μονότονη από την Πρόταση 9.17. Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα (ομοίως αν είναι γνήσια φθίνουσα) και άρα και η  $f^{-1}$  είναι γνήσια αύξουσα.

Έστω  $y_0 \in f(\Delta)$  που δεν είναι άκρο του. Θεωρούμε  $c < y_0 < d$  σημεία του  $f(\Delta)$  και  $a = f^{-1}(c)$ ,  $b = f^{-1}(d)$  οπότε  $a, b \in \Delta$ , συνεπώς  $[a, b] \subseteq \Delta$ ,  $a < x_0 := f^{-1}(y_0) < b$  καθώς και  $[c, d] \subseteq f(\Delta)$  (αφού το  $f(\Delta)$  είναι διάστημα).

Έστω ότι  $\varepsilon > 0$ . Θέτουμε  $0 < \varepsilon' = (1/2) \min\{\varepsilon, b - x_0, x_0 - a\}$  και ισχύει  $a < x_0 - \varepsilon' < x_0 < x_0 + \varepsilon' < b$ . Θέτουμε  $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon'), f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0)\} > 0$  (αφού  $f$  γνήσιως αύξουσα). Τέλος ελέγχουμε: αν  $|y - y_0| < \delta$  τότε  $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$ , συνεπώς

$$\begin{aligned} f(x_0 - \varepsilon') &\leq f(x_0) - \delta = y_0 - \delta && \text{(από τον ορισμό του } \delta) \\ &< y < y_0 + \delta = f(x_0) + \delta \\ &\leq f(x_0 + \varepsilon'). && \text{(από τον ορισμό του } \delta) \end{aligned}$$

Άρα  $x_0 - \varepsilon' < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon'$ , δηλαδή  $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon' < \varepsilon$ .

Ομοίως κάνουμε την απόδειξη αν το  $y_0$  είναι άκρο του διαστήματος  $f(\Delta)$ .  $\square$

**Παρατήρηση 9.20** (Είδη ασυνέχειας) Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f : A \mapsto B$  και  $x_0 \in A$ . Αν τα πλευρικά όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  υπάρχουν και είναι ίσα, αλλά

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq f(x_0),$$

λέμε ότι η ασυνέχεια στο  $x_0$  είναι επουσιώδης ασυνέχεια, διότι μπορεί να αρθεί, να διορθωθεί, αν αλλάξουμε μόνο την τιμή  $f(x_0)$ .

Αν όμως  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  τότε η ασυνέχεια της  $f$  στο  $x_0$  λέγεται *πρώτου είδους* και λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει άλμα στο  $x_0$  την ποσότητα  $J_f(x)$ .

Τέλος αν ένα από τα δύο πλευρικά όρια δεν υπάρχουν τότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει *ουσιώδη* ασυνέχεια ή *ασυνέχεια δεύτερου είδους* στο  $x_0$ .

## 9.3 Εφαρμογές της συνέχειας

**Πρόταση 9.21** Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το πολυώνυμο  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_0$  με  $a_k \neq 0$  και  $k$  περιττό. Αν  $a_k > 0$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$  (Παράδειγμα 8.20) άρα υπάρχει  $x_1 \in \mathbb{R}$  ώστε  $p(x_1) > 0$  (αν όχι, τότε  $p(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  απ' όπου  $+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) \leq 0$  άτοπο). Επίσης, αφού  $k$  περιττός,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ , οπότε ομοίως υπάρχει  $x_2 \in \mathbb{R}$  ώστε  $p(x_2) < 0$ . Συνεπώς ισχύει  $p(x_1)p(x_2) < 0$  και από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $p(x) = 0$ .  $\square$

**Θεώρημα 9.22** (Θεώρημα σταθερού σημείου) Αν  $f : [a, b] \mapsto [a, b]$  συνεχής, υπάρχει  $x \in [a, b]$  ώστε  $f(x) = x$ .

*Απόδειξη:* Αν  $f(a) = a$  ή  $f(b) = b$  δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα. Υποθέτουμε ότι  $f(a) \in (a, b]$  και  $f(b) \in [a, b)$ . Τότε η συνεχής συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$  αλλάζει πρόσημο από το  $a$  στο  $b$ .  $\square$

**Πρόταση 9.23** Η  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα και επί του  $(0, \infty)$

*Απόδειξη:* Αν  $x < y$  τότε  $e^y = e^x e^{y-x}$ . Άρα αρκεί να δείξουμε ότι  $e^{y-x} > 1$ . Αλλά

$$e^{y-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y-x}{n}\right)^n \geq 1 + y - x > 1$$

από την ανισότητα Bernoulli.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και τη συνέχεια τα  $e^x$  αρκεί να αποδείξουμε ότι η  $e^x$  παίρνει οσοδήποτε μεγάλες και οσοδήποτε μικρές θετικές τιμές. Αυτό προκύπτει αμέσως: η  $e^x$  παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, αφού

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επίσης παίρνει οσοδήποτε μικρές θετικές τιμές, αφού  $e^{-x} = 1/e^x$  και από το προηγούμενο η  $e^x$  μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές.  $\square$

Έτσι η εκθετική συνάρτηση  $e^x : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$  είναι 1-1 (αφού είναι γνησίως αύξουσα) και επί και συνεπώς αντιστρέφεται. Η αντίστροφη της ονομάζεται λογάριθμος και συμβολίζεται με  $\log(x) : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ . Φανερά θα ισχύει  $e^{\log x} = x$  για κάθε  $x > 0$  και  $\log(e^x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Η  $\log(x)$  ως αντίστροφη της εκθετικής είναι και αυτή γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί του  $\mathbb{R}$ .

**Πρόταση 9.24** Για τον λογάριθμο ισχύουν οι ανισότητες

$$1 - \frac{1}{x} < \log x \leq x - 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

*Απόδειξη:* Από την Πρόταση 6.52 σελίδα 51, επειδή  $e^x \geq 1+x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  συνεπάγεται  $e^{x-1} \geq x$  και αφού η  $\log$  είναι αύξουσα  $\log(e^{x-1}) \geq \log x$ , δηλαδή  $\log x \leq x - 1$ .

Λογαριθμίζοντας την  $e^x \geq 1/(1-x)$  παίρνουμε  $x \geq \log(1/(1-x))$  και αντικαθιστώντας με  $t$  την ποσότητα  $1/(1-x)$  παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη  $x < 1$  ισοδυναμεί με  $t > 0$  ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

**Ορισμός 9.25** (Η γενική εκθετική συνάρτηση) Για κάθε  $a > 0$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ορίζουμε

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο ορισμός αυτός έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες: για παράδειγμα  $a^n = a \cdot a \cdots a$  με  $n$  παράγοντες διότι

$$e^{nt} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{nt}{k}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{nt}{nk}\right)^{nk},$$

διότι η τελευταία είναι υπακολουθία της προηγούμενης! Συνεπώς

$$e^{nt} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{t}{k}\right)^k \right)^n = (e^t)^n.$$

Άρα

$$a^n = e^{n \log a} = (e^{\log a})^n = e^{\log a} e^{\log a} \cdots e^{\log a} = a \cdot a \cdots a$$

με  $n$  παράγοντες.

$$\text{Ή } (e^x)^y = e^{y \log e^x} = e^{yx} = e^{xy}, \text{ οπότε και}$$

$$(a^x)^y = e^{y \log a^x} = e^{y \log e^{x \log a}} = e^{yx \log a} = a^{xy}.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται όλες οι ιδιότητες της εκθετικής  $a^x$ . Η συνάρτηση αυτή για  $a > 0$  και  $a \neq 1$  εύκολα βλέπουμε ότι είναι και αυτή γνήσια μονότονη (άρα 1-1), συνεχής και επί του  $(0, \infty)$ . Οπότε αντιστρέφεται και την αντίστροφή της την ονομάζουμε λογάριθμο με βάση το  $a$  και γράφουμε  $\log_a$ . Προφανώς ισχύει  $\log_a a^x = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $a^{\log_a x} = x$  για κάθε  $x > 0$ . Ως αντίστροφη της  $a^x$  για  $0 < a \neq 1$ , ο λογάριθμος με βάση  $a$  είναι συνεχής συνάρτηση, με την ίδια μονοτονία με την  $a^x$ , 1-1 και επί του  $\mathbb{R}$ .

Όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες τόσο της εκθετικής όσο και του λογάριθμου προκύπτουν εύκολα και αφήνονται ως απλή άσκηση.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα παρατηρώντας ότι  $(e^{(\log a)/n})^n = e^{\log a} = a$ , δηλαδή κάθε θετικός αριθμός  $a$  έχει  $n$ -στη ρίζα τον αριθμό  $a^{1/n} = e^{(\log a)/n}$ .

## Ασκήσεις

Άσκηση 9.3.1. Αποδείξτε την Πρόταση 9.4 με τον ορισμό της συνέχειας και όχι με την αρχή της μεταφοράς.

Άσκηση 9.3.2. Αν η συνάρτηση  $f(x)$ ,  $\alpha < x < \beta$ , είναι συνεχής και αν  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty$ , τότε υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ , ώστε η τιμή  $f(x_0)$  να είναι το ελάχιστο της  $f$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

Άσκηση 9.3.3. Αν η  $f(x)$  είναι φραγμένη στο διάστημα  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , δηλαδή  $|f(x)| \leq M$  για κάθε  $x$  με  $|x - x_0| < \alpha$ , τότε η συνάρτηση  $g(x) = (x - x_0)f(x)$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Άσκηση 9.3.4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^{10} - 7x^7 + 8x^5 + x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι το σύνολο των τιμών της είναι φραγμένο προς τα κάτω, δηλαδή  $\inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} > -\infty$ . Υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x_0) = \inf A$  όπου  $A = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ ;

Άσκηση 9.3.5. Για ποια  $x$  είναι συνεχής η συνάρτηση  $[x] \cos \pi x$ ; Η ίδια ερώτηση για τη συνάρτηση  $[x] \sin \pi x$ .

Η ανισότητα Bernoulli ισχύει και για μη ακέραιους εκθέτες. Η επόμενη δύο ασκήσεις μας καθοδηγούν στο να την αποδείξουμε.

Άσκηση 9.3.6. Για κάθε  $t > -1$  και για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\left(1 + \frac{1}{n} \frac{t}{1+t}\right)^n \leq 1+t.$$

Η ανισότητα είναι γνήσια, εκτός αν  $t = 0$ .

Άσκηση 9.3.7. Για κάθε  $\theta > -1$  και για κάθε  $p \in \mathbb{R}$  με  $p \geq 1$  ισχύει

$$(1+\theta)^p \geq 1+p\theta.$$

(Υψώστε την ανισότητα της Άσκησης 9.3.6. εις την  $m/n$  και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε τη ζητούμενη με  $p = 1 + m/n$ , όπου  $m, n \in \mathbb{N}$ . Μετά χρησιμοποιήστε τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης για να περάσετε σε πραγματικούς εκθέτες.)

Άσκηση 9.3.8. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  θέτοντας  $f(x) = 0$  αν ο  $x$  είναι άρρητος και αν ο  $x$  είναι ρητός τον γράφουμε με ανάγωγο κλάσμα  $p/q$  και ορίζουμε  $f(x) = 1/q$ . Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό. (Υπόδειξη: αποδείξτε ότι αν  $x_n = p_n/q_n \in \mathbb{Q}$  ανάγωγα κλάσματα με  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  τότε  $|q_n| \rightarrow \infty$ . Αλλιώς έχει φραγμένη υπακολουθία, έστω την  $q_{k_n}$ , και τότε και η  $p_{k_n}$  πρέπει να είναι φραγμένη. Αλλά τότε το σύνολο τιμών  $\{p_{k_n}/q_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$  είναι πεπερασμένο και δεν μπορεί να ισχύει  $p_{k_n}/q_{k_n} \rightarrow a$ .)

# Κεφάλαιο 10

## Παράγωγος συνάρτησης

### 10.1 Ορισμός και παραδείγματα

**Ορισμός 10.1** Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  με τιμές στο  $\mathbb{R}$ , και  $x_0 \in (a, b)$ . Θα λέμε ότι η  $f$  έχει παράγωγο στο  $x_0$  αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

στο  $\mathbb{R}$ , το οποίο θα συμβολίζουμε με  $f'(x_0)$ . Αν η παράγωγος της  $f$  υπάρχει σε κάθε σημείο του  $(a, b)$  θα λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  με παράγωγο τη συνάρτηση  $f' : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ .

**Παρατήρηση 10.2** Αν θέσουμε  $h = x - x_0$ , τότε  $h \rightarrow 0$  καθώς  $x \rightarrow x_0$  και επειδή  $x = x_0 + h$  μπορούμε να γράψουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε ένα ανοικτό διάστημα που μπορεί να είναι και όλο το  $\mathbb{R}$ .

**Παράδειγμα 10.3** Αν  $f(x) = c$  είναι σταθερή συνάρτηση τότε  $f'(x) = 0$ . Πράγματι

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

**Παράδειγμα 10.4** Αν  $f(x) = x^n$  για  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Πράγματι, αν  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Αν  $n = 1$  αφήνεται ως άσκηση.

**Παράδειγμα 10.5** Η συνάρτηση  $f(x) = |x|$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  έχει είναι παντού παραγωγίσιμη εκτός από το  $x_0 = 0$ . Πράγματι, αν  $x \neq 0$  είτε  $f(x) = x$  είτε  $f(x) = -x$  οπότε είναι παραγωγίσιμη. Ενώ αν  $x = 0$  τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \quad \text{αλλά} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - f(0))/(x - 0)$ .

**Πρόταση 10.6** Αν μια συνάρτηση  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in (a, b)$  τότε είναι και συνεχής στο  $x_0$ .

*Απόδειξη:* Η συνέχεια στο  $x_0$  προκύπτει άμεσα από το ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0. \quad \square$$

**Πρόταση 10.7**  $(e^x)' = e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $(\log x)' = 1/x$  για κάθε  $x > 0$ .

*Απόδειξη:*

$$(e^{x_0})' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

$$(\log x)' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(x/x_0)}{(x/x_0) - 1} = \frac{1}{x_0}. \quad \square$$

## Ασκήσεις

Άσκηση 10.1.1. Χρησιμοποιήστε τον τύπο

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

τη συνέχεια του συνημιτόνου καθώς και το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$  για να αποδείξετε ότι  $(\sin x)' = \cos x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άσκηση 10.1.2. Χρησιμοποιήστε τον τύπο

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$

τη συνέχεια του ημιτόνου και το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$  για να αποδείξετε ότι  $(\cos x)' = -\sin x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## 10.2 Κανόνες παραγωγίσιμης

**Πρόταση 10.8** Έστω ότι οι συναρτήσεις  $f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0 \in (a, b)$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Τότε

(i) η  $\lambda f + \mu g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

(ii) η  $f g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) αν  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$  τότε η  $f/g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\frac{\lambda f(x) + \mu g(x) - (\lambda f(x_0) + \mu g(x_0))}{x - x_0} = \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν πάρουμε το όριο για  $x \rightarrow x_0$  βρίσκουμε ότι υπάρχει το  $(\lambda f + \mu g)'(x_0)$  και ισχύει  $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$ . Ομοίως, από τη σχέση

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και από το γεγονός ότι η  $f$  ως παραγωγίσιμη στο  $x_0$  είναι και συνεχής στο  $x_0$ , βρίσκουμε ότι υπάρχει το  $(f \cdot g)'(x_0)$  και ισχύει  $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ .

Επειδή

$$\begin{aligned} & \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \end{aligned}$$

και από το γεγονός ότι η  $g$  ως παραγωγίσιμη στο  $x_0$  είναι και συνεχής στο  $x_0$ , βρίσκουμε ότι υπάρχει η παράγωγος της  $f/g$  και ισχύει η ζητούμενη.  $\square$

**Πόρισμα 10.9** Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση  $p(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$  είναι παραγωγίσιμη και ισχύει  $p'(x) = k a_k x^{k-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Κάθε ρητή συνάρτηση, δηλαδή πολυωνύμων, είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.  $\square$

**Παράδειγμα 10.10** Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  η συνάρτηση  $f(x) = x^{-n}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  και ισχύει

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

*Απόδειξη:* Χρησιμοποιούμε τον κανόνα για το πηλίκο και τις συναρτήσεις  $f(x) = 1$  και  $g(x) = x^n$ .  $\square$

**Πρόταση 10.11** (Κανόνας αλυσίδας) Θεωρούμε δυο συναρτήσεις  $f, g$  με  $f : (a, b) \mapsto (c, d)$  και  $g : (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in (a, b)$  και η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x_0) \in (c, d)$  τότε η συνθεση  $g \circ f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

*Απόδειξη:* Θέτουμε  $y_0 = f(x_0)$  και χρησιμοποιούμε την «παρατήρηση Καραθεοδωρή»· ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, \\ \varepsilon_2(y) &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0), \quad y \in (c, d) \setminus \{y_0\}. \end{aligned}$$

Τότε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon_1(x) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} \varepsilon_2(y) = 0$  και ισχύουν:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= (f'(x_0) + \varepsilon_1(x))(x - x_0), \\ g(y) - g(y_0) &= (g'(y_0) + \varepsilon_2(y))(y - y_0). \end{aligned}$$

Θέτοντας  $y = f(x)$  και  $y_0 = f(x_0)$  στη δεύτερη σχέση και αντικαθιστώντας την πρώτη σε αυτή έχουμε:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \left(g'(f(x_0)) + \varepsilon_2(f(x))\right)(f'(x_0) + \varepsilon_1(x))$$

για  $x \neq x_0$ . Από αυτή, και αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , έπεται ότι υπάρχει η παράγωγος  $(g \circ f)'(x_0)$  και ισχύει:  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 10.12** Για  $a > 0$  θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = a^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε  $f'(x) = a^x \log a$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Πράγματι, παρατηρούμε ότι  $a^x = e^{x \log a}$  οπότε από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} (x \log a)' = a^x \log a.$$

**Παράδειγμα 10.13** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{g(x)}$  όπου  $g : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{2} \log g(x)}\right)' = e^{\frac{1}{2} \log g(x)} \left(\frac{1}{2} \log(g(x))\right)' = \frac{1}{2} \frac{g'(x)}{g(x)} \sqrt{g(x)} \\ &= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μια πρόταση για τη παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης.

**Πρόταση 10.14** (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης) Έστω ότι η  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  είναι μια 1-1 και συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in (a, b)$  και ότι  $f'(x_0) \neq 0$ . Τότε, η  $f^{-1}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$  και ισχύει

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε μια ακολουθία  $y_n = f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Από τη συνέχεια της αντίστροφης (Πρόταση 9.19 σελίδα 77) θα πρέπει  $x_n \rightarrow x_0$ . Συνεπώς

$$\lim \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \lim \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Άρα, από την αρχή της μεταφοράς, το όριο

$$\lim_{y \rightarrow f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

υπάρχει και ισούται με  $1/f'(x_0)$ , ολοκληρώνοντας την απόδειξη.  $\square$

**Παρατήρηση 10.15** Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το ανοικτό  $(a, b)$  αντί για το κλειστό  $[a, b]$ , πάλι ισχύει το συμπέρασμα. Πράγματι, από την Πρόταση 9.17, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε διάστημα  $[c, d] \subset (a, b)$  ώστε  $f(c) < f(x_0) < f(d)$  (για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε  $c = (a + x_0)/2$  και  $d = (x_0 + b)/2$ ). Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής και την ιδιότητα 1-1 της συνάρτησης, κάθε σημείο του  $[f(c), f(d)]$  είναι εικόνα ενός και μοναδικού σημείου το οποίο—λόγω της μονοτονίας της  $f$ —είναι εντός του  $[c, d]$ . Οπότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.14 για την  $f : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ , παρατηρώντας ότι για κάθε ακολουθία  $y_n$  του  $(a, b)$  με  $y_n \rightarrow f(x_0)$ , αυτή θα βρίσκεται τελικά στο  $(f(c), f(d))$ , άρα θα είναι τελικά της μορφής  $y_n = f(x_n)$  για κατάλληλη ακολουθία  $x_n \in [c, d]$ .

**Παρατήρηση 10.16** Αν  $f'(x_0) = 0$  τότε η αντίστροφη συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο  $f(x_0)$ . Διότι αν είχε θα έπρεπε  $(f^{-1} \circ f)'(x) = x' = 1$  αλλά από τον κανόνα της αλυσίδας για τη σύνθεση θα έπρεπε  $(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = 0$ .

### 10.3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Αν μια συνάρτηση  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του  $(a, b)$  ορίζεται η συνάρτηση  $f' : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  όπου απεικονίζει κάθε

σημείο του  $(a, b)$  στην παράγωγο της  $f$  σε αυτό το σημείο. Ενδέχεται όμως και η νέα αυτή συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη, οπότε θα ορίζεται η 2η παράγωγος της  $f$  που τη συμβολίζουμε με  $f''$  και είναι η παράγωγος της  $f'$ . Ομοίως ορίζεται, αν υπάρχει, και η παράγωγος της  $f''$  που τη συμβολίζουμε με  $f'''$  κοκ. Από την 4η παράγωγο της  $f$  και μετά, συνήθως σταματάμε να γράφουμε με τόνους και γράφουμε ως εξής: η 4η παράγωγος συμβολίζεται με  $f^{(4)}$ , η 5η με  $f^{(5)}$  κλπ. Επαγωγικά ορίζεται η « $n$ -στή» παράγωγος της  $f$  που τη γράφουμε με  $f^{(n)}$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , εφόσον βέβαια υπάρχει.

Για παράδειγμα, η  $f(x) = e^x$  επειδή όπως είδαμε ισχύει  $f'(x) = e^x$ , αυτή και κάθε επόμενη παράγωγός της υπάρχει, και ισχύει  $f^{(n)}(x) = e^x$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Μια συνάρτηση που έχει  $n$ -στη παράγωγο για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  λέγεται «απεριόριστα παραγωγίσιμη».

## Ασκήσεις

Άσκηση 10.3.1. Αν  $f(x), g(x)$  είναι πολυώνυμα,  $f(x) = (x - a)^k g(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , και  $g(a) \neq 0$  τότε το  $k$  λέγεται πολλαπλότητα της ρίζας  $a$  του  $f(x)$ . Δείξτε ότι μια ρίζα πολλαπλότητας  $k > 1$  είναι μια ρίζα του  $f^{(k-1)}(x)$ .

Άσκηση 10.3.2. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$e^{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R}, (\log x)^{(\log x)^2}, x > 0, x^x, x > 0, x^{(x^x)}, x > 0.$$

Άσκηση 10.3.3. Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  είναι ασυνεχής στο  $x = 0$  και ότι η  $g'(0)$  δεν υπάρχει.

- Είναι σωστή ή όχι η πρόταση: « $H f + g$  είναι ασυνεχής στο  $x = 0$ »; Αν είναι σωστή δώστε απόδειξη, αν όχι δώστε αντιπαράδειγμα.
- Με τις ίδιες προϋποθέσεις, ίδια ερώτηση για την πρόταση: « $H (fg)'$  δεν υπάρχει στο  $x = 0$ ».

Άσκηση 10.3.4. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, \infty)$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ . Δείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+1) - f(x-1)\} = 0$ .

Άσκηση 10.3.5. Βρείτε τις εφαπτομένες της παραβολής  $y = x^2 + 1$  που περνάνε από την αρχή  $(0, 0)$ . Πού τέμνει τον άξονα των  $x$  η εφαπτομένη της ίδιας καμπύλης στο σημείο  $(1, 2)$ ;

Άσκηση 10.3.6. Έστω ότι τα  $(x_n, 0), (0, y_n)$  είναι τα σημεία τομής των εφαπτομένων της  $y = x^3$  στα σημεία  $(n, n^3), n \in \mathbb{N}$ . Βρείτε τα όρια  $\lim x_n, \lim y_n$ .

Άσκηση 10.3.7. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις  $\sin x$  και  $\cos x$ , είναι απεριορίστα παραγωγίσιμες αποδεικνύοντας με επαγωγή ότι

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x \quad \text{και} \quad (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  για τη συνάρτηση του ημιτόνου. Βρείτε και αποδείξτε τους ανάλογους τύπους και για την  $\cos x$ .

Άσκηση 10.3.8. Αποδείξτε ότι ο λογάριθμος είναι απεριορίστα παραγωγίσιμη συνάρτηση, δείχνοντας επαγωγικά ότι

$$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n},$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Άσκηση 10.3.9. Αποδείξτε ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση  $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$  είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και ισχύει

$$a_m = \frac{p^{(m)}(0)}{m!},$$

για κάθε  $m = 1, 2, \dots, k$ .

Άσκηση 10.3.10. Αποδείξτε με τη βοήθεια του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης ότι για τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\arcsin : [-1, 1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\arccos : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$ ,  $\arctan : \mathbb{R} \mapsto (-\pi/2, \pi/2)$  ισχύουν οι τύποι

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}.$$

Άσκηση 10.3.11. Βρείτε το μεγαλύτερο διάστημα της μορφής  $(-a, a)$  με την ιδιότητα: «Η συνάρτηση  $f(x) = (\sin x)(\cos x)$  έχει αντίστροφη στο  $(-a, a)$ ». Βρείτε την αντίστροφη της  $f$  και την παράγωγό της.

Άσκηση 10.3.12. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  έχουν παραγώγους τουλάχιστον  $n$  τάξης σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ . Γράφουμε

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

(όπου  $g^{(\lambda)(x)}$  σημαίνει την  $\lambda$  τάξης παράγωγο της  $g$ ). Δείξτε ότι

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \\ f_1^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

**Παρατήρηση:** Η ορίζουσα  $W(x)$  λέγεται ορίζουσα του Wronski και έχει εφαρμογές στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

Άσκηση 10.3.13. Δώστε παραδείγματα (με συγκεκριμένο τύπο—όχι απλά με γραφικές παραστάσεις) στοιχειωδών συναρτήσεων (πολυώνυμα, τριγωνομετρικές, εκθετικές, ...)  $f, g, h, q$  ώστε

1.  $f(-1) = 0, f(2) = 1, f'(1) > 0$ .
2.  $g(-1) = 0, g(2) = 1, g'(1) < 0$ .
3.  $h(k) = 0, k \in \mathbb{Z}, |h(x)| < 1/2, x \in \mathbb{R}, h(1/2) \neq 0$ .
4.  $q(0) = 0, q(3) = 1, q'(1) = 0$  και η  $q$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $[0, 3]$ .

Άσκηση 10.3.14.

1. Βρείτε, όπου υπάρχουν, τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \operatorname{arccot} \frac{1+x}{1-x}, \quad \log \left\{ \tanh^{-1} \left( \tan \frac{x}{2} \right) \right\}.$$

2. Βρείτε τις β' παραγώγους των συναρτήσεων:

$$e^{x^2} \log x, \quad e^{2x} \sin \left( 3x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Άσκηση 10.3.15. Δείξτε τους τύπους:

$$1. \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$2. \sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$3. \tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x},$$

$$4. \left( -\frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sinh(4x) \right)' = (\sinh x \cosh x)^2.$$

# Κεφάλαιο 11

## Εφαρμογές παραγώγων

### 11.1 Τοπικά ακρότατα

**Ορισμός 11.1** Η  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  λέμε ότι έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $x_0 \in A$  τον αριθμό  $f(x_0)$  αν υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $f(x_0) \geq f(x)$ .

Ομοίως, λέμε ότι η  $f$  έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $x_0 \in A$  τον αριθμό  $f(x_0)$  αν υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in A$  με  $|x - x_0| < \delta$  να ισχύει  $f(x_0) \leq f(x)$ .

**Θεώρημα 11.2 (Fermat)** Αν  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in (a, b)$  στο οποίο έχει τοπικό ακρότατο, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

*Απόδειξη:* Έστω ότι η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ . Τότε υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε για κάθε  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$  να ισχύει  $f(x) - f(x_0) \leq 0$ . Άρα

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{αν } x \leq x_0 \quad \text{και} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{αν } x \geq x_0.$$

Παίρνοντας όρια από αριστερά και από δεξιά στο  $x_0$  προκύπτει  $f'(x_0) \geq 0$  και  $f'(x_0) \leq 0$ .

Ομοίως για την περίπτωση που στο  $x_0$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. □

**Παρατήρηση 11.3** 1. Το Θεώρημα Fermat συνεχίζει να ισχύει αν η  $f$  είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$ , αλλά το  $x_0$  δεν πρέπει να είναι άκρο. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f(x) = x$  στο  $[0, 1]$  έχει μέγιστο στο  $x = 1$  αλλά η παράγωγος στο 1 (εδώ αναγκαστικά η αριστερή παράγωγος) δεν είναι μηδέν.

2. Το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Για παράδειγμα για τη συνάρτηση  $f(x) = x^3$  στο  $(-1, 1)$  έχουμε  $f'(x_0) = 0$  αλλά δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0 = 0$ .

3. Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο αλλά να μην έχει παράγωγο στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, η  $f(x) = |x|$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0 = 0$  αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι η αναζήτηση των σημείων στα οποία η  $f$  παρουσιάζει τοπικά ακρότατα θα πρέπει να γίνεται στα σημεία που είναι άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού της, στα σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη, και στα σημεία που η παράγωγός της μηδενίζεται. Έτσι, αν αναζητούμε τη μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης θα πρέπει να την αναζητήσουμε σε αυτά τα σημεία.

Αν όμως αναζητούμε τις ποσότητες  $\sup f(x)$  και  $\inf f(x)$ , κάτι που θα χρειαστούμε στα μαθήματα της Ανάλυσης, θα πρέπει στα τοπικά ακρότατα της  $f$  να προσθέσουμε και τις τιμές  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  για κάθε σημείο συσσώρευσης  $c$  του πεδίου ορισμού της που δεν ανήκει σε αυτό. Διότι αυτά τα σημεία  $c$  διαφεύγουν της παραπάνω διαδικασίας. Έτσι έχουμε την εξής πρόταση.

**Πρόταση 11.4** Αν  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, το  $\sup_{x \in A} f(x)$  και το  $\inf_{x \in A} f(x)$  υπολογίζεται ανάμεσα στις τιμές

- της  $f$  στα σημεία που είναι άκρα διαστημάτων στο  $A$ ,
- της  $f$  που είναι εσωτερικά σημεία του  $A$  και ρίζες της  $f'(x)$ ,
- της  $f$  στα σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη,
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  για κάθε σημείο  $c$  που είναι σημείο συσσώρευσης του  $A$  και δεν ανήκει σε αυτό.  $\square$

## 11.2 Θεωρήματα Μέσης Τιμής

**Θεώρημα 11.5 (Rolle)** Αν  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  συνεχής συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  και για την οποία ισχύει  $f(a) = f(b)$ . Τότε υπάρχει σημείο  $x_0 \in (a, b)$  ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

*Απόδειξη:* Από την Πρόταση 9.11 η  $f$  έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω ότι η ελάχιστη τιμή είναι στο σημείο  $\xi_1$  και η μέγιστη στο σημείο  $\xi_2$ . Αν ένα από αυτά τα σημεία ανήκουν στο  $(a, b)$  τότε από το Θεώρημα του Fermat η παράγωγος μηδενίζεται σε αυτό. Αν όμως κανένα δεν είναι εσωτερικό σημείο τότε  $\xi_1, \xi_2 \in \{a, b\}$ . Αλλά τότε  $f(\xi_1) = f(\xi_2)$  αφού από την υπόθεση  $f(a) = f(b)$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της  $f$  συμπίπτουν, άρα η  $f$  είναι σταθερή, και βεβαίως  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$  σε αυτή την περίπτωση.  $\square$

Παρατηρούμε ότι η υπόθεση να είναι η  $f$  συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$  είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0 \\ x & \text{αν } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$



*Απόδειξη:* Για οποιαδήποτε σημεία  $s, t \in (a, b)$  από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει  $\xi \in (s, t)$  ώστε  $0 = f'(\xi) = (f(s) - f(t))/(s - t)$ , άρα  $f(s) = f(t)$ .  $\square$

**Πόρισμα 11.8** *Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο  $(a, b)$  και για κάθε  $x \in (a, b)$  ισχύει  $f'(x) = g'(x)$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) = g(x) + c$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .*

*Απόδειξη:* Άμεσο από το Πόρισμα 11.7 και το ότι  $(f - g)' = 0$ .  $\square$

**Ορισμός 11.9** Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμό ένα διάστημα  $(a, b)$ . Μια συνάρτηση  $F$  με το ίδιο πεδίο ορισμού λέγεται *παράγουσα* ή *αρχική* της  $f$  αν ισχύει  $F'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in (a, b)$ .

**Πρόταση 11.10** *Αν η  $F$  είναι παράγουσα της  $f$  στο διάστημα  $(a, b)$  τότε κάθε άλλη παράγουσα της  $f$  είναι της μορφής  $F(x) + c$  για κάποια σταθερά  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Απόδειξη:* Άμεσο από το Πόρισμα 11.8, αφού κάθε άλλη παράγουσα  $G$  θα ικανοποιεί την  $G' = F' = f$ .  $\square$

**Θεώρημα 11.11** (Μέσης τιμής του Cauchy) *Αν  $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  συνεχείς συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο  $(a, b)$ , τότε υπάρχει σημείο  $\xi \in (a, b)$  ώστε*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

*Ειδικά, αν  $g'(x_0) \neq 0$  τότε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} \\ &= (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x)), \end{aligned}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη και φανερά ισχύει  $F(a) = F(b) = 0$ . Άρα, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  για το οποίο ισχύει  $F'(\xi) = 0$ . Απλές πράξεις οδηγούν στη ζητούμενη σχέση.  $\square$

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών του Darboux. Το θεώρημα αυτό λέει ότι την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών δεν την έχουν μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις αλλά και παράγωγοι συναρτήσεων που μπορούν και να μην είναι συνεχείς. Τον 19ο αιώνα οι μαθηματικοί πίστευαν ότι την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών την είχαν μόνο οι συνεχείς συναρτήσεις. Μέχρι που το 1875 ο Jean Gaston Darboux απέδειξε ότι αυτή η πεποίθηση ήταν ψευδής.

**Θεώρημα 11.12** (Darboux) Έστω ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα και  $a < b$  δυο σημεία του. Για κάθε  $y$  ανάμεσα στα  $f'(a)$  και  $f'(b)$  υπάρχει  $\xi$  ανάμεσα στα  $a$  και  $b$  ώστε  $f'(\xi) = y$ .

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι  $f'(a) < f'(b)$  (αν  $f'(a) > f'(b)$  εργαζόμαστε ομοίως ή με την  $-f$ ). Αν  $y = f'(a)$  ή  $y = f'(b)$  δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι  $f'(a) < y < f'(b)$ . Για  $0 < h < b - a$  θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{για } x \in [a, b-h].$$

Παρατηρούμε ότι για  $h \rightarrow 0^+$  ισχύουν

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} g_h(a) = f'(a) < y < f'(b) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(b-h) - f(b)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} g_h(b-h). \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει  $0 < h < b - a$  ώστε  $g_h(a) < y < g_h(b-h)$ . Η  $g_h$  είναι συνεχής, οπότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, υπάρχει  $a < x_0 < b-h$  ώστε  $y = g_h(x_0)$ . Αλλά από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει  $x_0 < \xi < x_0 + h < b$  ώστε

$$y = g_h(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi).$$

Επειδή από τις προηγούμενες ανισότητες  $\xi \in (a, b)$ , η απόδειξη ολοκληρώθηκε.  $\square$

### 11.3 Απροσδιόριστες μορφές ορίων

Αν για δυο συναρτήσεις  $f, g$  με κοινό πεδίο ορισμού τα όρια  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  σε κάποιο σημείο συσώρευσης ή στο  $\pm\infty$  είναι και τα δύο ίσα με μηδέν ή και τα δύο ίσα με  $\infty$  τότε το όριο  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x)$  δεν μπορεί να υπολογιστεί ως το πηλίκο των ορίων των  $f$  και  $g$  και ονομάζεται απροσδιόριστη μορφή ορίου. Σε τέτοιες περιπτώσεις συχνά βοηθάει στον υπολογισμό η παράγωγος με το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 11.13** (Κανόνας L' Hospital) Έστω ότι το  $I$  είναι ανοικτό, φραγμένο ή άπειρο διάστημα στο  $\mathbb{R}$  και το  $c$  είναι άκρο του  $I$ , πεπερασμένο ή άπειρο. Υποθέτουμε ότι οι  $f$  και  $g$  είναι ορισμένες στο  $I$ , παραγωγίσιμες και οι  $g$  και  $g'$  δεν μηδενίζονται πουθενά στο  $I$ . Αν είτε

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \tag{11.1}$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = +\infty \tag{11.2}$$

και το όριο  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)/g'(x)$  υπάρχει, τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Απόδειξη:* Χωρίς βλάβη της γενικότητας το  $c$  είναι δεξιό άκρο του  $I$ . Έστω ότι  $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}$  και  $\varepsilon > 0$ . Από τον ορισμό του ορίου υπάρχει  $x_0 < c$  ώστε αν  $y \in (x_0, c)$  να είναι  $|f'(y)/g'(y) - L| < \varepsilon/3$ . Θεωρούμε οποιαδήποτε  $x, y$  στο  $(x_0, c)$  με  $x < y$ . Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy (Θεώρημα 11.11) υπάρχει  $\xi \in (x, y)$  ώστε

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Αν ισχύει η (11.1) διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή στο αριστερό κλάσμα με  $g(x)$  ενώ αν ισχύει η (11.2) διαιρούμε με  $g(y)$ . Στην περίπτωση λοιπόν της (11.1) παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon}{3} > \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| = \frac{\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L + L \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} \right|}{\left| 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right|},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (κάτω) τριγωνική ανισότητα θα είναι

$$\frac{\varepsilon}{3} \left| 1 - \frac{g(y)}{g(x)} \right| > \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| - \left| L \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} \right|.$$

Παίρνοντας όριο ως προς  $y \rightarrow c$  προκύπτει

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

για κάθε  $x \in (x_0, c)$ , δηλαδή  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = L$ .

Αν τώρα ισχύει η (11.2), κρατάμε σταθερό το  $x$  και γράφουμε

$$\frac{\varepsilon}{3} > \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| = \frac{\left| \frac{f(y)}{g(y)} - L + L \frac{g(x)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)} \right|}{\left| \frac{g(x)}{g(y)} - 1 \right|}.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα

$$\frac{\varepsilon}{3} \left( 1 + \left| \frac{g(x)}{g(y)} \right| \right) > \left| \frac{f(y)}{g(y)} - L \right| - \left| L \frac{g(x)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)} \right|.$$

Έτσι,

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{3} \left( 1 + \left| \frac{g(x)}{g(y)} \right| \right) + |L| \left| \frac{g(x)}{g(y)} \right| + \left| \frac{f(x)}{g(y)} \right|.$$

Όμως, αφού  $\lim_{y \rightarrow c} |g(y)| = +\infty$ , υπάρχει  $c_0 > c$  ώστε για κάθε  $y \in (c_0, c)$  να ισχύει

$$\left| \frac{g(x)}{g(y)} \right| < 1, \quad |L| \left| \frac{g(x)}{g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \left| \frac{f(x)}{g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Άρα

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

δηλαδή  $\lim_{y \rightarrow c} f(y)/g(y) = L$ .

Αν τώρα  $L = +\infty$  ή  $-\infty$  η απόδειξη είναι παρόμοια. Για παράδειγμα, αν  $L = +\infty$  για κάθε  $M > 0$  βρίσκουμε  $x_0 < c$  ώστε για κάθε  $y \in (x_0, c)$  να ισχύει  $f'(y)/g'(y) > 2(M+1)$ . Ανάλογα με το αν ισχύει η (II.1) ή η (II.2) παίρνουμε αντίστοιχα

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2(M+1)$$

$$\text{ή} \quad \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2(M+1).$$

Οπότε στην πρώτη περίπτωση το όριο  $y \rightarrow c$  δίνει  $f(x)/g(x) \geq 2(M+1) > M$  για κάθε  $x \in (x_0, c)$  ενώ η δεύτερη, κρατώντας σταθερό το  $x$  στο διάστημα  $(x_0, c)$  και επιλέγοντας  $c_0 < c$  ώστε για κάθε  $y \in (c_0, c)$  να ισχύει  $|f(x)/g(y)| \leq 1$  και  $|g(x)/g(y)| \leq 1/2$  παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right) (2(M+1)) + \frac{f(x)}{g(y)} \geq \frac{1}{2}(2(M+1)) - 1 = M.$$

Ομοίως για την περίπτωση  $L = -\infty$ . □

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε γρήγορα «περίπλοκα» όρια. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{1 - \cos x\pi}.$$

Το όριο είναι της μορφής  $0/0$  και ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται σε διαστήματα δεξιά του 2 ούτε και η παράγωγός του. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L' Hospital και παίρνουμε ότι το παραπάνω όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})'}{(1 - \cos x\pi)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2\pi\sqrt{x-2} \sin x\pi} = +\infty.$$

**Παρατήρηση 11.14** Κάποια όρια εξαρτώνται από τον τρόπο που αναπτύχθηκε η θεωρία. Για παράδειγμα, έτσι όπως αναπτύξαμε εδώ τη θεωρία δεν είναι σωστό να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

με τον κανόνα L' Hospital, διότι απλά θα πρέπει να ξέρουμε ότι  $(e^x)' = e^x$  και αυτή η ταυτότητα αποδείχθηκε χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο. Ομοίως για τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$  και  $\lim_{x \rightarrow 1} (\log x)/(x - 1)$ .

## Ασκήσεις

Άσκηση 11.3.1. Αν  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ , τότε η  $f'(x)$  έχει ακριβώς τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 11.3.2. Δείξτε ότι η εξίσωση  $e^x = 1 + x$  έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Ποια;

Άσκηση 11.3.3. Δίνεται η

$$\beta_n = 1 + \frac{1}{(2!)^2} + \dots + \frac{1}{(n!)^2}.$$

Δείξτε ότι η  $\beta_n$  συγκλίνει σε έναν άρρητο αριθμό.

Άσκηση 11.3.4.

1. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\tan x = x$  έχει άπειρες ρίζες και μάλιστα ακριβώς μία σε κάθε διάστημα της μορφής  $I_k = (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$  για  $k \in \mathbb{Z}$ .
2. Γράφουμε  $a_k$  για τη ρίζα στο διάστημα  $I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Βρείτε, αν υπάρχει, το  $\lim(a_{k+1} - a_k)$  και δώστε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματός σας.

# Κεφάλαιο 12

## Μελέτη συνάρτησης

### 12.1 Μονοτονία συνάρτησης

**Θεώρημα 12.1** Έστω ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(a, b)$ . Τότε

(i)  $f'(x) \geq 0$  αν και μόνο αν η  $f$  είναι αύξουσα.

(ii)  $f'(x) \leq 0$  αν και μόνο αν η  $f$  είναι φθίνουσα.

Απόδειξη: Αν η  $f$  είναι αύξουσα τότε φανερά  $(f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) \geq 0$ , οπότε παίρνοντας όριο  $x \rightarrow x_0$  προκύπτει  $f'(x_0) \geq 0$ .

Αντιστρόφως, αν  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in I$  και  $x_1 < x_2$ , από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  ώστε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0,$$

συνεπώς  $f(x_1) \leq f(x_2)$  και η  $f$  είναι αύξουσα.

Ομοίως για την περίπτωση  $f'(x) \leq 0$ . □

**Πόρισμα 12.2** Έστω ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(a, b)$ . Τότε

(i) Αν  $f'(x) > 0$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) Αν  $f'(x) < 0$  τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν.

Απόδειξη: Όπως και πριν, αν  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in I$  και  $x_1 < x_2$ , θα ισχύει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

συνεπώς  $f(x_1) < f(x_2)$ , δηλαδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. Ομοίως αν  $f'(x) < 0$ .

Αντίστροφα αυτό δεν ισχύει. Πράγματι, η  $f(x) = x^3$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-1, 1)$  αλλά η παράγωγός της μηδενίζεται στο  $x_0 = 0$ . □

## 12.2 Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

**Θεώρημα 12.3** Έστω ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  και  $f'(x_0) = 0$  για κάποιο σημείο  $x_0 \in (a, b)$ . Τότε η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0$

- (i) τοπικό μέγιστο, αν για κάθε  $x \in (a, x_0]$  και  $x \in [x_0, b)$  είναι αντίστοιχα  $f'(x) \geq 0$  και  $f'(x) \leq 0$ .
- (ii) τοπικό ελάχιστο, αν για κάθε  $x \in (a, x_0]$  και  $x \in [x_0, b)$  είναι αντίστοιχα  $f'(x) \leq 0$  και  $f'(x) \geq 0$ .

Απόδειξη: Αφού  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in (a, x_0]$  και  $f'(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [x_0, b)$ , η  $f$  είναι αύξουσα στο  $(a, x_0]$  και φθίνουσα στο  $[x_0, b)$ . Συνεπώς για κάθε  $x \in (a, b)$  ισχύει  $f(x) \leq f(x_0)$ , άρα η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_0$ .

Εργαζόμαστε ομοίως για την δεύτερη περίπτωση. □

**Θεώρημα 12.4** Έστω ότι η  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  και  $f'(x_0) = 0$  για κάποιο σημείο  $x_0 \in (a, b)$ .

- (i) Αν  $f''(x_0) > 0$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .
- (ii) Αν  $f''(x_0) < 0$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$ .

Απόδειξη: Αφού  $f'(x_0) = 0$  ισχύει

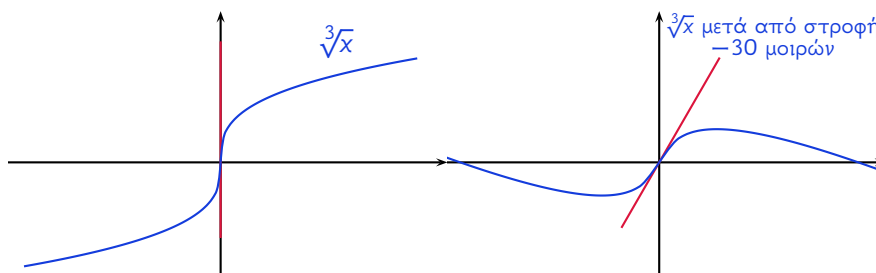
$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Έτσι, αν  $f''(x_0) > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε στο διάστημα  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  να ισχύει  $f'(x)/(x - x_0) > 0$ . Άρα η  $f'$  είναι αρνητική στο  $(x_0 - \delta, x_0)$  και θετική στο  $(x_0, x_0 + \delta)$ . Συνεπώς στο  $x_0$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σύμφωνα με το Θεώρημα 12.3.

Ομοίως για την περίπτωση  $f''(x_0) < 0$ . □

## 12.3 Περί εφαπτόμενων ευθειών

Αν μια συνάρτηση  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  έχει παράγωγο στο  $x_0 \in (a, b)$ , τότε ορίζεται η εφαπτόμενη ευθεία  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ . Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η παράγωγος δεν υπάρχει (στο  $\mathbb{R}$ ), αλλά διαισθητικά η καμπύλη θα όφειλε να έχει εφαπτόμενη ευθεία. Μια τέτοια περίπτωση είναι η  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Βλέπουμε το γράφημά της στο παρακάτω σχήμα, όπου στο δεξιό σχήμα στρέψαμε τη συνάρτηση κατά  $-30$  μοίρες (δηλαδή με τη φορά του ρολογιού). Αυτή η καμπύλη όμως έχει εφαπτόμενη τώρα στο  $x = 0$  (μπορεί κανείς να υπολογίσει τη νέα συνάρτηση αν και έχει αρκετές πράξεις). Καταλαβαίνουμε ότι ο λόγος που δεν προκύπτει εφαπτόμενη για την  $y = \sqrt[3]{x}$  δεν είναι το σχήμα της καμπύλης αλλά είναι ελάττωμα της περιγραφής της μέσω του τύπου  $y = \sqrt[3]{x}$ .



Διότι δεν μπορεί η ύπαρξη μιας εφαπτόμενης ευθείας σε μια καμπύλη να εξαρτάται από τη γωνία που βλέπει την καμπύλη ο παρατηρητής!

Ο ορισμός λοιπόν της εφαπτόμενης ευθείας μέσω της παραγώγου μιας συνάρτησης είναι σαφής μόνο όταν η παράγωγος υπάρχει (στο  $\mathbb{R}$ ).

Για να ξεκαθαρίσουμε λοιπόν το θέμα αυτό πρέπει να το δούμε με μια διαφορετική προσέγγιση. Κάθε συνεχής συνάρτηση  $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^2$  ονομάζεται καμπύλη. Η εικόνα της  $\gamma$  ονομάζεται «ίχνος» της καμπύλης  $\gamma$ . Το ίχνος, οι γεωμετρικές εικόνες δηλαδή μιας καμπύλης, μπορεί να προέρχονται από διάφορες απεικονίσεις  $\gamma$ . Για παράδειγμα, το ίχνος της  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  είναι το σύνολο  $\{(x, \sqrt[3]{x}) : x \in \mathbb{R}\}$ . Αν ορίσουμε την  $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  θέτοντας  $\gamma(t) = (t^3, t)$ , το ίχνος της είναι ακριβώς το ίδιο σύνολο! Διότι και πάλι η  $\gamma$  συντεταγμένη κάθε σημείου είναι η κυβική ρίζα της  $x$  συντεταγμένης.

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο  $x_0$  να είναι η ευθεία που περνάει από το  $x_0$  και έχει διεύθυνση τη διεύθυνση του διανύσματος της παραγώγου στο σημείο αυτό υπό τον όρο ότι η παράγωγος δεν δίνει το μηδενικό διάνυσμα.

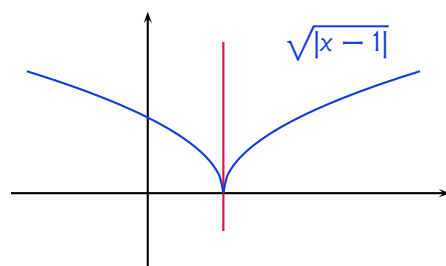
Ας δούμε πώς λειτουργεί αυτός ο δοκιμαστικός ορισμός για το ίχνος της  $f$ . Αν επιχειρήσουμε να παραγωγίσουμε το  $(x, \sqrt[3]{x})$  στο μηδέν βλέπουμε ότι αυτό δεν είναι εφικτό.

Αν όμως, για το ίδιο ίχνος χρησιμοποιήσουμε την  $\gamma(t) = (t^3, t)$  τώρα η παράγωγος είναι  $\gamma'(t) = (3t^2, 1)$  και στο  $t = 0$  δίνει το μη μηδενικό διάνυσμα  $(0, 1)$ . Άρα το ίχνος της  $\gamma$  έχει εφαπτόμενη την ευθεία του  $y$  άξονα (στη διεύθυνση του διανύσματος  $(0, 1)$ ). Θα μπορούσαμε λοιπόν να τροποποιήσουμε τον παραπάνω δοκιμαστικό ορισμό της εφαπτόμενης ευθείας ως εξής:

**Ορισμός 12.5** Για μια συνάρτηση  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  ορίζουμε την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο  $x_0 \in (a, b)$  να είναι η ευθεία που περνάει από το  $(x_0, f(x_0))$  και έχει κλίση την κλίση της παραγώγου μιας καμπύλης  $\gamma$  στο σημείο  $x_0$  η οποία έχει το ίδιο ίχνος με την καμπύλη  $\{(x, f(x)) : x \in (a, b)\}$  και υπό τον όρο ότι η παράγωγος αυτή δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Βεβαίως πρέπει να αποδειχθεί ότι ο ορισμός είναι καλός. Δηλαδή ότι δεν υπάρχει άλλη καμπύλη με το ίδιο ίχνος που να δίνει παράγωγο διάνυσμα με διαφορετική κλίση. Για αυτό παραπέμπουμε στα μαθήματα της διαφορικής γεωμετρίας.

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα, την  $f(x) = \sqrt{|x-1|}$ . Βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης αυτής στο παρακάτω σχήμα.



Αυτή η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x = 1$ . Άρα από την καμπύλη  $\{(x, \sqrt{|x|}) : x \in \mathbb{R}\}$  δεν μπορούμε να υπολογίσουμε εφαπτόμενη ευθεία. Όμως αν ορίσουμε την καμπύλη

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t) & \text{αν } t \geq 0 \\ (-t^2, t) & \text{αν } t < 0, \end{cases}$$

η  $\gamma$  έχει το ίδιο ίχνος με το ίχνος που δίνει η  $f$  αλλά τώρα εύκολα υπολογίζουμε ότι  $\gamma'(0) = (0, 1)$ , δηλαδή το γράφημα της  $f$  έχει εφαπτόμενη την ευθεία  $x = 0$  (τον  $y$  άξονα).

Τα παραπάνω ήταν μια προσπάθεια να ξεκαθαρίσουμε το θέμα των εφαπτόμενων ευθειών από την πλευρά της γεωμετρίας. Τώρα που αυτό έγινε μπορεί κανείς να αποδεχθεί ευκολότερα μια προσέγγιση που χρησιμοποιεί μόνο απειροστικό λογισμό, και έχει ως εξής:

Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ . Αν στο σημείο  $x_0 \in (a, b)$  η  $f$  έχει αριστερή παράγωγο, δηλαδή υπάρχει το όριο

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

στο  $\mathbb{R}$ , ονομάζουμε την ευθεία  $y = f'_-(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  *αριστερή εφαπτόμενη* της  $f$  στο σημείο  $x_0$ . Ομοίως, αν υπάρχει το όριο

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

στο  $\mathbb{R}$ , ονομάζουμε την ευθεία  $y = f'_+(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  *δεξιά εφαπτόμενη* της  $f$  στο σημείο  $x_0$ . Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ , δηλαδή αν  $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$  τότε η αριστερή και δεξιά εφαπτόμενη ευθεία συμπίπτουν και την ευθεία  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  την ονομάζουμε *εφαπτόμενη ευθεία* της  $f$  στο  $x_0$ .

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και σε κάποιο από τα άκρα του διαστήματος  $a$  ή  $b$  τότε αν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι η συνάρτηση έχει τις αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες και στα σημεία αυτά.

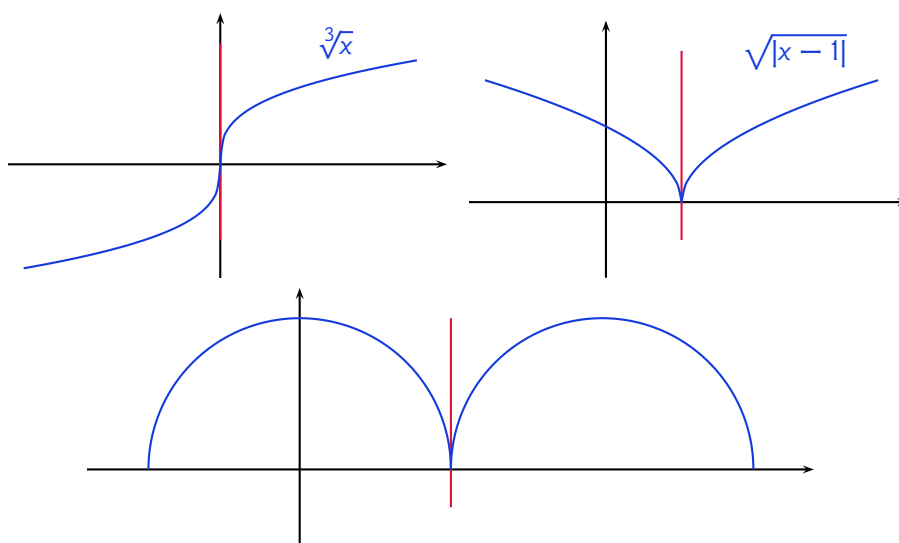
Αν τα όρια που ορίζουν τις πλευρικές παραγώγους είναι ίσα με  $+\infty$  ή  $-\infty$  τότε ορίζουμε ως εφαπτόμενη ευθεία στο  $x_0$  την κάθετη ευθεία  $x = x_0$ . Συγκεκριμένα, αν το όριο που ορίζει την αριστερή παράγωγο είναι  $+\infty$  ή  $-\infty$  τότε η  $x = x_0$  λέμε ότι είναι η αριστερή εφαπτόμενη ευθεία της  $f$

το  $x_0$ . Ομοίως για το δεξιό όριο. Τέλος, αν η  $x = x_0$  είναι και αριστερά και δεξιά εφαπτόμενη της  $f$  στο  $x_0$  την λέμε (κάθετη) εφαπτόμενη της  $f$  στο  $x_0$ . Χαρακτηριστικό παράδειγμα για αυτή την περίπτωση είναι οι συναρτήσεις

(i)  $f(x) = \sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  με κάθετη εφαπτόμενη την  $x = 0$ ,

(ii) η  $f(x) = \sqrt{|x-1|} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  με κάθετη εφαπτόμενη την  $x = 1$ , και

(iii) δύο διαδοχικά ημικύκλια όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Πρέπει όμως να προσέξουμε: σύμφωνα με τον ορισμό μας αυτές οι συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στα σημεία που έχουν κάθετη εφαπτόμενη ευθεία.

## 12.4 Κοίλα της γραφικής παράστασης

**Θεώρημα 12.6** Έστω ότι η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(a, b)$ .

(i) Αν για κάθε  $x \in (a, b)$  ισχύει  $f''(x) \geq 0$  η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη ευθεία στο γράφημά της, δηλαδή η  $f$  είναι κυρτή. Συχνά αυτό το περιγράφουμε με τη φράση: «η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα  $(a, b)$ ».

(ii) Αν για κάθε  $x \in (a, b)$  ισχύει  $f''(x) \leq 0$  η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη ευθεία στο γράφημά της, δηλαδή η  $f$  είναι κοίλη. Συχνά αυτό το περιγράφουμε με τη φράση: «η  $f$  στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα  $(a, b)$ ».

*Απόδειξη:* Για κάθε  $x \in (a, b)$  και θεωρούμε την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της  $f$  στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$  για οποιοδήποτε  $x_0 \in (a, b)$ . Η ευθεία αυτή έχει εξίσωση  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , οπότε

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει  $\xi_1$  ανάμεσα στα  $x$  και  $x_0$  ώστε  $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x - x_0)$ . Άρα

$$f(x) - y = f'(\xi_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Ξανά από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την  $f'$  υπάρχει  $\xi_2$  ανάμεσα στα  $\xi_1$  και  $x_0$  ώστε  $f'(\xi_1) - f'(x_0) = f''(\xi_2)(\xi_1 - x_0)$ , οπότε

$$f(x) - y = f''(\xi_2)(\xi_1 - x_0)(x - x_0).$$

Το  $\xi_1$  όμως είναι πάντα ανάμεσα στα  $x$  και  $x_0$ , οπότε εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει  $(\xi_1 - x_0)(x - x_0) > 0$ .

Συνεπώς, αν  $f'' \geq 0$  θα ισχύει  $f(x) - y \geq 0$  δηλαδή το γράφημα της  $f$  είναι πάνω από την ευθεία που εφάπτεται στο γράφημά της στο  $x_0$ . Ενώ αν  $f'' \leq 0$  θα είναι  $f(x) - y \leq 0$  δηλαδή το γράφημα της  $f$  είναι κάτω από την ευθεία που εφάπτεται στο γράφημά της στο  $x_0$ .  $\square$

## 12.5 Σημεία καμπής

**Ορισμός 12.7** Έστω ότι η  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b) \setminus \{x_0\}$ , όπου  $x_0 \in (a, b)$ . Αν σε ένα από τα  $(a, x_0)$ ,  $(x_0, b)$  η  $f''$  έχει θετικές τιμές και στο άλλο αρνητικές, τότε λέμε ότι η  $f$  «κάμπτεται» στο  $x_0$  ή παρουσιάζει «καμπή» στο  $x_0$ , και το  $x_0$  λέγεται «σημείο καμπής» της συνάρτησης  $f$ .

Έτσι, αν η συνάρτηση έχει εφαπτομένη σε ένα σημείο καμπής, αυτή «διαπερνά» το γράφημα της  $f$  στο σημείο  $x_0$  και η γραφική παράσταση βρίσκεται εκατέρωθεν της εφαπτομένης ευθείας.

**Παρατήρηση 12.8** Το να είναι η  $f$  δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(a, b) \setminus \{x_0\}$  δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τον ορισμό του σημείου καμπής, αλλά εδώ κάνουμε αυτή την υπόθεση για λόγους απλότητας. Στη γενική περίπτωση ζητάμε απλώς η  $f$  να είναι γνήσια κυρτή και γνήσια κοίλη σε διαφορετικές πλευρές του  $x_0$ . Η  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $I$  αν για κάθε  $x, y \in I$  και  $t \in [0, 1]$  ισχύει

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

ενώ τη λέμε γνήσια κυρτή αν η ανισότητα είναι γνήσια:

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y),$$

για κάθε  $t \in (0, 1)$ . Με τις αντίστροφες ανισότητες έχουμε τους ορισμούς της κοίλης συνάρτησης και της γνήσια κοίλης. Δείτε και Άσκηση 12.7.1.

**Παράδειγμα 12.9** Για τη συνάρτηση  $f(x) = x^3$  έχουμε  $f''(x) = 6x$ , η οποία μηδενίζεται στο 0 και είναι αρνητική αριστερά του μηδενός και θετική δεξιά του μηδενός. Άρα η  $f$  έχει σημείο καμπής στο 0.

## 12.6 Ασύμπτωτες

Οι ασύμπτωτες ευθείες αποτελούν βασικά στοιχεία στη μελέτη συνάρτησης και στη χάραξη της γραφικής της παράστασης.

**Ορισμός 12.10** Η ευθεία με εξίσωση  $y = \lambda x + b$  λέγεται (πλάγια) ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = b$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = b.$$

**Παρατήρηση 12.11** Αν από τον υπολογισμό των παραπάνω ορίων προκύψει  $\lambda = 0$ , οπότε η ευθεία γίνεται  $y = b$ , αυτή ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη.

**Ορισμός 12.12** Μια συνάρτηση έχει κάθετη ασύμπτωση την ευθεία  $x = x_0$  αν είτε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$  είτε  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$  είτε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$  είτε  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ .

## 12.7 Μελέτη συνάρτησης

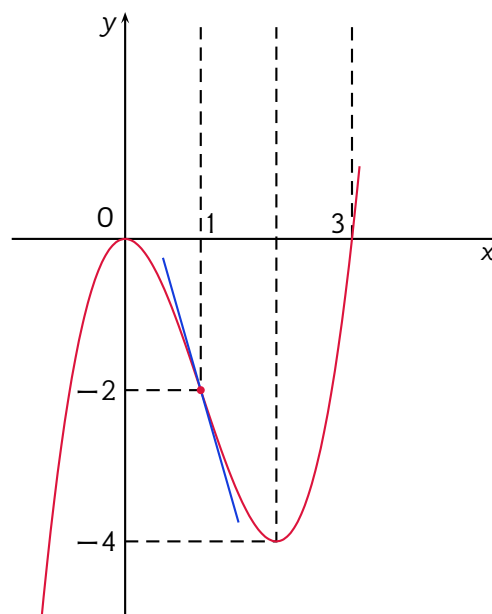
1. Βρίσκουμε το ευρύτερο πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $A$  αν αυτό δεν δίνεται.
  - (α') Αν όμως είναι περιοδική με περίοδο  $T$  τότε αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα της μορφής  $[a, a + T)$ .
  - (β') Αν είναι άρτια ή περιττή, αρκεί να τη μελετήσουμε στο  $A \cap [0, +\infty)$ . Αν η  $f$  είναι άρτια η γραφική παράσταση της  $f$  είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $y'y$ . Αν είναι περιττή η γραφική παράσταση της  $f$  είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
2. Εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής, και ειδικότερα παραγωγίσιμη.
3. Το πεδίο ορισμού  $A$  είναι συχνά διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Εξετάζουμε λοιπόν τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το  $A$ , ιδιαίτερα όταν τα σημεία αυτά είναι σημεία ασυνέχειας ή το  $+\infty$  ή το  $-\infty$ .

4. Υπολογίζουμε την παράγωγο  $f'$  της  $f$  και εξετάζουμε το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής. Έτσι προκύπτουν τα διάφορα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ , καθώς και τα κρίσιμα σημεία στα οποία η  $f$  ενδεχομένως παρουσιάζει ακρότατα.
5. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο  $f''$  της  $f$ . Από τη μελέτη του προσήμου της ορίζονται τα διαστήματα στα οποία η  $f$  στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω, καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.
6. Άλλα συμπληρωματικά στοιχεία της μελέτης είναι:
  - (α') Προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες της  $f$ .
  - (β') Βρίσκουμε τα σημεία που η  $f$  τέμνει τους άξονες, δηλαδή λύνουμε την εξίσωση  $f(x) = 0$  και υπολογίζουμε το  $f(0)$ .

Με αυτά τα στοιχεία καταρτίζουμε πίνακα ο οποίος μας βοηθάει στην χάραξη της γραφικής παράστασης της  $f$ , όπως φαίνεται στις επόμενες εφαρμογές.

**Παράδειγμα 12.13** Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x^2$ .

$x$	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$					
$f'$	+	0	-	-	0	+					
$f''$	-	-	0	+	+	+					
$f$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$
		μ		κ		ε					



**Παράδειγμα 12.14** Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}.$$

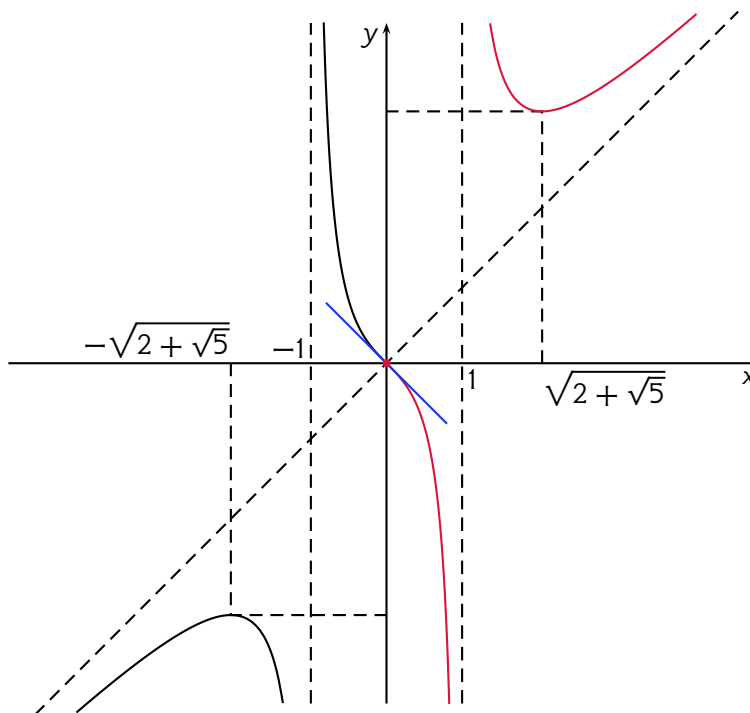
Πεδίο ορισμού  $I = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ .  $f$  περιττή.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \quad f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0.$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2+\sqrt{5}}-1$	$0$	$\sqrt{2+\sqrt{5}}$	$-\infty$	
$f'$		$0$	$\parallel$	$-$	$0$	$+$
$f''$		$\parallel$	$0$	$-$	$\parallel$	$+$
$f$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

$\mu$                        $\kappa$                        $\epsilon$



**Παράδειγμα 12.15** Να μελετηθεί η συνάρτηση

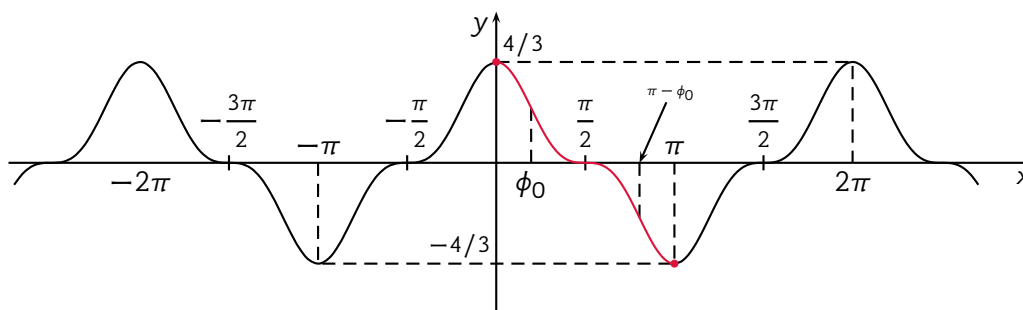
$$f(x) = \frac{4}{3} \cos^3 x.$$

Πεδίο ορισμού  $I = \mathbb{R}$ . Περιοδική με περίοδο  $2\pi$ . Άρτια, οπότε τη μελετάμε στο  $[0, \pi]$ .

$$f'(x) = -4 \sin x \cos^2 x \quad f''(x) = -12 \cos x \left( \cos x - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left( \cos x + \sqrt{\frac{2}{3}} \right).$$

Επειδή  $0 < \sqrt{2/3} < 1$  υπάρχει  $\phi_0 \in (0, \pi/2)$  ώστε  $\cos \phi_0 = \sqrt{2/3}$  ( $\phi = \arccos(\sqrt{2/3}) \simeq .6154797$ ). Οπότε η  $f''$  έχει ρίζες τις  $\phi_0, \pi/2, \pi - \phi_0$ .

$x$	$0$	$\phi_0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \phi_0$	$\pi$
$f'$	$0$	$-$	$0$	$-$	$0$
$f''$	$-4$	$0$	$+$	$0$	$-4$
$f$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$0$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$
	$\mu$	$\kappa$	$\kappa$	$\kappa$	$\epsilon$



## Ασκήσεις

Άσκηση 12.7.1. Αποδείξτε ότι αν  $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη τότε  $f''(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$  αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι κυρτή· δηλαδή, για κάθε  $t \in [0, 1]$  και για κάθε  $x, y \in (a, b)$  ισχύει

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Επιπλέον,  $f''(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in (a, b)$  αν και μόνο αν η συνάρτηση είναι κοίλη· δηλαδή, για κάθε  $t \in [0, 1]$  και για κάθε  $x, y \in (a, b)$  ισχύει

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Άσκηση 12.7.2. Αποδείξτε ότι για κάθε  $a > 0$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$a^\lambda \leq (1-\lambda) + \lambda a$$

για κάθε  $\lambda \in [0, 1]$ , ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση  $f(a) = (1-\lambda) + \lambda a - a^\lambda$ . Στη συνέχεια, επιλέγοντας κατάλληλο  $a$  αποδείξτε ότι η  $e^x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  είναι κυρτή συνάρτηση.

Άσκηση 12.7.3. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να αποδείξετε την γενική ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n},$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς  $x_1, x_2, \dots, x_n$  και οποιουσδήποτε αριθμούς  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$  με  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ .

Άσκηση 12.7.4. Αποδείξτε ότι αν  $0 < a < b$ , για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ae^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - \frac{be^{-bx}}{1 - e^{-bx}},$$

ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Επίσης, υπολογίστε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .  
(Υπόδειξη: γράψτε την  $f$  με θετικούς εκθέτες, και αφού στη συνέχεια την γράψετε ως ένα κλάσμα, παρατηρήστε ότι μηδέν κάνει μόνο όταν είναι μηδέν ο αριθμητής.)

# Παράρτημα Α'

## limsup και liminf

### Α'.1 Το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων

Όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 6.37, μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  παρόλο που μπορεί να μην συγκλίνει έχει πάντα συγκλίνουσες υπακολουθίες αν σε αυτές συμπεριλάβουμε και εκείνες που τείνουν στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$  (αν η ακολουθία είναι φραγμένη έχει συγκλίνουσα υπακολουθία ενώ αν δεν είναι φραγμένη έχει υπακολουθία που τείνει στο  $+\infty$  ή στο  $-\infty$ ).

Ας συμβολίσουμε με  $Y(a_n)$ —ή απλά με  $Y$  αν είναι σαφές για ποια ακολουθία μιλάμε—το σύνολο όλων των ορίων των υπακολουθιών της  $a_n$ . Για παράδειγμα, αν  $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$  τότε  $Y(a_n) = \{-1, +1\}$ . Φανερά, αν μια ακολουθία έχει όριο στο  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , κάθε υπακολουθία της τείνει στο όριο της ακολουθίας, οπότε το  $Y$  είναι μονοσύνολο.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ακολουθίες των οποίων το σύνολο  $Y$  είναι όλο το  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των ρητών αριθμών.

**Πρόταση Α'.1** Θεωρούμε μια ακολουθία  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  και θέτουμε  $s := \sup Y(a_n)$  και  $i := \inf Y(a_n)$ . Τότε  $s, i \in Y(a_n)$ , δηλαδή το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο στο  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Ισοδύναμα, υπάρχουν δυο υπακολουθίες της  $a_n$  που η μια τείνει στο  $s$  και η άλλη στο  $i$

*Απόδειξη:* Αν  $s = +\infty$  τότε για κάθε  $N \in \mathbb{N}$  υπάρχει υπακολουθιακό όριο  $s_N > N$  (αλλιώς όλα τα υπακολουθιακά όρια είναι μικρότερα ή ίσα του  $N$  οπότε και το  $s$ ). Άρα υπάρχει όρος  $a_{k_N}$  της  $a_n$  ώστε  $a_{k_N} > N$  (αλλιώς αν κάθε όρος της  $a_n$  είναι μικρότερος ή ίσος του  $N$  τότε η  $a_n$  έχει άνω φράγμα το  $N$  και δεν γίνεται να έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στο  $s_N > N$ ). Έτσι η υπακολουθία  $a_{k_N}$  τείνει στο  $+\infty = s$ . Άρα  $s \in Y(a_n)$

Αν  $s = -\infty$  τότε όλα τα υπακολουθιακά όρια της  $a_n$  είναι  $-\infty$  οπότε  $a_n \rightarrow -\infty = s$ . Άρα  $s \in Y(a_n)$

Έστω τώρα ότι  $s \in \mathbb{R}$ . Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει στοιχείο  $s_n \in Y(a_n)$  με  $s \geq s_n > s - 1/n$  από τον ορισμό του  $s$  ως supremum του  $Y(a_n)$ . Αφού το  $s_n$  είναι υπακολουθιακό όριο της  $a_n$  υπάρχει  $a_{k_n}$  όρος της  $a_n$  ώστε

$|s_n - a_{k_n}| < 1/n$ . Έτσι, έχουμε

$$|a_{k_n} - s| \leq |a_{k_n} - s_n| + |s_n - s| = |a_{k_n} - s_n| + s - s_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \rightarrow 0.$$

Συνεπώς η υπακολουθία  $a_{k_n}$  της  $a_n$  συγκλίνει στο  $s$ . Δηλαδή  $s \in Y(a_n)$ . Ομοίως,  $i \in Y(a_n)$ .  $\square$

**Ορισμός Α'.2** Τα  $\sup Y(a_n)$  και  $\inf Y(a_n)$  ονομάζονται  $\limsup$  και  $\liminf$  της ακολουθίας  $a_n$  ή *ανώτερο* (ή *άνω*) και *κατώτερο* (ή *κάτω*) *όριο* της ακολουθίας  $a_n$  ή *μέγιστο* και *ελάχιστο υπακολουθιακό όριο* της  $a_n$  αντίστοιχα. Γράφουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup Y(a_n) \quad \text{και} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf Y(a_n),$$

ή απλούστερα  $\limsup a_n$  και  $\liminf a_n$  αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν  $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$  τότε  $Y = \{-1, +1\}$  οπότε  $\limsup a_n = +1$  και  $\liminf a_n = -1$ .

Φανερά ισχύει πάντα η

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad (\text{Α'.1})$$

αφού  $\inf\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{a_k : k \geq n\}$ .

**Πρόταση Α'.3** Κάθε ακολουθία  $a_n$  έχει όριο αν και μόνο αν

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

και η κοινή αυτή τιμή είναι το  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Απόδειξη:* Αν η  $a_n$  έχει όριο το  $\ell$  τότε  $Y(a_n) = \{\ell\}$ , αφού κάθε υπακολουθία έχει και αυτή το ίδιο όριο  $\ell$ . Συνεπώς

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf Y(a_n) = \ell = \sup Y(a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Αντιστρόφως, αν  $\ell := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  τότε το  $Y(a_n)$  είναι μονοσύνολο, το μονοσύνολο  $\{\ell\}$ , αφού το infimum και το supremum του  $Y(a_n)$  συμπίπτουν. Η απόδειξη θα ήταν τετριμμένη αν ξέραμε ότι η  $a_n$  συγκλίνει, διότι η  $a_n$  είναι υπακολουθία του εαυτού της. Όμως δεν είναι εκ των προτέρων σαφές ότι αυτή συγκλίνει. Για αυτό καταφεύγουμε στο ακόλουθο επιχείρημα. Ας υποθέσουμε ότι η  $a_n$  δεν τείνει στο  $\ell$ . Τότε η ακολουθία αυτή δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συνεπώς υπάρχει  $\varepsilon > 0$  ώστε για κάθε  $n_0 \in \mathbb{N}$  υπάρχουν  $n > m \geq n_0$  ώστε  $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$ . Εφαρμόζουμε το παραπάνω για  $n_0 = 1$  και βρίσκουμε  $n_1 > m_1 \geq 1$  ώστε  $|a_{n_1} - a_{m_1}| \geq \varepsilon$ . Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο για  $n_0 = n_1 + 1$  και βρίσκουμε  $n_2 > m_2 \geq n_1 + 1$  ώστε  $|a_{n_2} - a_{m_2}| \geq \varepsilon$ . Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο για  $n_0 = n_2 + 1$  κοκ. Έτσι βρίσκουμε δύο υπακολουθίες  $a_{n_k}$  και  $a_{m_k}$  ώστε  $|a_{n_k} - a_{m_k}| \geq \varepsilon$ .

Καθεμιά από τις ακολουθίες  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  και  $(a_{m_k})_{k=1}^{\infty}$  έχουν υπακολουθίες που τείνουν σε κάποιο όριο (είτε πραγματικό αριθμό αν είναι φραγμένες είτε κάποιο από τα  $\pm\infty$  αν δεν είναι φραγμένες). Έστω ότι αυτά τα όρια είναι τα  $l_1$  και  $l_2$  αντίστοιχα. Τότε φανερά  $|l_1 - l_2| \geq \varepsilon$  και ταυτόχρονα  $l_1, l_2 \in Y(a_n)$  το οποίο είναι άτοπο, αφού το τελευταίο σύνολο είναι μονοσύνολο.  $\square$

## A'.2 Ιδιότητες των $\limsup$ και $\liminf$

Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας ένα «τύπο» για τα  $\limsup$  και  $\liminf$ . Θεωρούμε μια ακολουθία  $a_n$ . Από αυτή ορίζουμε μια άλλη ακολουθία, την  $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ . Φανερά η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα, διότι αν  $n_1 > n_2$ ,

$$\{a_k : k \geq n_1\} \subseteq \{a_k : k \geq n_2\}$$

οπότε

$$b_{n_1} = \sup\{a_k : k \geq n_1\} \leq \sup\{a_k : k \geq n_2\} = b_{n_2}.$$

Άρα η  $b_n$  ως φθίνουσα είτε συγκλίνει (αν είναι φραγμένη) είτε αποκλίνει στο  $-\infty$ . Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Ομοίως, ορίζουμε την ακολουθία  $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ . Φανερά η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα, διότι αν  $n_1 > n_2$ ,

$$\{a_k : k \geq n_1\} \subseteq \{a_k : k \geq n_2\}$$

οπότε

$$c_{n_1} = \inf\{a_k : k \geq n_1\} \geq \inf\{a_k : k \geq n_2\} = c_{n_2}.$$

Άρα η  $c_n$  ως αύξουσα είτε συγκλίνει (αν είναι φραγμένη) είτε αποκλίνει στο  $+\infty$ . Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Η επόμενη πρόταση μάς λέει ότι τα παραπάνω όρια είναι τα  $\limsup$  και  $\liminf$  της  $a_n$  αντίστοιχα.

**Πρόταση A'.4** Για κάθε ακολουθία  $a_n$  ισχύει

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k : k \geq n\})$$

και

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf\{a_k : k \geq n\}).$$

*Απόδειξη:* Αν  $\limsup a_n = \sup Y(a_n) = +\infty$  τότε υπάρχει υπακολουθία  $a_{k_n} \rightarrow +\infty$  οπότε  $\sup\{a_k : k \geq n\} = +\infty$  και άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) = +\infty = \limsup a_n.$$

Αν  $\limsup a_n = \sup Y(a_n) = -\infty$  τότε  $Y(a_n) = \{-\infty\}$  δηλαδή  $a_n \rightarrow -\infty$ . Έτσι για κάθε  $M > 0$  υπάρχει  $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε

$n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n < -M$ . Συνεπώς  $\sup\{a_k : k \geq n\} \leq -M$  για κάθε  $n \geq n_0$ . Δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) = -\infty = \limsup a_n.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι  $\limsup a_n = s \in \mathbb{R}$ , και έστω ότι η υπακολουθία  $a_{k_n}$  συγκλίνει στο  $s$  (Πρόταση Α'.1). Έτσι για κάθε  $k_n \geq n$  ισχύει  $a_{k_n} \in \{a_k : k \geq n\}$  οπότε

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq a_{k_n}.$$

Παίρνουμε τώρα όριο ως προς  $n$  για να καταλήξουμε στην

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}) \geq s.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, εργαζόμαστε με απαγωγή στο άτοπο. Θέτουμε

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup\{a_k : k \geq n\}),$$

υποθέτουμε ότι  $\ell > s$ , και εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για  $\varepsilon = (\ell - s)/2 > 0$ , οπότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$\left| \sup\{a_k : k \geq n\} - \ell \right| < \frac{\ell - s}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή και προσθέτοντας  $\ell$  προκύπτει ότι

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq \frac{\ell + s}{2},$$

για κάθε  $n \geq n_0$ . Άρα υπάρχει υπακολουθία  $a_{k_n}$  της  $a_n$  ώστε  $a_{k_n} \geq (\ell + s)/2$ . Περνώντας σε μια συγκλίνουσα υπακολουθία βρίσκουμε υπακολουθιακό όριο μεγαλύτερο του  $(\ell + s)/2$ , δηλαδή γνησίως μεγαλύτερο του  $s$ , το οποίο είναι άτοπο.

Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση του  $\liminf$ . □

**Πρόταση Α'.5** Αν για δυο ακολουθίες  $a_n$  και  $b_n$  υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει  $a_n \leq b_n$ , τότε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

και

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

*Απόδειξη:* Η απόδειξη είναι άμεση από την Πρόταση Α'.4, αφού για  $n \geq n_0$  θα ισχύει

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{b_k : k \geq n\}$$

και

$$\inf\{a_k : k \geq n\} \leq \inf\{b_k : k \geq n\}. \quad \square$$

**Πρόταση A'.6** Για κάθε ακολουθία  $a_n > 0$  ισχύει

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

*Απόδειξη:* Η δεύτερη ανισότητα στη ζητούμενη είναι ήδη γνωστή (σχέση (A'.1)). Η πρώτη ανισότητα έχει την ίδια απόδειξη με την τρίτη, οπότε θα αποδείξουμε μόνο την τρίτη.

Θέτουμε  $\ell = \limsup (a_{n+1}/a_n)$  και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ . Έτσι, υπάρχει  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  ώστε για κάθε  $n \geq n_0$  να ισχύει

$$\sup \left\{ \frac{a_{k+1}}{a_k} : k \geq n \right\} \leq \ell + \varepsilon.$$

Άρα αν  $n = n_0$  ισχύει

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \ell + \varepsilon, \quad (A'.2)$$

για κάθε  $k \geq n_0$ . Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (A'.2) για  $k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n - 1$  για κάθε  $n$  με  $n - 1 \geq n_0$ , παίρνουμε

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0},$$

αφού στα αριστερά έχουμε  $n - n_0$  κλάσματα. Μετά από τις διαγραφές στα αριστερά παίρνουμε ότι  $a_n/a_{n_0} \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0}$ . Συνεπώς για κάθε  $n \geq n_0 + 1$  ισχύει

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (\ell + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}}.$$

Άρα για κάθε  $n \geq n_0 + 1$

$$\sup \left\{ \sqrt[k]{a_k} : k \geq n \right\} \leq (\ell + \varepsilon) \sup \left\{ \sqrt[k]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} : k \geq n \right\}.$$

Αφήνοντας το  $n$  να πάει στο άπειρο,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup \left\{ \sqrt[k]{a_k} : k \geq n \right\} \right) \leq \ell + \varepsilon,$$

διότι το όριο  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n_0}/(\ell + \varepsilon)^{n_0}}$  υπάρχει και ισούται με 1, οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup \left\{ \sqrt[k]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} : k \geq n \right\} \right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} = 1, \end{aligned}$$

από την Πρόταση A'.3.

Δείξαμε λοιπόν ότι  $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon$ . Τέλος, αφήνοντας  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  ολοκληρώνουμε την απόδειξη.  $\square$

## Ασκήσεις

Άσκηση Α'.2.1. Γράψτε τις λεπτομέρειες για την απόδειξη της ανισότητας

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

για κάθε ακολουθία  $a_n > 0$ .

Άσκηση Α'.2.2. Αποδείξτε ότι και τα τέσσερα όρια της Πρότασης Α'.6 μπορεί να είναι διαφορετικά, υπολογίζοντάς τα για την ακολουθία

$$a_n = 2^{(-1)^n n - n},$$

και δείχνοντας ότι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}, \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad \text{και} \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

## Παράρτημα Β΄

# Ορισμός του συνόλου $\mathbb{R}$

Ο ορισμός του  $\mathbb{R}$  ξεκινάει με τη δουλειά του Ευδόξου όπως αποτυπώνεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, στο Βιβλίο 5, Ορισμός 5 (δείτε [2]). Στα μαθηματικά της εποχής η λέξη «αριθμός» χρησιμοποιούνταν για τους φυσικούς αριθμούς. Για τους ρητούς έλεγαν «λόγος αριθμών». Για τις ποσότητες (είτε μήκη, είτε εμβαδά, είτε όγκους) που δεν είναι ρητές χρησιμοποιούνταν η λέξη «μέγεθος». Σήμερα τα «μεγέθη» της αρχαίας περιόδου αντιστοιχούν στους πραγματικούς αριθμούς και ο Ευδόξος δίνει τον ορισμό πότε δυο «μεγέθη» θεωρούνται ίσα. Γράφει λοιπόν:

(ορ. 5) Δυο λόγοι μεγεθών  $\alpha/\beta$  και  $\gamma/\delta$  λέγονται ίσοι όταν για οποιουδήποτε αριθμούς  $\mu, \nu$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{είτε ισχύει } \mu\alpha > \nu\beta \text{ και } \mu\gamma > \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha = \nu\beta \text{ και } \mu\gamma = \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha < \nu\beta \text{ και } \mu\gamma < \nu\delta. \end{array} \right\}$$

Δηλαδή τα μεγέθη  $\alpha$  και  $\gamma$  (για  $\beta = \delta = 1$ ) λέγονται ίσα αν για οποιουδήποτε (φυσικούς) αριθμούς  $\mu, \nu$  ισχύει είτε  $\mu/\nu < \alpha$  και  $\mu/\nu < \gamma$  είτε  $\mu/\nu = \alpha$  και  $\mu/\nu = \gamma$  είτε  $\mu/\nu > \alpha$  και  $\mu/\nu > \gamma$ . Σε σημερινή ορολογία, οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\gamma$  ταυτίζονται αν τα σύνολα

$$\{\mu/\nu : \mu, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu < \alpha\} \cup \{\mu/\nu : \mu, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu > \alpha\}$$

και

$$\{\mu/\nu : \mu, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu < \gamma\} \cup \{\mu/\nu : \mu, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu > \gamma\}$$

ταυτίζονται. Αυτά τα σύνολα ονομάζονται σήμερα «τομές» του  $\mathbb{R}$  και χρησιμοποιήθηκαν από τον Dedekind εννοιολογικά αντίστροφα για να ορίσουν το  $\mathbb{R}$ . Δηλαδή ο Dedekind, παίρνει τον ορισμό του Ευδόξου και σκεπτόμενος «αντίστροφα» λέει ορίζω το  $\mathbb{R}$  ως το σύνολο όλων των τομών του  $\mathbb{Q}$ . Έτσι οι τομές αυτές σήμερα ονομάζονται «τομές Dedekind» και ο αυστηρός ορισμός του  $\mathbb{R}$  αποδίδεται σε αυτόν. Οφείλουμε να σημειώσουμε ότι στο έργο του Dedekind απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά

στα «Στοιχεία» ή στον Εύδοξο, κοινή πρακτική για την εποχή του. Τα βιβλία της αρχαίας περιόδου, κλειδωμένα στα μοναστήρια και τις εκκλησιαστικές βιβλιοθήκες ήταν ανυπεράσπιστα στις λεηλασίες. Η σύγχρονη όμως Μαθηματική κοινότητα, δεν ανέχεται την απάλειψη των αναφορών, και συνεπώς η αναφορά στον Εύδοξο και στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι μια οφειλή που έχει καθυστερήσει ...αρκετούς αιώνες.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μια μικρή παραλλαγή για τον ορισμό του  $\mathbb{R}$  αφού μόνο το πρώτο σύνολο, το  $\{\mu/\nu : \mu, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu < \alpha\}$  αρκεί για να χαρακτηρίσει τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$ .

## B'.1 Ορισμός του $\mathbb{R}$

**Ορισμός B'.1** Ονομάζουμε ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{Q}$  αρχικό τμήμα αν έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Για κάθε  $p \in A$  υπάρχει  $q \in A$  ώστε  $p < q$ .
- (ii) Αν  $r \in \mathbb{Q}$  και  $r < p$  τότε  $r \in A$ .

Παρατηρούμε ότι στο  $\mathbb{Q}$  υπάρχουν αρχικά τμήματα. Για παράδειγμα το σύνολο  $\{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$  είναι αρχικό τμήμα του  $\mathbb{Q}$  για κάθε  $r \in \mathbb{Q}$ . Ένα άλλο αρχικό τμήμα είναι και το  $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \text{ ή } x^2 < r\}$  για κάθε  $r > 0$  με  $r \in \mathbb{Q}$ . Η απόδειξη ότι αυτά τα σύνολα είναι αρχικά τμήματα απαιτεί την Αρχή του Αρχιμήδη στο  $\mathbb{Q}$  (δείτε Ενότητα I.1 σελίδα 7) και αφήνεται ως άσκηση.

**Ορισμός B'.2** Ορίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών να είναι το σύνολο όλων των αρχικών τμημάτων του  $\mathbb{Q}$ . Δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{\alpha : \alpha \text{ αρχικό τμήμα του } \mathbb{Q}\}.$$

Με αυτόν τον εκ πρώτης όψεως «περίεργο» ορισμό πράγματι ορίσαμε τους πραγματικούς αριθμούς να είναι σύνολα και συγκεκριμένα αρχικά τμήματα του  $\mathbb{Q}$ . Έτσι κάθε ρητός  $r$ —όπως και το 0 και το 1—τον ταυτίζουμε με το σύνολο  $\{x \in \mathbb{Q} : x < r\}$ .

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε ελληνικά γράμματα για τα αρχικά τμήματα του  $\mathbb{Q}$  (δηλαδή τους πραγματικούς αριθμούς!). Ορίζουμε τώρα στο  $\mathbb{R}$  τη διάταξη και τις πράξεις.

- Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ορίζουμε  $\alpha < \beta$  αν και μόνο αν  $\alpha \subset \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ). Επίσης  $\alpha \leq \beta$  αν και μόνο αν  $\alpha \subseteq \beta$ . Τέλος  $\alpha > \beta$  αν και μόνο αν  $\alpha \supset \beta$  και  $\alpha \geq \beta$  αν και μόνο αν  $\alpha \supseteq \beta$ .
- $\alpha + \beta := \{r + s : r \in \alpha \text{ και } s \in \beta\}$
- Αν  $\alpha > 0$  και  $\beta > 0$  ορίζουμε

$$\alpha\beta := \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\} \cup \{rs : r, s > 0, r \in \alpha, s \in \beta\}.$$

- Αν  $\alpha$  ορίζουμε

$$-\alpha = \{r \in \mathbb{Q} : \exists s \in \mathbb{Q}, s > 0 \text{ με } -r - s \notin \alpha\}.$$

- Αν  $\alpha < 0$  και  $\beta < 0$  ορίζουμε  $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$
- Αν  $\alpha < 0$  και  $\beta > 0$  ορίζουμε  $\alpha\beta = -(-\alpha)\beta$  και ομοίως, αν  $\alpha > 0$  και  $\beta < 0$  ορίζουμε  $\alpha\beta = -\alpha(-\beta)$ .
- Για κάθε  $\alpha > 0$  ορίζουμε τον

$$\frac{1}{\alpha} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0 \text{ ή } \exists s \in \mathbb{Q} \text{ ώστε } \frac{1}{sr} \notin \alpha\}.$$

Για κάθε  $\alpha < 0$  ορίζουμε  $1/\alpha = -(1/(-\alpha))$ .

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι τα παραπάνω ορίζουν τις πράξεις και τη διάταξη στο  $\mathbb{R}$  με τρόπο που ικανοποιούνται όλες οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης ώστε το  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  να είναι ένα διατεταγμένο σώμα με το 0 ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (δηλαδή  $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) και το 1 ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού (δηλαδή  $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Οι αποδείξεις είναι απλές και για αυτό παραλείπονται και αφήνονται ως άσκηση.

**Θεώρημα B'.3** (Πληρότητα του  $\mathbb{R}$ ) *Το σύνολο  $\mathbb{R}$  εφοδιασμένο με τη διάταξη  $\leq$  είναι πλήρες, δηλαδή κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}$  έχει supremum και κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο  $B$  του  $\mathbb{R}$  έχει infimum.*

*Απόδειξη:* Αν το  $A$  είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  θέτουμε  $\sigma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ .

- Ισχυρισμός 1: Το  $\sigma$  είναι αρχικό τμήμα του  $\mathbb{Q}$ .

[Αν  $r \in \sigma$  ένας ρητός και  $s \in \mathbb{Q}$  με  $s < r$ , τότε επειδή  $r \in \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\alpha_r \in A$  ώστε  $r \in \alpha_r$ . Αλλά το  $\alpha_r$  είναι αρχικό τμήμα, συνεπώς  $s \in \alpha_r \subseteq \sigma$ .

Επιπλέον, πάλι αφού το  $\alpha_r$  είναι αρχικό τμήμα, υπάρχει  $t \in \mathbb{Q}$  ώστε  $r < t$  και  $t \in \alpha_r \subseteq \sigma$ . Συνεπώς το  $\sigma$  είναι αρχικό τμήμα, δηλαδή πραγματικός αριθμός.]

- Ισχυρισμός 2: Το  $\sigma$  είναι άνω φράγμα του  $A$ .

[Φανερά, για κάθε  $\beta \in A$  ισχύει  $\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} \alpha = \sigma$ , οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της διάταξης,  $\beta \leq \sigma$ .]

- Ισχυρισμός 3: Το  $\sigma$  είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του  $A$ .

[Αν  $\sigma_1$  ένα άλλο άνω φράγμα του  $A$  θα πρέπει να ισχύει  $\alpha \leq \sigma_1$  για κάθε  $\alpha \in A$ . Άρα θα ισχύει και  $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \subseteq \sigma_1$ , συνεπώς  $\sigma \subseteq \sigma_1$ , δηλαδή  $\sigma \leq \sigma_1$ .]

Ομοίως αποδεικνύουμε την ύπαρξη του infimum για τα κάτω φραγμένα σύνολα. Απλώς πρέπει να προσέξουμε το εξής: η τομή αρχικών τμημάτων δεν είναι απαραίτητα αρχικό τμήμα. Για παράδειγμα, τα σύνολα

$(-\infty, 1/n) \cap \mathbb{Q}$  είναι αρχικά τμήματα αλλά η τομή τους είναι το σύνολο  $(-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$  που δεν είναι αρχικό τμήμα (αφού  $0 \in (-\infty, 0]$  αλλά δεν υπάρχει ρητός  $s \in (-\infty, 0]$  ώστε  $0 < s$ ). Έτσι ορίζουμε το infimum του κάτω φραγμένου και μη κενού συνόλου  $B$  ως εξής: θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq \beta \text{ για κάθε } \beta \in B\}.$$

Το  $A$  είναι καλά ορισμένο (δηλαδή ο ορισμός του έχει νόημα) αφού το  $B$  ως μη κενό έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο. Το  $A$  είναι μη κενό διότι αφού το  $B$  είναι κάτω φραγμένο υπάρχει  $M \in \mathbb{R}$  ώστε  $M \leq \beta$  για κάθε  $\beta \in B$ . Φανερά λοιπόν  $M \in A$ . Θέτουμε  $i = \sup A$  και αποδεικνύουμε ότι το  $i$  είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του  $B$ . Πραγματι, το  $i$  είναι αρχικό τμήμα όπως ήδη δείξαμε για το supremum ενός συνόλου παραπάνω.

- Ισχυρισμός 4. Το  $i$  είναι κάτω φράγμα του  $B$ .

[Κάθε  $\alpha \in A$  ικανοποιεί από τον ορισμό του  $A$  την  $\alpha \leq \beta$  για κάθε  $\beta \in B$ . Άρα  $i = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \leq \beta$ , δηλαδή  $i \leq \beta$  για κάθε  $\beta \in B$ .]

- Ισχυρισμός 5. Το  $i$  είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του  $B$ .

[Έστω  $i_1$  ένα άλλο κάτω φράγμα του  $B$ . Τότε  $i_1 \leq \beta$  για κάθε  $\beta \in B$ , οπότε  $i_1 \in A$ . Άρα  $i_1 \leq \bigcup_{\alpha \in A} \alpha = i$ .]

Με τον τελευταίο ισχυρισμό ολοκληρώθηκε η απόδειξη.  $\square$

## Παράρτημα Γ'

# Ο $e$ είναι άρρητος

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ισχύει ο τύπος

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right).$$

Κάτι πιο ισχυρό ισχύει εδώ, δηλαδή υπάρχει ανάλογη με αυτήν περιγραφή για την ποσότητα  $e^x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αλλά αυτό θα το δούμε όταν θα ασχοληθούμε με σειρές στον Απειριστικό Λογισμό 2.

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο, αναπτύσσουμε με το διωνυμικό ανάπτυγμα το  $(1 + 1/n)^n$ :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-1)!} \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{n!0!} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} =: s_n. \end{aligned}$$

Η  $s_n$  είναι φανερά (γνησίως) αύξουσα (αφού  $s_{n+1} = s_n + 1/(n+1)! > s_n$ ) και είναι και άνω φραγμένη, διότι  $2^n \leq n!$  για κάθε  $n \geq 4$  οπότε

$$s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 3 - \frac{1}{2^3} < 3.$$

Άρα η  $s_n$  είναι συγκλίνουσα (ως αύξουσα και άνω φραγμένη), οπότε παίρνοντας όρια βρίσκουμε ότι

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim s_n.$$

Για την αντίστροφη, από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα  $k < n$  τότε ισχύει

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

για κάθε  $n \geq k$ . Αφήνοντας το  $n$  να πάει στο άπειρο συμπεραίνουμε ότι  $e \geq s_k$ , αφού όλες οι προηγούμενες παρενθέσεις συγκλίνουν στο 1 καθώς  $n \rightarrow \infty$  με το  $k$  σταθερό. Αφήνοντας τώρα το  $k$  να πάει στο άπειρο βρίσκουμε  $e \geq \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο  $e$  είναι ρητός, και έστω ότι  $e = k/m$  με  $k, m \in \mathbb{N}$ . Παρατηρήστε ότι  $m \geq 2$ , αφού  $2 < e < 3$ . Θεωρούμε τον αριθμό

$$x = m!(e - s_m) = m! \left( \frac{k}{m} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{m!}\right) \right).$$

Φανερά  $x > 0$  (αφού  $e > s_m$ ). Επίσης επιμερίζοντας το  $m!$  στην παραπάνω συμπαιρένουμε αμέσως ότι  $x \in \mathbb{N}$ . Άρα θα καταλήξουμε σε άτοπο αν αποδείξουμε ότι  $x < 1$ , αφού ανάμεσα στο 0 και στο 1 δεν υπάρχουν φυσικοί ακέραιοι. Έχουμε

$$\begin{aligned} x &= m! \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) - s_m \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} m! \left( \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+(n-m))} \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-m}} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n-m+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα ο  $e$  είναι άρρητος.

# Βιβλιογραφία

- [1] Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α'*, ηλεκτρονική έκδοση <https://myria.math.aegean.gr/aem>
- [2] Ευκλείδης ο Αλεξανδρεύς, *Στοιχεία*, ηλεκτρονική έκδοση <https://myria.math.aegean.gr/aem>
- 
- [3] Απόστολος Γιαννόπουλος, *Απειροστικός Λογισμός I & II*, (Σημειώσεις Μαθήματος), <http://users.uoa.gr/~argiannop/notes.html>
- [4] Δημήτριος Κάππος, *Μαθήματα Αναλύσεως, Απειροστικός Λογισμός Α*.
- [5] Στυλιανός Νεγρεπόντης, Σταύρος Γιωτόπουλος, Ευστάθιος Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Συμμετρία 1997. 2004.
- [6] Σωτήρης Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 2000. 2004.
- [7] Αντώνης Τσολομύτης, *Σύνολα και Αριθμοί*, Leader Books 2004.
- 
- [8] Robert Bartle, *The elements of Real Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons 1989
- [9] Konrad Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, 1956.
- [10] Thomas William Körner, *A companion to Analysis*, Graduate Studies in Mathematics vol. 62, American Mathematical Society, 2004.
- [11] Serge Lang, *A first Course in Calculus*, 5<sup>th</sup> ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1986.
- [12] Pierre Simon Laplace, *Memoir on the probability of causes of events*, tome sixième of *Mémoires de Mathématique et de Physique*. English translation by S. M. Stigler, *Statist. Sci.*, 1(19):364–378. 1986.
- [13] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, *Amer. Math. Monthly* 87 (1980), 693–696.



- [14] Reinhold Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1998.
- [15] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw Hill International Editions 1976.
- [16] Karl Stromberg, *An introduction to Classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1996.