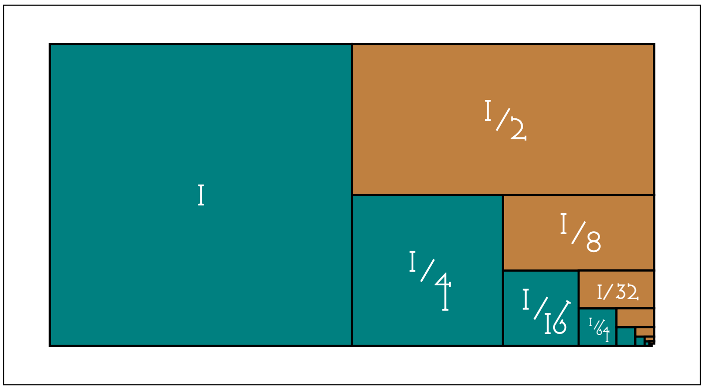
Απειροστικός Λογισμός 2

Σημειώσεις



Ευκλείδου του Αλεξανδρέως, «Στοιχεία», Βιβλίο 10, Πρόταση 1.

Σάμος 2024

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

AT

Έκδοση 0.12. Το αρχείο δεν είναι τελικό. Μπορεί να έχει λάθη ή παραλείψεις. Προς το παρόν είναι υπό συνεχή διαμόρφωση. Όλες οι παραπομπές είναι links για εύκολη περιήγηση. Οι παραπομπές στον Απειροστικό Λογισμό Ι ανοίγουν το σχετικό αρχείο (`ap1.pdf`) εφόσον είναι αποθηκευμένο στον ίδιο φάκελο με τον παρόν. Όπου υπάρχουν links σε εξωτερικά αρχεία ή ιστοσελίδες δίνεται qrcode στο περιθώριο.

Περιεχόμενα

Μέρος I

Σειρές

Κεφάλαιο 1

Γενικά περί σειρών

1.1 Προκαταρκτικά

Η έννοια του ορίου και του «διαδοχικού αθροίσματος» κάθε άλλο παρά σύγχρονη είναι ως έννοια. Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη στο Βιβλίο 10 στην Πρόταση 1 διαβάζουμε το ακόλουθο θεμελιώδες:

> Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

δηλαδή

> Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από το μεγαλύτερο αφαιρεθεί μεγαλύτερο του μισού του, και από το υπόλοιπο αφαιρεθεί μεγαλύτερο του μισού του και αυτό επαναλαμβάνεται συνεχώς θα προκύψει μέγεθος μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους.

Εδώ λοιπόν βρίσκονται οι απαρχές των ορίων και όσων θα ακολουθήσουν στα αθροίσματα που σήμερα ονομάζουμε «σειρές».

1.2 Ορισμοί

Θεωρούμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ορίζουμε μια *νέα* ακολουθία $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ θέτοντας

$$s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Η *νέα* αυτή ακολουθία ονομάζεται σειρά της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Κάθε όρος s_N ονομάζεται *το N-στο μερικό άθροισμα της ακολουθίας* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Αλλιώς, σειρά της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων των όρων της.

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_N συγκλίνει, το όριό της το συμβολίζουμε με $a_1 + a_2 + \cdots + a_N + \ldots$ ή με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Συχνά, παραβιάζεται η τυπική αυτή γλώσσα, και λέμε «η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$» επειδή με αυτό το συμβολισμό είναι προφανές ποια είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων και ποιο είναι το όριο. Αν το όριο δεν υπάρχει λέμε ότι «η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει» εννοώντας βεβαίως ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει.

Οι σειρές λοιπόν, δεν είναι παρά ειδικού τύπου ακολουθίες που παράγονται από μια άλλη ακολουθία προσθέτοντας τους όρους της «με τη σειρά που εμφανίζονται».

Παράδειγμα 1.1 (Η γεωμετρική σειρά) Ας θεωρήσουμε ένα αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ και θέτουμε $a_n = \lambda^n$, δηλαδή η a_n είναι η γεωμετρική ακολουθία με λόγο λ. Η σειρά αυτής της ακολουθίας ονομάζεται *γεωμετρική σειρά με λόγο* λ. Αν $\lambda = 1$ τότε φανερά

$$s_N = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N} = N \to \infty.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα αυτή τη σειρά, δηλαδή τα μερικά αθροίσματα s_N, υπό την προϋπόθεση ότι $\lambda \neq 1$:

$$s_N = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^N = \sum_{n=1}^{N} \lambda^n.$$

Για να βρούμε το όριο αυτής της ακολουθίας θα υπολογίσουμε το s_N ως εξής: παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)s_N &= (1-\lambda)(\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^N) \\
&= \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots + \lambda^N - \lambda^2 - \lambda^3 - \cdots - \lambda^N - \lambda^{N+1} \\
&= \lambda - \lambda^{N+1}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$s_N = \frac{\lambda(1-\lambda^N)}{1-\lambda}.$$

Αν $-1 < \lambda < 1$ ισχύει $\lim_{N\to\infty} \lambda^N = 0$, συνεπώς $s_N \to \lambda/(1-\lambda)$. Λέμε λοιπόν ότι η σειρά συγκλίνει στο $\lambda/(1-\lambda)$ και αντί για $s_N \to \lambda/(1-\lambda)$ γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Αν $\lambda > 1$ τότε επειδή $\lim_{N\to\infty} \lambda^N = \infty$ συμπεραίνουμε ότι $s_N \to \infty$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \infty$, και λέμε ότι η σειρά αυτή «απειρίζεται» ή αποκλίνει στο άπειρο· σε κάθε περίπτωση δεν συγκλίνει.

Το να μην συγκλίνει μια σειρά δεν σημαίνει ότι αποκλίνει στο άπειρο. Ας πάρουμε για παράδειγμα τη σειρά της ακολουθίας $a_n = (-1)^n$, δηλαδή τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$. Για να βρούμε αν συγκλίνει αυτή η σειρά πρέπει να ελέγξουμε αν συγκλίνουν τα μερικά της αθροίσματα. Αλλά αν ο δείκτης N της s_N είναι άρτιος τότε $s_N = 0$ ενώ αν ο N είναι περιττός, τότε $s_N = -1$. Δηλαδή, $s_{2N} = 0 \to 0$ και $s_{2N-1} = -1 \to -1$. Άρα η σειρά αυτή δεν συγκλίνει (χωρίς να «απειρίζεται»). Γενικότερα, αν $\lambda \leq -1$ η γεωμετρική σειρά αποκλίνει. Πράγματι,

$$s_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \lambda^n = \frac{\lambda(1-\lambda^{2N})}{1-\lambda} \to \infty$$

ενώ

$$s_{2N-1} = \sum_{n=1}^{2N-1} \lambda^n = \frac{\lambda(1-\lambda^{2N-1})}{1-\lambda} \to -\infty,$$

(ελέγξτε τα πρόσημα των παραπάνω κλασμάτων) και συνεπώς η s_N έχει δυο υπακολουθίες με διαφορετικό όριο, άρα η ίδια δεν συγκλίνει.

Πολλές φορές χρειαζόμαστε να προσθέσουμε όρους μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξεκινώντας όχι από τον a_1 αλλά από κάποιον από τους επόμενους όρους. Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε επειδή μας χρειάζεται κάτι τέτοιο ή επειδή η ακολουθία δεν έχει a_1 (ή και κάποιους ακόμα) όρους. Για παράδειγμα, η $a_n = (n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ δεν ορίζεται ούτε για $n = 1$ ούτε για $n = 5$. Έτσι και πάλι θα ονομάζουμε «σειρά» την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της μορφής

$$s_N = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_N$$

με όριο το $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Όπως και πριν, κατά παράβαση αυτής της τυπικής γλώσσας, θα λέμε «η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$» μια και από αυτή την έκφραση καταλαβαίνουμε αμέσως πιο είναι το μερικό άθροισμα και ποιο το όριο (αν υπάρχει).

Φράσεις όπως «σειρά της $(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$» δεν είναι σαφής και θα πρέπει να ξεκαθαριστεί αν εννοούμε την $\sum_{n=6}^{\infty}(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ ή την $\sum_{n=7}^{\infty}(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ ή κάτι άλλο. Όμως η φράση «η σειρά της $(n-1)^{-1}(n-5)^{-1}$ συγκλίνει» έχει νόημα σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.2 *Για κάθε ακολουθία a_n που ορίζεται για $n \geq k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n_1, n_2 \geq k$ η σειρά $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $n_2 > n_1$ και θέτουμε

$$s_N = \sum_{n=n_1}^{N} a_n = a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_N$$

και

$$t_N = \sum_{n=n_2}^{N} a_n = a_{n_2} + a_{n_2+1} + \cdots + a_N$$

για κάθε $N \geq n_2$. Φανερά

$$s_N = t_N + (a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2-1}).$$

Άρα η s_N συγκλίνει αν και μόνο αν η t_N συγκλίνει, αφού διαφέρουν κατά μια σταθερή ποσότητα. □

Στη συνέχεια θα εργαζόμαστε εν γένει με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αλλά όλα τα αποτελέσματα με τις προφανείς τροποποιήσεις ισχύουν και για σειρές της μορφής $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, για οποιοδήποτε $n_0 \in \mathbb{N}$.

Ασκήσεις

Άσκηση 1.2.1. Υπολογίστε τις γεωμετρικές σειρές:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}.$$

1.3 Πράξεις με σειρές

Εξαιτίας των ιδιοτήτων των συγκλινουσών ακολουθιών έχουμε την εξής συνέπεια.

Πρόταση 1.3 *Έστω ότι οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών και οι σειρές τους $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό λ οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

συγκλίνουν, και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Απόδειξη: Φανερά ισχύουν οι

$$\sum_{n=1}^{N} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{N} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n,$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας όρια για $N \to \infty$ προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

Το αντίστροφο δεν είναι σωστό. Μπορεί να συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ αλλά να αποκλίνουν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Για παράδειγμα, η

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $1/2$ αλλά καμιά από τις $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}-1)$ δεν συγκλίνουν (γιατί;).

Ασκήσεις

Άσκηση 1.3.1. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά: $\sum_{n=1}^{n}\left(a_n - e^{-n}\right)$.

Άσκηση 1.3.2. Αν γνωρίζετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ υπολογίστε τις σειρές

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n+1)!}$.

Γενικά αν έχουμε να υπολογίσουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n!},$$

όπου το $\phi(n)$ είναι ακέραιο πολυώνυμο του n, γράφουμε πρώτα το πολυώνυμο στη μορφή

$$A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + A_3 n(n-1)(n-2) + \cdots + A_k n(n-1)\ldots(n-k+1),$$

όπου k ο βαθμός του $\phi(n)$. Με βάση αυτή την παρατήρηση λύστε την παρακάτω άσκηση.

Άσκηση 1.3.3. Υπολογίστε τις σειρές

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3n+2}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{n!}$

Αν έχουμε να υπολογίσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)x^n$ όπου το $\phi(n)$ είναι ακέραιο πολυώνυμο του n, τότε θέτουμε s_N για το μερικό άθροισμα της σειράς και υπολογίζουμε την ποσότητα $(1-x)s_n = s_N - xs_N$. Αυτό θα μας οδηγήσει σε νέες σειρές του ίδιου τύπου όπου η νέα $\phi(n)$ θα έχει χαμηλότερο βαθμό από την αρχική. Με βάση αυτή την παρατήρηση λύστε την ακόλουθη άσκηση.

Άσκηση 1.3.4. Υπολογίστε τις σειρές

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{3^n}$

Άσκηση 1.3.5. Δείξτε ότι για $|\lambda| < 1$ ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^{n-1} = \frac{1}{(1-\lambda)^2}$.

Άσκηση 1.3.6. Δείξτε ότι για $|\lambda| < 1$ ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda^{n-1} = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda)^3}$.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικά κριτήρια σύγκλισης σειρών

2.1 Το κριτήριο φράγματος

Πρόταση 2.1 (Κριτήριο φράγματος) *Αν* $a_n \geq 0$ *και η* $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ *είναι φραγμένη ακολουθία τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει. Αν δεν είναι φραγμένη απειρίζεται.*

Απόδειξη: Επειδή $a_n \geq 0$ η s_N είναι αύξουσα· και επειδή είναι και φραγμένη συγκλίνει (Θεώρημα ΑΠΙ-6.35). Αν δεν είναι φραγμένη η s_N τότε δεν είναι άνω φραγμένη επειδή είναι αύξουσα. Έτσι, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s_{N_0} \geq M$. Οπότε επειδή είναι και αύξουσα, για κάθε $N \geq N_0$ ισχύει $s_N \geq s_{N_0} \geq M$, δηλαδή $s_N \to \infty$. $\square$

Ένα πολύ ενδιαφέρον και χρήσιμο παράδειγμα προκύπτει από την Άσκηση ΑΠΙ-5.2.4.

Παράδειγμα 2.2 Για κάθε $p > 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει. Πράγματι, από την Άσκηση ΑΠΙ-5.2.4.

$$s_N = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{N^p} \leq \frac{p}{p-1},$$

δηλαδή είναι φραγμένη· και επειδή $1/n^p \geq 0$, από την προηγούμενη πρόταση η σειρά συγκλίνει. Για $0 < p < 1$ η σειρά αποκλίνει αφού δεν είναι άνω φραγμένη (Άσκηση ΑΠΙ-5.2.4.). Τέλος για $p = 1$ δεν είναι άνω φραγμένη, αφού $s_{2^N} \geq 2^{-1}N$ (Άσκηση ΑΠΙ-5.2.4. ή 2.1.1.).

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1.1. Αποδείξτε ότι η σειρά $s_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n$ δεν είναι άνω φραγμένη αποδεικνύοντας ότι $s_{2^N} \geq 2^{-1}N$ ως εξής: ομαδοποιήστε τα κλάσματα της s_{2^N} ανά 2^n

κλάσματα γράφοντας

$$\begin{aligned} s_{2^N} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^N} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \cdots + \frac{1}{2^3}\right) + \\ &\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \frac{1}{2^{N-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right), \end{aligned}$$

και αντικαταστήστε σε κάθε παρένθεση όλα τα κλάσματα με το μικρότερο κλάσμα της παρένθεσης.

Άσκηση 2.1.2. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ είναι συγκλίνουσα.

2.2 Το κριτήριο Cauchy

Όπως γνωρίζουμε από τις ακολουθίες (Θεώρημα ΑΠ1-6.39), κάθε ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων οποιασδήποτε ακολουθίας. Σε αυτή την περίπτωση, εξαιτίας της μορφής που έχουν οι όροι s_N, η ιδιότητα Cauchy παίρνει και αυτή μια ειδική μορφή. Παρατηρούμε ότι αν οι $\mathrm{N} > \mathrm{M}$ είναι φυσικοί αριθμοί, και s_N είναι τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε

$$\begin{aligned} |s_N - s_M| &= \left|\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{M} a_n\right| \\ &= \left|(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_M)\right| \\ &= \left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right|, \end{aligned}$$

αφού όλοι οι όροι της a_n μέχρι και τον a_M θα διαγραφούν. Έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 2.3 (Ιδιότητα Cauchy) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει*

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, θα έχει την παραπάνω ιδιότητα για κάθε $N > M \geq N_0$ άρα και για $N = M + 1$. Δηλαδή

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+1} a_n\right| < \varepsilon.$$

Αλλά το τελευταίο άθροισμα δεν είναι παρά η ποσότητα $|a_{M+1}|$. Καταλήξαμε έτσι στο ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $M \geq N_0$ να ισχύει $|a_{M+1}| < \varepsilon$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq N_0 + 1$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$, δηλαδή η ακολουθία a_n είναι μηδενική.

Πόρισμα 2.4 *Αν μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει τότε* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

□

Το πόρισμα αυτό αποτελεί και ένα εύκολο κριτήριο *μη σύγκλισης σειρών*. Διότι αν ξέρουμε για μια ακολουθία a_n ότι αυτή δεν είναι μηδενική, τότε αποκλείεται, με βάση αυτό το πόρισμα, να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

δεν συγκλίνει διότι η ακολουθία $(n/(n+1))^n$ δεν είναι μηδενική. Πράγματι:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \neq 0.$$

Αυτός είναι ο *πρώτος* έλεγχος που κάνουμε σε μια σειρά όταν προσπαθούμε να διαγνώσουμε αν αυτή συγκλίνει ή όχι, διότι είναι συνήθως ο απλούστερος.

Το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος δεν είναι σωστό όπως φαίνεται εύκολα στο επόμενο παράδειγμα.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει παρόλο που $1/\sqrt{n} \to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} s_N &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{N}}}_{N-\text{κλάσματα}} = N\frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Δηλαδή $s_N \geq \sqrt{N}$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$, συνεπώς $s_N \to \infty$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ αποκλίνει (απειρίζεται). (Δείτε και Άσκηση ΑΠΙ-5.2.4. από όπου προκύπτει αμέσως ότι για όλα τα $0 < p < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ απειρίζεται.)

Την ίδια συμπεριφορά έχει και η ακολουθία $1/n$. Παρόλο που $1/n \to 0$ εν τούτοις

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Η σειρά της $1/n$ ονομάζεται *αρμονική σειρά*. Το ότι αποκλίνει (απειρίζεται) μπορεί να αποδειχθεί με διάφορους τρόπους (δείτε Ασκήσεις 2.1.1., ΑΠΙ-5.2.4., 2.2.3. και 2.2.4.). Ίσως ο πιο γρήγορος τρόπος απόδειξης ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει είναι ο ακόλουθος: υποθέτουμε ότι η σειρά συγκλίνει και θέτουμε $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Τότε

$$\begin{aligned}
1 &+ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα όριο με $n \to \infty$ από όπου προκύπτει αμέσως $\ell \geq \frac{1}{2} + \ell$ το οποίο είναι άτοπο.

Ορισμός 2.5 Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μιας ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ της ακολουθίας $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, πολλές φορές αντί για τη φράση «συγκλίνει» χρησιμοποιούμε τη φράση «συγκλίνει απλά» σε αντιδιαστολή με τη φράση «συγκλίνει απόλυτα».

Μια άλλη συνέπεια της ιδιότητας Cauchy είναι η ακόλουθη.

Πόρισμα 2.6 *Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και απλά.*

Απόδειξη: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy. Αλλά τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει $\sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon$. Αλλά από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} a_n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon,$$

δηλαδή και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy, άρα συγκλίνει. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.2.1. Εξετάστε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Άσκηση 2.2.2. [Abel-Pringsheim] Αποδείξτε ότι αν η $a_n \geq 0$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία και η σειρά της συγκλίνει, τότε $na_n \to 0$. Συμπεράνετε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη: Αν s_n το μερικό άθροισμα της σειράς της a_n αποδείξτε ότι $s_{2n} - s_n \geq na_{2n}$.

Άσκηση 2.2.3. Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

και

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

είναι επάλληλες, δηλαδή ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η x_n είναι αύξουσα και η y_n είναι φθίνουσα. Συμπεράνετε ότι συγκλίνουν, και από αυτό αποδείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty.$$

Άσκηση 2.2.4. Αποδείξτε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, ως εξής: αν $s_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n$ το μερικό άθροισμα της αρμονικής σειράς, τότε

$$e^{s_N} = \prod_{n=1}^{N} e^{1/n} \geq N + 1,$$

χρησιμοποιώντας σε κάθε όρο του γινομένου την ανισότητα $e^x \geq 1 + x$ για $x \in \mathbb{R}$ και κάνοντας τις απλοποιήσεις που προκύπτουν στο γινόμενο.

Άσκηση 2.2.5. Αποδείξτε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει ως εξής: δείξτε ότι

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

και συμπεράνετε ότι λόγω αυτού τα μερικά αθροίσματα της αρμονικής σειράς δεν είναι ακολουθία Cauchy.

2.3 Το κριτήριο σύγκρισης

Το ακόλουθο κριτήριο έχει ακριβώς την ίδια απόδειξη με την απόδειξη της Πρότασης 2.6.

Θεώρημα 2.7 (Κριτήριο σύγκρισης) *Αν για δυο ακολουθίες a_n, $b_n > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη: Αφού η σειρά της b_n συγκλίνει συμπεραίνουμε ότι η σειρά αυτή ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $N_0 \geq n_0$ (αλλιώς επιλέγουμε το n_0 στη θέση του N_0) ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει

$$\left| \sum_{n=M+1}^{N} b_n \right| < \varepsilon.$$

Αλλά $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq N_0$ οπότε

$$\left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right| = \sum_{n=M+1}^{N} a_n \leq \sum_{n=M+1}^{N} b_n = \left|\sum_{n=M+1}^{N} b_n\right| < \varepsilon,$$

συνεπώς και η σειρά της a_N έχει την ιδιότητα Cauchy, άρα συγκλίνει.

Αν τώρα η $s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ αποκλίνει, επειδή $a_n \geq 0$ συμπεραίνουμε ότι $s_N \to \infty$. Αλλά για κάθε $N \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} b_n &= \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0}^{N} b_n \\ &\geq \sum_{n=1}^{n_0-1} b_n + \sum_{n=n_0-1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} b_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n + \sum_{n=1}^{N} a_n \to \infty.\end{aligned}$$

Άρα και η $\sum_{n=1}^{N} b_n$ αποκλίνει. □

Η απόδειξη του παρακάτω κριτηρίου ανάγεται στο προηγούμενο.

Πόρισμα 2.8 (Κριτήριο οριακής σύγκρισης) *Αν για δυο ακολουθίες a_n, $b_n > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \ell > 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης με $\varepsilon = \ell/2$. Οπότε υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ $|a_n/b_n - \ell| < \ell/2$. Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή και πολλαπλασιάζοντας με b_n συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2}\ell b_n < a_n < \frac{3}{2}\ell b_n.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 2.7 αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)\ell b_n$, άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Πρόταση 1.3 για $\lambda = 2/\ell$). Επιπλέον, αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(3/2)\ell b_n$ (Πρόταση 1.3 για $\lambda = (3/2)\ell$). οπότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Το επόμενο πόρισμα είναι απλό αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο.

Πόρισμα 2.9 (Κριτήριο σύγκρισης λόγων) *Αν για τις ακολουθίες $a_n, b_n > 0$ ισχύει*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

για καθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

- *αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*
- *αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη: Φανερά, μετά τις απαλοιφές, ισχύει

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1 \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdots\frac{b_2}{b_1}a_1 = \frac{a_1}{b_1}b_n,$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από το Θεώρημα 2.7. □

Ασκήσεις

Άσκηση 2.3.1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(n+1)/n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{1^2+2^2+\cdots+n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{3n^2+2n+7}$$

Άσκηση 2.3.2. Αποδείξτε με το κριτήριο σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-n^6}$ συγκλίνει, συγκρίνοντας την ακολουθία $n^5 e^{-n^6}$ με την e^{-n}.

Άσκηση 2.3.3. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n^a},\ a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}.$$

Άσκηση 2.3.4. Χρησιμοποιήστε το οριακό κριτήριο σύγκρισης για να ελέγξετε τη σύγκλιση των σειρών:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{-1/n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right).$$

Άσκηση 2.3.5. Αν για $a_n \geq 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει εξετάστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,\ p\geq 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}.$$

2.4 Τηλεσκοπικές σειρές

Ξεκινάμε με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.10 Αν η ακολουθία a_n γράφεται ως $b_{n+1}-b_n$ για κάποια άλλη ακολουθία b_n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ονομάζεται *τηλεσκοπική*.

Θεώρημα 2.11 *Έστω ότι a_n και b_n ακολουθίες για τις οποίες ισχύει $a_n = b_{n+1}-b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε η τηλεσκοπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim b_n$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n &= \sum_{n=1}^{N}(b_{n+1} - b_n)\\ &= (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \cdots + (b_{N+1} - b_N)\\ &= b_{\mathrm{N+1}} - b_1.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = \lim_{N\to\infty}(b_{N+1} - b_1) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1. \qquad \square$$

Με βάση τα παραπάνω, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(n+1)^{-1}$ συγκλίνει διότι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(-\frac{1}{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1. Υπολογίστε τις τηλεσκοπικές σειρές:

$$\sum_{n=n_a}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)},\ \text{για } n_a > a,\ a\in\mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\left(1-\frac{2}{n+1}\right),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\log\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\Big(ne^{-n}\big(e^{-1}-1+e^{-n-1}\big)\Big),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^n}\left(\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right).$$

Άσκηση 2.4.2. Αποδείξτε ότι αν $a_n = A\phi(n)+B\phi(n+1)+C\phi(n+2)$ με $A+B+C=0$ τότε ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = A\phi(1) - C\phi(2) - A\phi(n+1) + C\phi(n+2),$$

και με τη βοήθεια αυτού υπολογίστε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

(Υπόδειξη: για την τελευταία σειρά $\phi(n) = 1/n$.)

2.5 Το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία a_n είναι θετική και φθίνουσα, και θέλουμε να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς της. Δεδομένου του ότι είναι φθίνουσα, χρειαζόμαστε άραγε όλους τους όρους της ή μήπως μπορούμε κάποιους να τους απορρίψουμε; Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \cdots &\leq a_1 + a_1 + a_3 + a_3 + a_5 + a_5 + \cdots \\ &\leq 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots). \end{aligned}$$

Δηλαδή αν συγκλίνει η σειρά των όρων με περιττό δείκτη συγκλίνει και η αρχική σειρά. Βεβαίως, δεν υπάρχει κάτι «μαγικό» στους όρους με περιττό δείκτη. Διότι ισχύει και

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \cdots &\leq a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_6 + \cdots \\ &\leq a_1 + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots). \end{aligned}$$

Άρα αν η σειρά των όρων με άρτιους δείκτες συγκλίνει τότε συγκλίνει και η αρχική σειρά. Μάλιστα η σύγκλιση είναι «αν και μόνο αν». Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \cdots &\geq a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_6 + a_6 + \cdots \\ &\leq 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots), \end{aligned}$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ συγκλίνει.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι αυτό το τέχνασμα μπορεί να επεκταθεί και να ελέγξουμε τη σύγκλιση μιας σειράς θετικής και φθίνουσας ακολουθίας ελέγχοντας αν συγκλίνει η σειρά αφού της αφαιρέσουμε περισσότερους όρους. Δοκιμάστε για παράδειγμα να δείξετε όπως παραπάνω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}$ συγκλίνει.

Μέχρι πού μπορεί να επεκταθεί αυτό το τέχνασμα; Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μια απάντηση. Έστω ότι η k_n είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Θέλουμε να εφαρμόσουμε το παραπάνω τέχνασμα από τον όρο a_{k_n} έως τον $a_{k_{n+1}}$. Αν οι αποστάσεις των k_n από τους k_{n+1} δεν «αυξάνουν ραγδαία» το παραπάνω τέχνασμα λειτουργεί:

Θεώρημα 2.12 (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy) *Έστω ότι η a_n είναι μια μη αρνητική και φθίνουσα ακολουθία και η k_n είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών για την οποία υπάρχει αριθμός $M > 0$ ώστε*

$$k_{n+1} - k_n \leq M(k_n - k_{n-1})$$

για κάθε $n \geq 2$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n+1} - k_n)a_{k_n}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Επειδή η k_n είναι γνησίως αύξουσα εύκολα ελέγχουμε με επαγωγή ότι $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (Άσκηση ΑΠΙ-4.2.2.). Άρα, αν s_N

είναι το μερικό άθροισμα της σειράς της a_n, επειδή $N+1 \leq k_{N+1}$ (οπότε $N \leq k_{N+1}-1$) ισχύει:

$$\begin{aligned} s_N &\leq s_{k_{N+1}-1} \\ &\leq a_1 + \cdots + a_{k_1-1} + \underbrace{a_{k_1} + \cdots + a_{k_2-1}}_{k_2-k_1 \text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{a_{k_N} + \cdots + a_{k_{N+1}-1}}_{k_{N+1}-k_N \text{ όροι}} \\ &\leq a_1 + \cdots + a_{k_1-1} + (k_2-k_1)a_{k_1} + \cdots + (k_{N+1}-k_N)a_{k_N}. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \leq a_1 + \cdots + a_{k_1-1} + \sum_{n=1}^{N}(k_{n+1}-k_n)a_{k_n}.$$

Άρα αν η τελευταία σειρά συγκλίνει, συγκλίνει και η αρχική.

Αντιστρόφως, για κάθε $m \geq k_N$

$$\begin{aligned} s_m &\geq s_{k_N} = a_1 + \ldots + a_{k_1} + a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2} + a_{k_2+1} + \ldots + a_{k_N} \\ &\geq \underbrace{a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}}_{k_2-k_1 \text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{a_{k_{N-1}+1} + \cdots + a_{k_N}}_{k_N-k_{N-1} \text{ όροι}} \\ &\geq (k_2-k_1)a_{k_2} + \cdots + (k_N-k_{N-1})a_{k_N}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με M και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, παίρνουμε

$$Ms_m \geq (k_3-k_2)a_{k_2} + \cdots + (k_{N+1}-k_N)a_{k_N}.$$

Δηλαδή

$$M\sum_{n=1}^{N} a_n \geq \sum_{n=2}^{N}(k_{n+1}-k_n)a_{k_n}.$$

Άρα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}(k_{n+1}-k_n)a_n$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πόρισμα 2.13 (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy) *Αν η ακολουθία a_n για $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Άμεσο από το παραπάνω θεώρημα για $k_n = 2^n$, αφού

$$k_{n+1}-k_n = 2^{n+1}-2^n = 2\cdot 2^n - 2^n = 2^n = 2(2^n-2^{n-1}) = 2(k_n-k_{n-1}).$$

□

Παρατήρηση 2.14 Και πάλι η επιλογή $k_n = 2^n$ για το παραπάνω δεν είναι σε καμμία περίπτωση μοναδική. Αν για παράδειγμα επιλέξουμε $k_n = 3^n$ θα προκύψει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}$ συγκλίνει. Ή αν επιλέξουμε $k_n = n^2$ εύκολα ελέγχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_{n^2}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα 2.15 Με το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ για κάθε $p > 0$. Πράγματι, η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n .$$

Αλλά η τελευταία είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $1/2^{p-1}$, οπότε συγκλίνει αν και μόνο αν ο λόγος αυτός είναι μικρότερος του 1, δηλαδή, αν και μόνο αν $p > 1$.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.5.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \tan \frac{1}{n^3}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}}.$$

Άσκηση 2.5.2. Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^p},$$

για $p \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.5.3. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p} \quad \text{και} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^p}.$$

Άσκηση 2.5.4. Αν συμβολίσουμε με $\log^{(n)}(x)$ τη συνάρτηση

$$\underbrace{\log\log\log\ldots\log}_{n \text{ φορές}}(x)$$

(για παράδειγμα $\log^{(3)}(x) = \log(\log(\log(x)))$), και με $e^{(n)}$ την ποσότητα

$$\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{n \text{ φορές}}(1)$$

(για παράδειγμα $e^{(3)} = e^{e^e}$ και $e^{(4)} = e^{e^{e^e}}$), εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=e^{(k)}+1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log^{(2)} n \cdots \log^{(k-1)} n \cdot (\log^{(k)} n)^p}.$$

(Παρατηρήστε ότι το σημείο εκκίνησης της σειράς, δηλαδή το $e^{(k)} + 1$, έχει επιλεχθεί μόνο και μόνο ώστε να μην μηδενίζεται κανένας από τους λογαρίθμους του παρονομαστή, αφού $\log^{(k)}(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = e^{(k)}$.)

Άσκηση 2.5.5. Αν η ακολουθία $a_n \geq 0$ είναι φθίνουσα δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^n a_{[e^n]}$ συγκλίνει. (Πρέπει πρώτα να δείξετε ότι $[e^n] < [e^{n+1}]$.)

2.6 Το ολοκληρωτικό κριτήριο

Πρόταση 2.16 (Ολοκληρωτικό κριτήριο) *Έστω ότι η συνάρτηση* $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι μη αρνητική και φθίνουσα. Θέτουμε* $a_n = f(n)$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει (δηλαδή αν* $\lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx \in \mathbb{R}$).

Απόδειξη: Αφού η f είναι φθίνουσα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

για κάθε $x \in [n, n+1]$. Συνεπώς,

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx,$$

δηλαδή $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1)$. Προσθέτοντας τις τελευταίες ανισότητες για $n = 1, 2, \ldots, N$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \int_1^{N} f(x)\,dx \geq \sum_{n=1}^{N} f(n+1) = \sum_{n=2}^{N+1} f(n) = \sum_{n=2}^{N+1} a_n.$$

Άρα αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει τότε συγκλίνει και το μερικό άθροισμα $\sum_{n=2}^{N+1} a_n$, αφού αυξάνει και είναι φραγμένο από το $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αντιστρόφως, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{N} a_n$ συγκλίνει τότε το ολοκλήρωμα συγκλίνει, αφού η

$$\int_1^{t} f(x)\,dx \leq \int_1^{[t]+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $F(t) := \int_1^t f(x)\,dx$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα το όριο $\lim_{t\to\infty} F(t)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ (και ισούται με το $\sup_{t\geq 1} F(t)$). □

Παράδειγμα 2.17 Ας ελέγξουμε και πάλι τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ για $p > 0$. Φανερά η $f(x) = 1/x^p$ για $x \in [0,\infty)$ είναι μη αρνητική και φθίνουσα, και $1/n^p = f(n)$. Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx$. Αλλά

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{1-p}}{1-p} - \dfrac{1}{1-p} & \text{αν } 0 < p \neq 1, \\ \log x \Big|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \log x & \text{αν } p = 1. \end{cases}$$

Φανερά, αυτά τα όρια υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $p > 1$.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογές του κριτηρίου σύγκρισης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε εργαλεία που προκύπτουν από το κριτήριο σύγκρισης. Αν περιοριστούμε σε μη αρνητικές ακολουθίες, είναι φανερό ότι κάθε συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα σειρά δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας ενός κριτηρίου σύγκλισης ή απόκλισης. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι για $\lambda > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < \lambda < 1$. Έτσι αν βρούμε τρόπους να συγκρίνουμε μια ακολουθία $a_n \geq 0$ με την λ^n θα προκύψει ένα κριτήριο σύγκλισης ή απόκλισης. Πολλές φορές, αντί για την άμεση σύγκριση $a_n \leq \lambda^n$ είναι ευκολότερο να ελέγχουμε άλλες συνθήκες οι οποίες οδηγούν στην επιθυμητή σύγκριση (θα δούμε παρακάτω συγκεκριμμένα παραδείγματα).

Εκτός από την ακολουθία λ^n μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία γνωρίζουμε ότι συγκλίνει ή αποκλίνει για να φτιάξουμε ένα κριτήριο. Για παράδειγμα μπορεί κανείς να αναπτύξει κριτήρια που συγκρίνουν με τη σειρά της ακολουθίας $1/n^p$ ή με τη σειρά της ακολουθίας $1/(n(\log n)^p)$ για τις οποίες γνωρίζουμε πότε συγκλίνουν και πότε όχι από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι αν υπάρχει κάποια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{με} \quad c_n \geq 0$$

η οποία θα παρείχε το «απόλυτο» κριτήριο σύγκλισης, υπό την έννοια ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκρίνεται με την $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Θα δούμε στην τελευταία ενότητα ότι ένα τέτοιο καθολικό κριτήριο σύγκλισης δεν μπορεί να υπάρξει.

Ξεκινάμε με κριτήρια που προκύπτουν από σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά.

3.1 Σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά

Στην ενότητα αυτή βρίσκουμε συνθήκες που ελέγχονται σχετικά εύκολα και οδηγούν στη σύγκριση μιας ακολουθίας a_n με τη γεωμετρική ακολουθία λ^n.

3.1.1 Το κριτήριο λόγου

Αν οι όροι μιας μη αρνητικής ακολουθίας a_n φθίνουν πιο γρήγορα από τη γεωμετρική πρόοδο με λόγο $0 \leq \lambda < 1$ θα ισχύει $a_{n+1} \leq \lambda a_n$ (δηλαδή ο επόμενος όρος της a_n έχει μειωθεί περισσότερο από τον πολλαπλασιασμό με λ της γεωμετρικής προόδου), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα πρέπει να συγκλίνει, αφού συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$. Ανάλογα, αν η a_n αυξάνει πιο γρήγορα από όσο αυξάνει η λ^n για $\lambda \geq 1$, δηλαδή αν $a_{n+1} \geq \lambda a_n$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ πρέπει να αποκλίνει. Σε κάθε περίπτωση συγκρίνουμε τον λόγο a_{n+1}/a_n με έναν αριθμό λ είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Η απόδειξη όμως ανισοτήτων είναι συνήθως δυσχερής. Για αυτό τον λόγο καταφεύγουμε στη χρήση της Παρατήρησης ΑΠΙ-6.19, και υπολογίζουμε το όριο $\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Αν για παράδειγμα το όριο ℓ είναι στο διάστημα $[0, 1)$ τότε χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση για $\varepsilon = (1-\ell)/2$ θα προκύψει ότι μετά από κάποιον δείκτη $n_0 \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n+1} \leq ((1+\ell)/2)a_n$ δηλαδή έχουμε σύγκριση με τη γεωμετρική ακολουθία με λόγο $\lambda = (1+\ell)/2 \in (0, 1)$. Έτσι η σειρά της a_n θα συγκλίνει. Ομοίως θα αποκλίνει αν το όριο είναι γνησίως μεγαλύτερο του 1. Αν το όριο βέβαια βγει ακριβώς ίσο με 1 τότε δεν μπορούμε να κάνουμε σύγκριση γιατί δεν μπορούμε να ξέρουμε ούτε καν αν $a_{n+1}/a_n \leq 1$ ή $a_{n+1}/a_n \geq 1$.

Τέλος, η προϋπόθεση $a_n \geq 0$ μπορεί να παραλειφθεί αν χρησιμοποιήσουμε τις απόλυτες τιμές $|a_{n+1}/a_n|$. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο:

Πρόταση 3.1 (Κριτήριο λόγου του D' Alambert) *Για κάθε ακολουθία $a_n \neq 0$,*

- *αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως.*
- *αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη: Θέτουμε $\ell = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ και υποθέτουμε ότι $0 \leq \ell < 1$. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ άρα και για $\varepsilon = (1-\ell)/2 > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell\right| < \frac{1-\ell}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή, και προσθέτοντας το ℓ, παίρνουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1+\ell}{2} < 1.$$

Αν θέσουμε $\lambda = (1+\ell)/2$ τότε $0 < \lambda < 1$ και για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_{n+1}| \leq \lambda |a_n|$. Η τελευταία ανισότητα όμως, μπορεί να επαναλαμβάνεται όσο το n παραμένει από n_0 και πάνω. Έτσι, αν $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \lambda |a_{n-1}| \leq \lambda\,\lambda |a_{n-2}| = \lambda^2 |a_{n-2}| \leq \lambda^3 |a_{n-3}| \leq \dots \\ &\leq \lambda^{n-n_0} |a_{n-(n-n_0)}| = \lambda^{n-n_0} |a_{n_0}| \end{aligned}$$

(στο a_{n_0} σταματάει η δυνατότητα εφαρμογής της $|a_{n+1}| \leq \lambda |a_n|$). Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n| \leq (\lambda^{-n_0} |a_{n_0}|)\,\lambda^n$. Επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει, αφού $0 \leq \lambda < 1$ συμπεραίνουμε ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει από την Πρόταση 2.7.

Αν τώρα $\ell > 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = (\ell - 1)/2 > 0$, και παίρνουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{\ell + 1}{2} > 1.$$

Συνεπώς $|a_{n+1}| > |a_n|$, για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η ακολουθία $(|a_n|)_{n \geq n_0}$ είναι γνησίως αύξουσα άρα δεν είναι μηδενική. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει από το Πόρισμα 2.4. □

Παρατήρηση 3.2 Παρατηρούμε εδώ ότι αν $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ δεν γίνεται να συμπεράνουμε κάτι για τη σύγκλιση της σειράς. Αυτό συμβαίνει επειδή για παράδειγμα το παραπάνω όριο είναι ίσο με 1, τόσο για την ακολουθία $1/n$ όσο και για την ακολουθία $1/n^2$. Εν τούτοις η μεν $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει η δε $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συγκλίνει.

Παρατήρηση 3.3 Η απόδειξη του κριτηρίου λόγου δείχνει άμεσα ότι αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{n+1}/a_n| \leq \lambda < 1$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, ενώ αν $|a_{n+1}/a_n| \geq \lambda > 1$ για κάθε $n \geq n_0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.1. Αποδείξτε ότι αν για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ αλλά υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Άσκηση 3.1.2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}, \text{ για } p \in \mathbb{R} \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad (\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad (\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}.$$

Άσκηση 3.1.3.* Αποδείξτε χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(n/e)^n}{n!}$$

αποκλίνει. (Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την Άσκηση 3.1.1.) Στη συνέχεια αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

και συμπεράνετε ότι και οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/e)^n}{n!} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/e)^n}{\sqrt{n}\, n!}$$

αποκλίνουν.

Άσκηση 3.1.4. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n/n^a)$ για $a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3.1.5. Βρείτε για ποια $x \geq 0$ οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(3n)!}{(4n)!} x^n.$$

Άσκηση 3.1.6. Αποδείξτε ότι το κριτήριο Dini-Kummer είναι ισχυρότερο του κριτηρίου λόγου επιλέγοντας στο κριτήριο Dini-Kummer $b_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3.1.7. Στην περίπτωση που το όριο $\lim |a_{n+1}/a_n|$ δεν υπάρχει, αποδείξτε το εξής κριτήριο λόγου:

- Αν $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
- Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ αλλά για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

3.1.2 Το κριτήριο *n*-στης ρίζας του Cauchy

Η απόδειξη του επόμενου κριτηρίου είναι και αυτή μια αναγωγή στη γεωμετρική σειρά. Η αναγωγή αυτή βασίζεται στο ότι για $\lambda \geq 0$ ισχύει $|a_n| \lesseqqgtr \lambda^n$ αν και μόνο αν $\sqrt[n]{|a_n|} \lesseqqgtr \lambda$

Πρόταση 3.4 (Κριτήριο n-στής ρίζας του Cauchy) *Για κάθε ακολουθία* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

- *αν* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως.*
- *αν* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη: Θέτουμε $0 \leq \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και αν $\ell < 1$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = (1-\ell)/2 > 0$: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - \ell\right| < \frac{1-\ell}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή, προσθέτοντας ℓ και υψώνοντας στη n-στη δύναμη παίρνουμε

$$|a_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}((1+\ell)/2)^n$ συγκλίνει (αφού $(1+\ell)/2 < 1$) άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Αν τώρα $\ell > 1$, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = (\ell - 1)/2 > 0$: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - \ell\right| < \frac{\ell - 1}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή, προσθέτοντας ℓ και υψώνοντας στη n-στη δύναμη παίρνουμε

$$\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n < |a_n|.$$

Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι η a_n δεν είναι μηδενική, αφού $((1+\ell)/2)^n \to \infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 3.5 Παρατηρούμε εδώ ότι αν $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ δεν γίνεται να συμπεράνουμε κάτι για τη σύγκλιση της σειράς. Αυτό συμβαίνει επειδή για παράδειγμα $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2} = 1$ αλλά η μεν $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει η δε $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συγκλίνει.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{e^n},\ p \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}b^n,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 3.1.2. Εξετάστε για ποια $x \geq 0$ συγκλίνει η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$.

Άσκηση 3.1.3. Αν για μια ακολουθία a_n δεν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ (Άσκηση ΑΠΙ-Α′.2.2.), αποδείξτε οι ισχύει το εξής κριτήριο ρίζας: Για κάθε ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

- αν $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και μάλιστα απολύτως.
- αν $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
- αν $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq m$ ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Άσκηση 3.1.4. Αποδείξτε ότι το κριτήριο n-στης ρίζας είναι ισχυρότερο από το κριτήριο λόγου χρησιμοποιώντας την Πρόταση ΑΠΙ-Α′.6 και την ακολουθία $2^{(-1)^n - n}$.

Κεφάλαιο 4

Εναλλάσουσες σειρές

Οι εναλλάσουσες σειρές, δηλαδή οι σειρές που η ακολουθία αλλάζει συχνά πρόσημο, αποτελούν ειδική κατηγορία σειρών και μελετώνται ξεχωριστά.

4.1 Το κριτήριο Leibniz

Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ όπου είτε $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είτε $a_n \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται *εναλλάσουσα σειρά*. Η παρακάτω πρόταση δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης για εναλλάσουσες σειρές.

Πρόταση 4.1 (Κριτήριο του Leibniz) *Αν η ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και μηδενική τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $s_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n$ τότε η s_{2N} είναι φθίνουσα διότι

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)} = s_{2N+2} &= s_{2N} + (-1)^{2N+1}a_{2N+1} + (-1)^{2N+2}a_{2N+2} \\ &= s_{2N} + a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq s_{2N}, \end{aligned}$$

αφού $a_{2N+2} \leq a_{2N+1}$. Επιπλέον η s_{2N-1} είναι αύξουσα διότι

$$\begin{aligned} s_{2(N+1)-1} = s_{2N+1} &= s_{2N-1} + (-1)^{2N}a_{2N} + (-1)^{2N+1}a_{2N+1} \\ &= s_{2N} + a_{2N} - a_{2N+1} \geq s_{2N-1}, \end{aligned}$$

αφού $a_{2N} \geq a_{2N+1}$. Όμως

$$s_{2N} = s_{2N-1} + (-1)^{2N}a_{2N} = s_{2N-1} + a_{2N} \geq s_{2N-1}.$$

Συνεπώς

$$s_1 \leq s_{2N-1} \leq s_{2N} \leq s_2,$$

δηλαδή οι s_{2N-1} και s_{2N} είναι μονότονες και φραγμένες, άρα συγκλίνουν. Τέλος $s_{2N} = s_{2N-1} + a_{2N}$. Συνεπώς $|s_{2N} - s_{2N-1}| = |a_{2N}| \to 0$ οπότε οι s_{2N-1} και s_{2N} συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Άρα και η s_N είναι συγκλίνουσα. $\square$

Παράδειγμα 4.2 Παρόλο που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n/n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, εν τούτοις η ίδια η σειρά συγκλίνει σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, αφού η $1/n$ είναι φθίνουσα και μηδενική.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1.1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{a}{n},\ a\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^p e^{q\sqrt{n}},\ p,q\in\mathbb{R},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a^{1/n},\ a\in\mathbb{R}.$$

4.2 Το κριτήριο Dirichlet

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευθεί αντικαθιστώντας την ακολουθία $(-1)^n$ με μια «γενικότερη» ακολουθία. Χρειαζόμαστε πρώτα ένα λήμμα για την «άθροιση κατά παράγοντες». Πρόκειται για μια εντελώς ανάλογη ιδιότητα με την ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Εκεί ο κανόνας παραγώγισης $(fg)' = f'g + fg'$ οδηγεί στην $f'g = (fg)' - fg'$, και μετά από ολοκλήρωση στο $[a,b]$ στην

$$\int_a^b f'g = f(b)g(a) - f(a)g(a) - \int fg'.$$

Εδώ τον ρόλο της παραγώγου παίζει η διαφορά $x_n - x_{n-1}$ και $y_n - y_{n-1}$ και το ρόλο του ολοκληρώματος η άθροιση. Κατά τα άλλα οι αποδείξεις και οι τύποι που προκύπτουν είναι πανομοιότυποι.

Λήμμα 4.3 (Άθροιση κατά παράγοντες) *Για οποιεσδήποτε ακολουθίες $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ στο $\mathbb{R}$ και για οποιουσδήποτε αριθμούς $N \in \mathbb{N}$ και $M \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ με $N > M$ ισχύει*

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n = x_N y_N - x_M y_M - \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}).$$

Απόδειξη: Επειδή το άθροισμα $\sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_{n-1})$ είναι τηλεσκοπικό, μετά από διαγραφές προκύπτει ότι

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_{n-1}) = x_N y_N - x_M y_M.$$

Από την άλλη, προσθαφαιρώντας τον όρο $x_{n-1}y_n$ στην παρένθεση παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_{n-1}) &= \sum_{n=M+1}^{N}(x_n y_n - x_{n-1}y_n + x_{n-1}y_n - x_{n-1}y_{n-1})\\ &= \sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n + \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}).\end{aligned}$$

Άρα

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n + \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}) = x_N y_N - x_M y_M,$$

οπότε

$$\sum_{n=M+1}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n = x_N y_N - x_M y_M - \sum_{n=M+1}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1}).$$

□

Από την άθροιση κατά παράγοντες προκύπτει αμέσως το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.4 *Αν για τις ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ το γινόμενο $x_n y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=2}^{N}(x_n - x_{n-1})y_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=2}^{N} x_{n-1}(y_n - y_{n-1})$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Προκύπτει αμέσως από την άθροιση κατά παράγοντες θέτοντας $M = 0$ και $x_M = y_M = 0$. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την άθροιση κατά παράγοντες για να επιβεβαιώσουμε την ιδιότητα Cauchy. □

Πόρισμα 4.5 (Κριτήριο του Dirichlet) *Αν το μερικό άρθοισμα s_N της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι φραγμένη ακολουθία και η b_n είναι φθίνουσα και μηδενική, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Αφού η s_n είναι φραγμένη, $\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0$. Έτσι από το προηγούμενο θεώρημα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(s_n - s_{n-1})b_n$$

συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n-1})$. Αλλά αν C το φράγμα της $|s_n|$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|s_n(b_n - b_{n-1})\right| \leq C\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})$$

και η τελευταία είναι τηλεσκοπική. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(b_n - b_{n-1})$ συγκλίνει απόλυτα, άρα και απλά. □

Παράδειγμα 4.6 Τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ είναι φραγμένα (φανερά $|s_N| \leq 1$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$). Άρα αν η a_n είναι φθίνουσα και μηδενική, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει, δηλαδή έχουμε το κριτήριο Leibniz ως πόρισμα του κριτηρίου Dirichlet.

Παρατήρηση 4.7 Η απαίτηση στο κριτήριο Dirichlet να είναι η b_n φθίνουσα δεν είναι απαραίτητη και μπορεί να αντικατασταθεί από την απαίτηση η b_n να είναι *φραγμένης κύμανσης* (Άσκηση 4.2.1.).

Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1. [Dedekind] Αποδείξτε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 4.5 ότι το συμπέρασμα του κριτηρίου Dirichlet συνεχίζει να ισχύει αν η ακολουθία b_n αντί να είναι φθίνουσα είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή αν $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n-1}| < +\infty$.

Άσκηση 4.2.2. [Κριτήριο Abel] Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και η b_n είναι μια μονότονη και φραγμένη ακολουθία. Αποδείξτε ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

(Υπόδειξη: Η b_n ως μονότονη και φραγμένη συγκλίνει, έστω στο b. Εφαρμόστε το κριτήριο Dirichlet για την ακολουθία a_n και για τη φθίνουσα και μηδενική $|b_n - b|$.)

Κεφάλαιο 5

Αναδιατάξεις σειρών

Όταν προσθέτουμε ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών, τότε η σειρά με την οποία κάνουμε την πρόσθεση δεν έχει σημασία, αφού η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική πράξη. Όμως επειδή στις σειρές εμπλέκεται και η διαδικασία του ορίου τίθεται το ερώτημα αν η σειρά με την οποία γίνεται η άθροιση μπορεί τώρα να έχει ή όχι σημασία Είναι σωστό δηλαδή ότι ανεξάρτητα της σειράς άθροισης ένα άπειρο άθροισμα θα δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα; Όπως βλέπουμε στο ακόλουθο παράδειγμα η απάντηση είναι αρνητική.

Παράδειγμα 5.1 Ας θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n$ για την οποία γνωρίζουμε ότι συγκλίνει, και ας θέσουμε ℓ το όριό της. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\ell < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 5/6$$

διότι οι επόμενοι όροι του αθροίσματος είναι ανά δύο αρνητικοί: $-1/4 + 1/5 < 0$, $-1/6 + 1/7 < 0$ κλπ. Αλλάζουμε τώρα τη σειρά της άθροισης ώστε κάθε αρνητικός όρος να εμφανιστεί αφού πρώτα εμφανιστούν δύο θετικοί όροι. Δηλαδή θεωρούμε τη σειρά

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε τριάδα από αυτούς τους όρους με τους δύο πρώτους θετικούς και τον τρίτο αρνητικό μπορεί να περιγραφεί με την έκφραση

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

για $k \in \mathbb{N}$. Αλλά με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \geq 0$$

άρα

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \geq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} > \ell.$$

Έτσι, η *νέα* άθροιση δίνει σειρά που είτε δεν συγκλίνει είτε συγκλίνει σε μεγαλύτερο αριθμό από το ℓ. Σε κάθε περίπτωση η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι αρνητική.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι πολύ «χειρότερη» από το απλό «όχι» του παραπάνω παραδείγματος.

Πρώτα όμως πρέπει να περιγράψουμε έναν τρόπο για να αλλάζουμε τη σειρά της άθροισης.

5.1 Αναδιατάξεις των φυσικών αριθμών

Ορισμός 5.2 Μια ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ λέγεται αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ αν είναι $1-1$ και επί.

Ο όρος που χρησιμοποιούμε είναι «φυσιολογικός», διότι εφόσον η k_n είναι επί του $\mathbb{N}$ στο σύνολο τιμών της βρίσκονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί, και αφού είναι $1-1$ η k_n δεν επαναλαμβάνει τιμές. Άρα πράγματι, η k_n δίνει τους φυσικούς αριθμούς με άλλη σειρά. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θέτουμε

$$k_n = \begin{cases} n-1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ n+1 & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Οι τιμές της k_n φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, από όπου βλέπουμε ότι η k_n απλώς αλλάζει τη σειρά των φυσικών αριθμών: τους αναδιατάσσει.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
k_n	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	...

5.2 Αναδιατάξεις σειρών

Με τη βοήθεια μιας αναδιάταξης του $\mathbb{N}$ μπορούμε να ορίσουμε τις αναδιατάξεις ακολουθιών και σειρών.

Ορισμός 5.3 Αν ακολουθία $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι μια αναδιάταξη του $\mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $a'_n = a_{k_n}$ ονομάζεται αναδιάταξη της a_n, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ ονομάζεται αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Έτσι, η a'_n δίνει ακριβώς τους όρους της a_n κατά $1-1$ και επί τρόπο, αλλά με τη σειρά που περιγράφει η k_n. Για παράδειγμα, στον επόμενο πίνακα βλέπουμε την αναδιάταξη που κάνει σε μια ακολουθία a_n η παραπάνω k_n.

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	...
a_{k_n}	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5	a_8	a_7	a_{10}	a_9	a_{12}	...

Στη συνέχεια θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε κάθε ανάδιάταξή της συγκλίνει και μάλιστα στον ίδιο αριθμό. Για αυτό θα χρειαστούμε πρώτα δυο απλά λήμματα.

Λήμμα 5.4 *Αν* $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $1-1$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$.

Απόδειξη: Έστω ότι $M > 0$ και $K = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ το σύνολο τιμών της k_n. Το σύνολο $K \cap \{1, 2, \dots, [M] + 1\}$ είναι πεπερασμένο (με το πολύ $[M] + 1$ στοιχεία). Ας υποθέσουμε ότι

$$K \cap \{1, 2, \dots, [M] + 1\} = \{k_{n_1}, k_{n_2}, \dots, k_{n_r}\},$$

για κάποιους δείκτες $n_1, \dots, n_r$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_r\}+1$. φανερά αν $n \geq n_0$ τότε $k_n \notin \{1, 2, \dots, [M] + 1\}$ γιατί αλλιώς θα έπρεπε να ισούται με κάποιο από τα $k_{n_1}, k_{n_2}, \dots, k_{n_r}$ αντιφάσκοντας με την ιδιότητα του $1-1$. Άρα $k_n \geq [M] + 1 > M$. Συνεπώς $k_n \to \infty$. □

Λήμμα 5.5 *Αν η* k_n *είναι αναδιάταξη του* $\mathbb{N}$ *τότε για κάθε* $N \in \mathbb{N}$ *υπάρχει* $m = m(N) \in \mathbb{N}$ *ώστε*

$$\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_m\}.$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 5.4 υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq m$ να ισχύει $k_n \geq N + 1$. Άρα οι αριθμοί $1, 2, \dots, N$ είναι ήδη στο σύνολο τιμών της k_n για τα $n \leq m$, αλλιώς η k_n δεν μπορεί να είναι επί. Έτσι αποδείξαμε ότι $\{1, 2, \dots, N\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$. □

Πρόταση 5.6 *Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει στον ίδιο αριθμό.*

Απόδειξη: Έστω ότι η k_n είναι μια αναδιάταξη των φυσικών αριθμών οπότε η a_{k_n} είναι αναδιάταξη της ακολουθίας a_n. Θέτουμε $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Θα δειξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \ell$.

Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, είναι Cauchy. Άρα υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N > M \geq N_0$ να ισχύει $\sum_{n=M+1}^{N} |a_n| < \varepsilon/2$. Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon/2$. Άρα για κάθε $M \geq N_0$ ισχύει $\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$, οπότε και για $M = N_0$. Δηλαδή,

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Από το Λήμμα 5.5 για το N_0 υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\{1, 2, \dots, N_0\} \subseteq \{k_1, k_2, \dots, k_{m_0}\}$. Έστω τώρα ότι $m \geq m_0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\ell - \sum_{n=1}^{m} a_{k_n}\right| &= \left|\sum_{n\notin\{k_1,k_2,\dots,k_m\}} a_n\right| \\ &\leq \sum_{n\notin\{k_1,k_2,\dots,k_m\}} |a_n| \leq \sum_{n\notin\{k_1,k_2,\dots,k_{m_0}\}} |a_n| \\ &\leq \sum_{n\notin\{1,2,\dots,N_0\}} |a_n| = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.1. Αποδείξτε ότι αν $a_n \to \ell$ και a_{k_n} μια οποιαδήποτε αναδιάταξή της, τότε $a_{k_n} \to \ell$.

Άσκηση 5.2.2. Αποδείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία a_n έχει φθίνουσα αναδιάταξη. (Η φθίνουσα αναδιάταξη μιας ακολουθίας a_n συνήθως συμβολίζεται με a_n^*.)

5.3 Το θεώρημα Riemann

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως τότε για κάθε αριθμό υπάρχει αναδιάταξη της σειράς που συγκλίνει σε αυτόν. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 5.7 *Κάθε αναδιάταξη a_{k_n} μιας μηδενικής ακολουθίας a_n είναι μηδενική.*

Απόδειξη: Αν $\varepsilon > 0$ και $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \geq N_0$ να ισχύει $|a_N| < \varepsilon$, τότε, από το Λήμμα 5.5, βρίσκουμε ένα $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\{1, 2, \dots N_0\} \subseteq \{k_1, k_2 \dots, k_{m_0}\}$. Έτσι, αν $m \geq m_0 + 1$, επειδή η k_n είναι $1-1$, θα ισχύει

$$k_m \notin \{k_1, k_2 \dots, k_{m_0}\} \supseteq \{1, 2, \dots N_0\}.$$

Άρα $k_m \geq N_0$ οπότε $|a_{k_m}| < \varepsilon$. □

Θεώρημα 5.8 (Riemann) *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη k_n του $\mathbb{N}$ ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = x.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού οι όποιοι μηδενικοί όροι δεν συμβάλλουν στη σύγκλιση ή όχι της σειράς. Θέτουμε

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{αν } a_n > 0 \\ 0 & \text{αν } a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{αν } a_n > 0 \\ -a_n & \text{αν } a_n < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $a_n^+, a_n^- > 0$ και $a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ και $a_n^+ - a_n^- = a_n$. Επιπλέον ισχυριζόμαστε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty. \tag{5.1}$$

Πράγματι, επειδή $a_n^+, a_n^- > 0$, αν δεν απειρίζονται και δυο παραπάνω σειρές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποια από τις δύο αυτές συγκλίνει. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ συγκλίνει. Τότε επειδή $a_n^- = a_n^+ - a_n$ συνεπάγεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

οπότε αναγκαστικά θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Αλλά τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Από την (5.1) παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από οποιοδήποτε αριθμό $\alpha < x$ αν προσθέσουμε αρκετούς (πεπερασμένο πλήθος) από τους θετικούς όρους της a_n θα ξεπεράσουμε το x. Και ξεκινώντας από οποιοδήποτε αριθμό $\beta > x$ αν προσθέσουμε αρκετούς (πεπερασμένο πλήθος) από τους αρνητικούς όρους της a_n (οι οποίοι είναι της μορφής $-a_n^-$) θα πέσουμε κάτω από το x.

Ξεκινάμε την κατασκευή της αναδιάταξης της σειράς της a_n. Υποθέτουμε ότι $a_1 \leq x$. Θέτουμε $a_1' = a_1$ και $N_1 = n_1 = 1$. Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ο *πρώτος* φυσικός αριθμός ώστε αν οι πρώτοι $n_2 - 1$ θετικοί όροι της a_n προστεθούν στον a_1 να δίνουν αποτέλεσμα μικρότερο ή ίσο από τον x αλλά όταν προστεθεί και ο n_2-στος θετικός όρος της a_n να προκύπτει αποτέλεσμα γνήσια μεγαλύτερο από τον x. Ονομάζουμε αυτούς τους θετικούς όρους $a_2', a_3', \dots, a_{n_2}'$ και αφού θέσουμε $N_2 = n_2$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N_2-1} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_2} a_n'.$$

Πάλι από την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχει n_3 ο πρώτος φυσικός αριθμός ώστε αν προσθέσουμε τους πρώτους $n_3 - 1$ όρους από τους αρνητικούς όρους της a_n στο $\sum_{n=1}^{N_2} a_n'$ να προκύτει αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του x, αλλά όταν προσθέσουμε και τον n_3-στο όρο να προκύψει γνήσια μικρότερος του x. Μετονομάζουμε αυτούς τους όρους σε $a_{n_2+1}', \dots, a_{n_2+n_3}'$ και αφού θέσουμε $N_3 = n_2 + n_3$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N_3} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_3-1} a_n'.$$

Έστω n_4 ο πρώτος φυσικός αριθμός ώστε αν προσθέσουμε τους επόμενους $n_4 - 1$ από τους θετικούς όρους της a_n στο $\sum_{n=1}^{N_3} a_n'$ να προκύπτει αποτέλεσμα μικρότερο ή ίσο με το x αλλά όταν προσθέσουμε και τον n_4-στο όρο να προκύψει αποτέλεσμα γνησίως μεγαλύτερο του x. Αν μετονομάσουμε αυτούς τους όρους σε $a_{N_3+1}', \dots, a_{N_3+n_4}'$ και αφού θέσουμε $N_4 = N_3 + n_4$ ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{N_4-1} a_n' \leq x < \sum_{n=1}^{N_4} a_n'.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε την αναδιάταξη a'_n της a_n και έχουμε και φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2 < \dots$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύουν τα εξής:

- $a'_n > 0$ για κάθε n με $N_{2k-1} < n \leq N_{2k}$, $\quad (\dagger)$
- $a'_n < 0$ για κάθε n με $N_{2k} < n \leq N_{2k+1}$, $\quad (\ddagger)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_{2k}-1} a'_n \leq x < \sum_{n=1}^{N_{2k}} a'_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{N_{2k-1}} a'_n < x \leq \sum_{n=1}^{N_{2k-1}-1} a'_n. \quad (*)$

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη αν δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα s'_m της $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ συγκλίνουν στο x. Αν $\varepsilon > 0$ επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η a_n είναι μηδενική ακολουθία, οπότε είναι μηδενική και η a'_n από το Λήμμα 5.7. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $|a_{N_{2k-1}}| < \varepsilon$ και $|a_{N_{2k}}| < \varepsilon$. Θέτουμε $m_0 = N_{2k_0-1}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $m \geq m_0$ ισχύει $|s'_m - x| < \varepsilon$. Έστω λοιπόν $m \geq m_0$. Τότε υπάρχει $k \geq k_0$ ώστε είτε $N_{2k-1} \leq m < N_{2k}$ είτε $N_{2k} \leq m < N_{2k+1}$. Αν $N_{2k-1} \leq m < N_{2k}$ τότε από την $(\dagger)$ παίρνουμε ότι $s'_{N_{2k-1}} \leq s'_m < x$. Χρησιμοποιώντας τώρα την $(*)$,

$$\begin{aligned} |s'_m - x| &= x - s'_m \leq x - s'_{N_{2k-1}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N_{2k-1}-1} a'_n - \sum_{n=1}^{N_{2k-1}} a'_n = -a'_{N_{2k-1}} = |a'_{N_{2k-1}}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ενώ αν $N_{2k} \leq m < N_{2k+1}$ τότε από την $(\ddagger)$ παίρνουμε ότι $x \leq s'_m \leq s'_{N_{2k}}$. Χρησιμοποιώντας πάλι την $(*)$,

$$|s'_m - x| = s'_m - x \leq s'_{N_{2k}} - x \leq \sum_{n=1}^{N_{2k}} a'_n - \sum_{n=1}^{N_{2k}-1} a'_n = a_{N_{2k}} = |a_{N_{2k}}| < \varepsilon.$$

Τέλος, αν $a_1 \geq x$ επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία ξεκινώντας από την πρόσθεση στον a_1 αρνητικών όρων της a_n μέχρι το άθροισμα να πέσει για πρώτη φορά κάτω από το x, και συνεχίζουμε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο. □

Ασκήσεις

Άσκηση 5.3.1. Αποδείξτε ότι αν μια σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, τότε υπάρχει αναδιάταξή της που να συγκλίνει στο $+\infty$. Ομοίως, αποδείξτε ότι υπάρχει αναδιάταξή της που να συγκλίνει στο $-\infty$. Ομοίως, αποδείξτε ότι υπάρχει αναδιάταξή της που δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο του $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Άσκηση 5.3.2. Αποδείξτε ότι αν μια σειρά συγκλίνει αλλά όχι απολύτως, τότε υπάρχει αναδιάταξή της, της οποίας τα μερικά αθροίσματα είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5.3.3. Αν $a_n = \cos(n\pi)/n$ υπάρχει αναδιάταξη a'_n της a_n ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = e$;

Άσκηση 5.3.4. Αν $a_n = \sin(n\pi/2)/n$ υπάρχει αναδιάταξη a'_n της a_n ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = 1000$;

Μέρος II

Ομοιόμορφη συνέχεια
Ολοκλήρωμα Riemman

Κεφάλαιο 6

Ομοιόμορφη συνέχεια

6.1 Ομοιόμορφη συνέχεια

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τη σχέση του δ στον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 και του σημείου x_0. Ας θέσουμε $\varepsilon = 1$ και ας εξετάσουμε τη συνέχεια της $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ στο $x_0 = 1$. Αναζητούμε το μέγιστο $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| = |x - 1| < \delta$ να συνεπάγεται $|x^2 - x_0^2| < 1$. Ισοδύναμα $|x^2 - 1| < 1$ αν και μόνο αν $|x-1| \cdot |x+1| < 1$. Αν λοιπόν $|x-1| < \delta$ θα είναι $1-\delta < x < 1+\delta$ ισοδύναμα $2-\delta < x+1 < 2+\delta$, οπότε θα θέλουμε $\delta(2 + \delta) \leq 1$. Λύνοντας αυτή τη δευτεροβάθμια ανίσωση βρίσκουμε ότι θα πρέπει $\delta \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$. Άρα αν θέσουμε $\delta = \sqrt{2} - 1$ θα επιβεβαιώνεται ο ορισμός της συνεχειας για την f στο $x_0 = 1$.

Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι αν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το $\delta = \sqrt{2} - 1$ σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f. Είναι δηλαδή αληθές ότι αν $\delta = \sqrt{2} - 1$ τότε αν $|x - t| < \delta$ θα συνεπάγεται $|x^2 - t^2| < 1 = \varepsilon$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$;

Είναι εύκολο να δούμε ότι η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι αρνητική. Αν για παράδειγμα $t = 2$ και επιλέξουμε $x = 2 + \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1)$ τότε φανερά

$$|x - 2| = \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1) < \sqrt{2} - 1$$

αλλά

$$\begin{aligned} |x^2 - 2^2| &= (x - 2)(x + 2) = \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1)(4 + \frac{3}{4}(\sqrt{2} - 1)) \\ &= 3(\sqrt{2} - 1) + \frac{9}{16}(\sqrt{2} - 1)^2 > 1 > 3(\sqrt{2} - 1) > 1. \end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε ότι όποιο δ και αν επιλέξουμε στο $(0, \sqrt{2} - 1]$ πάντα θα υπάρχει ένα t στο $\mathbb{R}$ για το οποίο θα υπάρχει x με $|x - t| < \delta$ αλλά $|x^2 - t^2| > 1 = \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι για τη συνάρτηση αυτή δεν υπάρχει ένα $\delta > 0$ που να επιβεβαιώνει τον ορισμό της συνέχειας σε κάθε σημείο t του πεδίου ορισμού της.

Όταν όμως για κάθε $\varepsilon > 0$ ένα τέτοιο $\delta > 0$ υπάρχει (που επιβεβαιώνει τον ορισμό της συνέχειας σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f) λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ορισμός 6.1 (Ομοιόμορφης συνέχειας) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ όπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι *ομοιόμορφα συνεχής* στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - t| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in A$.

Συγκρίνετε με τον ορισμό της συνέχειας:

Ορισμός 6.2 (Συνέχεια) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ όπου A, $B \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής* στο A αν για κάθε $t \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - t| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

Αν διαβάσει κανείς τον ορισμό εντελώς σχηματικά θα μπορούσε να πει ότι απλώς άλλαξε η θέση της φράσης «για κάθε $t \in A$». Πράγματι αυτή είναι η αλλαγή, αλλά εμπεριέχει ένα νόημα. Στην (απλή) συνέχεια, δοσμένου $\varepsilon > 0$ για κάθε $t \in A$ μπορούμε να βρούμε ένα δ κλπ. Άρα αν το t αλλάξει πιθανώς να χρειαστεί να αλλάξουμε και το δ. Η αλλαγή της θέσης του «για κάθε $t \in A$» στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας βεβαιώνει ότι δοθέντος του $\varepsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί ένα $\delta > 0$ το οποίο να μην χρειάζεται να αλλάζει από σημείο σε σημείο του πεδίου ορισμού· δηλαδή να επιβεβαιώνει τον ορισμό της συνέχειας ανεξάρτητα από το ποιο σημείο του πεδίου ορισμού επιλέγεται.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θα δούμε τώρα ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο ο τύπος της f αλλά και το πεδίο ορισμού της παίζουν ρόλο στο αν θα είναι μια συνάρτηση ομοιόμορφα συνεχής ή όχι. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$|x^2 - t^2| = |x - t| \cdot |x + t| \leq 2|x - t|.$$

Έτσι αν δοθεί $\varepsilon > 0$ μπορούμε απλώς να επιλέξουμε $\delta = \varepsilon/2$. Οπότε αν $|x - t| < \delta$ θα είναι

$$|x^2 - t^2| \leq 2|x - t| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

και αυτό είναι σωστό όποιο t και αν επιλέξουμε στο $[0,1]$. Επιβεβαιώνεται λοιπόν ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής. Στην πραγματικότητα αποδείξαμε ότι κάθε συνάρτηση f για την οποία υπάρχει $L > 0$ ώστε $|f(x) - f(t)| \leq L|x - t|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αυτές οι συναρτήσεις ονομάζονται συναρτήσεις Lipschitz.

Πρόταση 6.3 *Κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \varepsilon/L$. □

Πόρισμα 6.4 *Κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$, όπου Δ διάστημα στο $\mathbb{R}$, με φραγμένη παράγωγο είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη: Έστω ότι $L > 0$ ώστε $|f'(x)| \leq L$ για κάθε $x \in \Delta$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θεώρημα ΑΠΙ-ΙΙ.6) για κάθε x, t στο Δ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και t ώστε να ισχύει

$$\left|\frac{f(x) - f(t)}{x - t}\right| = |f'(\xi)| \leq L.$$

Συνεπώς,

$$|f(x) - f(t)| \leq L|x - t|$$

και η f είναι Lipschitz. □

Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως βλέπουμε στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.5 Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} : (0, 1) \mapsto (0, 1)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά ούτε είναι συνάρτηση Lipschitz ούτε έχει φραγμένη παράγωγο. Η παράγωγός της είναι η $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ και δεν είναι φραγμένη όταν το x είναι κοντά στο 0. Δεν είναι Lipschitz γιατί αν ήταν και ικανοποιούσε μια σχέση της μορφής $|f(x) - f(t)| \leq L|x - t|$ για κατάλληλη σταθερά $L > 0$, αυτό θα ίσχυε για $x = 4/n^2$ και $t = 1/n^2$. Αλλά τότε θα είχαμε

$$\left|\sqrt{\frac{4}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n^2}}\right| \leq L\left|\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right|$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την $n \leq 3L$, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο το οποίο είναι άτοπο.

Η f όμως είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, θα αποδειξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x, $t \in [0, 1]$, αν $|x - t| < \delta$ συνεπάγεται $|\sqrt{x} - \sqrt{t}| < \varepsilon$. Και αν αυτό ισχύει για x, $t \in [0, 1]$, τότε φανερά θα ισχύει για τα x, $t \in (0, 1)$. Η απόδειξη είναι ίδια για τη γενική συνεχή συνάρτηση σε κλειστό φραγμένο διάστημα οπότε το ζητούμενο έπεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.6 *Αν $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη: Αν δεν είναι, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα x_δ, $t_\delta \in [a, b]$ ώστε $|x_\delta -_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(t_\delta)| \geq \varepsilon$. Άρα αυτό ισχύει και για $\delta = 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι υπάρχουν x_n, $t_n \in [a, b]$ ώστε $|x_n - t_n| < 1/n$ αλλά $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$.

Όμως από το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß (Θεώρημα ΑΠΙ-6.37) η x_n έχει υπακολουθία x_{k_n} που συγκλίνει, έστω στο $x_0 \in [a, b]$. Τώρα, η t_n για τους δείκτες k_n, δηλαδή η t_{k_n} βρίσκεται και αυτή στο $[a, b]$ οπότε πάλι από το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß έχει και αυτή μια υπακολουθία $t_{k_{m_n}}$ που συγκλίνει, έστω στο t_0. Αλλά η $x_{k_{m_n}}$ είναι υπακολουθία της x_{k_n}, άρα συγκλίνει και αυτή στο x_0. Έτσι έχουμε

$$x_{k_{m_n}} \to x_0, \quad t_{k_{m_n}} \to t_0$$

αλλά και

$$|x_{k_{m_n}} - t_{k_{m_n}}| < \frac{1}{k_{m_n}} \qquad \text{και} \qquad |f(x_{k_{m_n}}) - f(t_{k_{m_n}})| \geq \varepsilon.$$

Από τα παραπάνω, αφού $k_{m_n} \to +\infty$ (Άσκηση ΑΠΙ-4.2.2.), προκύπτει $x_0 = t_0$ και παίρνοντας όριο στην τελευταία ανισότητα και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της f, βρίσκουμε $\varepsilon \leq |f(x_0) - f(t_0)| = 0$ το οποίο είναι άτοπο. □

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1.1. Αποδείξτε ότι η $f : A \mapsto \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε αν η x_n είναι ακολουθία Cauchy στο A, η $f(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6.1.2. Αποδείξτε ότι αν η $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής και τα όρια $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to b^-} f(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b). (Υπόδειξη: για το αντίστροφο χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.)

6.2 Το θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 6.7 Μια συνάρτηση f η οποία είναι Lipschitz με σταθερά $0 < L < 1$ ονομάζεται *συστολή*.

Θεώρημα 6.8 *Κάθε συστολή $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $t_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(t_0) = t_0$.*

Απόδειξη: Επειδή η f είναι συστολή, και άρα Lipschitz, είναι και ομοιόμορφα συνεχής. Ας υποθέσουμε ότι $|f(x) - f(t)| \leq L|x - t|$ για κάθε x, $t \in \mathbb{R}$ με $0 < L < 1$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x_1 \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$ για $n \in \mathbb{N}$.
Ισχυρισμός 1: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|x_{n+1} - x_n| \leq L^{n-1}|x_2 - x_1|$.

[Για $n = 1$ ισχύει με ισότητα. Αν ισχύει για n τότε

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq L|x_{n+1} - x_n| \leq LL^{n-1}|x_{n+1} - x_n|,$$

δηλαδή $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq L^n|x_{n+1} - x_n|$, ολοκληρώνοντας την επαγωγή.]
Ισχυρισμός 2: Η x_n είναι ακολουθία Cauchy.

[Για $n > m$ το άθροισμα $\sum_{k=m}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)$ είναι τηλεσκοπικό και ισούται με $x_n - x_m$. Άρα

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1}|x_{k+1} - x_k| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} L^{k-1}|x_2 - x_1| \leq \sum_{k=m}^{+\infty} L^{k-1}|x_2 - x_1| = \frac{L^{m-1}}{1-L}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

(Υπενθύμιση: η γεωμετρική σειρά έχει άθροισμα τον πρώτο της όρο διά 1 μείον τον λόγο.) Αλλά αφού $0 < L < 1$ η $|x_2 - x_1|L^{m-1}/1 - L$ είναι μηδενική ακολουθία για $m \in \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n > m \geq m_0$ να ισχύει

$$|x_n - x_m| \leq \frac{L^{m-1}}{1-L}|x_2 - x_1| < \varepsilon,$$

δηλαδή η x_n είναι ακολουθία Cauchy.]

Έτσι η x_n ως ακολουθία Cauchy συγκλίνει, έστω στο t_0. Παίρνοντας όριο στην $x_{n+1} = f(x_n)$, και χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της f καταλήγουμε στην $t_0 = f(t_0)$, δηλαδή η f έχει σταθερό σημείο το t_0.

Τέλος, αν υπάρχει σταθερό σημείο $t_1 \neq t_0$ τότε

$$|t_1 - t_0| = |f(t_1) - f(t_0)| \leq L|t_1 - t_0| < |t_1 - t_0|$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Κεφάλαιο 7

Ολοκλήρωμα Riemann

7.1 Ο ορισμός του Darboux

Ορισμός 7.1 Θεωρούμε διάστημα $\Delta = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ με μήκος $\ell([a, b]) = b - a$. Μια διαμέριση του Δ είναι οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{P}$ στοιχείων του Δ που περιέχει τα άκρα a και b. Επειδή έχει χρηστική σημασία η διάταξη αυτών των στοιχείων συνήθως γράφουμε

$$\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $\Delta_j = [x_{j-a}, x_j]$, τότε $\sum_{j=1}^{n} \ell([x_{j-a}, x_j]) = \ell(\Delta) = b - a$.

Ορισμός 7.2 Λεπτότητα της $\mathcal{P}$ ονομάζουμε την ποσότητα

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\ell(\Delta_j) \,:\, j = 1 \ldots, n\} = \max\{x_j - x_{j-1} \,:\, j = 1 \ldots, n\}.$$

Ορισμός 7.3 Για δυο διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}^*$ του Δ λέμε ότι η $\mathcal{P}^*$ είναι *εκλέπτυνση* της $\mathcal{P}$ όταν $\mathcal{P}^* \supseteq \mathcal{P}$. Φανερά, σε αυτή την περίπτωση, ισχύει $\|\mathcal{P}^*\| \leq \|\mathcal{P}\|$.

Παράδειγμα 7.4 Αν θέσουμε $x_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$ τότε το σύνολο των x_j για $j = 1, \ldots, n$ σχηματίζει μια διαμέριση $\mathcal{P}$ με $\|\mathcal{P}\| = (b - a)/n$.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι να θέσουμε $x_j = a(b/a)^{j/n}$ πάλι για $j = 1, \ldots, n$. Σε αυτή την περίπτωση εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\|\mathcal{P}\| = x_n - x_{n-1} = b^{(n-1)/n}(b^{1/n} - a^{1/n}).$$

Στη συνέχεια θεωρούμε *φραγμένη* συνάρτηση $f : \Delta = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ και ορίζουμε τα άνω και κάτω αθροίσματα Darboux ως προς μια διαμέριση $\mathbb{P}$ του Δ.

Ορισμός 7.5 Έστω ότι η $f : \Delta = [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση και $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$, μια διαμέριση του Δ.

Για κάθε $j = 1, \dots, n$ ορίζουμε

$$m_j = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{j-1}, x_j\}$$
$$M_j = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{j-1}, x_j\}.$$

Ορίζουμε το κάτω άθροισμα Darboux $L(f, \mathcal{P})$ και το άνω άθροισμα Darboux $U(f, \mathcal{P})$ της f για τη διαμέριση $\mathcal{P}$, θέτοντας

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \qquad \text{και} \qquad U(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ισχύει προφανώς $m_j \le M_j$ οπότε $L(f, \mathcal{P}) \le U(f, \mathcal{P})$.

Πρόταση 7.6 (Μονοτονία ως προς την εκλέπτυνση) *Έστω ότι η $\mathcal{P}^*$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$ και $|f(x)| \le K$ για κάθε $x \in \Delta$. Τότε ισχύουν οι σχέσεις,*

$$L(f, \mathcal{P}) \le L(f, \mathcal{P}^*) \le K|\mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}|\, \|\mathcal{P}\| + L(f, \mathcal{P}) \tag{7.1}$$

$$U(f, \mathcal{P}) \ge U(f, \mathcal{P}^*) \ge U(f, \mathcal{P}) - 2K|\mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}|\, \|\mathcal{P}\|, \tag{7.2}$$

όπου με $|\mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε το παραπάνω όταν η $\mathcal{P}^*$ έχει ένα στοιχείο επιπλέον από τα στοιχεία της $\mathcal{P}$. Μετά θα προσθέσουμε στην $\mathcal{P}$ ένα προς ένα τα υπόλοιπα στοιχεία της $\mathcal{P}^*$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{P}^*$ έχει τα σημεία της $\mathcal{P}$ και επιπλέον το στοιχείο $\bar{x}$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ και ότι $\bar{x} \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$. Ας γράψουμε $m_i^* = \inf_{[x_{i-1}, \bar{x}]} f(x)$ και $m_i^{**} = \inf_{[\bar{x}, x_i]} f(x)$. Φανερά, για το $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ θα ισχύει $m_i \le m_i^*$ και $m_i \le m_i^{**}$, αφού τα δεύτερα υπολογίζονται σε υποσύνολα του $[x_{i-1}, x_i]$. Άρα θα είναι

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x_i - \bar{x}) + m_i(\bar{x} - x_{i-1}) \le m_i^*((x_i - \bar{x}) + m_i^{**}(\bar{x} - x_{i-1})).$$

Προσθέτοντας τώρα τους υπόλοιπους προσθετέους $\sum_{j \ne i} m_j(x_{j-1} - x_j)$ και στα δύο μέλη, παίρνουμε $L(f, \mathcal{P}) \le L(f, \mathcal{P}^*)$, αποδεικνύοντας το κάτω φράγμα.

Για το άνω φράγμα, παρατηρούμε ότι $m_i^* \le K$ ενώ $m_i \ge -K$. Άρα $m_i^* - m_i \le 2K$, δηλαδή $m_i^* \le m_i + 2K$, και ομοίως $m_i^{**} \le m_i + 2K$. Οπότε,

$$\begin{aligned}
L(f, \mathcal{P}^*) &= m_i^*(\bar{x} - x_{i-1}) + m_i^{**}(x_i - \bar{x}) + \sum_{j \ne i} m_j(x_j - x_{j-1}) \\
&\le (m_i + 2K)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j \ne i} m_j(x_j - x_{j-1}) \\
&\le 2K(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \\
&\le 2K\|\mathcal{P}\| + L(f, \mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Έτσι, στη γενική περίπτωση που η $\mathcal{P}^*$ έχει $|\mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}|$ σημεία περισσότερα της $\mathcal{P}$, επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία προσθέτοντας στην $\mathcal{P}$ ένα-ένα τα επιπλέον σημεία θα πάρουμε $L(f, \mathcal{P}^*) \leq 2K\|\mathcal{P}\| \, |\mathcal{P}^* \setminus \mathcal{P}| + L(f, \mathcal{P})$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε τις ανισότητες για τα άνω αθροίσματα Darboux. □

Πόρισμα 7.7 *Αν η $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και οι $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ δυο διαμερίσεις του Δ, ισχύει $L(f, \mathcal{P}_1) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$.*

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση φανερά ισχύει

$$L(f, \mathcal{P}_1) \leq L(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq U(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq U(f, \mathcal{P}_2),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Συμπεραίνουμε από το παραπάνω πόρισμα ότι τα $L(f, \mathcal{P})$ είναι άνω φραγμένα για κάθε $\mathcal{P}$ από το οποιοδήποτε $U(f, \mathcal{P}_2)$ και τα $U(f, \mathcal{P})$ είναι κάτω φραγμένα για κάθε $\mathcal{P}$ από οποιοδήποτε $L(f, \mathcal{P}_1)$. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.8 Αν $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε το κάτω ολοκλήρωμά της στο Δ να είναι η (πεπερασμένη) ποσότητα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx := \sup\big\{L(f, \mathcal{P}) \ : \ \mathbb{P} \text{ διαμέριση του } \Delta\big\}$$

και ορίζουμε το άνω ολοκλήρωμά της στο Δ να είναι η (πεπερασμένη) ποσότητα

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx := \inf\big\{L(f, \mathcal{P}) \ : \ \mathbb{P} \text{ διαμέριση του } \Delta\big\}.$$

Παρατήρηση 7.9 Από τον ορισμό των supremum και infimum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ ώστε

$$L(f, \mathcal{P}_1) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \varepsilon \quad \text{και} \quad U(f, \mathcal{P}_2) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \varepsilon.$$

Πόρισμα 7.10 *Το κάτω ολοκλήρωμα είναι πάντα μικρότερο ή ίσο με το άνω ολοκλήρωμα.*

Απόδειξη:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \varepsilon \leq L(f, \mathcal{P}_1) \leq U(f, \mathcal{P}_2) \leq\leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \varepsilon \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \varepsilon.$$

Παίρνοντας όριο $\varepsilon \to 0^+$ προκύπτει το ζητούμενο. □

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Ορισμός 7.11 Αν $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, η f λέγεται *ολοκληρώσιμη* στο Δ αν ισχύει

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

και σε αυτή την περίπτωση, την κοινή αυτή τιμή τη συμβολίζουμε με

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

και την ονομάζουμε *ολοκλήρωμα* της f στο διάστημα $\Delta = [a, b]$. Επίσης ορίζουμε

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_c^c f(x)\,dx = 0,$$

για κάθε $c \in [a, b]$.

Παρατήρηση 7.12 Επειδή ασχολούμαστε *μόνο* με φραγμένες συναρτήσεις $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ και επειδή κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ είναι εκλέπτυνση της τετριμμένης διαμέρισης $\{a, b\}$, αν $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$ για κατάλληλους m, $M \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$m(b-a) \leq L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a).$$

Παράδειγμα 7.13 (Ολοκλήρωμα σταθεράς) Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ ισχύει

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n m_i(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n c(x_j - x_{j-1}) = c(b-a),$$

και ομοίως $U(f, \mathcal{P}) = c(b-a)$. Άρα και το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα είναι ίσα με $c(b-a)$, οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

Παράδειγμα 7.14 Για την $f(x) = x$ στο διάστημα $[0, 1]$ θεωρούμε τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_n = \{k/n : k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
L(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{1}{n^2}\big(0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1)\big) \\
&= \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{P}}(f,\mathcal{P}) \geq \sup_n L(f,\mathcal{P}_n) = \sup_n \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Ομοίως βρίσκουμε $U(f,\mathcal{P}_n) = (n+1)/(2n)$ και

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}}(f,\mathcal{P}) \leq\leq_n L(f,\mathcal{P}_n) =\leq_n \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Έτσι, βρήκαμε ότι

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx \leq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2},$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$.

Παράδειγμα 7.15 (Μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση) Θεωρούμε τη συνάρτηση Dirichlet

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Η $\delta(x)$ είναι φανερά φραγμένη στο $[0,1]$ και επειδή οι ρητοί και οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $[0,1]$, ισχύει $m_j = 0$ και $M_j = 1$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ για κάθε διαμέριση του $[0,1]$. Συνεπώς $L(\delta,\mathcal{P}) = 0$ και $U(\delta,\mathcal{P}) = 1$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$. Άρα

$$\underline{\int_0^1} \delta(x)\,dx = 0 \quad \text{και} \quad \overline{\int_0^1} \delta(x)\,dx = 1.$$

Έτσι η $\delta(x)$ *δεν* είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Θεώρημα 7.16 (Darboux) *Έστω ότι η $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του Δ με $\|\mathcal{P}\| < \delta$ ισχύουν οι ανισότητες*

$$U(f,\mathcal{P}) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon \leq U(f,\mathcal{P}) + \varepsilon$$

$$L(f,\mathcal{P}) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon \geq L(f,\mathcal{P}) - \varepsilon.$$

Απόδειξη: Οι δεξιές ανισότητες είναι προφανείς από τον ορισμό του κάτω και του άνω ολοκληρώματος, και ισχύουν για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$. Έστω $K > 0$ ώστε $|f(x)| \leq K$ για κάθε $x \in \Delta$. Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_1$ ώστε

$$U(f,\mathcal{P}_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.3}$$

Έστω τώρα $\mathcal{P}$ οποιαδήποτε διαμέριση του Δ. Θέτουμε $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_1 \supseteq \mathcal{P}_1$. Η $\mathcal{P}^*$ έχει το πολύ $|\mathcal{P}_1|$ σημεία περισσότερα από την $\mathcal{P}$. Έτσι από την Πρόταση 7.6 και την (7.3) θα ισχύει

$$U(f,\mathcal{P}) - 2K|\mathcal{P}_1|\,\|\mathcal{P}\| \leq U(f,\mathcal{P}^*) \leq (f,\mathcal{P}_1) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς, $U(f,\mathcal{P}) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + (\varepsilon/2) + 2K|\mathcal{P}_1|\,\|\mathcal{P}\|$. Αρκεί λοιπόν να είναι $2K|\mathcal{P}_1|\,\|\mathcal{P}\| < \varepsilon/2$ το οποίο το πετυχαίνουμε αν θέσουμε $\delta = \varepsilon/(4K|\mathcal{P}_1|)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη για τα άνω αθροίσματα. Ομοίως εργαζόμαστε και για τα κάτω αθροίσματα και στο τέλος επιλέγουμε το μικρότερο από τα δύο δ που βρήκαμε. □

Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι για να υπολογίσουμε τα άνω και κάτω ολοκληρώματα αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μια ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$ ώστε $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ καθώς $n \to +\infty$, διότι αυτές οι διαμερίσεις τελικά θα ικανοποιούν την $\|\mathcal{P}_n\| < \delta$ όποιο και αν είναι το δ για το ε και την f.

Παράδειγμα 7.17 Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0,1]$, θεωρούμε την $\mathcal{P}_n = \{k/n : k = 0,1,2,\dots,n\}$ για την οποία ισχύει φανερά $\|\mathcal{P}_n\| = 1/n \to 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n\big(2(n-1)+1\big)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \to \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$U(f,\mathcal{P}_n)\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \to \frac{1}{3}.$$

Άρα $\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$.

7.2 Το κριτήριο Riemann

Το ακόλουθο θεώρημα παίζει κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας της ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 7.18 (Κριτήριο Riemann) *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : \Delta = [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο Δ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ του Δ ώστε να ισχύει*

$$0 \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, οπότε

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Από τον ορισμό των άνω και κάτω ολοκληρωμάτων για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, \mathcal{P}_1) \leq L(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2)$$

και

$$U(f, \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq U(f, \mathcal{P}_2) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι, θέτοντας $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ ισχύουν οι

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad -L(f, \mathcal{P}) \leq \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Οπότε αν τις προσθέσουμε κατά μέλη θα πάρουμε $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$.

Αντιστρόφως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon.$$

Αλλά από την υπόθεση υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ ώστε $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ ενώ από τον ορισμό του άνω και κάτω ολοκληρώματος ισχύει

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f, \mathcal{P}) \quad \text{και} \quad -\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq -L(f, \mathcal{P}),$$

και προσθέτοντας κατά μέλη,

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πόρισμα 7.19 *Αν υπάρχουν διαμερίσεις $\mathcal{P}_n$ και $\mathcal{Q}_n$ του Δ ώστε $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ και $\|\mathcal{Q}_n\| \to 0$ και $U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{Q}_n) \to 0$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο Δ και ισχύει*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim U(f, \mathcal{P}_n) = \lim L(f, \mathcal{Q}_n).$$

Απόδειξη: Αφού $U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{Q}_n) \to 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{Q}_n) < \varepsilon$. Αν θέσουμε $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}_n$ τότε

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{Q}_n) < \varepsilon, \tag{7.4}$$

οπότε από το κριτήριο Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq U(f, \mathcal{P}_n)$$

συνεπώς από την (7.4)

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \le U(f,\mathcal{P}_n) - \varepsilon < L(f,\mathcal{Q}_n) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Άρα

$$0 \le U(f,\mathcal{P}_n) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon,$$

δηλαδή $\int_a^b f(x)\,dx = \lim U(f,\mathcal{P}_n)$. Ομοίως,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon \ge L(f,\mathcal{Q}_n) + \varepsilon < U(f,\mathcal{P}_n) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

οπότε

$$0 \le L(f,\mathcal{Q}_n) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon,$$

δηλαδή $\int_a^b f(x)\,dx = \lim L(f,\mathcal{Q}_n)$. □

Παράδειγμα 7.20 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο διάστημα $[0,1]$ και τη διαμέριση $\mathcal{P}_n = \{k/n \,:\, k = 0,1,\dots,n\}$ για την οποια ισχύει $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$. Η e^x είναι γνωσίως αύξουσα, οπότε $m_k = e^{(k-1)/n}$ και $M_k = e^{k/n}$. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^n e^{(k-1)/n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + 2^{2/n} + \dots + e^{(n-1)/n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\frac{e^{n/n}-1}{e^{1/n}-1} = \frac{e-1}{\dfrac{e^{1/n}-1}{1/n}} \to e-1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,\mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^n e^{k/n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(e^{1/n} + 2^{2/n} + \dots + e^{n/n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\frac{e^{(n+1)/n}-e^{1/n}}{e^{1/n}-1} = \frac{e^{1/n}(e-1)}{\dfrac{e^{1/n}-1}{1/n}} \to e-1. \end{aligned}$$

Άρα $U(f,\mathcal{P}_n) - L(f,\mathcal{P}_n) \to 0$ συνεπώς η e^x είναι ολοκληρώσιμη και $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

Παράδειγμα 7.21 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^p$ στο διάστημα $[1,2]$ με $p \neq -1$ και $p \neq 0$, και τη διαμέριση $\mathcal{P}_n = \{1 = 2^{0/n} < 2^{1/n} < 2^{2/n} < \dots < 2^{n/n} = 2\}$ για την οποια ισχύει $\|\mathcal{P}_n\| = 2 - 2^{(n-1)/n} \to 0$. Η

x^p είναι γνωσίως αύξουσα αν $p > 0$, και γνησίως φθίνουσα αν $p < 0$. Αν λοιπόν $p > 0$ τότε οπότε $m_k = e^{(k-1)/n}$ και $M_k = e^{k/n}$. Έχουμε λοιπόν,

$$
\begin{aligned}
L(f, \mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} (2^{k/n} - 2^{(k-1)n})(2^{(k-1)/n})^p = (2^{1/n} - 1) \sum_{k=1}^{n} (2^{(k-1)/n})^{p+1} \\
&= (2^{1/n} - 1) \sum_{k=1}^{n} (2^{(p+1)/n})^{k-1} = (2^{1/n} - 1) \frac{(2^{(p+1)/n})^n - 1}{2^{(p+1)/n} - 1} \\
&= \frac{e^{(\log 2)/n} - 1}{(\log 2)/n} \cdot \frac{2^{p+1} - 1}{\dfrac{e^{(p+1)(\log 2)/n} - 1}{(p+1)(\log 2)/n} \cdot (p+1)} \\
&\to 1 \cdot \frac{2^{p+1} - 1}{1 \cdot (p+1)} = \frac{1}{p+1}(2^{p+1} - 1).
\end{aligned}
$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι και

$$
U(f, \mathcal{P}_n) \to \frac{1}{p+1}(2^{p+1} - 1),
$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$
\int_1^2 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}(2^{p+1} - 1).
$$

Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση που $p < 0$.

7.3 Η ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann

Μια παραλλαγή του ορισμού της ολοκληρωσιμότητας είναι αντί να φτιάξουμε τα αθροίσματα $L(f, \mathcal{P})$ και $U(f, \mathcal{P})$ τα οποία χρησιμοποιούν τις παραμέτρους m_j και M_j, δηλαδή τα infimum και supremum της f στο j διάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ της διαμέρισης $\mathcal{P}$, να χρησιμοποιούσουμε τις τιμές της f σε τυχόντα σημεία του $[x_{j-1}, x_j]$.

Αν δηλαδή $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $\Delta = [a, b]$ παίρνουμε από κάθε διάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ ένα σημείο ξ_j και σχηματίζουμε το σύνολο των *ενδιάμεσων σημείων* $\Xi = \{\xi_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Με αυτά ορίζουμε το «άθροισμα Riemann» της f να είναι η ποσότητα

$$
R(f, \mathcal{P}, \Xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).
$$

Φανερά, από τους ορισμούς των m_j, M_j και ξ_j θα έχουμε

$$
L(f, \mathcal{P}) \le R(f, \mathcal{P}, \Xi) \le U(f, \mathcal{P}).
$$

Η ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann είναι να υπάρχει το όριο

$$
\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} R(f, \mathcal{P}, \Xi)
$$

για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων και να είναι ανεξάρτητο από αυτήν. Δηλαδή να υπάρχει ένας αριθμός R ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ με $\|\mathcal{P}\| < \delta$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων ξ να ισχύει $|R(f, \mathcal{P}, \Xi) - R| < \varepsilon$.

Παρατήρηση 7.22 Αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε ένα διάστημα $[a, b]$ είναι αναγκαστικά φραγμένη. Πράγματι, για κάθε $K > 0$, αν η f δεν είναι φραγμένη σε ένα σημείο $x_0 \in [a, b]$ αλλά είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει πραγματικός αριθμός R και $\delta > 0$ ώστε αν $\|\mathcal{P}\| < \delta$, για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ να ισχύει $|R(f, \mathcal{P}, \Xi) - R| < 1$. Άρα, από την κάτω τριγωνική ανισότητα, ισχύει $|R(f, \mathcal{P}, \Xi)| \leq 1 + |R|$. Δηλαδή τα αθροίσματα Riemann είναι φραγμένα για μια τέτοια διαμέριση *για κάθε* επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ. Αλλά επειδή το x_0 θα ανήκει σε κάποιο από τα διαστήματα της διαμέρισης, έστω το $[x_{i-1}, x_i]$ ξεχωρίζουμε τον i-προσθετέο από το άθροισμα Riemann και με την κάτω τριγωνική ανισότητα, γράφουμε

$$\begin{aligned} |R(f, \mathcal{P}, \Xi)| &= \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{j \neq i} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\ &\geq |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) - \left| \sum_{j \neq i} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right|. \end{aligned}$$

Φανερά λοιπόν μπορούμε να επιλέξουμε σε αυτό, το i διάστημα, το σημείο ξ_i του Ξ τόσο κοντά στο x_0 ώστε $|R(f, \mathcal{P}, \Xi)| > K$. Άρα $K < 1 + |R|$ για κάθε $K > 0$ οπότε το R δεν είναι πραγματικός αριθμός, το οποίο είναι άτοπο.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann είναι ισοδύναμη συνθήκη με την ολοκληρωσιμότητα με τα άνω και κάτω αθροίσματα όπως την γνωρίσαμε μέχρι στιγμής.

Θεώρημα 7.23 *Η $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|\mathcal{P}\| < \delta$ τότε $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$. Αλλά

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq U(f, \mathcal{P})$$

και όπως είδαμε πριν

$$L(f, \mathcal{P}) \leq R(f, \mathcal{P}, \Xi) \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Συνεπώς και οι δύο αυτοί αριθμοί βρίσκονται σε ένα διάστημα πλάτους μικρότερου του ε άρα

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - R(f, \mathcal{P}, \Xi) \right| < \varepsilon.$$

Έτσι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη (με $R = \int_a^b f(x)\,dx$).

Αντίστροφα τώρα, αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη υπάρχει αριθμός R ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ με $\|\mathcal{P}\| < \delta$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ να ισχύει $|R(f,\mathcal{P},\Xi) - R| < \varepsilon/4$. Από τον ορισμό του $m_j = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f(x)$ υπάρχει $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ ώστε $f(\xi_j) < m_j + \varepsilon/(4(b-a))$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία με $(x_j - x_{j-1})$ και προσθέτοντας κατά μέλη ως προς j παίρνουμε $R(f,\mathcal{P},\Xi) \leq L(f,\mathcal{P}) + \varepsilon/4$. Οπότε

$$0 \leq R(f,\mathcal{P},\Xi) - L(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Έτσι, η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$|R - L(f,\mathcal{P})| \leq |R - R(f,\mathcal{P},\Xi)| + |R(f,\mathcal{P},\Xi) - L(f,\mathcal{P})| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το $U(f,\mathcal{P})$ και παίρνουμε ομοίως $|R - U(f,\mathcal{P})| < \varepsilon/2$. Συνεπώς, από την τριγωνική ανισότητα και πάλι, προκύπτει $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη από το κριτήριο Riemann. Τέλος, αφού $|R - L(f,\mathcal{P})| < \varepsilon$ και $|R - U(f,\mathcal{P})| < \varepsilon$, χρησιμοποιώντας στη θέση της $\mathcal{P}$ μια ακολουθία $\mathcal{P}_n$ για την οποία $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$, θα ικανοποιείται τελικά η $\|\mathcal{P}_n\| < \delta$ και άρα

$$\left| R - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \lim |R - L(f,\mathcal{P}_n)| \leq \varepsilon,$$

οπότε $R = \int_a^b f(x)\,dx$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πόρισμα 7.24 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οι $\mathcal{P}_n$ είναι διαμερίσεις του $[a,b]$ με $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ και Ξ_n ενδιάμεσα σημεία της $\mathcal{P}_n$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} R(f,\mathcal{P}_n,\Xi_n).$$ □

7.4 Ολοκληρωσιμότητα και συνέχεια

Θεώρημα 7.25 *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 6.6 η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. Θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$ και από την ομοιόμορφη συνέχεια υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - t| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/(b-a)$. Αφού f συνεχής, σε κάθε διάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ μιας διαμέρισης $\mathcal{P}$, υπάρχουν ξ_j' και ξ_j'' ώστε $m_j = f(\xi_j')$ και $M_j = f(\xi_j'')$. Έτσι αν $\|\mathcal{P}\| < \delta$ θα είναι $|\xi_j' - \xi_j''| \leq x_j - x_{j-1} < \delta$ και συνεπώς $M_j - m_j = f(\xi_j'') - f(\xi_j') < \varepsilon/(b-a)$.

Για αυτό λοιπόν το $\delta > 0$ θα είναι

$$U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$$
$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon. \qquad \square$$

Στη συνέχεια θα θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν η συνάρτησή μας δεν είναι συνεχής σε πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[a,b]$ πάλι είναι ολοκληρώσιμη. Θα χρειαστούν μερικές προτάσεις.

Πρόταση 7.26 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $[t,s] \subseteq [a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[t,s]$.*

Απόδειξη: Από το κριτήριο Riemann για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|\mathcal{P}\| < \delta$ συνεπάγεται $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Έστω $\mathcal{Q} = \{t = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = s\}$ διαμέριση του $[t,s]$ με $\|\mathcal{Q}\| < \delta$. Διαμερίζουμε τα διαστήματα $[a,t]$ και $[s,b]$ με βήμα $\delta/2$, δηλαδή θεωρούμε τα σημεία

$$a, a + \frac{\delta}{2}, a + 2\frac{\delta}{2}, \ldots$$

μέχρι το πρώτο σημείο $a + k\delta/2$ για το οποίο ισχύει $t - (a + k\delta/2) < \delta/2$. Έτσι το σύνολο

$$\left\{a, a + \frac{\delta}{2}, a + 2\frac{\delta}{2}, \ldots, a + k\frac{\delta}{2}, t = q_0 < q_1 < \cdots < q_n = s\right\}$$

είναι διαμέριση του $[a,s]$ λεπτότητας μικρότερης του δ. Ομοίως βρίσκουμε σημεία στο διάστημα $[s,b]$, ξεκινώντας από το s με βήμα $\delta/2$, ώστε μαζί με τα προηγούμενα να προκύψει μια διαμέριση $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$ για την οποία να ισχύει $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Φανερά τώρα ισχύει

$$U(f|_{[t,s]}, \mathcal{Q}) - L(f|_{[t,s]}, \mathcal{Q}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. $\square$

Πρόταση 7.27 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a,t]$ και $[t,b]$ για κάποιο $t \in [a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο $[a,b]$ και ισχύει*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^t f(x)\,dx + \int_t^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Από την ολοκληρωσιμότητα στο $[a,t]$ υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{Q}_n$ του $[a,t]$ ώστε $\|\mathcal{Q}_n\| \to 0$ και

$$U(f,\mathcal{Q}_n) - L(f,\mathcal{Q}_n) \to 0 \quad \text{και} \quad \int_a^t f(x)\,dx = \lim U(f,\mathcal{Q}_n).$$

Ομοίως για το διάστημα $[t, b]$ υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{R}_n$ του $[t, b]$ ώστε $\|\mathcal{R}_n\| \to 0$ και

$$U(f, \mathcal{R}_n) - L(f, \mathcal{R}_n) \to 0 \quad \text{και} \quad \int_a^t f(x)\,dx = \lim U(f, \mathcal{R}_n).$$

Θέτουμε $\mathcal{P}_n = \mathcal{Q}_n \cup \mathcal{R}_n$ η οποία είναι διαμέριση του $[a, b]$ και βεβαίως ισχύουν $\|\mathcal{P}_n\| = \max\{\|\mathcal{Q}_n\|, \|\mathcal{R}_n\|\} \to 0$ και

$$U(f, \mathcal{P}_n) = U(f, \mathcal{Q}_n) + U(f, \mathcal{R}_n) \quad \text{και} \quad L(f, \mathcal{P}_n) = L(f, \mathcal{Q}_n) + L(f, \mathcal{R}_n).$$

Άρα

$$U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) = \big(U(f, \mathcal{Q}_n) - L(f, \mathcal{Q}_n)\big) + \big(U(f, \mathcal{R}_n) - L(f, \mathcal{R}_n)\big) \to 0.$$

Έτσι, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim U(f, \mathcal{P}_n) = \lim\big(U(f, \mathcal{Q}_n + U(f, \mathcal{R}_n)\big) \\ &= \int_a^t f(x)\,dx + \int_t^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 7.28 *Αν* $\mathrm{K} > 0$ *ώστε* $|f(x)| \le K$ *για κάθε* $x \in [a, b]$ *και η* f *είναι συνεχής στο* $[a, b)$ *ή στο* $(a, b]$ *ή στο* (a, b), *τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$.

Απόδειξη: Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \ge n_0$ να ισχύει $a < a + 1/k < b - 1/k < b$ και $4K/k < \varepsilon/2$. Η f είναι συνεχής στο $[a + 1/k, b - 1/k]$ οπότε υπάρχει διαμέρισή του $\mathcal{Q}$ ώστε $U(f, \mathcal{Q}) - L(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon/2$. Θέτουμε $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cup \{a, b\}$. Για τη διαμέριση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned}U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) &= U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) + \frac{1}{k} \sup_{[a, a+(1/n)]} f(x) \\ &\qquad + \frac{1}{k} \inf_{[b-(1/n), b]} f(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}K + \frac{1}{n}K \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πόρισμα 7.29 *Αν η* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *είναι φραγμένη και συνεχής στο* $[a, b]$ *εκτός από τα πεπερασμένα στο πλήθος σημεία* $t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ *του* $[a, b]$ *τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$.

Απόδειξη: Φανερά $[a, b] = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \cdots \cup [t_N, b]$ και από την προηγούμενη πρόταση η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. Από την Πρόταση 7.27 η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{t_1} f(x)\,dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{t_N}^{b} f(x)\,dx. \qquad \square$$

7.5 Ιδιότητες ολοκληρώματος

Πρόταση 7.30 *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $\Delta = [a, b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και οι συναρτήσεις λf, $f \pm g$, $|f|$, f^2, fg είναι ολοκληρώσιμες στο Δ, και ισχύει*

$$\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

και για $a \leq b$, ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Απόδειξη: Για την λf παρατηρούμε ότι για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων για κάθε διαμέριση του Δ ισχύει $R(\lambda f, \mathcal{P}, \Xi) = \lambda R(f, \mathcal{P}, \Xi)$ οπότε αν το όριο του δεξιού μέλους υπάρχει όταν $\|\mathcal{P}\| \to 0$ υπάρχει και το όριο του πρώτου. Άρα η λf είναι ολοκληρώσιμη και χρησιμοποιώντας μια ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$ με $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ και παίρνοντας όρια στην προηγούμενη προκύπτει $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

Για την $f + g$ εφαρμόζουμε πρώτα το κριτήριο Riemann για τις f και g με $\varepsilon/2$ και επιλέγουμε το ελάχιστο από τα δύο $\delta > 0$ που δίνει το κριτήριο. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} M_j(f + g) &:= \sup_{[x_{j-1}, x_j]} (f + g)(x) \leq \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) + \sup_{[x_{j-1}, x_j]} g(x) \\ &\leq M_j(f) + M_j(g). \end{aligned}$$

Άρα $U(f + g, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) + U(g, \mathcal{P})$. Επίσης

$$\begin{aligned} m_j(f + g) &:= \inf_{[x_{j-1}, x_j]} (f + g)(x) \geq \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x) + \inf_{[x_{j-1}, x_j]} g(x) \\ &\geq m_j(f) + m_j(g), \end{aligned}$$

άρα $L(f + g, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}) + L(g, \mathcal{P})$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} U(f + g, \mathcal{P}) - L(f + g, \mathcal{P}) &\leq \big(U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P})\big) + \big(U(g, \mathcal{P}) - L(g, \mathcal{P})\big) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων για κάθε διαμέριση του Δ ισχύει $R(f+g,\mathcal{P},\Xi) = R(f,\mathcal{P},\Xi) + R(g,\mathcal{P},\Xi)$ οπότε χρησιμοποιώντας μια ακολουθία διαμερίσεων $\mathcal{P}_n$ με $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ και παίρνοντας όρια στην προηγούμενη προκύπτει $\int_a^b (f \pm g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Για την $f-g$ παρατηρούμε ότι $f-g = f+(-1)g$ οπότε το ζητούμενο προκύπτει από τα προηγούμενα.

Για την απόλυτη τιμή, από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} M_j(|f|) - m_j(|f|) &:= \sup_{[x_{j-1},x_j]} |f(x)| - \inf_{[x_{j-1},x_j]} |f(t)| \\ &= \sup_{[x_{j-1},x_j]} \sup_{[x_{j-1},x_j]} \big(|f(x)| - |f(t)|\big) \\ &\leq \sup_{[x_{j-1},x_j]} \sup_{[x_{j-1},x_j]} \big|f(x) - f(t)\big|. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Όμως, για κάθε x, t φανερά ισχύει $f(x) - f(t) \leq M_j(f) - m_j(f)$ και $f(t) - f(x) \leq M_j(f) - m_j(f)$, άρα $|f(x) - f(t)| \leq M_j(f) - m_j(f)$. Επιστρέφοντας στην (7.5) βρίσκουμε ότι

$$M_j(|f|) - m_j(|f|) \leq M_j(f) - m_j(f).$$

Από αυτό άμεσα προκύπτει ότι

$$U(|f|,\mathcal{P}) - L(|f|,\mathcal{P}) \leq U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}),$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το κριτήριο Riemann. Επίσης, επειδή $a \leq b$ εύκολα βλέπουμε ότι $|R(f,\mathcal{P},\Xi)| \leq R(|f|,\mathcal{P},\Xi)$. Παίρνοντας όριο για $\|\mathcal{P}\| \to 0$ προκύπτει

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Για την f^2, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη είναι φραγμένη. Έστω ότι για το $K > 0$ ισχύει $|f(x)| \leq K$ για κάθε $x \in [a,b]$. Εφαρμόζουμε για την $|f|$ το κριτήριο Riemann για $\varepsilon/2K$ οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|\mathcal{P}\| < \delta$ να ισχύει $U(|f|,\mathcal{P}) - L(|f|,\mathcal{P}) < \varepsilon/2K$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $M_j(f^2) = (M_j(|f|))^2$ και $m_j(f^2) = (m_j(|f|))^2$, οπότε

$$\begin{aligned} U(f^2,\mathcal{P}) - L(f^2,\mathcal{P}) &= \sum_j \big(M_j(f^2) - m_j(f^2)\big)\,(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_j \big(M_j(|f|) - m_j(|f|)\big)\big(M_j(|f|) + m_j(|f|)\big)\,(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_j \big(M_j(|f|) - m_j(|f|)\big)\,2K\,(x_j - x_{j-1}) \\ &= 2K\big(U(|f|,\mathcal{P}) - L(|f|,\mathcal{P})\big) \\ &< 2K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon, \end{aligned}$$

άρα η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Για το γινόμενο fg παρατηρούμε ότι $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ άρα η fg είναι ολοκληρώσιμη από τα προηγούμενα. $\square$

Παρατήρηση 7.31 Η τριγωνική ανισότητα για τα ολοκληρώματα παραπάνω χρησιμοποίησε τη συνθήκη $a \leq b$. Αν $a > b$ τότε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leq \int_b^a |f(x)|\,dx \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Γενικώς δηλαδή, χωρίς τη διάκριση $a \leq b$ ή $a > b$, ισχύει η ανισότητα

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Πρόταση 7.32 *Αν η $f : [a, b] \mapsto [c, d]$ είναι ολοκληρώσιμη και η $g : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η $g \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Η g είναι συνεχής στο $[c, d]$ άρα είναι φραγμένη. Έστω $K > 0$ ώστε $|g(x)| \leq K$ για κάθε $x \in [c, d]$.

Η g είναι και ομοιόμορφα συνεχής (Θεώρημα 6.6). Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας για $\varepsilon/(b - a + 2K)$: υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $|x - t| < \delta_1$ να συνεπάγεται $|g(x) - g(t)| < \varepsilon/(b - a + 2K)$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon/(b - a + 2K)\}$, και για $|x - t| < \delta$ συνεχίζει να ισχύει το προηγούμενο, αφού $\delta \leq \delta_1$.

Για το δ που μόλις βρήκαμε, εφαρμόζουμε το κριτήριο Riemann για την f και τον $\delta^2 > 0$: υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ ώστε $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \delta^2$.

Ξεχωρίζουμε τους δείκτες που $M_j(f) - m_j(f) < \delta$: θέτουμε

$$A = \big\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, M_j(f) - m_j(f) < \delta\big\}$$
$$\text{και } B = \big\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, M_j(f) - m_j(f) \geq \delta\big\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $j \in A$, τότε για κάθε x, $t \in [x_{j-1}, x_j]$ ισχύει $|f(x) - f(t)| \leq M_j(f) - m_j(f) < \delta$. Άρα, από την ομοιόμορφη συνέχεια της g συμπεραίνουμε ότι $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(t) < \varepsilon/(b - a + 2K)$. Παίρνοντας supremum ως προς x, $t \in [x_{j-1}, x_j]$ βρίσκουμε

$$M_j(g \circ f) - m_j(g \circ f) \leq \frac{\varepsilon}{b - a + 2K},$$

άρα

$$\sum_{j \in A} (M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b - a + 2K}\,(b - a). \tag{7.6}$$

Αν όμως $j \in B$ τότε

$$\begin{aligned}\delta^2 > U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^{n}(M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j\in B}\delta(x_j - x_{j-1})\end{aligned}$$

και άρα $\sum_{j\in B}(x_j - x_{x-1}) < \delta$. Με αυτήν και την (7.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned}&U(g\circ f,\mathcal{P}) - L(g\circ f,\mathcal{P}) \\ &\qquad = \frac{\varepsilon}{b-a+2K}(b-a) + \sum_{j\in B}(M_j(f) - m_j(f))(x_j - x_{j-1}) \\ &\qquad \leq \frac{\varepsilon}{b-a+2K}(b-a) + \sum_{j\in B}2K(x_j - x_{j-1}) \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{b-a+2K}(b-a) + \delta 2K \\ &\qquad \leq \frac{\varepsilon}{b-a+2K}(b-a) + \frac{\varepsilon}{b-a+2K}2K = \varepsilon\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να γνωρίζουμε την ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων όπως $e^{f(x)}$ αν η f είναι ολοκληρώσιμη ή της $1/f(x)$ αν $\inf_{x\in[a,b]} f(x) > 0$ εφόσον βέβαια γνωρίζουμε την ολοκληρωσιμότητα και τη συνέχεια της e^x ή της $1/x$ σε κλειστό διάστημα που δεν περιέχει το μηδέν.

7.6 Το θεμελιώδες θεώρημα

Θεώρημα 7.33 *Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε x_0 στο οποίο η f είναι συνεχής, και ισχύει $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Έτσι αν $0 < |h| < \delta$, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 7.31, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(_0)\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\big|f(t) - f(x_0)\big|\,dt\right|\end{aligned}$$

(και αλλάζοντας τη σειρά των άκρων ολοκλήρωσης αν $h < 0$)

$$\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\varepsilon}{2}\, dt\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Άμεσα έχουμε το επόμενο.

Θεώρημα 7.34 (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα) *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ τότε η παράγωγος της F υπάρχει σε κάθε σημείο του $[a, b]$ και ισχύει $F' = f$.* □

Η F στο προηγούμενο πόρισμα ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της f.

Πόρισμα 7.35 *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε μια συνάρτηση $G : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ικανοποιεί την*

$$\int_a^x f(t)\, dt = G(x) - G(a) \quad \text{αν και μόνο αν} \quad G'(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$.

Απόδειξη: Θέτουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt = G(x) - G(a)$ οπότε $F'(x) = f(x)$ αλλά και $F'(x) = G'(x)$.

Αντιστρόφως, αν $G'(x) = f(x)$ τότε $G'(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, οπότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $G = F + c$. Άρα $c = G(x) - F(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, άρα και για $x = a$. Αλλά $F(a) = 0$ οπότε $c = G(a)$. Συνεπώς, $G(x) = F(x) + G(a)$ άρα $F(x) = G(x) - G(a)$. □

Παρατήρηση 7.36 Σύμφωνα με το τελευταίο πόρισμα ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της f ανάγεται στην αναζήτηση μιας *αντιπαραγώγου* ή *παράγουσας* συνάρτησης, δηλαδή μιας συνάρτησης G για την οποία $G' = f$. Όμως πρέπει να τονίσουμε ότι το πόρισμα *απαιτεί* η f να είναι συνεχής για να ισχύει. Αυτή η απαίτηση δεν μπορεί να παραληφθεί. Δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν αντιπαράγωγο αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμες, όπως βλέπουμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.37 Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & \text{αν } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι για τη συνάρτηση

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{αν } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

ισχύει $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Αλλά η f δεν είναι ολοκληρώσιμη, αφού δεν είναι φραγμένη. Πράγματι,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}\sin(2\pi n) - 2\sqrt{2\pi n}\cos(2\pi n) \to -\infty.$$

Θεώρημα 7.38 (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα) *Αν η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Απόδειξη: Σε κάθε διάστημα $[x_{j-1}, x_j]$ οποιασδήποτε διαμέρισης $\mathcal{P}$ από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θεώρημα ΑΠΙ-ΙΙ.6) υπάρχει ξ_j ώστε $f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$. Άρα,

$$\begin{aligned} L(f,\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n m_j(f')(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^n f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\le \sum_{j=1}^n \big(f(x_j) - f(x_{j-1})\big) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Ομοίως, $U(f,\mathcal{P}) \ge f(b) - f(a)$. Συνεπώς

$$L(f,\mathcal{P}) \le f(b) - f(a) \le U(f,\mathcal{P})$$

για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$, και άρα $f(b) - f(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. □

7.7 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Στα επόμενα, για συντομία θα γράφουμε $f|_a^b$ για την ποσότητα $f(b) - f(a)$.

Θεώρημα 7.39 (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες) *Έστω ότι οι f και $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε ισχύει*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Η fg είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Από την υπόθεση οι συναρτήσεις fg' και $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(fg)'$. Συνεπώς

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b (fg)'(x) = (fg)(b) - (fg)(a),$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η ζητούμενη. □

Το παραπάνω θεώρημα το αξιοποιούμε ώστε να «μεταφέρουμε» την παράγωγο από την μία συνάρτηση στην άλλη όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.40 Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b xe^x\,dx$. Γράφουμε την e^x ως $(e^x)'$ ώστε εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες να «μεταφερθεί» η παράγωγος στο x και να απαλλαγούμε από αυτό:

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^x\,dx &= \int_a^b x(e^x)'\,dx = (xe^x)\Big|_a^b - \int_a^b x'e^x\,dx\\ &= (xe^x)\Big|_a^b - \int_a^b 1e^x\,dx = (xe^x)\Big|_a^b - \int_a^b (e^x)'\,dx\\ &= (xe^x)\Big|_a^b - e^x\Big|_a^b = be^b - ae^a - e^b + e^a.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.41 Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^b 2x\log x\,dx$. Γράφουμε την $2x$ ως $(x^2)'$ ώστε εφαρμόζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες να «μεταφερθεί» η παράγωγος στο $\log x$ και να απαλλαγούμε από αυτό:

$$\begin{aligned}\int_a^b 2x\log x\,dx &= \int_a^b (x^2)'\log x\,dx = (x^2\log x)\Big|_a^b - \int_a^b x^2(\log x)'\,dx\\ &= (x^2\log x)\Big|_a^b - \int_a^b x^2\frac{1}{x}\,dx = (x^2\log x)\Big|_a^b - \int_a^b x\,dx\\ &= (x^2\log x)\Big|_a^b - \int_a^b \Big(\frac{x^2}{2}\Big)'\,dx = (x^2\log x)\Big|_a^b - \Big(\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_a^b\\ &= b^2\log b - a^2\log a - \frac{b^2-a^2}{2}.\end{aligned}$$

Στα παραπάνω παραδείγματα η παράγωγος αξιοποιήθηκε ώστε να απαλλαγούμε από τη μια από τις δύο συναρτήσεις. Στο επόμενο παράδειγμα αυτό δεν μπορεί να συμβεί αφού η παραγώγιση τις επαναφέρει. Ακριβώς αυτό το φαινόμενο το αξιοποιούμε για να σχηματίσουμε μια εξίσωση με το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 7.42 Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_a^b e^x \sin x\, dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b (e^x)' \sin x\, dx = (e^x \sin x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x (\sin x)'\, dx \\
&= (e^x \sin x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x \cos x\, dx = (e^x \sin x)\Big|_a^b - \int_a^b (e^x)' \cos x\, dx \\
&= (e^x \sin x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x (\cos x)'\, dx \\
&= (e^x \sin x)\Big|_a^b - \left((e^x \cos x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x \sin x\, dx \right) \\
&= (e^x \sin x)\Big|_a^b - (e^x \cos x)\Big|_a^b + I.
\end{aligned}$$

Άρα, λύνοντας ως προς I, παίρνουμε

$$I = \frac{1}{2} \left((e^x \sin x)\Big|_a^b - (e^x \cos x)\Big|_a^b \right).$$

Μια ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική υπολογισμού ολοκληρωμάτων είναι η τεχνική της αντικατάστασης, για την οποία δίνουμε δύο θεωρήματα. Παρατηρήστε ότι αν η $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε το σύνολο τιμών της, δηλαδή το $\phi([a, b])$, είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[c, d]$, διότι η ϕ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή (Πρόταση ΑΠΙ-9.11) (άρα $c = \min f(x)$ και $d = \max f(x)$) και η ϕ δίνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές ανάμεσα στα c και d από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (Θεώρημα ΑΠΙ-9.14).

Θεώρημα 7.43 (Πρώτο θεώρημα αντικατάστασης) *Έστω ότι η συνάρτηση $\phi : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η ϕ' ολοκληρώσιμη. Αν $\Delta = \phi([a, b])$ και $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f\big(\phi(x)\big)\phi'(x)\, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\, dx.$$

Απόδειξη: Η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Ορίζουμε $F : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_{\phi(a)}^x f(t)\, dt$. Παρατηρήστε ότι το $\phi(a)$ δεν είναι απαραίτητα άκρο του διαστήματος Δ, δηλαδή η F δεν είναι απαραίτητα το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αφού η f είναι συνεχής στο Δ η F είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $F' = f$. Άρα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f\big(\phi(x)\big)\phi'(x)\,dx &= \int_a^b F'\big(\phi(x)\big)\phi'(x)\,dx\\ &= \int_a^b (F\circ\phi)'(x)\,dx = F\big(\phi(b)\big) - F\big(\phi(a)\big)\\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt - \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f(t)\,dt\\ &= \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt. \qquad\square\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.44 Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 2x\sin(\pi x^2)\,dx$. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\phi(x) = \pi x^2$ τότε αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του πρώτου θεωρήματος αντικατάστασης και ισχύει $\phi'(x) = 2x\pi$. Άρα,

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sin(\pi x^2)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\phi(x))\phi'(x)\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\phi(0)}^{\phi(1)} \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (-\cos x)'\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Θεώρημα 7.45 (Δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης) *Έστω ότι η συνάρτηση $\psi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, με ψ' συνεχής και $\psi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αν $\Delta = \psi([a,b])$ και η $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f\big(\psi(x)\big)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\,(\psi^{-1})'(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Η ψ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$. Άρα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική. Δηλαδή η ψ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Ας υποθέσουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, ορίζεται η αντίστροφή της, η $\psi^{-1} : \Delta \mapsto \mathbb{R}$, και αφού είναι γνησίως αύξουσα, $\Delta = [\psi(a), \psi(b)]$. Παρατηρήστε ότι η $(\psi^{-1})'$ είναι συνεχής στο Δ (διότι από το θεώρημα παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης (Πρόταση ΑΠΙ-10.14) είναι $(\psi^{-1})'(\psi(x)) = 1/\psi'(x)$ η οποία είναι συνεχής). Άρα η $f\,(\psi^{-1})'$ είναι ολοκληρώσιμη και από το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\,(\psi^{-1})'(x)\,dx &= \int_a^b \big(f\,(\psi^{-1})'\big)\circ\psi)(x)\;\psi'(x)\,dx\\ &= \int_a^b \big(f\,(\psi^{-1})'\big)\big(\psi(x)\big)\;\psi'(x)\,dx\\ &= \int_a^b f\big(\psi(x)\big)\,(\psi^{-1})'\big(\psi(x)\big)\psi'(x)\,dx\\ &= \int_a^b f\big(\psi(x)\big)\,(\psi^{-1}\circ\psi)'(x)\,dx = \int_a^b f\big(\psi(x)\big)\,dx. \quad \square\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.46 Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \sin(\pi\log x)\,dx$. Η συνάρτηση $\psi(x) = \pi\log x$ είναι παραγωγίσιμη και η $\phi'(x) = \pi/x$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ και δεν μηδενίζεται. Άρα από το δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης, με $\psi^{-1}(x) = e^{x/\pi}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^e \sin(\pi\log x)\,dx &= \int_{\log 1}^{\log e} \sin x\,(e^{x/\pi})'\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{x/\pi}\sin x\,dx,\end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες όπως και στο Παράδειγμα 7.42 (αφήνεται ως άσκηση).

7.8 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάποια βασικά αποτελέσματα για συναρτήσεις που δεν είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ αλλά σε ένα τέτοιο διάστημα αλλά με ανοικτό το ένα ή και τα δύο άκρα του: $[a, b)$ ή $(a, b]$ ή (a, b) όπου τα a και b μπορεί να είναι πεπερασμένα ή άπειρα (όταν είναι σε ανοικτό άκρο).

Ας πάρουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ στο διάστημα $(0, 1]$. Η συνάρτηση αυτή δεν είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της, αλλά είναι φράγμενη και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[t, 1]$ για $0 < t < 1$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να *ορίσουμε* το «ολοκλήρωμά της» από το 0 ως το 1 θέτοντας

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Προσοχή: δεν εννούμε σε καμία περίπτωση ότι η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1]$. Ολοκληρώσιμη *δεν* είναι. Για αυτό το παραπάνω όριο το λέμε «γενικευμένο ολοκλήρωμα» για να το διαχωρίσουμε—ως έννοια—από το ολοκλήρωμα.

Παρατήρηση 7.47 Η ολοκληρωσιμότητα μη φραγμένων συναρτήσεων θα μελετηθεί σε επόμενα έτη των σπουδών σας όταν θα επεκτείνουμε τον ορισμό του Riemann στο ορισμό του Lebesgue. Αλλά αυτό είναι ένα προχωρημένο θέμα, και η αναφορά του εδώ έγινε μόνο και μόνο για να έχετε μια ιδέα για το πώς θα εξελιχθούν τα πράγματα στην ολοκλήρωση.

Ομοίως το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty 1/x^2\,dx$ ορίζεται ως

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\Big(-\frac{1}{t}+\frac{1}{1}\Big) = 1.$$

Στα ολοκληρώματα που απαιτούνται δύο όρια, όπως για παράδειγμα ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ όπου η ορίζεται στο (a,b) αλλά όχι στα a και b και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[t,s]\subseteq(a,b)$, απλώς χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε σημείο c με $a<c<b$ γράφοντας

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a^+}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{s\to b^-}\int_c^s f(x)\,dx.$$

Βέβαια πρέπει να αποδειχθεί ότι αν επιλεχθεί ένα άλλο $c\in(a,b)$ το αποτέλεσμα δεν αλλάζει, αλλά αυτό είναι πολύ απλό και αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 7.48 Το $\int_{-\infty}^{\infty} 1/(1+x^2)\,dx$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{s\to+\infty}\int_0^s \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \lim_{t\to-\infty}(\arctan x)\Big|_t^0 + \lim_{s\to+\infty}(\arctan x)\Big|_0^s\\ &= \lim_{t\to-\infty}(0-\arctan t) + \lim_{s\to+\infty}(\arctan s - 0)\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Σημαντική Παρατήρηση 7.49 Αν η παραπάνω επιλογή για να οριστεί ένα ολοκλήρωμα σε ανοικτό διάστημα σας φαίνεται η μόνη φυσιολογική θα πρέπει να το ξανασκεφτείτε. Η μη ολοκληρωσιμότητα αυτών των συναρτήσεων μας επιτρέπει να σκεφτούμε και άλλους «φυσιολογικούς» τρόπους να «ορίσουμε» ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε το $\int_a^b f(x)\,dx$ για μια συνάρτηση f που ορίζεται μόνο στο ανοικτό (a,b) να είναι το όριο $\lim_{t\to0^+}\int_{a+t}^{b-t} f(x)\,dx$. Ένας τέτοιος ορισμός, πάλι δείχνει «φυσιολογικός» εν τούτοις μπορεί να δίνει άλλα αποτελέσματα από το να πάρουμε το διπλό όριο $\lim_{t\to0^+}\lim_{s\to0^+}\int_{a+t}^{b-s} f(x)\,dx$.

Για παράδειγμα, το $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$ δεν υπάρχει όταν χρησιμοποιηθούν τα δύο όρια ως προς t και ως προς s, αλλά αν χρησιμοποιηθεί το

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

το όριο υπάρχει και είναι μηδέν. Πράγματι,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\sin x\,dx=\lim_{t\to+\infty}\left(-\cos x\right)\Big|_{-t}^{t}=\lim_{t\to+\infty}\big(-\cos t+\cos(-t)\big)=0.$$

Η τιμή αυτή, που προκύπτει από ένα όριο όπως πριν ονομάζεται «κύρια τιμή του Cauchy» για το ολοκλήρωμα (Cauchy principal value) και γράφουμε

$$⨍_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=0.$$

Ομοίως, αν η f είναι ορισμένη στο $[a,b]\setminus\{c\}$, όπου $c\in(a,b)$ η κύρια τιμή του Cauchy είναι

$$⨍_{a}^{b}f(x)\,dx=\lim_{t\to0^+}\left(\int_{a}^{c-t}f(x)\,dx+\int_{c+t}^{b}f(x)\,dx\right),$$

ενώ το γενικευμένο ολοκλήρωμα θα μπορούσε να οριστεί και ως το διπλό όριο

$$\lim_{t\to0^+}\int_{a}^{c-t}f(x)\,dx+\lim_{s\to0^+}\int_{c+s}^{b}f(x)\,dx.$$

7.9 Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 7.9.1. Αποδείξτε ότι

$$\sup_{x,y\in[a,b]}\left|f(x)-f(y)\right|=\sup_{t\in[a,b]}f(t)-\inf_{t\in[a,b]}f(t).$$

Άσκηση 7.9.2. Αν f,g ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$.

Άσκηση 7.9.3. Αν $f\ge0$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $[c,d]\subseteq[a,b]$ αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_c^d f(x)\,dx.$$

Άσκηση 7.9.4. Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, $f\ge0$ και $\int_a^b f(x)\,dx=0$ αποδείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$.

Άσκηση 7.9.5. Αν η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και η f^2 είναι ολοκληρώσιμη μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη; Αλλάζει κάτι στην απάντηση αν υποθέσουμε ότι η f^3 είναι ολοκληρώσιμη (αντί της f^2);

Άσκηση 7.9.6. Αποδείξτε ότι αν η f είναι μονότονη στο $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 7.9.7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+|x|+1}\,dx\quad\text{και}\quad\Gamma(n):=\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt.$$

Άσκηση 7.9.8. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι η $\log(1+x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Άσκηση 7.9.9. Αν η f ορισμένη στο $[0,1]$ και $f \geq 0$, δείξτε ότι αν είναι συνεχής στο $1/2$ και $f(1/2) = 1/2$ τότε $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$.

Άσκηση 7.9.10. Βρίτε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$$

γράφοντάς το έτσι ώστε να είναι ένα άθροισμα Darboux ή Riemann μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Άσκηση 7.9.11. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με φραγμένη παράγωγο στο (α,β) δηλαδή $|f'(x)| \leq M$ για $\alpha < x < \beta$. Θέτουμε:

$$\alpha_n = \frac{\beta-\alpha}{n}\left[f(\alpha) + f\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right) + f\left(\alpha + 2\frac{\beta-\alpha}{n}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + f\left(\alpha + (n-1)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right].$$

(i) Ποια είναι η γεωμετρική σημασία του α_n; (υποθέστε ότι $f \geq 0$.)

(ii) Δείξτε ότι $\lim \alpha_n = \int_\alpha^\beta f$.

(iii) Ισχύει το β αν υποθέσουμε μόνο τη συνέχεια της f στο $[\alpha,\beta]$;

(iv) Δείξτε ότι

$$\left|\alpha_n - \int_\alpha^\beta f\right| \leq \frac{M(\beta-\alpha)^2}{2}\,\frac{1}{n}$$

Άσκηση 7.9.12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty xe^{-x}\,dx$.

Άσκηση 7.9.13. Για κάθε συνάρτηση $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ ορίζουμε το μήκος του γραφήματος της f ως τον αριθμό ℓ (αν υπάρχει) για τον οποίον, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\|\mathcal{P}\| < \delta$ τότε

$$\left|\ell - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)^2 + (x_k - x_{k-1})^2}\right| < \varepsilon.$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης τιμής (Θεώρημα ΑΠΙ-ΙΙ.6), ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' ολοκληρώσιμη,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{\left(f'(x)\right)^2 + 1}\,dx$$

και στη συνέχεια υπολογίστε το μήκος του γραφήματος της $f(x) = x^2$ στο $[0,1]$ και της $g(x) = \log(\cos x)$ στο $[0,\pi/4]$.

Άσκηση 7.9.14. Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με την ιδιότητα $L(f,\mathcal{P}) = U(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ για οποιεσδήποτε διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ του $[a,b]$. Δείξτε ότι η f είναι αναγκαστικά σταθερή.

Άσκηση 7.9.15. Έστω ότι $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν ο x είναι ρητός και $f(x) = 0$ αν ο x είναι άρρητος.

(α) Υπολογίστε το $L(f,\mathcal{P})$ για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[0,1]$.

(β) Υπολογίστε το $\inf\{U(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P}$ διαμέριση του $[0,1]\}$.

Άσκηση 7.9.16. Αποδείξτε ότι για κάθε $a>1$ ισχύει

(α) $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\big(n(\sqrt[n]{a}-1)\big)$

(β) $\displaystyle 1-\frac{1}{a} \leq \int_1^a \frac{1}{x}\,dx \leq a-1.$

(γ) $\displaystyle \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leq \int_1^a \frac{1}{x}\,dx \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$

Άσκηση 7.9.17. Εκφράστε τα παρακάτω όρια ως ολοκληρώματα Riemann, κατάλληλων συναρτήσεων

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^8}\sum_{k=1}^{n}k^7,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k\pi/n), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

Άσκηση 7.9.18. Αν $t_1,t_2,\ldots,t_N\in[a,b]$ και $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]\setminus\{t_1,\ldots,t_N\}$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Άσκηση 7.9.19. Βρείτε μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)<0$ για κάποιο $x_0\in[a,b]$, αλλά $\int_a^b f(x)\,dx>0$.

Άσκηση 7.9.20. Αποδείξτε ότι αν $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση, τότε $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Άσκηση 7.9.21. Αποδείξτε ότι αν $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ περιττή συνάρτηση, τότε $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$.

Άσκηση 7.9.22. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,\infty)$ και αν υπάρχει το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$ τότε υπάρχουν και τα (γενικευμένα) ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(xy)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(xy)\,dx$ για οποιοδήποτε $y\in\mathbb{R}$. Τα ολοκληρώματα αυτά λέγονται μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνου και ημιτόνου της f αντίστοιχα και έχουν πολλές εφαρμογές.

Υποθέστε επιπλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ακόμη ότι για κάποιο $\alpha>0$, $f(x)=0$ για $|x|\geq\alpha$. Δείξτε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier συνημιτόνου και ημιτόνου της f, σαν συναρτήσεις του y, τείνουν στο 0 για $y\to\infty$ καθώς και για $y\to-\infty$.

Άσκηση 7.9.23. Γράφουμε $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

(i) Δείξτε ότι $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

(ii) Χρησιμοποιείστε το (i) για να δείξετε ότι:

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2n(2n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$$

και επομένως

$$\pi = 2\frac{[2n(2n-2)\cdots 2]^2}{(2n+1)[(2n-1)(2n-3)\cdots 3]^2}\,\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Ξεκινώντας από τη σχέση: $\sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \leq \sin^{2n-1}x$ και το (i) δείξτε ότι:

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

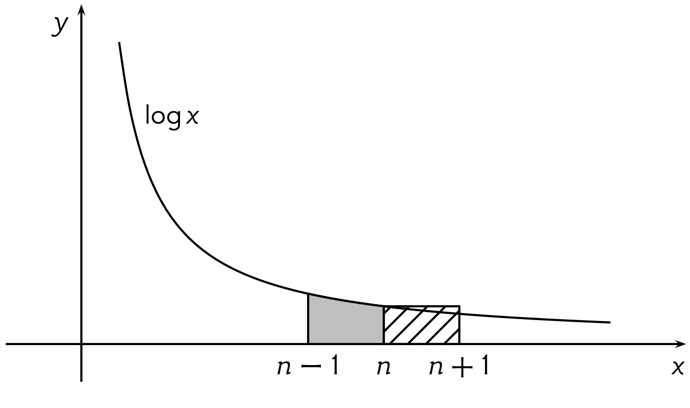
και επομένως $I_{2n}/I_{2n+1} \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

(iv) Συμπεράνετε τον επόμενο τύπο του Wallis:

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left(4n\left(\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}\right)^2\right).$$

Άσκηση 7.9.24.

(i) Εξετάζοντας το $\int_1^n (1/t)\,dt$ δείξτε ότι $\left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right| < 1$. Δείξτε ακόμη ότι η $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ είναι φθίνουσα.



Σχήμα 7.1: Γραφική παράσταση λογαρίθμου.

(Υπόδειξη: το διαγραμμισμένο εμβαδόν στο Σχήμα 7.1 είναι μικρότερο από το γκρίζο). Υπάρχει επομένως το $\lim \gamma_n$ το οποίο συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα γ ($\sim 0{,}5772156649\ldots$) και λέγεται σταθερά του Euler. Ερώτηση: είναι το γ ρητός ή άρρητος; Δοκιμάστε αν θέλετε να απαντήσετε σε αυτή την ερώτηση αλλά μην επιμείνετε πολύ. Κανείς, μέχρι σήμερα, δεν μπόρεσε να βρει την απάντηση (και δοκίμασαν πολλοί και καλοί μαθηματικοί, όπως ο Euler για παράδειγμα).

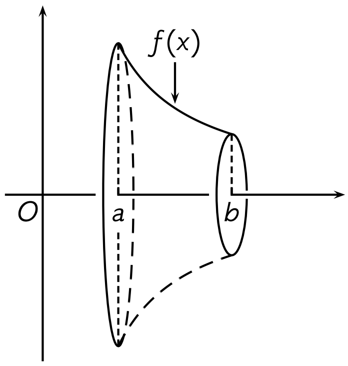
(ii) Συγκρίνοντας το $\log(n!)$ με το $\int_1^{n+1/2} \log x\,dx$ δείξτε ότι αν

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^{n+1/2}}e^{-n}$$

τότε υπάρχουν δύο θετικές σταθερές A, B ώστε $A < \alpha_n < B$.
$\left(\text{Υπόδειξη: } \int_1^{n+1/2} = \int_1^{3/2} + \int_{3/2}^{5/2} + \cdots + \int_{n-1/2}^{n+1/2}\right)$

(iii) Ισχύει κάτι παραπάνω: $\lim \alpha_n = \sqrt{2\pi}$ (τύπος του Stirling). Για την απόδειξη αρκεί να δείξετε ότι η α_n είναι μονότονη και μετά να χρησιμοποιήσετε τον τύπο του Wallis για να δείξετε ότι

$$\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}} \to \sqrt{2\pi}.$$



Σχήμα 7.2: Στερεό εκ περιστροφής

Άσκηση 7.9.25. Θεωρείστε μια θετική συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $\alpha \leq \beta$, και το στερεό που παράγεται με περιστροφή του γραφήματος της γύρω από τον άξονα Ox κατά γωνία 2π.

(i) Δώστε επιχειρήματα που να καθιστούν ευλογοφανή τον τύπο:

$$V = \int_\alpha^\beta \pi(f(x))^2\,dx$$

για τον όγκο V αυτού του στερεού. (Δεν ζητάμε αυστηρή απόδειξη γιατί δεν έχουμε δώσει ακριβή ορισμό του όγκου ενός στερεού.)

(ii) Εφαρμόστε τον τύπο αυτό για να βρείτε τους γνωστούς τύπους της στερεομετρίας για τους όγκους σφαιρικού τμήματος, κυλίνδρου, κώνου, κόλουρου κώνου.

Άσκηση 7.9.26. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ του άξονα των x, του γραφήματος της $f(x) = x^4$ και της εφαπτομένης του γραφήματος στο σημείο $(2, 16)$.

Άσκηση 7.9.27. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x^2)\,dx = 2\int_0^{\alpha} f(x^2)\,dx, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} xf(x^4)\,dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx$$

και

$$\int_0^{k\pi} f(\cos^2 x)\,dx = k\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)\,dx,$$

$k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 7.9.28. Για ποια τιμή του θετικού αριθμού α ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t+\alpha}}\,dt = 1;$$

Άσκηση 7.9.29. Βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}e^{-2x}\int_0^x e^{2t}\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Άσκηση 7.9.30. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ με βάση τον ορισμό ή την Άσκηση 7.9.11.. (Υπόδειξη :

$$\sin x + \cdots + \sin kx = \frac{\cos(x/2) - \cos(k + (1/2)x)}{2\sin(x/2)},$$

$x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Άσκηση 7.9.31. Δείξτε ότι

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} \, dt \leq \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Μπορούν να αντικατασταθούν οι παραπάνω ανισότητες με γνήσιες; *Παρατήρηση*: Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (\sin t)/t \, dt$ δεν υπολογίζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Επομένως μην προσπαθήσετε να το βρείτε.

Άσκηση 7.9.32. Αν η συνάρτηση f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\lim_{k \to \infty} \int_\alpha^\beta (f(x) \cos kx) \, dx = 0.$$

Κεφάλαιο 8

Τεχνικές ολοκλήρωσης

8.1 Γενικά περί αντιπαραγώγων

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά, και αφήνοντας τις περισσότερες πράξεις ως άσκηση, τις τεχνικές με τις οποίες υπολογίζουμε ολοκληρώματα όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε έχει αντιπαράγωγο. Δηλαδή θα δούμε με ποιους τρόπους βρίσκουμε μια F ώστε $F' = f$ και άρα

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Βέβαια δεν είναι μοναδική η αντιπαράγωγος μιας f, αφού αν $F' = f$ ισχύει και $(F+c)' = f$ για κάθε σταθερά $c \in \mathbb{R}$, και μάλιστα έχουμε δει ότι αυτές οι συναρτήσεις, οι $F + c$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$ είναι όλες οι αντιπαράγωγοι f (Πόρισμα ΑΠΙ-ΙΙ.8). Έτσι την γενική αντιπαράγωγο της f θα τη συμβολίζουμε με $\int f(x)\,dx$, δηλαδή χωρίς άκρα στο ολοκλήρωμα και θα τη λέμε «αόριστο ολοκλήρωμα» της f. Το αόριστο ολοκλήρωμα δεν είναι μοναδικό, αφού εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου c. Έτσι θα γράφουμε πάντα στις απαντήσεις μας το «+c»: για παράδειγμα $\int (2x)\,dx = x^2 + c$ ή $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ ή $\int (1/x)\,dx = \log x + c$ κλπ.

Επίσης το αόριστο ολοκλήρωμα δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει. Θεωρήστε για παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Αν αυτή η f είχε αντιπαράγωγο, τότε θα είχε την ιδιότητα των ενδιάμεσων τιμών (Θεώρημα ΑΠΙ-ΙΙ.12), αλλά βεβαίως η f ποτέ δεν παίρνει την ενδιάμεση τιμή $1/2$. Άρα δεν έχει αντιπαράγωγο.

Επιπλέον, ενώ η παράγωγος μια στοιχειώδους συνάρτησης (δηλαδή συνάρτησης που κατασκευάζεται με πεπερασμένο πλήθος πράξεων πολυωνύμων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων, εκθετικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους) είναι στοιχειώδης, η αντιπαράγωγος μπορεί να μην είναι. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι η αντιπαράγωγος της $(\sin x)/x$ δεν μπορεί να γραφτεί με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων.

8.2 Τεχνικές ολοκλήρωσης

Για τα ολοκληρώματα βασικών συναρτήσεων (όπως της $\sin x$ ή της $\cos x$ κλπ) παραπέμπουμε στον εκτενή πίνακα στο αρχείο «Το σκονάκι» στο δεσμό/qrcode στο περιθώριο αυτής της παραγράφου. Ο πίνακας αυτός έχει πάρα πολλά ολοκληρώματα στις σελίδες 6 και 7. Χρειάζεται να γνωρίζεται μόνο τα ολοκληρώματα από 1–9 της σελίδας 6, αφού για όλα τα υπόλοιπα θα αναπτύξουμε τις τεχνικές με τις οποίες υπολογίζονται. Αλλά ο πίνακας αυτός θα σας είναι χρήσιμος σε άλλα μαθήματα που το αντικείμενό τους δεν είναι η ολοκλήρωση και χρειάζεστε να βρίσκετε γρήγορα απαντήσεις.

Τεχνική 8.1 (Μέθοδος αντικατάστασης) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx$ θέτουμε $t = \phi(x)$ και παρατηρούμε ότι $\phi'(x)\,dx = dt$, οπότε το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int f(t)\,dt$.

Για παράδειγμα, για το $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ θέτουμε $t = \arctan x$ και παρατηρούμε ότι $(1/(1+x^2))\,dx = dt$. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c.$$

Τεχνική 8.2 (Τριγωνομετρικές συναρτήσεις Α′) Ολοκληρώματα με τριγωνομετρικές συναρτήσεις, συχνά υπολογίζονται με τη βοήθεια τριγωνομετρικών τύπων ώστε είτε να αναχθούμε σε συναρτήσεις με γνωστές αντιπαραγώγους είτε να εφαρμόζεται η Τεχνική 8.1.

Για παράδειγμα, για το ολοκλήρωμα $\int \cos^2 x\,dx$ χρησιμοποιούμε τον τύπο διπλασίου τόξου του συνημιτόνου:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\Big) + c.$$

Ή για το $\int \sin^3 x\,dx$ κάνουμε το εξής:

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

και αντικαθιστούμε $t = \cos x$ οπότε $dt = -\sin x\,dx$. Άρα

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (1-t^2)\,dt = t - \frac{1}{3}t^3 + c = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c.$$

Τεχνική 8.3 (Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις)

- Ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{a^2 - x^2}$ θέτουμε $x = a\sin t$ ή $x = a\cos t$.
- Ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{x^2 - a^2}$ θέτουμε $x = a/\cos t$.
- Ολοκληρώματα που περιέχουν την παράσταση $\sqrt{a^2 + x^2}$ θέτουμε $x = a\tan t$.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx.$$

Τεχνική 8.4 (Ολοκλήρωση κατά παράγοντες) Όπως αναπτύχθηκε η τεχνική στο Θεώρημα 7.39, έτσι και εδώ ισχύει

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int x\log x\,dx \qquad \int \log x\,dx \qquad \int e^{2x}\cos x\,dx.$$

Τεχνική 8.5 (Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων Α') Για ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}\,dx$$

με $b^2 - 4c < 0$ πρώτα συμπληρώνουμε το τετράγωνο και στη συνέχεια ακολουθούμε την Τεχνική 8.3.

Για παράδειγμα, $x^2 + x + 1 = (x+1/2)^2 + 3/4$. Οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx &= \int \frac{1}{\left((x+1/2)^2+3/4\right)^2}\\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\left(\frac{x+1/2}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

Με βάση την Τεχνική 8.3, θέτουμε $\tan t = (x+1/2)/\sqrt{3/4}$, οπότε

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = (1+\tan^2 t)\,dt.$$

Έτσι, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(\tan^2 t+1)^2}\,(1+\tan^2 t)\,dt &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{1}{\tan^2 t+1}\,dx\\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \cos^2 t\,dt.\end{aligned}$$

Αλλά το τελευταίο το υπολογίσαμε στην Τεχνική 8.2. Οπότε παίρνουμε:

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{8\sqrt{3}}{9}\big(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\big) + c, \tag{8.1}$$

όπου $\tan t = (x+1/2)/\sqrt{3/4}$. Λύνοντας ως προς t και αντικαθιστώντας στην παραπάνω βλέπουμε ότι θα έχουμε την παράσταση $\cos(\arctan((x+1/2)/\sqrt{3/4}))$. Αυτού του τύπου οι παραστάσεις απλοποιούνται ως εξής: αν $\arctan s = \theta$, τότε $\tan\theta = s$, δηλαδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μια γωνία θ η απέναντι της θ προς την προσκείμενη ισούται με s. Αυτό μπορεί να γίνει αν η απέναντι είναι s και η προσκείμενη 1. Σε αυτό το τρίγωνο η υποτείνουσα είναι $\sqrt{1-s^2}$, άρα

$$\cos\arctan s = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Οπότε, ισχύει

$$\cos\left(\arctan\frac{(x+1/2)}{\sqrt{3/4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{(x+1/2)}{\sqrt{3/4}}\right)^2}}.$$

Αντικαθιστούμε αυτή την έκφραση στην (8.1) και απλοποιούμε, ολοκληρώνοντας τον υπολογισμό.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2-3x+4)^3}\,dx.$$

Για την επόμενη τεχνική χρειαζόμαστε ένα Θεώρημα που διδάσκεται στο 3ο έτος συνήθως στο μάθημα της Μιγαδικής Ανάλυσης: Κάθε πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο ενός αριθμού, παραγόντων της μορφής $(x-a)^k$ με όπου $a\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, και παραγόντων της μορφής $(x^2+bx+c)^m$, b, $c\in\mathbb{R}$ και $b^2-4c<0$. Για παράδειγμα, το x^5-x^4+x-1 έχει ρίζα το 1 και γράφεται ως $(x-1)(x^4+1)$. Το τελευταίο τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο *δεν* έχει βέβαια ρίζες. Εν τούτοις, γνωρίζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα από τη Μιγαδική Ανάλυση, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αριθμοί A, B, C, D ώστε να ισχύει

$$x^4+1 = (x^2+Ax+B)(x^2+Cx+D).$$

Πολλαπλασιάζοντας στα δεξιά, εξισώνοντας τους συντελεστές, και λύνοντας το σύστημα που προκύπτει, βρίσκουμε ότι

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Τεχνική 8.6 (*Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων Β′*) *Αν έχουμε να ολοκληρώσουμε ένα πηλίκο πολυωνύμων, τότε αν ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του παρονομαστή, κάνουμε τη διαίρεση των πολυωνύμων καταλήγοντας σε ένα άθροισμα πολυωνύμου και ενός πηλίκου πολυωνύμων που ο αριθμητής έχει βαθμό γνησίως μικρότερο του παρονομαστή.*

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ο αριθμητής έχει βαθμό γνησίως μικρότερο του βαθμού του παρονομαστή. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή, σε γινόμενο πραγόντων της μορφής $p(x)^k$ όπου το $p(x)$ είναι της μορφής $x - a$ ή της μορφής $x + bx + c$ με $b^2 - 4c < 0$, σύμφωνα με τα παραπάνω. Στη συνέχεια εξισώνουμε το πηλίκο των πολυωνύμων μας με ένα άθροισμα που για κάθε παράγοντα $p(x)$ που βρήκαμε γράφουμε τους προσθετέους

$$\frac{A_1}{p(x)} + \frac{A_2}{p(x)^2} + \dots + \frac{A_k}{p(x)^k}$$

αν $p(x) = x - a$ και

$$\frac{B_1 x + C_1}{p(x)} + \frac{B_2 x + C_2}{p(x)^2} + \dots + \frac{B_k x + C_k}{p(x)^k}$$

αν $p(x) = x^2 + bx + c$ με $b^2 - 4c < 0$.

Παράδειγμα 8.7 Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι ήδη παραγοντοποιημένος και έχει βαθμό 7, μεγαλύτερο του βαθμού του αριθμητή που είναι 1. Έτσι γράφουμε

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}.$$

Πρέπει βεβαίως να βρούμε όλους τους αριθμούς A, B, C, D, E, F, και G. Για να γίνει αυτό κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} x + 1 = {} & A(x-1)^2(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 + C(x^2+1)^2 \\ & + (Dx+E)(x-1)^3(x^2+1) + (Fx+G)(x-1)^3. \end{aligned}$$

Τώρα θα πρέπει να γίνουν οι πράξεις στα δεξιά! Βεβαίως μπορούμε να τις κάνουμε με το χέρι αλλά στο πανεπιστημιακό επίπεδο είναι μάλλον χαμένος χρόνος και είναι και εύκολο να κάνουμε λάθος. Μπορούμε να πάμε στον SAGE server (SAGE (σαζ) στα γαλλικά σημαίνει «σοφός») στη διεύθυνση που δίνει το qrcode δεξιά και να γράψουμε τον κώδικα:

Scan to copy code

```
var('x,A,B,C,D,E,F,G')
f=A*(x-1)^2*(x^2+1)^2+B*(x-1)*(x^2+1)^2+C*(x^2+1)^2
  +(D*x+E)*(x-1)^3*(x^2+1)+(F*x+G)*(x-1)^3
f.collect(x)
```

όπου η συνάρτηση πρέπει να γραφτεί σε μία γραμμή (εδώ αλλάξαμε γραμμή για να χωρέσει στη σελίδα) και να πατήσουμε «Evaluate». Οπότε θα πάρουμε αμέσως την απάντηση

$$\begin{aligned}(A + D)x^6 &- (2A - B + 3D - E)x^5 + (3A - B + C + 4D - 3E + F)x^4\\ &- (4A - 2B + 4D - 4E + 3F - G)x^3\\ &\quad + (3A - 2B + 2C + 3D - 4E + 3F - 3G)x^2\\ &\qquad - (2A - B + D - 3E + F - 3G)x + A - B + C - E - G\end{aligned}$$

Εξισώνοντας με την $x + 1$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} A + D &= 0\\ -2A + B - 3D + E &= 0\\ 3A - B + C + 4D - 3E + F &= 0\\ -4A + 2B - 4D + 4E - 3F + G &= 0\\ 3A - 2B + 2C + 3D - 4E + 3F - 3G &= 0\\ -2A + B - D + 3E - F + 3G &= 1\\ A - B + C - E - G &= 1\end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα με το χέρι αν είναι μικρό, αλλά όταν είναι μεγάλο όπως εδώ, επιστρέφουμε στον SAGE server, και εκεί γράφουμε:

Scan to copy code

```
var('A,B,C,D,E,F,G')
solve([A+D==0,-2*A+B-3*D+E==0,
3*A - B + C + 4*D - 3*E + F==0,
-4*A + 2*B - 4*D + 4*E - 3*F + G==0,
3*A - 2*B + 2*C + 3*D - 4*E + 3*F - 3*G==0,
-2*A + B - D + 3*E - F + 3*G==1,
A - B + C - E - G==1],A,B,C,D,E,F,G)
```

(τα ίσον είναι πράγματι διπλά!) και πατώντας «Evaluate» μας δίνει:

```
|[[A == (1/2), B == (-3/4), C == (1/2), D == (-1/2),
                E == (1/4), F == 0, G == (1/2)]]|
```

δηλαδή

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} &= \frac{1/2}{x-1} + \frac{-3/4}{(x-1)^2} + \frac{1/2}{(x-1)^3}\\ &\quad + \frac{(-1/2)x + (1/4)}{x^2+1} + \frac{0x + 1/2}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Τέλος υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα καθενός από αυτούς τους όρους σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Σημαντική Παρατήρηση 8.8 Βεβαίως ο SAGE server μπορεί να υπολογίσει το παραπάνω ολοκλήρωμα χωρίς εμείς να κάνουμε όλον αυτόν τον κόπο. Εν τούτοις πρέπει να μάθουμε τις τεχνικές (άλλωστε κάποιος Μαθηματικός διδαξε το SAGE). Στις εξετάσεις θα πρέπει να δείξουμε ότι ξέρουμε τις τεχνικές ολοκλήρωσης, οπότε δεν είναι καλή ιδέα να βασιστούμε στο SAGE παρά μόνο σε περιπτώσεις έξω από τα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού.

Για παράδειγμα, με τον κώδικα

Scan to copy code

```
f=(x+1)/((x-1)^3*(x^2+1)^2)
from sage.symbolic.integration.integral import indefinite_integral
indefinite_integral(f, x)
```

πατώντας «Evaluate» παίρνουμε ότι

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\log(x-1) + c.$$

Το «+c» το προσθέσαμε εμείς και όχι το SAGE, αλλά παρατηρήστε ότι φαίνεται να «ξέχασε» την απόλυτη τιμή στον όρο $\log(x-1)$. Για αυτό δείτε την Παρατήρηση 8.11.

Τεχνική 8.9 (Ρητές συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου) Κάνουμε την αντικατάσταση $t = \tan(x/2)$, και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1-\tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \sin x &= 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\\ &= \frac{2t}{1+t^2},\end{aligned}$$

και

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\cos^2(x/2)} = \frac{1+\tan^2(x/2)}{2}$$

δηλαδή $dx = 2dt/(1+t^2)$.

Παράδειγμα 8.10 Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int(1+\sin x)/(1-\cos x)\,dx$. Κάνοντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις παίρνουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1+t)^2}{t^2(1+t^2)}\,dt.$$

Γράφουμε

$$\frac{(1+t)^2}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}.$$

Απαλοίφουμε τους παρονομαστές και οδηγούμαστε τστην

$$t^2+2t+1 = At(t^2+1)+B(t^2+1)+(Ct+D)t^2 = (A+C)t^3+(B+D)t^2+At+B.$$

Άρα $A + C = 0$, $B + D = 1$, $A = 2$ και $B = 1$. Συνεπώς, $C = -A = -2$ και $D = 1 - B = 0$. Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{(1+t)^2}{t^2(1+t^2)}\,dt &= \int \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{-2t}{1+t^2}\right) dt,\\ &= 2\log|t| - \frac{1}{t} - \log(1+t^2) + c\\ &= 2\log\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) - \frac{1}{\tan x/2} - \log\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c.\end{aligned}$$

(Προσοχή: για την αντιπαράγωγο της $1/t$ γράφουμε $\log|t|$ γιατί δεν ξέρουμε αν $t > 0$ ή $t < 0$. Παρατηρήστε ότι και η $\log(-t)$ για $t < 0$ έχει παράγωγο $1/t$.)

Σημαντική Παρατήρηση 8.11 Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει το SAGE για να επαληθεύσει το αποτέλεσμά του. Όμως θέλει προσοχή, για δύο λόγους. Πρώτον το SAGE απλοποιεί τις παραστάσεις. Έτσι μπορεί η απάντησή του να μην «μοιάζει» καθόλου με τη δική σας. Δεύτερον έχει την ελευθερία να χρησιμοποιεί μιγαδικές σταθερές κάτι που περιπλέκει τα πράγματα. Για παράδειγμα, για το παραπάνω ολοκλήρωμα δίνει την απάντηση: $-(\cos x+1)/\sin x+\log(\cos x-1)$ που φαινομενικά είναι διαφορετική απάντηση από αυτή που βρήκαμε παραπάνω (γιατί έχει απλοποιήσει) και φαίνεται και λάθος απάντηση γιατί το όρισμα του λογαρίθμου δεν είναι θετικό ($\cos x - 1 \leq 0$). Εν τούτοις ούτε έχετε ακόμα διδαχθεί μιγαδικούς αριθμούς ούτε θα έχετε τον χρόνο συνήθως να προβείτε σε χρονοβόρες απλοποιήσεις. Άρα η χρήση του SAGE πρέπει να γίνεται με προσοχή και υποβοηθητικά και δεν πρέπει να αντικαθιστά πλήρως τη δική σας δουλειά. Η παράσταση αυτή, αφού αλλάξουμε το $\cos x - 1$ σε $1 - \cos x$, συμπίπτει με αυτή που βρήκαμε αν προχωρήσουμε σε απλοποιήσεις χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς τύπους.

Παράδειγμα 8.12 Για τα ολοκληρώματα $\int(1/\sin x)\,dx$ και $\int(1/\cos x)\,dx$ έχουμε

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}\,dx = \int \frac{1}{2\tan(x/2)\cos^2(x/2)}\,dx$$

και συνεχίζουμε με την αντικατάσταση

$$t = \tan(x/2), \qquad dt = (1/2\cos^2(x/2)\,dx,$$

οπότε

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

Για το ολοκλήρωμα της $1/\cos x$ γράφουμε $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ και χρησιμοποιούμε το προηγούμενο για να βρούμε ότι

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c.$$

Τεχνική 8.13 (Ρητές συναρτήσεις του x και $\sqrt{x^2 \pm 1}$) Αυτές οι περιπτώσεις αντιμετωπίζονται και με την Τεχνική 8.9, αλλά υπολογίζονται γρηγορότερα με την αντικατάσταση

$$t = x + \sqrt{x^2+1}, \quad x = \frac{t^2-1}{2t}, \quad \sqrt{t^2+1} = \frac{t^2+1}{2t} \quad dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$

και

$$t = x + \sqrt{x^2-1}, \quad x = \frac{t^2+1}{2t}, \quad \sqrt{t^2-1} = \frac{t^2-1}{2t} \quad dx = \frac{t^2-1}{2t^2}\,dt,$$

αντοίστιχα.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ και $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Τεχνική 8.14 (Ολοκληρώματα άρρητων συναρτήσεων Α′) Για ρητή συνάρτηση των x και της παράστασης $\sqrt[n]{(Ax+B)/(Cx+D)}$ με $n = 2, 3, \ldots$ και $AD \neq BC$, θέτουμε

$$t^n = \frac{Ax+B}{Cx+D}, \quad x = \frac{B - Dt^n}{Ct^n - A}, \quad dx = \frac{n(AD-BC)t^{n-1}}{(A-Ct^n)^2}\,dt.$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$

Τεχνική 8.15 (Ολοκληρώματα άρρητων συναρτήσεων Β′) Για ρητή συνάρτηση των x και των παραστάσεων

$$\sqrt[n]{\frac{Ax+B}{Cx+D}}, \quad \sqrt[m]{\frac{Ax+B}{Cx+D}}, \quad \sqrt[\ell]{\frac{Ax+B}{Cx+D}}, \quad \ldots$$

και $AD \neq BC$, θέτουμε $t^k = (Ax+B)/(Cx+D)$ όπου k το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των n, m, $\ell, \ldots$.

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

Τεχνική 8.16 (Διωνυμικά ολοκληρώματα) Για ολοκληρώματα της μορφής $\int x^m(A+Bx^n)^p\,dx$ όπου $A, B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $m, n, p \in \mathbb{Q}$, υπολογίζονται μόνο αν ένας από τους αριθμούς p, $(m+1)/n$, $p+(m+1)/n$ είναι ακέραιος:

- αν $p \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $t^r = x$ όπου το r είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των m και n.

- αν $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $t^s = A + Bx^n$, όπου s ο παρονομαστής του κλάσματος p.
- αν $p+(m+1)/n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $t^s = Ax^{-n}+B$, όπου s ο παρονομαστής του κλάσματος p.

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x})^3}\,dx \qquad \int \frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^5}}\,dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

8.3 Περισσότερα για τη χρήση του Sage

Το SAGE δεν είναι στην πραγματικότητα μια μηχανή υπολογισμού αλλά μια διεπαφή (interface) προς διάφορους αλγόριθμους υπολογισμών. Ο προεπιλεγμένος αλγόριθμος ονομάζεται `maxima` και συμπεριφέρεται παρόμοια με εμπορικά προγράμματα όπως το Mathematica και άλλα. Υπάρχουν όμως και άλλοι αλγόριθμοι που σε διάφορες περιπτώσεις δίνουν «διαφορετικά» (σε εμφάνιση) αποτελέσματα. Κατά τον υπολογισμό μπορούμε να ζητήσουμε ποιον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσει προσθέτοντας τη φράση

```
algorithm="name"
```

όπου το `name` μπορεί να είναι `maxima` (προεπιλογή), `giac`, `sympy` και `fracas`. Για παράδειγμα, ο κώδικας

```
f(x)=(1+sin(x))/(1-cos(x))
f(x).integrate(x, algorithm="giac")
```

θα δώσει «διαφορετικό» αποτέλεσμα. Συγκεκριμμένα δίνει

$$\frac{-(2\tan(x/2)+1)}{\tan(x/2)} - \log(\tan^2(x/2)+1) + 2\log(|\tan(x/2)|).$$

Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τις «διαφορετικές» απαντήσεις των αλγορίθμων που χρησιμοποιεί το SAGE

`maxima`	$\frac{-(\cos(x)+1)}{\sin(x)} + \log(\cos(x)-1)$
giac	$\frac{-(2\tan(x/2)+1)}{\tan(x/2)} - \log(\tan^2(x/2)+1) + 2\log(\|\tan(x/2)\|).$
`simpy`	$\frac{-1}{\tan(x/2)} - \log(\tan^2(x/2)+1) + 2\log(\tan(x/2))$
`fricas`	$\frac{(\log(-\cos(x)/2+1/2)\sin(x) - \cos(x) - 1)}{\sin(x)}$

Αν κανείς είναι διατεθιμένος να «σκάψει» λίγο πιο βαθιά στις παραμέτρους του maxima μπορεί να βελτιώσει σημαντικά τις απαντήσεις. Στον παρακάτω κώδικα ζητάμε από το `maxima` να θεωρήσει ότι το όρισμα του λογαρίθμου πρέπει να είναι θετικό (σε απόλυτη τιμή):

```
defaultlogabs=maxima_calculus.get("logabs")
maxima_calculus.set("logabs","true")
F=integrate((1+sin(x))/(1-cos(x)), x, algorithm="maxima")
maxima_calculus.set("logabs",defaultlogabs)
F
```

Ο κώδικας αυτός δίνει:

$$-\frac{\cos(x)+1}{\sin(x)}+\log(1-\cos(x)).$$

Επίσης μπορεί κανείς να πει στο SAGE να μορφοποιήσει την απάντησή του όπως τη βλέπουμε στο προηγούμενο. Για αυτό θα πρέπει να αλλάξουμε την τελευταία γραμμή με το `F` σε `F.show()`

Περισσότερες λεπτομέρειες για τη χρήση του SAGE θα μάθετε στα μαθήματα του Μαθηματικού Λογισμικού ή από την online τεκμηρίωση που διαθέτει.

Όλες αυτές οι απαντήσεις είναι σωστές και διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια σταθερά (πραγματική ή μιγαδική).

Το συμπέρασμα από όλα αυτά είναι ότι οι διάφοροι αλγόριθμοι μπορεί να είναι βοηθητικοί αλλά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί μαζί τους.

8.4 Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 8.4.1. Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, βρείτε τα ολοκληρώματα:

$$\int(\alpha x+\beta)^3\,dx \qquad \int\frac{1}{(\alpha x+\beta)^k}\,dx,\ k\in\mathbb{Z} \qquad \int\sqrt{x}\,dx$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{\alpha x+\beta}}\,dx \qquad \int\frac{1}{1+\alpha^2x}\,dx \qquad \int\frac{1}{\sqrt{5-3x^2}}\,dx$$

$$\int\tan^2x\,dx \qquad \int\frac{1}{\sin x}\,dx \qquad \int x^2\cos x\,dx$$

$$\int\arctan x\,dx \qquad \int\log(3x)\,dx \qquad \int x^3e^{-x}\,dx$$

$$\int\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\,dx \qquad \int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx \qquad \int x\sqrt{\alpha^2+x^2}\,dx$$

$$\int\frac{1}{\sin^3x}\,dx \qquad \int\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx \qquad \int 3^xe^x\,dx$$

$$\int e^x\sqrt{\alpha-\beta e^x}\,dx \qquad \int\frac{x}{\cos^2x^2}\,dx \qquad \int\frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt{x^2-\alpha^2}}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx, \qquad \int \frac{\ln x}{x^3}\,dx \qquad \int x^2 e^{3x}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx \qquad \int e^{\alpha x}\sinh x\,dx \qquad \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx \qquad \int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}\,dx \qquad \int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x-1}}\,dx \qquad \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+9x^2}}\,dx \qquad \int \sqrt[4]{x^2(1-x^2}\,dx \qquad \int \frac{\sin 3x}{\cos x}\,dx$$

$$\int x\sin^2 x\cos^4 x\,dx \qquad \int \frac{\log\cos x}{\sin^2 x}\,dx \qquad \int xe^x\cos x\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2(x+3)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x})^2}\,dx \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}\,dx$$

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx \qquad \int \frac{1}{2+3\cos^2 x}\,dx \qquad \int \cos^4 x\,dx$$

$$\int \cos(\log x)\,dx \qquad \int \arcsin\sqrt{x}\,dx \qquad \int |x|\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sinh^2 x}\,dx \qquad \int \frac{1}{\sin x\sin(2x)}\,dx \qquad \int \frac{\cos(\alpha x)}{\sqrt{\alpha^2+\sin^2(\alpha x)}}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\cos^2(3x)}\,dx \qquad \int \sinh x\cosh x\,dx \qquad \int \frac{2^x}{2-4^x}\,dx$$

$$\int \sqrt{e^x+1}\,dx$$

Στα παραπάνω ολοκληρώματα καθορίστε τα διαστήματα στα οποία ισχύουν οι τύποι σας καθώς και τις προϋποθέσεις για τις παραμέτρους που εμφανίζονται.

Κεφάλαιο 9

Δυναμοσειρές και το θεώρημα Taylor

9.1 Δυναμοσειρές

Ορισμός 9.1 Αν a_n μια πραγματική ακολουθία και $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ονομάζεται δυναμοσειρά (δηλαδή σειρά δυνάμεων) με κέντρο το x_0 και οι αριθμοί a_n λέγονται συντελεστές της.

Για τη σύγκλιση μιας τέτοιας σειράς, αν εφαρμόσουμε το κριτήριο n-στης ρίζας, και υπό την προϋπόθεση ότι τα παρακάτω όρια υπάρχουν, έχουμε

$$\lim \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n} = |x-x_0| \lim \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Άρα η δυναμοσειρά θα συγκλίνει αν $|x-x_0| < 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ και θα αποκλίνει αν $|x-x_0| > 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$. Τον αριθμό $R = 1/\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ (όταν υπάρχει το όριο) τον ονομάζουμε *ακτίνα σύγκλισης* της δυναμοσειράς, αφού καθορίζει πόσο μπορούμε να απομακρύνουμε το x από το x_0 και να συγκλίνει η σειρά. Ειδικά για τις περιπτώσεις $x-x_0 = R$ και $x-x_0 = -R$ που το κριτήριο ρίζας δεν μας δίνει πληροφορίες, εξετάζουμε ξεχωριστά τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n$.

Παράδειγμα 9.2 Εύκολα ελέγχουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum x^n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=0$, δηλαδή συγκλίνει μόνο αν $x=0$. Η $\sum x^n/n!$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$ δηλαδή συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τη σύγκλιση αυτής και την ακτίνα της μπορούμε να την υπολογίσουμε με το κριτήριο λόγου και όχι με το κριτήριο ρίζας, και αφήνεται ως άσκηση. Η $\sum x^n/n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R=1$.

9.2 Σειρές Taylor

Θεώρημα 9.3 (Taylor) *Υποθέτουμε ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$, και για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ η $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$*

και η $f^{(n+1)}(x)$ *υπάρχει για κάθε* $x \in (a, b)$. *Για κάθε* $x_0 \in [a, b]$ *ορίζουμε*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

για $x \in [a, b]$. *Τότε υπάρχει ένα σημείο* ξ_x *μεταξύ των* x_0 *και* x *ώστε να ισχύει* $f(x) = p_n(x) + R(x)$, *όπου το* $R(x)$ *ονομάζεται «υπόλοιπο Taylor» και μπορεί να γραφτεί με έναν από τους παρακάτω τρόπους:*

- *στη μορφή Cauchy:* $R(x) = R_C(x) = -\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n!}(x - \xi_x)^n(x - x_0)$, *για κάποιο* ξ_x *ανάμεσα στα* x *και* x_0.
- *στη μορφή Lagrange:* $R(x) = R_L(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, *για κάποιο* ξ_x *ανάμεσα στα* x *και* x_0.
- *σε ολοκληρωτική μορφή:* $R(x) = R_\int(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$.

Απόδειξη: Για κάθε $t \in [a, b]$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

και παραγωγίζουμε ως προς t. Γράφοντας ξεχωριστά τον $k = 0$ όρο το αθροίσματος, και από τον κανόνα γινομένου για τον γενικό όρο του αθροίασματος θα ισχύει

$$F'(t) = 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} \right).$$

Το άθροισμα αυτό όμως είναι τηλεσκοπικό. Μετά τις διαγραφές μάς μένει ότι

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Για $t = x_0$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε ότι υπάρχει ξ_x ανάμεσα στα x και x_0 ώστε να ισχύει $F(x) - F(x_0) = F'(\xi_x)(x - x_0)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n!}(x - \xi_x)^n(x - x_0) \\ &= p_n(x) + R_C(x). \end{aligned}$$

Αν όμως εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για την $F(t)$ (Θεώρημα ΑΠΙ-ΙΙ.ΙΙ) και την $g(t) = (x - t)^{n+1}$ με άκρα τα x και x_0 βρίσκουμε ξ_x ανάμεσα στα x και x_0 ώστε να ισχύει

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{F'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

απ᾽ όπου παίρνουμε ότι $R(x) = R_L(x)$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι η F' είναι ολοκληρώσιμη με άκρα τα x και x_0, οπότε εφαρμόζουμε το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (Θεώρημα 7.38) και παίρνουμε

$$R = F(x_0) - F(x) = \int_x^{x_0} F'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\, dt = R_\int(x),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει αμέσως ότι αν η f έχει παράγωγο στο x_0 κάθε τάξης, για κάθε $x \in [a,b]$ για το οποίο ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R(x) = 0$ θα έχουμε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Η σειρά αυτή λέγεται «σειρά Taylor» της συνάρτησης f.

Αν $x_0 = 0$ τότε η σειρά αυτή, δηλαδή η $\sum_{k=0}^{\infty}(f^{(k)}(0)/k!)x^k$ λέγεται «σειρά MacLaurin» της f (ή βέβαια «σειρά Taylor με κέντρο το μηδέν»).

Σημαντική Παρατήρηση 9.4 Οι σειρές Taylor είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών αλλά και των άλλων επιστημών. Για παράδειγμα, είναι ο λόγος που λειτουργούν οι αριθμομηχανές. Προφανώς μια αριθμομηχανή ή η σχετική εφαρμογή στο κινητό σας, δεν έχει ιδέα τι είναι η e^x ή η $\log x$ ή η $\sin x$ κλπ. Εν τούτοις της παίρνει κλάσματα του δευτερολέπτου να υπολογίσει ακόμα και το ημίτονο μιας μοίρας. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι το κύκλωμα της μηχανής είναι ικανό να κάνει αποκλειστικά πρόσθεση (και μάλιστα στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης), αλλά την κάνει πολύ γρήγορα. Ταυτόχρονα στη μνήμη της είναι αποθηκευμένα πολυώνυμα Taylor για τις βασικές αυτές συναρτήσεις μέχρι κάποιο βαθμό. Για παράδειγμα, μια αριθμομηχανή έχει αποθηκευμένη στη μνήμη της ότι

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{10!}x^{10}.$$

Αυτό το πολυώνυμο είναι οι πρώτοι όροι της σειράς Taylor της e^x που θα δούμε παρακάτω. Οπότε, όταν του ζητάτε για παράδειγμα πόσο κάνει e^2, η μηχανή υπολογίζει την έκφραση

$$1 + 2 + \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{3!}2^3 + \frac{1}{4!}2^4 + \ldots + \frac{1}{10!}2^{10},$$

ανάγοντας τα πάντα τελικά σε προσθέσεις. «Χαζή» αλλά γρήγορη!

Παράδειγμα 9.5 (Σειρά Taylor της εκθετικής) Ισχύει $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι $(e^x)^{(n)}|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1$ οπότε για $x = 0$ θα ισχύει ο παραπάνω τύπος αν δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Αλλά το υπόλοιπο Taylor στη μορφή Lagrange είναι το

$$R_L(x) = \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!}x^{n+1} \to 0,$$

καθώς $n \to +\infty$. Ο έλεγχος ότι το όριο αυτό είναι μηδέν είναι άμεσος από το κριτήριο λόγου.

Στο επόμενο παράδειγμα βρίσκουμε τη σειρά Taylor για την $f(x) = \log x$. Προσέξτε ότι δεν μπορούμε να θεωρήσουμε τη σειρά MacLaurin, δηλαδή για $x_0 = 0$ όπως κάναμε στην εκθετική, γιατί η log δεν ορίζεται στο μηδέν. Έτσι θα γράψουμε τη σειρά Taylor με κέντρο οποιοδήποτε $x_0 > 0$. Επίσης η σειρά που θα προκύψει δεν γίνεται να έχει ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη από x_0 γιατί τότε θα μπορούσαμε να θέσουμε στη σειρά $x = 0$, γεγονός που πάλι προσκρούει στο ότι η log δεν ορίζεται στο μηδέν. Συνεπώς για τον λογάριθμος *δεν* υπάρχει μια σειρά, όπως για την εκθετική, που να δίνει τον λογάριθμο για κάθε $x > 0$.

Παράδειγμα 9.6 (Σειρά Taylor για τη λογαριθμική) Για κάθε $x_0 > 0$ και για κάθε x με $|(x/x_0) - 1| < 1$ ισχύει

$$\log x = \log x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nx_0^n}(x - x_0)^n.$$

Για $x_0 = 1$ θα είναι

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \quad \text{ή} \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (9.1)$$

για κάθε x ώστε $|x - 1| < 1$. Πράγματι οι συντελεστές της αρχικής σειράς είναι αυτοί, αφού εύκολα ελέγχουμε με επαγωγή ότι $(\log x)^{(n)}|_{x=x_0} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x_0^n$. Τέλος το υπόλοιπο Taylor στην ολοκληρωτική του μορφή μας δίνει

$$\begin{aligned}|R_\int(x)| &= \frac{1}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt\right| = \frac{1}{n!}\left|\int_{x_0}^{x} \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}}\,(x-t)^n\,dt\right| \\ &= \left|\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{t^{n+1}}\,dt\right|.\end{aligned}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή, και θέτοντας $s = (x-t)/t$ βρίσκουμε $t = x/(s+1)$ και $dt = (-x/(s+1)^2)\,ds$, οπότε το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται

$$|R_\int(x)| = \left|\int_0^{(x/x_0)-1} \frac{s^n}{s+1}\,ds\right|.$$

Αν $x/x_0 \geq 1$ τότε παίρνουμε

$$|R_f(x)| \leq \frac{x_0}{x}\left|\frac{x}{x_0} - 1\right|^{n+1} \to 0,$$

αφού $|(x/x_0) - 1| < 1$. Αν πάλι $x/x_0 < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} |R_f(x)| &= \left|\int_0^{(x/x_0)-1} \frac{s^n}{s+1}\,ds\right| = \left|\int_{(x/x_0)-1}^{0} \frac{s^n}{s+1}\,ds\right| \\ &\leq \int_{(x/x_0)-1}^{0} \frac{|s|^n}{1-|s|}\,ds \leq \frac{1}{1-|(x/x_0)-1|}\left|\frac{x}{x_0} - 1\right|^{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι οι σειρές (9.1) είναι επαρκείς για τον υπολογισμό οποιουδήποτε λογαρίθμου παρόλο που συγκλίνουν μόνο για $|x| < 1$. Πράγματι, αυτό ισχύει λόγω της ιδιότητας του λογαρίθμου $\log(x/y) = \log x - \log y$. Έτσι αν για παράδειγμα θέλουμε να υπολογίσουμε τον $\log x$ για $x \geq 2$ δεν έχουμε παρά να βρούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ ώστε $|x/e^k - 1| < 1$, και αυτό είναι εφικτό, αφού $0 < x/e^k \to 0$ καθώς $k \to +\infty$. Για παράδειγμα, επειδή ισχύει $e^{[x]} \geq 1 + [x] > x$ θα είναι $0 < x/e^{[x]} < 1$. Οπότε υπολογίζουμε τον $(\log x) - [x] = \log(x/e^{[x]})$ με τις σειρές (9.1) και λύνουμε ως προς $\log x$.

Παράδειγμα 9.7 (Η συνάρτηση ημίτονο και συνημίτονο) Για τη συνάρτηση $f(x) = \cos x$ ελέγχουμε με επαγωγή ότι ισχύει $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$. Άρα $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ και $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Επίσης, επειδή $|\cos x| \leq 1$ και $|\sin x| \leq 1$ ισχύει $|R_L(x)| \leq |x|^n/n! \to 0$. Συνεπώς

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση $g(x) = \sin x$ εργαζόμαστε ομοίως και προκύπτει ότι

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9.3 Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου

Άσκηση 9.3.1. Δεδομένου του ότι δεν είναι εφικτό να βρείτε αντιπαράγωγο για τη συνάρτηση $(e^x - 1)/x$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (e^x - 1)/x\,dx$ με προσσέγγιση 1/100.

Άσκηση 9.3.2. Υπολογίστε με προσσέγγιση 1/100 το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (\sin x)/x\,dx$.

Βιβλιογραφία

[1] Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α'*, ηλεκτρονική έκδοση https://myria.math.aegean.gr/aem

[2] Ευκλείδης ο Αλεξανδρεύς, *Στοιχεία*, ηλεκτρονική έκδοση `https://myria.math.aegean.gr/aem`

---

[3] Απόστολος Γιαννόπουλος, *Απειροστικός Λογισμός Ι & ΙΙ*, (Σημειώσεις Μαθήματος), http://users.uoa.gr/~apgiannop/notes.html

[4] Δημήτριος Κάππος, *Μαθήματα Αναλύσεως, Απειροστικός Λογισμός Α*.

[5] Στυλιανός Νεγρεπόντης, Σταύρος Γιωτόπουλος, Ευστάθιος Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Συμμετρία 1997. 2004.

[6] Σωτήρης Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 2000. 2004.

[7] Στέλιος Πηχωρίδης, *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Πρόχειρες Σημειώσεις, Σύγχρονη Εποχή, Αθήνα 1996.

[8] Αντώνης Τσολομύτης, *Σύνολα και Αριθμοί*, Leader Books 2004.

---

[9] Robert Bartle, *The elements of Real Analysis*, 2nd ed. John Wiley & Sons 1989

[10] Konrad Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, 1956.

[11] Thomas William Körner, *A companion to Analysis*, Graduate Studies in Mathematics vol. 62, American Mathematical Society, 2004.

[12] Serge Lang, *A first Course in Calculus*, 5th ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1986.

[13] Pierre Simon Laplace, *Memoir on the probability of causes of events*, tome sixième of *Mémoires de Mathématique et de Physique.* English translation by S. M. Stigler, Statist. Sci., 1(19):364–378. 1986.

[14] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693–696.

[15] Reinhold Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1998.

[16] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw Hill International Editions 1976.

[17] Karl Stromberg, *An introduction to Classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1996.