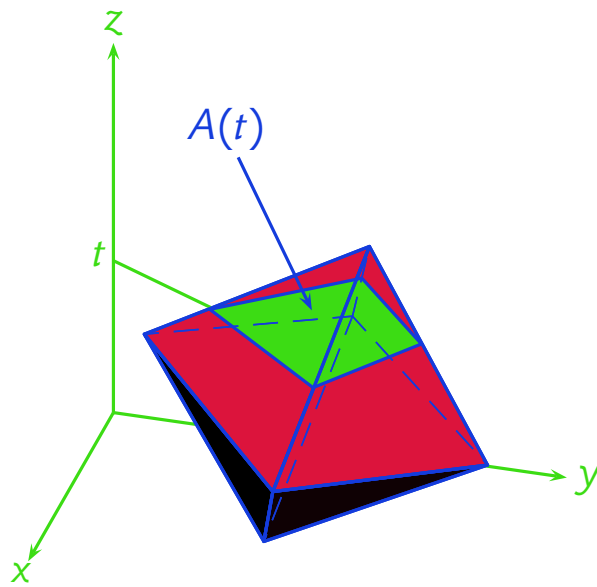


Απειροστικός Λογισμός 3

Σημειώσεις



Σάμος 2024

Έκδοση 0.1. Το αρχείο δεν είναι τελικό. Μπορεί να έχει λάθη ή παραλείψεις. Προς το παρόν είναι υπό συνεχή διαμόρφωση. Όλες οι παραπομπές είναι links για εύκολη περιήγηση. Οι παραπομπές στον Απειροστικό Λογισμό 1 και 2 ανοίγουν το σχετικό αρχείο (ap1.pdf και ap2.pdf) εφόσον είναι αποθηκευμένο στον ίδιο φάκελο με τον παρόν. Όπου υπάρχουν links σε εξωτερικά αρχεία ή ιστοσελίδες δίνεται qrcode στο περιθώριο.

© Αντώνης Τσολομύτης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Καρλόβασι, Σάμος 2024.

Περιεχόμενα

I	Διανυσματικός Λογισμός, Όρια, Παράγωγος	5
1	Διανυσματικός λογισμός	6
1.1	Καρτεσιανές συντεταγμένες και πράξεις διανυσμάτων . . .	6
1.2	Κυλινδρικές συντεταγμένες	9
1.3	Σφαιρικές συντεταγμένες	9
II	Πολλαπλά ολοκληρώματα	10
2	Διπλά ολοκληρώματα	11
2.1	Αρχή του Cavalieri	11
2.2	Ορισμός ολοκληρώματος σε ορθογώνιο	13
3	Το διπλό ολοκλήρωμα σε γενικότερα χωρία	16
3.1	Στοιχειώδη χωρία	16
3.1.1	Χωρία τύπου I	16
3.1.2	Χωρία τύπου II	16
3.1.3	Χωρία τύπου III	17
3.2	Ολοκλήρωμα σε στοιχειώδες χωρίο	17
3.3	Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης	19
3.4	Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα	22
4	Το τριπλό ολοκλήρωμα	24
4.1	Στοιχειώδη χωρία	24
5	Θεωρήματα αλλαγής μεταβλητών	28
5.1	Η γεωμετρία των απεικονίσεων	28
5.2	Αλλαγή μεταβλητών στις δύο διαστάσεις	29
5.3	Αλλαγή μεταβλητών στις τρεις διαστάσεις	35
6	Επικαμπύλια ολοκληρώματα	39
6.1	Καμπύλες	39
6.2	Επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους	41
6.3	Προσανατολισμός καμπύλης και ολοκλήρωμα β' είδους	43

4 · ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

7	Επιφανειακά ολοκληρώματα	48
7.1	Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες	48
7.2	Εμβαδόν Επιφανείας	50
7.2.1	Η S ως γράφημα συνάρτησης	52
7.2.2	Επιφάνειες εκ περιστροφής	52
7.3	Ολοκλήρωμα πραγματικών συναρτήσεων σε επιφάνειες .	54
7.4	Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων	56
8	Τα θεωρήματα Green, Stokes και Gauss	64
8.1	Εισαγωγικά	64
8.2	Συμβολισμός	64
8.3	Θεωρήματα Stokes και Gauss	65
8.3.1	Το θεώρημα του Stokes	65
8.3.2	Το θεώρημα του Gauss	70
8.4	Αποδείξεις	71
8.4.1	Απόδειξη του θεωρήματος Green	71
8.4.2	Απόδειξη του θεωρήματος Stokes	74
8.4.3	Απόδειξη του θεωρήματος Gauss	78
A'	Τύποι παραγωγίσης	84
	Βιβλιογραφία	86

Μέρος Ι

**Διανυσματικός Λογισμός,
Όρια, Παράγωγος**

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικός λογισμός

1.1 Καρτεσιανές συντεταγμένες και πράξεις διανυσμάτων

- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $(x, y, z) = (x', y', z')$ αν και μόνο αν $x = x', y = y'$ και $z = z'$ ([1]).
- Ορίζουμε την πρόσθεση θέτοντας

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική. Το $(0, 0, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο, το ουδέτερο της πρόσθεσης, ενώ το $(-x, -y, -z)$ είναι το αντίθετο του (x, y, z) .

- Ορίζουμε τον (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό θέτοντας για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι προσεταιριστικός: για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lambda \cdot (\mu \cdot (x, y, z)) = (\lambda\mu) \cdot (x, y, z)$, και ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((x, y, z) + (x', y', z')) &= \lambda \cdot (x, y, z) + \mu \cdot (x, y, z) \\ (\lambda + \mu) \cdot (x, y, z) &= \lambda \cdot (x, y, z) + \mu \cdot (x, y, z).\end{aligned}$$

Επίσης προφανώς ισχύουν $\lambda \cdot (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $0 \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0)$ και $1 \cdot (x, y, z) = (x, y, z)$. Στη συνέχεια θα γράφουμε 0 ή O αντί για $(0, 0, 0)$ και θα παραλείψουμε την τελεία του πολλαπλασιασμού.

- Κάθε στοιχείο (z, y, z) του \mathbb{R}^3 γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) \\ &= xe_1 + ye_2 + ze_3\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ και $e_3 = (0, 0, 1)$. Συνεπώς τα e_1 , e_2 και e_3 αποτελούν (αλγεβρική) βάση του \mathbb{R}^3 .

Ορισμός 1.1 Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'.$$

Επίσης το μήκος διανύσματος, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$|(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle^{1/2}.$$

Γράφοντας $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ και $z = (z_1, z_2, z_3)$ εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν τα εξής:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$.
- $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
- $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- $|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$, $|e_i - e_j| = \sqrt{2}$ και $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ για $i \neq j$ στο $\{1, 2, 3\}$.

Διανύσματα μήκους 1 (όπως τα e_1, e_2, e_3) λέγονται *κανονικά* ή *μοναδιαία*.

Πρόταση 1.2 *Ισχύει*

$$\langle x, y \rangle = |x| |y| \cos \theta,$$

όπου θ η κυρτή γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα x και y .

Απόδειξη: Έστω ότι το x είναι το διάνυσμα \overline{OA} και το y το \overline{OB} . Αν $x = 0$ ή $y = 0$ η ισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Αν $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$ η απόδειξη είναι προφανής γιατί σε αυτή την περίπτωση ισχύει $y = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα ότι $0 < \theta < \pi$. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB θα είναι

$$|OB - OA|^2 = |OB|^2 + |OA|^2 - 2|OA||OB| \cos \theta.$$

Ισοδύναμα,

$$\langle y - x, y - x \rangle = \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - 2|x||y| \cos \theta.$$

Λόγω των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου θα ισχύει

$$\langle y - x, y - x \rangle = \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle,$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη προκύπτει το ζητούμενο. \square

Πόρισμα 1.3 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz) *Επειδή $|\cos \theta| \leq 1$ προκύπτει άμεσα ότι $|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|$.* \square

Μη μηδενικά διανύσματα x, y με εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle$ ίσο με μηδέν είναι *κάθετα* γιατί η προηγούμενη πρόταση μάς λέει ότι η κυρτή γωνία θ ανάμεσά τους πρέπει να είναι $\pi/2$. Το μηδενικό διάνυσμα θα το θεωρούμε κάθετο σε κάθε άλλο.

Αν τα x, y είναι κάθετα γράφουμε $x \perp y$. Έτσι τα e_1, e_2, e_3 είναι ανά δύο κάθετα. Επειδή αυτά είναι και κανονικά και αποτελούν και βάση, ονομάζονται «ορθοκανονική βάση» του \mathbb{R}^3 . Αυτή η ορθοκανονική βάση δεν είναι βεβαίως μοναδική. Οποιαδήποτε τρία κανονικά και μεταξύ τους κάθετα διανύσματα στον \mathbb{R}^3 αποτελούν ορθοκανονική του βάση.

Για $x = (x_1, x_2, x_3)$ φανερά $\langle x, e_i \rangle = x_i$. Άρα το διάνυσμα $\langle x, e_i \rangle e_i$ είναι το διάνυσμα που είναι η προβολή του x στον άξονα με μοναδιαίο διάνυσμα το e_i . Για την προβολή αυτή γράφουμε $P_{e_i} x = \langle x, e_i \rangle e_i$.

Γενικότερα, έχουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 1.4 *Αν $|z| = 1$ τότε αν $P_z x$ το διάνυσμα προβολή του x στην ευθεία του z , ισχύει $P_z x = \langle x, z \rangle z$.*

Απόδειξη: Η προβολή $P_z x$ του x στην ευθεία του z ισούται με λz για κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα $|P_z x| = |\lambda|$, αφού $|z| = 1$. Όμως

$$|\langle x, z \rangle| = |x| |z| \cos \theta = |x| \cos \theta = |P_z x| = |\lambda|.$$

Το λ όμως είναι ομόσημο του $\cos \theta$ ανάλογα με το αν η προβολή $P_z x$ είναι ομόρροπη του z ή αντίρροπη. Άρα $\lambda = \langle x, z \rangle$ και συνεπώς $P_z x = \langle x, z \rangle z$. \square

Ορισμός 1.5 Για οποιαδήποτε δυο διανύσματα x, y στον \mathbb{R}^3 ορίζουμε το *εξωτερικό* τους γινόμενο να είναι το διάνυσμα

$$x \times y = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & e_1 \\ x_2 & y_2 & e_2 \\ x_3 & y_3 & e_3 \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Παρατηρήστε ότι το μεν εσωτερικό γινόμενο είναι αριθμός το δε εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα.

Εύκολα ελέγχουμε (και αφήνεται ως άσκηση) ότι

$$\langle x \times y, x \rangle = \langle x \times y, y \rangle = 0.$$

Δηλαδή το εξωτερικό γινόμενο $x \times y$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο και στο x και στο y , άρα και σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου που παράγουν τα x, y (αφού αυτό αποτελείται από τους γραμμικούς συνδυασμούς τους). (Μάλιστα έχει τέτοια φορά που τα x, y και $x \times y$ αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα (άσκηση)).

Παρατηρήστε ότι το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό: αν τα x και y δεν είναι συνευθειακά, τότε $x \times y \neq y \times x$. Συγκεκριμένα, εύκολα ελέγχει κανείς ότι $x \times y = -y \times x$, από το ότι και η τριάδα $x, y, x \times y$ και η $y, x, y \times x$ πρέπει να συνιστούν δεξιόστροφα συστήματα διανυσμάτων.

1.2 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Κάθε διάνυσμα (x, y, z) μπορεί να καθορισθεί από το μήκος r του διανύσματος (x, y) του \mathbb{R}^2 , δηλαδή της προβολής του (x, y, z) στο xy -επίπεδο, τη γωνία θ που σχηματίζει αυτή η προβολή με τον άξονα x' , και την τρίτη συντεταγμένη z , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, οι συντεταγμένες (r, θ, z) οι οποίες καθορίζουν το (x, y, z) και για τις οποίες ισχύει

σχήμα

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = y/x,$$

(όπου αν $x = 0$ θεωρούμε ότι $\theta = \pi/2$) ονομάζονται κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου (x, y, z) , και ισχύει

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z). \quad (1.1)$$

Ευκολα από το σχήμα βλέπουμε ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$x = P_{e_1}(x, y, z) = \langle (x, y, z), e_1 \rangle = P_{e_1}(x, y) = r \cos \theta.$$

Ομοίως $y = r \sin \theta$.

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{αν } y \geq 0, x > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{αν } x < 0, \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{αν } x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι τα σημεία $(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ με r σταθερό, $\theta \in [0, 2\pi]$ και $x \in \mathbb{R}$ σχηματίζουν κύλινδρο, και από αυτό προέρχεται τό όνομα «κυλινδρικές συντεταγμένες».

1.3 Σφαιρικές συντεταγμένες

Στις σφαιρικές συντεταγμένες το σημείο (x, y, z) καθορίζεται από το μήκος του ρ , τη γωνία $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ που σχηματίζει με τον z' άξονα, το μήκος r του διανύσματος (x, y) , δηλαδή της προβολής του στο xy -επίπεδο, και τη γωνία θ που σχηματίζει αυτή η προβολή με τον x' -άξονα. Από το σχήμα βλέπουμε αμέσως ότι $r = \rho \cos(\pi/2 - \varphi) = \rho \sin \varphi$. Έτσι οι σφαιρικές συντεταγμένες του (x, y, z) είναι η τριάδα (ρ, θ, φ) ώστε να ισχύει

σχήμα

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, \rho \cos \varphi) \\ &= (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Παρατηρήστε ότι τα σημεία με σταθερό ρ συνιστούν μια σφαίρα ακτίνας ρ , και από αυτό προέρχεται το όνομα «σφαιρικές συντεταγμένες».

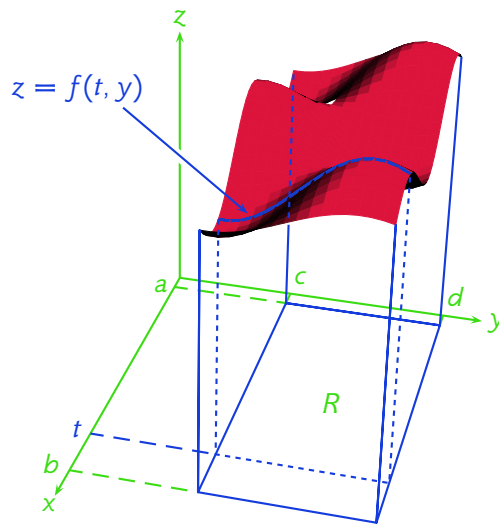
Μέρος II

Πολλαπλά ολοκληρώματα

Κεφάλαιο 2

Διπλά ολοκληρώματα

Έστω ότι το R είναι το ορθογώνιο $[a, b] \times [c, d]$ του xy -επιπέδου, και μια συνάρτηση $f : R \mapsto \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση. Ο όγκος κάτω από το γράφημα της f και πάνω από το παραλληλόγραμμο R όπως το βλέπουμε στο σχήμα ονομάζεται διπλό ολοκλήρωμα της f πάνω στο R και συμβολίζεται με $\int_R f$ ή $\int_R f dA$ ή $\iint_R f dA$ ή $\iint_R f(x, y) dx dy$. Ο αυστηρός ορισμός θα δοθεί παρακάτω.



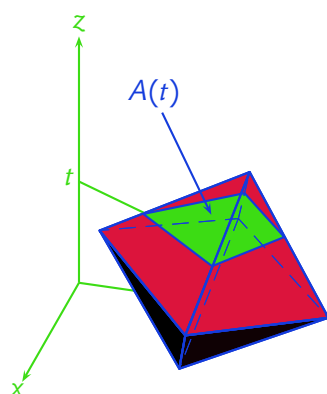
Σχήμα 2.1:

2.1 Αρχή του Cavalieri

Η αρχή του Cavalieri λέει ότι ο όγκος ενός στερεού σχήματος μπορεί να υπολογιστεί ως το ολοκλήρωμα των εμβαδών των τομών του με ένα επίπεδο καθώς αυτό το μετατοπίζουμε παράλληλα σε όλο το εύρος που αυτό τέμνει το στερεό σχήμα. Για παράδειγμα, αν το στερεό σχήμα A είναι ανάμεσα στα επίπεδα $z = a$ και $z = b$ (δείτε Σχήμα 2.2) τότε

$$\text{vol}(A) = \int_a^b A(t) dt,$$

όπου με $A(t)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν της τομής $A \cap \{(x, y, t) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Εδώ τα επίπεδα με τα οποία τέμνουμε είναι παράλληλα με το xy -επίπεδο.



Μπορούμε όμως να επιλέξουμε οποιοδήποτε επίπεδο στον \mathbb{R}^3 και τα παράλληλά του. Έτσι στο Σχήμα 2.1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το yz -επίπεδο και τις παράλληλες μετατοπίσεις του, οπότε $A(t) = \int_c^d f(x, y) dy$ και συνεπώς

$$\text{vol}(A) = \iint_R f dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

ενώ αν επιλέξουμε το xz -επίπεδο και τις παράλληλες μετατοπίσεις του θα ισχύει $A(t) = \int_a^b f(x, y) dx$ και

$$\text{vol}(A) = \iint_R f dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Σχήμα 2.2:

Έτσι, με την αρχή του Cavallieri ισχύει

$$\iint_R f dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

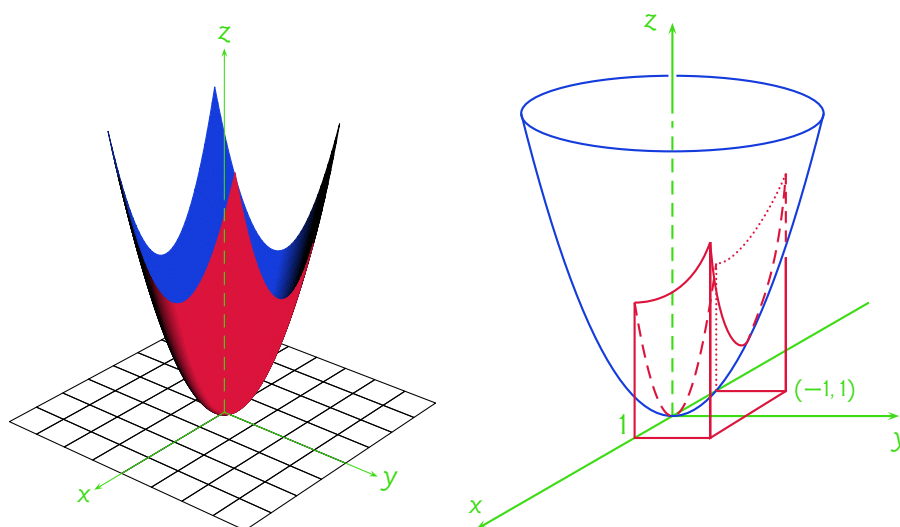
Δηλαδή ο υπολογισμός του ολοκληρώματος μπορεί να γίνει ως διαδοχικό ολοκλήρωμα με όποια σειρά θέλουμε.

Παράδειγμα 2.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο κάτω από το γράφημα και πάνω από το ορθογώνιο $R = [-1, 1] \times [0, 1]$, δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int_R f = \int_R (x^2 + y^2) dx dy.$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι

$$\begin{aligned} \int_R f &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right) \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3} + y^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - y^2 \right) \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy \\ &= \left(\frac{2}{3} y + \frac{2}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Σχήμα 2.3:

2.2 Ορισμός ολοκληρώματος σε ορθογώνιο

Διαμερίζουμε το ορθογώνιο $R = [a, b] \times [c, d]$ σε n^2 ίσα παραλληλόγραμμα, διαμερίζοντας σε n ίσα τμήματα το $[a, b]$ και το $[c, d]$ όπως στο σχήμα. Έτσι έχουμε $\Delta x := x_{j+1} - x_j = (b - a)/n$, $\Delta y := y_{k+1} - y_k = (d - c)/n$. Θέτουμε $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ και ισχύει $R = \cup_{j,k} R_{jk}$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο c_{jk} του R_{jk} , και όπως και στο άθροισμα Riemann για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, θέτουμε

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y,$$

και δίνουμε τον ίδιο ορισμό (όπως και στις συναρτήσεις μίας μεταβλητής):

Ορισμός 2.2 Αν η ακολουθία S_n συγκλίνει σε κάποιο όριο S καθώς $n \rightarrow +\infty$, ανεξάρτητα από την επιλογή των $c_{jk} \in R_{jk}$, λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη πάνω στο R , και γράφουμε

$$S = \int_R f = \int_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Παρατηρήστε ότι τα γινόμενα $f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ είναι κατά προσέγγιση ο όγκος κάτω από το γράφημα της f και πάνω από το ορθογώνιο R_{jk} . Για αυτό ονομάζουμε και όγκο κάτω από το γράφημά της το ολοκλήρωμα της f στο R .

Το ακόλουθο θεώρημα δίνεται χωρίς απόδειξη γιατί η απόδειξή του είναι ίδια με την αντίστοιχη της μίας μεταβλητής και αφήνεται ως άσκηση (δείτε Κεφάλαιο ΑΠ2-7, ενότητα ΑΠ2-7.3 και Θεώρημα ΑΠ2-7.25).

Θεώρημα 2.3 Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ορθογώνιο R είναι ολοκληρώσιμη. \square

Το επόμενο είναι το ανάλογο του Πορίσματος ΑΠ2-7.29:

Θεώρημα 2.4 Αν $f : R \mapsto \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, με το σύνολο των ασυνεχειών της να είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R . \square

σχήμα

Όπως και στον ΑΠ2, έτσι και εδώ, όταν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο R και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε είναι ολοκληρώσιμες και οι $f + g$, λf , και $|f|$, και ισχύουν οι σχέσεις

$$\text{γραμμικότητα: } \int_R (f + g) = \int_R f + \int_R g.$$

$$\text{ομογένεια: } \int_R (\lambda f) = \lambda \int_R f \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{μονοτονία: } f \geq g \text{ συνεπάγεται } \int_R f \geq \int_R g.$$

αθροιστικότητα σε ξένα: Αν το $Q = \cup_{i=1}^m R_i$ είναι ορθογώνιο και τα R_i είναι ανά δύο ξένα, τότε $\int_Q f = \sum_{i=1}^m \int_{R_i} f$.

Τέλος, επειδή $\pm f \leq |f|$ συμπεραίνουμε ότι $\pm \int_R f \leq \int_R |f|$ δηλαδή την τριγωνική ανισότητα:

$$\left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|.$$

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό για τους υπολογισμούς διπλών ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 2.5 (Fubini) Αν η $f : R = [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_R f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη διαμέριση $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ του $[c, d]$ σε n ίσα τμήματα και ορίζουμε την

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy.$$

Σε κάθε $\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy$ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θεώρημα ΑΠ1-11.6) για τη συνάρτηση $\varphi(y) = \int_{y_k}^y f(x, y) dy$ για $y \in [y_k, y_{k+1}]$, οπότε από το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού (Θεώρημα ΑΠ2-7.34), υπάρχει $Y_k(x) \in [y_k, y_{k+1}]$ ώστε

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy = f(x, Y_k(x)) (y_{k+1} - y_k).$$

Άρα,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x)) (y_{k+1} - y_k).$$

Συνοπώς

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b F(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j) (x_{j+1} - x_j), \end{aligned}$$

όπου τα $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ είναι ισομήκης διαμέριση του $[a, b]$ και το p_j είναι οποιοδήποτε σημείο του $[x_j, x_{j+1}]$. Θέτουμε $c_{jk} = (p_j, Y_k(p_j))$ οπότε $F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk}) (y_{k+1} - y_k)$. Άρα

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx &= \int_a^b F(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta y \Delta x = \int_R f. \end{aligned}$$

Ομοίως χειριζόμαστε και το $\int_c^d \int_a^b f$. □

Το ίδιο ισχύει αν η f είναι φραγμένη και έχει σημεία ασυνέχειας τα οποία σχηματίζουν μια πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.6 Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_R (x^2 + y)$ στο $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Η συνάρτηση $x^2 + y$ είναι συνεχής. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_R (x^2 + y) &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^3 + yx \right) \Big|_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy = \left(\frac{1}{3} y + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.7 Ομοίως υπολογίζουμε (άσκηση) ότι

$$\int_{[-2,1] \times [0,1]} (y(x^3 - 12x)) = \frac{57}{8}.$$

Κεφάλαιο 3

Το διπλό ολοκλήρωμα σε γενικότερα χωρία

Ξεκινάμε με την κατηγοριοποίηση χωρίων στα οποία θα γίνεται η ολοκλήρωση.

3.1 Στοχειώδη χωρία

3.1.1 Χωρία τύπου I

Πρόκειται για υποσύνολα του xy -επιπέδου τα οποία περιέχουν σημεία (x, y) όπου το x μπορεί να είναι οπουδήποτε σε ένα διάστημα $[a, b]$ αλλά το y μεταβάλλεται από μια συνάρτηση $\varphi_1(x)$ έως μια συνάρτηση $\varphi_2(x)$. Συγκεκριμένα, τα χωρία D τύπου I είναι της μορφής

$$D = \{(x, y) : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Με ∂D συμβολίζουμε το σύνορο του D δηλαδή τα γραφήματα των φ_1 και φ_2 καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα από το $(a, \varphi_1(a))$ στο $(a, \varphi_2(a))$ και από το $(b, \varphi_1(b))$ στο $(b, \varphi_2(b))$.

3.1.2 Χωρία τύπου II

Πρόκειται για υποσύνολα του xy -επιπέδου τα οποία περιέχουν σημεία (x, y) όπου το y μπορεί να είναι οπουδήποτε σε ένα διάστημα $[c, d]$ αλλά το x μεταβάλλεται από μια συνάρτηση $\psi_1(y)$ έως μια συνάρτηση $\psi_2(y)$. Συγκεκριμένα, τα χωρία D τύπου II είναι της μορφής

$$D = \{(x, y) : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

όπου $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ για κάθε $y \in [c, d]$. Με ∂D συμβολίζουμε το σύνορο του D δηλαδή τα γραφήματα

σχήμα

σχήμα

των ψ_1 και ψ_2 καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα από το $(c, \psi_1(c))$ στο $(c, \psi_2(c))$ και από το $(d, \psi_1(d))$ στο $(d, \psi_2(d))$.

3.1.3 Χωρία τύπου III

Πρόκειται για υποσύνολα του xy -επιπέδου τα οποία είναι και τύπου I και τύπου II. Για παράδειγμα ένας κυκλικός δίσκος.

Τα χωρία τύπου I, τύπου II και τύπου III λέγονται «στοιχειώδη χωρία». Δεν είναι όλα τα χωρία τύπου I ή II ή III. Για παράδειγμα, το σύνολο των σημείων μέσα σε ένα κυκλικό δίσκο ακτίνας 2 αλλά έξω από τον κυκλικό δίσκο ακτίνας 1 δεν είναι ούτε τύπου I, ούτε τύπου II (ούτε βεβαίως τύπου III).

3.2 Ολοκλήρωμα σε στοιχειώδες χωρίο

Επειδή οι φ_1 και φ_2 στα χωρία τύπου I, και οι ψ_1, ψ_2 στα χωρία τύπου II είναι συνεχείς σε κλειστά και φραγμένα διαστήματα, είναι φραγμένες. Άρα υπάρχει ορθογώνιο R ώστε $D \subseteq R$, όπου D το χωρίο (τύπου I ή II) στο οποίο είναι ορισμένη η f . Θέτουμε

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν } (x, y) \in D \\ 0 & \text{αν } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Η f^* είναι ασυνεχής το πολύ στο ∂D που είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων. Συνεπώς το ολοκλήρωμα $\iint_R f^*$ υπάρχει. Ορίζουμε λοιπόν

$$\iint_D f dA := \int_R f^*.$$

Αν $R = [a, b] \times [c, d]$ τότε το ολοκλήρωμα $\iint_D f$ υπολογίζεται ως το διαδοχικό ολοκλήρωμα της f^* :

$$\iint_D f dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y), dy dx. \quad (3.1)$$

Αν είμαστε σε χωρίο τύπου I, τότε $f^*(x, y) = 0$ όταν $y \notin [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ οπότε η (3.1) γράφεται ως

$$\iint_D f dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y), dy dx. \quad (3.2)$$

Αν πάλι είμαστε σε χωρίο τύπου II, τότε από το Θεώρημα Fubini ισχύει

$$\iint_D f dA = \int_c^d \int_a^b f^*(x, y) dx dy$$

και $f^*(x, y) = 0$ όταν $x \notin [\psi_1(y), \psi_2(y)]$. Οπότε

$$\iint_D f \, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Παράδειγμα 3.1 Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\iint_T (x^3 y + \cos x) \, dy \, dx$ όπου T είναι το τρίγωνο

$$T = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x \right\} :$$

σχήμα

$$\iint_T (x^3 y + \cos x) \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3 y + \cos x) \, dy \, dx = \dots = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

σχήμα

Παράδειγμα 3.2 Υπολογίζουμε τον όγκο του «κανονικού τετραέδρου» που έχει κορυφές τα σημεία $(0, 0, 0)$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ και $e_3 = (0, 0, 1)$. Η $f(x, y)$ είναι το επίπεδο που περνάει από τα e_1 , e_2 και e_3 και είναι κάθετο στο διάνυσμα $(1, 1, 1)$. Άρα η εξίσωσή του είναι της μορφής $1x + 1y + 1z = \lambda$ για κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}$. Επειδή όμως περνάει από το $(1, 0, 0)$ πρέπει $\lambda = 1$. Συνεπώς το επίπεδο αυτό έχει εξίσωση $x + y + z = 1$. Άρα $z = 1 - x - y$, οπότε θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της $f(x, y) = 1 - x - y$ στο τρίγωνο T με κορυφές τα 0 , e_1 και e_2 . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left(y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^{1-x} \, dx \\ &= \dots = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Άρα ο όγκος του κανονικού αυτού τετραέδρου είναι $1/6$.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.2.1. Υπολογίστε τον όγκο ενός κτηρίου με βάση ορθογώνιο πλάτους 20μ και μήκους 40μ που στη μία πλευρά των 20μ έχει ύψος 30 μέτρα ενώ στην απέναντί της (που πάλι είναι 20μ) έχει ύψος 40μ. (Απ. η εξίσωση της οροφής, όταν η ψηλότερη έδρα έχει βάση στον y -άξονα και το μήκος των 40μ είναι στον x άξονα, είναι η $z = (-1/2)x + 40$. Ο όγκος θα βγει $24 \cdot 10^3$.)

Άσκηση 3.2.2. Έστω ότι το D είναι το χωρίο ανάμεσα στους θετικούς ημιάξονες και την ευθεία $3x + 4y = 10$. Υπολογίστε το $\iint_D (x^2 + y^2)$. (Υπ. το x θα κυμαίνεται από 0 μέχρι $10/3$ και το y από 0 μέχρι $(10 - 3x)/4$.)

Άσκηση 3.2.3. Από θεώρημα του Αρχιμήδη είναι γνωστό ότι ο ορθός κώνος έχει όγκο το $1/3$ του περιγεγραμμένου κυλίνδρου. Αποδείξτε αυτό το θεώρημα υπολογίζοντας τους όγκους των δύο στερεών. (Υπ. αν ο κώνος έχει ύψος h και ακτίνα βάσης r , κάθε οριζόντια τομή του σε ύψος t είναι κύκλος ακτίνας $(h - t)r/h$. Χρησιμοποιήστε τώρα την αρχή του Cavalieri. Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας όμοια

τρίγωνα μπορείτε να δείξετε ότι η συνάρτηση που περιγράφει την επιφάνεια του κώνου πάνω από την κυκλική του βάση είναι η $f(x, y) = (h/r)(r - \sqrt{x^2 + y^2})$ και να ολοκληρώσετε αυτή τη συνάρτηση πάνω στον κύκλο ακτίνας r . Κάντε και τις δύο μεθόδους!

3.3 Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Ένα χωρίο D τύπου III μπορεί να περιγραφεί και έτσι:

$$a \leq x \leq b \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

και έτσι:

$$c \leq y \leq d \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y).$$

Οπότε, το $\iint_D f$ υπολογίζεται και με το

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

και με το

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

Η τεχνική με την οποία αλλάζουμε από τη μία μορφή στην άλλη λέγεται αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης. Πολλές φορές μας δίνεται ένα δύσκολο ολοκλήρωμα και η αλλαγή της σειράς οδηγεί σε ένα πολύ ευκολότερο.

Παράδειγμα 3.3 Ας υπολογίσουμε το $I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2-y^2)^{1/2} dy dx$. Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε με αυτή τη σειρά τα ολοκληρώματα θα δούμε ότι ο υπολογισμός είναι πολύ δύσκολος. Επιχειρούμε λοιπόν να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Πρέπει πρώτα να αναγνωρίσουμε το πεδίο ολοκλήρωσης D . Αυτό περιγράφεται από τις

$$0 \leq x \leq a \quad \text{και} \quad 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με την $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ και $x, y \geq 0$. Άρα το D είναι το άνω δεξιά τεταρτοκύκλιο ακτίνας a . Αυτό όμως μπορεί να περιγραφεί και με τις

$$0 \leq y \leq a \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Άρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dx dy.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} x \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{a^2 - y^2}} dy \\ &= \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \left(a^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.4 θα υπολογίσουμε το $I = \int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx$. Με αυτή τη σειρά, αυτό το ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται. Οπότε επιχειρούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Το χωρίο ολοκλήρωσης περιγράφεται από τις

$$1 \leq x \leq 2 \quad \text{και} \quad 0 \leq y \leq \log x.$$

σχήμα

Αυτό περιγράφεται και ως

$$0 \leq y \leq \log 2 \quad \text{και} \quad e^y \leq x \leq 2.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\log 2} \int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx dy \\ &= \int_0^{\log 2} \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) \sqrt{1+e^{2y}} \Big|_{x=e^y}^{x=2} dy \\ &= \int_0^{\log 2} \left(0 - \left(\frac{1}{2} e^{2y} - e^y \right) \sqrt{1+e^{2y}} \right) dy \\ &= \int_0^{\log 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy - \int_0^{\log 2} \frac{1}{2} e^{2y} \sqrt{1+e^{2y}} dy. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται αλλάζοντας μεταβλητή $u = e^y$ και στη συνέχεια $u = \sinh t$, και το δεύτερο ολοκλήρωμα αλλάζοντας μεταβλητή $v = e^{2y}$. Ολοκληρώστε τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα 3.5 Θα υπολογίσουμε το $\iint_D \sqrt{1+x+2y}^{-1} dx dy$ στο $D = [0, 1] \times [0, 1]$ με τον μετασχηματισμό $T(u, v) = (u, v/2) =: (x, y)$. Φανερά για $D^* = [0, 1] \times [0, 2]$ ισχύει $T(D^*) = D$ και

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}.$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}} &= \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+u+v}} \frac{1}{2} du dv \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+u+v} \Big|_{v=0}^{v=2} du \\ &= \int_0^1 (\sqrt{1+u+2} - \sqrt{1+u}) du \\ &= \left(\frac{(3+u)^{3/2}}{3/2} - \frac{(1+u)^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.6 Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_R (x+y)^{-1} dx dy$ όπου R είναι το χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ και $x+y=4$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$T(u, v) = (u - uv, uv) =: (x, y).$$

Τα σημεία μέσα το R ικανοποιούν τις ανισότητες $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \geq 1$ και $x+y \leq 4$. Μεταφερόμενοι στο uv -επίπεδο, δηλαδή αντικαθιστώντας τα x και y με τις εκφράσεις τους με τα u και v , παίρνουμε τις

$$u - uv \geq 0, \quad uv \geq 0, \quad u - uv + uv \geq 1, \quad u - uv + uv \leq 4. \quad (3.3)$$

Από τις δύο τελευταίες παίρνουμε $1 \leq u \leq 4$, από τη δεύτερη $v \geq 0$ και από την πρώτη $v \leq 1$. Άρα $0 \leq v \leq 1$. Θέτουμε λοιπόν $R^* = [1, 4] \times [0, 1]$ και εξετάζουμε ότι $T(R^*) = R$ και ότι ο T είναι 1-1. Αν $(u - uv, uv) = (u' - u'v', u'v')$ τότε $u - uv = u' - u'v'$ και $uv = u'v'$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $u = u'$ οπότε αντικαθιστώντας στην $uv = u'v'$ παίρνουμε $v = v'$ (εκτός αν $u = u' = 0$ το οποίο δεν επιτρέπεται, αφού $u \geq 1$). Άρα ο T είναι 1-1.

Επιπλέον ισχύει $T(R^*) \subseteq R$ διότι αν $1 \leq u \leq 4$ και $0 \leq v \leq 1$ τότε $x+y = u - uv + uv = u \geq 1$ και ομοίως $x+y = u \leq 4$. Άρα $x = u(1-v) \geq 0$ και $y = uv \geq 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι σχέσεις (3.3).

Αντιστρόφως, αν $(x_0, y_0) \in R$ πρέπει να βρούμε $(u_0, v_0) \in R^*$, δηλαδή $1 \leq u_0 \leq 4$ και $0 \leq v_0 \leq 1$, ώστε $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$. Ισοδύναμα $(u_0 - u_0v_0, u_0v_0) = (x_0, y_0)$. Άρα $u_0 - u_0v_0 = x_0$ και $u_0v_0 = y_0$. Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $u_0 = x_0 + y_0$ και λύνοντας την πρώτη ως προς v_0 παίρνουμε $v_0 = y_0 / (x_0 + y_0)$. Επειδή τώρα $(x_0, y_0) \in R$ θα είναι $1 \leq x_0 + y_0 \leq 4$, οπότε $1 \leq u_0 \leq 4$. Φανερά $0 \leq y_0 / (x_0 + y_0) \leq 1$ οπότε $0 \leq v_0 \leq 1$. Συνεπώς $R \subseteq T(R^*)$, από όπου προκύπτει $T(R^*) = R$.

Η Ιακωβιανή της αλλαγής μεταβλητών είναι

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1-v & -u \\ v & u \end{array} \right| = \dots = u.$$

Τέλος,

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dx dy = \int_1^4 \int_0^1 \frac{1}{u} u dv du = 3 \cdot 1 = 3.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.1. Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης στα ολοκληρώματα (χωρίς να τα υπολογίσετε):

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta, \quad II = \int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 dx dy.$$

Άσκηση 3.3.2. Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 dx dy \quad \int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} x^2 dx dy.$$

Άσκηση 3.3.3. Αποδείξτε ότι ο όγκος του ελλειψοειδούς με μήκη ημιαξόνων $a, b, c \geq 0$ είναι ίσος με $(4/3)\pi abc$ (και άρα ο όγκος της ευκλείδειας μπάλας με ακτίνα R είναι $(4/3)\pi R^3$).

Άσκηση 3.3.4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του Παραδείγματος 3.6, χωρίς να αλλάξετε μεταβλητές, αλλά χωρίζοντας το R σε δύο τμήματα, μέχρι το $x = 1$ και μετά το $x = 1$.

Άσκηση 3.3.5. Αλλάξτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy dy dx \quad \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2 dy dx \quad \int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \log y dy dx.$$

Άσκηση 3.3.6. Υπολογίστε τον όγκο που περικλείεται ανάμεσα στον κώνο $z^2 = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $2z - y - 2 = 0$.

3.4 Θεώρημα μέσης τιμής για διπλά ολοκληρώματα

Έστω ότι η $f : D \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και το D είναι ένα στοιχειώδες χωρίο. Τότε το D είναι κλειστό και φραγμένο, και η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αυτό δεν το έχουμε αποδείξει. Όμως μπορεί κανείς να ακολουθήσει τη τεχνική του απειροστικού λογισμού I (Προτάσεις ΑΠΙ-9.10 και ΑΠΙ-9.11). Έστω ότι $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ ώστε $f(x_1, y_1) = \inf_{(x,y) \in D} f(x, y) =: m$ και $f(x_2, y_2) = \sup_{(x,y) \in D} f(x, y) =: M$. Οπότε $m \leq f(x, y) \leq M$. Συνεπώς $\int_D m \leq \int_D f \leq \int_D M$ δηλαδή $mA(D) \leq \int_D f \leq MA(D)$, όπου με $A(D)$ συμβολίσαμε το εμβαδόν του D . Άρα

$$m \leq \frac{1}{A(D)} \int_D f \leq M.$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (του οποίου την απόδειξη στις δύο μεταβλητές παραλείπουμε) υπάρχει $(x_0, y_0) \in D$ ώστε

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \int_D f.$$

Κεφάλαιο 4

Το τριπλό ολοκλήρωμα

Όμοια με το διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο, αν $f : B \mapsto \mathbb{R}$, όπου το B είναι παραλληλεπίπεδο στον \mathbb{R}^3 , με ακμές παράλληλες με τους άξονες, διαμερίζουμε κάθε ακμή σε n ίσα τμήματα και με αυτόν τον τρόπο διαμερίζεται το B σε n^3 παραλληλεπίπεδα B_{ijk} ίσου όγκου. Αν c_{ijk} είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στο B_{ijk} θέτουμε

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \text{vol}(B_{ijk}) = \frac{\text{vol}(B)}{n^3} \sum_{i,j,k=0}^{n-1} f(c_{ijk}).$$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ και αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής των σημείων c_{ijk} τότε αυτό το όριο ονομάζεται «τριπλό ολοκλήρωμα» της f στο B και το συμβολίζουμε με $\int_B f$ ή με $\iiint_B f dV$ ή με $\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$. Αν επιπλέον $B = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ τότε αν η f είναι συνεχής ισχύει

$$\begin{aligned} \iiint_B f dV &= \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x, y, z) dz dy dx \\ &= \int_a^b \int_u^v \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx = \dots \end{aligned}$$

δηλαδή το τριπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με οποιοδήποτε από τα διαδοχικά ολοκληρώματα με οποιαδήποτε σειρά.

Όπως και με τα διπλά ολοκληρώματα, αν το W είναι φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^3 ορίζουμε το $\iiint_W f$ ως το $\iiint_B f^*$ όπου B οποιοδήποτε παραλληλεπίπεδο που περιέχει το W και

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{αν } (x, y, z) \in W \\ 0 & \text{αν } (x, y, z) \in B \setminus W. \end{cases}$$

4.1 Στοιχειώδη χωρία

Ορισμός 4.1 Ένα χωρίο W λέγεται

τύπου I αν γράφεται στη μορφή

$$\{(x, y, z) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

ή στη μορφή

σχήμα

$$\{(x, y, z) : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\},$$

όπου οι συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2, \gamma_1$ και γ_2 είναι όλες συνεχείς,

τύπου II αν γράφεται στη μορφή

$$\{(x, y, z) : u \leq z \leq v, \varphi_1(z) \leq y \leq \varphi_2(z), \gamma_1(z, y) \leq x \leq \gamma_2(z, y)\}.$$

τύπου III αν γράφεται στη μορφή

$$\{(x, y, z) : u \leq z \leq v, \psi_1(z) \leq x \leq \psi_2(z), \gamma_1(x, z) \leq y \leq \gamma_2(x, z)\}.$$

τύπου IV αν είναι όλων των τύπων I και II και III.

Παράδειγμα 4.2 Η Ευκλείδεια μπάλα, δηλαδή το σύνολο $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ είναι χωρίο τύπου IV. Ως χωρίο τύπου I ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

Ο όγκος της μπορεί να υπολογιστεί με το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_B dV &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dz \end{aligned}$$

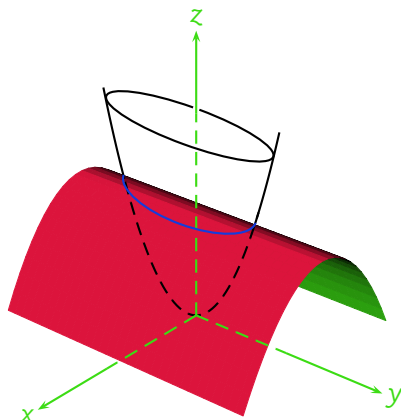
(και επειδή $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \pi a^2 / 2$)

$$= 2 \int_{-1}^1 \pi \frac{1-x^2}{2} dx = \dots = \frac{4}{3} \pi.$$

Παράδειγμα 4.3 Θα υπολογίσουμε το $\iiint_W x dx dy dz$ όπου W είναι το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 2$ και την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$ για $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

σχήμα

$$\begin{aligned}
\iiint_W x \, dV &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \right) dy dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) \, dy dx \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x \left((2-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(2-x^2)^{3/2} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{3/2} dx = \frac{-2(2-x^2)^{5/2}}{15} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$



Παράδειγμα 4.4 Θα υπολογίσουμε τον όγκο του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις επιφάνειες $z = x^2 + 3y^2$ και $z = 9 - x^2$. Παρατηρούμε ότι για την πρώτη επιφάνεια το z είναι μεγαλύτερο ή ίσο με μηδέν και για κάθε σταθερό $z \geq 0$ η εξίσωση ορίζει μια έλλειψη με ημιάξονες \sqrt{z} και $\sqrt{z/3}$. Η δεύτερη επιφάνεια σε κάθε επίπεδο $y = t$ είναι μια παραβολή που στρέφει τα

κοίλα κάτω. Η τομή των δύο επιφανειών αν προβληθεί στο xy -επίπεδο έχει εξίσωση $9 - x^2 = x^2 + 3y^2$ ισοδύναμα $2x^2 + 3y^2 = 9$ δηλαδή είναι έλλειψη με ημιάξονες $3/\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$. Συνεπώς ο ζητούμενος όγκος είναι

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{3}\sqrt{1-(2/9)x^2}}^{\sqrt{3}\sqrt{1-(2/9)x^2}} ((9-x^2) - (x^2+3y^2)) \, dy dx \\
&= \int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{3-(2/3)x^2}}^{\sqrt{3-(2/3)x^2}} (9-2x^2-3y^2) \, dy dx \\
&= \int_{-3/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} (9y - 2x^2y - y^3) \Big|_{y=-\sqrt{3-(2/3)x^2}}^{y=\sqrt{3-(2/3)x^2}} dx = \dots
\end{aligned}$$

Κατά τον υπολογισμό θα εμφανιστούν τα ολοκληρώματα $\int \sqrt{3 - (2/3)x^2} \, dx$ και το $\int x^2 \sqrt{3 - (2/3)x^2} \, dx$ τα οποία υπολογίζονται με την αντικατάσταση $x = (3/\sqrt{2}) \sin t$.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1.1. Υπολογίστε το $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz) dz dy dx$.

Άσκηση 4.1.2. Υπολογίστε το $\iiint_W z dx dy dz$, όπου W το χωρίο που φράσσεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ με $x \geq 0$ και $y \geq 0$, και τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ και $z = 1$.

Άσκηση 4.1.3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iiint_W (x^2 + y^2) dx dy dz$, όπου W η πυραμίδα με κορυφή το $(0, 0, 1)$ και κορυφές βάσης τα $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.

Κεφάλαιο 5

Θεωρήματα αλλαγής μεταβλητών

5.1 Η γεωμετρία των απεικονίσεων

Έστω ότι $D^* \subseteq \mathbb{R}^2$ και $T : D^* \mapsto \mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμη, και $D = T(D^*)$. Λέμε ότι η T μετασχηματίζει το D^* στο D .

σχήμα

Παράδειγμα 5.1 Αν $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ θεωρούμε την απεικόνιση $T : D^* \mapsto \mathbb{R}^2$ θέτοντας $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, για άθε $(r, \theta) \in D^*$. Φανερά, $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2 \in [0, 1]$. Άρα, το $D = T(D^*)$ είναι ο κυκλικός δίσκος κέντρου μηδέν και ακτίνας 1.

Παράδειγμα 5.2 Με $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1]$ θέτουμε $T(x, y) = ((x + y)/2, (x - y)/2)$ και αναζητούμε το $D = T(D^*)$. Παρατηρούμε ότι $T(1, 1) = (1, 0)$, $T(1, -1) = (0, 1)$, $T(-1, 1) = (0, -1)$, $T(-1, -1) = (-1, 0)$. Η T είναι γραμμική απεικόνιση οπότε απεικονίζει ευθύγραμμα τμήματα σε ευθύγραμμα τμήματα και κυρτούς συνδιασμούς σε κυρτούς συνδιασμούς, οπότε το D δεν είναι άλλο από το τετράγωνο με κορυφές τα $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ και $(-1, 0)$. Μπορούμε όμως να κάνουμε και με άμεσο τρόπο τον έλεγχο: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(-1, 1)$ και $(1, 1)$ έχει εξίσωση $\sigma_1(t) = (t, 1)$ για $t \in [-1, 1]$. Τώρα $T(\sigma_1(t)) = T(t, 1) = ((t + 1)/2, (t - 1)/2)$. Αν θέσουμε $x = (t + 1)/2$ και $y = (t - 1)/2$, φανερά ισχύει $x - y = 1$, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα σ_1 απεικονίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $y = x - 1$ με $x \in [0, 1]$. Το ανάλογο ισχύει για κάθε ευθύγραμμο τμήμα $\sigma_a(t) = (t, a)$ για κάθε $a \in [-1, 1]$ και $t \in [-1, 1]$ (δείτε το σχήμα).

σχήμα

Παρατηρούμε ότι

$$T(x, y) = \left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

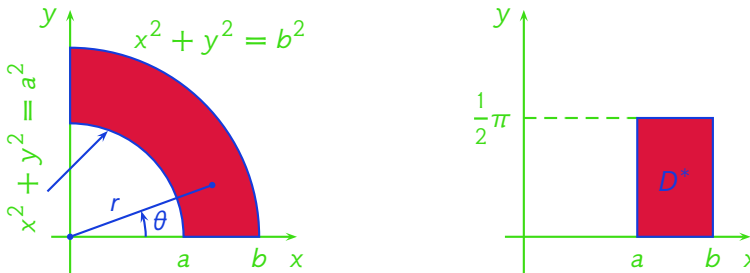
δηλαδή η T είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Έχουμε την ακόλουθη πρόταση της οποίας η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση (και ανήκει στα μαθηματα της Γραμμικής Άλγεβρας):

Πρόταση 5.3 Αν ο A είναι ένας 2×2 με $\det(A) \neq 0$ και η T είναι η απεικόνιση $Tx = A \cdot x$ για $x \in \mathbb{R}^2$, τότε η T μετασχηματίζει παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα, τις πλευρές τους σε πλευρές και τις κορυφές τους σε κορυφές. Έτσι αν το D^* είναι παραλληλόγραμμο τότε και το $D = TD^*$ είναι και αυτό παραλληλόγραμμο.

Παρατήρηση 5.4 Η $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ δεν είναι 1-1. Για παράδειγμα εύκολα ελέγχουμε ότι $T(1, 0) = T(1, 2\pi) = (1, 0)$ Αλλά η απεικόνιση $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) : [0, +\infty) \times (0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$ είναι 1-1 και επί. Πράγματι, αν $T(r, \theta) = T(r', \theta')$ τότε $r \cos \theta = r' \cos \theta'$ και $r \sin \theta = r' \sin \theta'$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $r^2 = r'^2$ και επειδή $r, r' \in [0, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι $r = r'$. Από αυτό προκύπτει $\cos \theta = \cos \theta'$ και $\sin \theta = \sin \theta'$ με $\theta, \theta' \in (0, 2\pi]$, και εύκολα τώρα προκύπτει $\theta = \theta'$. Το επί είναι απλούστερο και αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση 5.5 Η απεικόνιση $T(x, y) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, είναι 1-1 και επί από το \mathbb{R}^2 στο \mathbb{R}^2 . Πράγματι, αν $T(x, y) = T(x', y')$ τότε $x + y = x' + y'$ καθώς και $x - y = x' - y'$. Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη οδηγούμαστε στις $x = x'$ και $y = y'$. Το επί είναι απλούστερο και αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 5.6 Έστω ότι το D είναι το χωρίο του σχήματος στα αριστερά.



Αν η T είναι η $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ θα βρούμε το D^* ώστε $D = T(D^*)$. Για κάθε $(x, y) := (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D$ έχουμε $a \leq r \leq b$ διότι $r^2 = x^2 + y^2 \in [a, b]$. Επίσης για να ισχύει $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in D$ θα πρέπει το θ να είναι στο $[0, \pi/2]$. Άρα $D^* = [a, b] \times [0, \pi/2]$.

5.2 Αλλαγή μεταβλητών στις δύο διαστάσεις

Δίνονται δυο χωρία D και D^* τύπου I ή II στο \mathbb{R}^2 , και μια διαφορίσιμη απεικόνιση T ώστε $T(D^*) = D$. Αν $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση,

θέλουμε να εκφράσουμε το $\iint_D f(x, y) dx dy$ ως ολοκλήρωμα πάνω στο D^* . Ας υποθέσουμε ότι το D^* είναι τύπου I και $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in D$ για $(u, v) \in D^*$. Η σχέση

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) du dv$$

δεν είναι απαραίτητα σωστή, διότι αν για παράδειγμα $f(x, y) = 1$ η παραπάνω σχέση θα έδινε $A(D) = A(D^*)$, δηλαδή τα D, D^* θα είχαν ίσα εμβαδά κάτι το οποίο δεν είναι απαραίτητο. Αυτό που χρειαζόμαστε λοιπόν για να πάρουμε μια τέτοιου είδους ισότητα είναι να βρούμε ένα τρόπο ώστε η σχέση που θα ισχύει να λαμβάνει υπόψη της τη μεταβολή του εμβαδού καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των μεταβλητών από τις u, v στις x, y . Αυτό είναι κάτι που το κάνει η «Ιακωβιανή ορίζουσα»:

Ορισμός 5.7 Αν T, D και D^* είναι όπως παραπάνω, η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού T είναι η ορίζουσα

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) =: (x, y)$, ο οποίος μετασχηματίζει πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η Ιακωβιανή του ορίζουσα είναι η

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Αν λοιπόν $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi] \xrightarrow{T} B_2(0, 1)$, τότε $\iint_D 1 dx dy = A(D) = \pi$ και

$$\begin{aligned} \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv &= \iint_{D^*} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\iint_D 1 dx dy = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

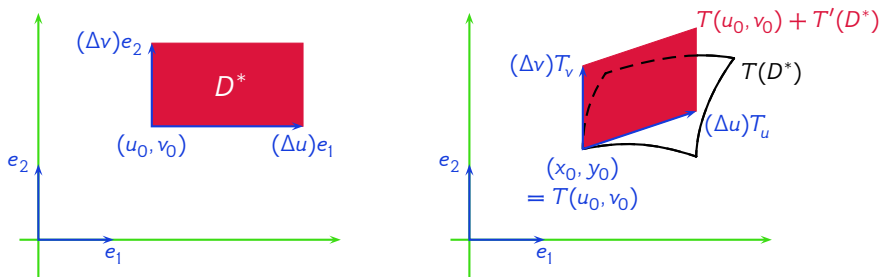
Δεν είναι εύκολο να δώσουμε αυστηρή απόδειξη του ισχυρισμού ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα δίνει το μέτρο της μεταβολής που ένας μετασχηματισμός επιφέρει στα εμβαδά. Μπορούμε όμως να κατανοήσουμε το θέμα αν εργαστούμε ως εξής: το $A(D)$ υπολογίζεται, αφού διαμεριστεί το D σε μικρά

ορθογώνια, προστεθούν τα εμβαδά τους και περάσουμε σε όριο καθώς τα ορθογώνια γίνονται όλο και μικρότερα. Όμως η εικόνα ενός ορθογωνίου μέσω του T μπορεί να μην είναι ορθογώνιο (όπως για παράδειγμα στον μετασχηματισμό από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες). Για αυτό θα προσεγγίσουμε και την εικόνα με απλούστερα χωρία. Ένα εργαλείο για αυτή την προσέγγιση είναι η παράγωγος του T η οποία δίνει τη βέλτιστη γραμμική προσέγγιση του T . Ας συμβολίσουμε με T' την παράγωγο του T , δηλαδή $T' = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$. Δοθέντος του $T(u_0, v_0)$ μια καλή προσέγγιση του $T(u, v)$ δίνεται από την ποσότητα $T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$, όπου $\Delta u = u - u_0$ και $\Delta v = v - v_0$. Αλλά αυτή η απεικόνιση πηγαίνει το D^* σε ένα παραλληλόγραμμο με κορυφή το $T(u_0, v_0)$ και διαδοχικές πλευρές τα

$$T'(\Delta u \cdot e_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta u \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} =: \Delta u \cdot T_u$$

$$T'(\Delta v \cdot e_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} = \Delta v \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} =: \Delta v \cdot T_v,$$

όπου $T_u = (\partial x / \partial u)e_1 + (\partial y / \partial u)e_2$ και $T_v = (\partial x / \partial v)e_1 + (\partial y / \partial v)e_2$.

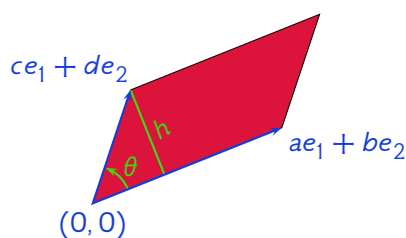


Το εμβαδόν του $T(D^*)$ είναι κατα προσέγγιση ίσος με το εμβαδόν $T(u_0, v_0) + T'(D^*)$. Οι πλευρές του τελευταίου παραλληλογράμμου είναι τα διανύσματα

$$\Delta u \cdot T_u = \Delta u \frac{\partial x}{\partial u} e_1 + \Delta u \frac{\partial y}{\partial u} e_2 \text{ και } \Delta v \cdot T_v = \Delta v \frac{\partial x}{\partial v} e_1 + \Delta v \frac{\partial y}{\partial v} e_2,$$

οπότε έχει εμβαδόν

$$\left| \begin{vmatrix} \Delta u \frac{\partial x}{\partial u} & \Delta u \frac{\partial y}{\partial u} \\ \Delta v \frac{\partial x}{\partial v} & \Delta v \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| = |\Delta u \Delta v| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot \Delta u \Delta v.$$



Πρόταση 5.8 Το εμβαδόν παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $ae_1 + be_2$ και $ce_1 + de_2$ ισούται με

$$\left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right|.$$

Απόδειξη: Αν h το ύψος του παραλληλογράμμου κάθετο στην πλευρά $ae_1 + be_2$, τότε το εμβαδόν του είναι $E = h \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$. Το h είναι ίσο με $\sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$. Όμως

$$\cos \theta = \frac{\langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}.$$

Συνεπώς

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{(ac + bd)^2}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο του E μετά από πράξεις παίρνουμε

$$E = \sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc| = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Με βάση λοιπόν την προηγούμενη πρόταση

$$A(TD^*) \simeq \sum \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v \text{ και } A(D^*) = \sum \Delta u \Delta v.$$

Παιρνόντας σε όρια ($\Delta u \rightarrow 0$, $\Delta v \rightarrow 0$) και επειδή $A(TD^*) = A(D)$, παίρνουμε τη σχέση:

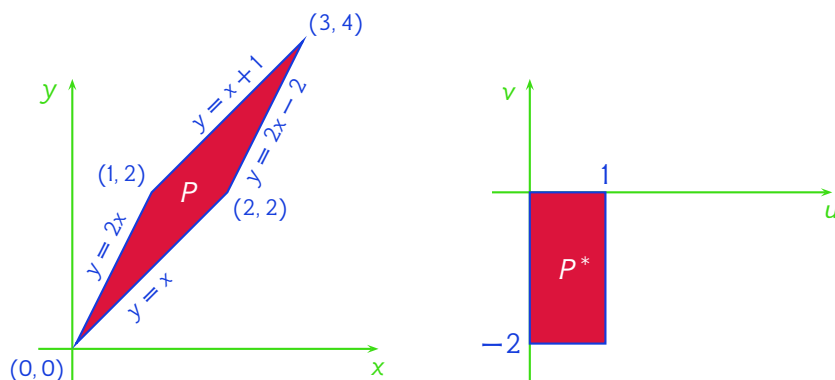
$$\iint_D 1 \, dx \, dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv.$$

Ανάλογο είναι το αποτέλεσμα αν αντί για το $\iint_D 1 \, dx \, dy$ έχουμε να υπολογίσουμε το $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$. Ισχύει το εξής θεώρημα (η απόδειξη του οποίου ανήκει σε προχωρημένα μαθήματα Ανάλυσης):

Θεώρημα 5.9 Έστω ότι τα D, D^* είναι στοιχειώδη χωρία στο επίπεδο, και $T : D^* \mapsto D$ συνάρτηση C^1 (δηλαδή συνεχώς διαφορίσιμη). Υποθέτουμε ότι η T είναι 1-1 και επί. Τότε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ισχύει

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv. \quad \square$$

Παράδειγμα 5.10 Έστω P το παραλληλόγραμμο που φράσσεται από τις $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ και $y = x + 1$. Θα υπολογίσουμε το $\iint_P(xy) dx dy$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $x = u - v$, $y = 2u - v$ (δηλαδή $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$). Επειδή ο μετασχηματισμός T είναι γραμμικός, το P^* ώστε $T(T^*) = P$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού το P είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι για να βρούμε το P^* αρκεί να βρούμε τις κορυφές του, δηλαδή τα τέσσερα σημεία (u, v) ώστε $T(u, v) = (0, 0)$, $T(u, v) = (2, 2)$, $T(u, v) = (3, 4)$, $T(u, v) = (1, 2)$, αφού τα $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ και $(1, 2)$ είναι τα σημεία που τέμνονται οι ευθείες που περιγράφουν το P . Έτσι, για την πρώτη εξίσωση θα πρέπει $u - v = 0$ και $2u - v = 0$ οπότε λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι η μία κορυφή είναι στο $(0, 0)$. Ομοίως βρίσκουμε και τις υπόλοιπες τρεις στα σημεία $(0, -2)$, $(1, -2)$ και $(1, 0)$. Δηλαδή το P^* είναι το παραλληλόγραμμο $[0, 1] \times [-2, 0]$. Είμαστε έτοιμοι για τον υπολογισμό:



$$\begin{aligned}
 \iint_P (xy) dx dy &= \iint_{P^*} (u-v)(2u-v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \\
 &= \int_0^1 \int_{-2}^0 (u-v)(2u-v) \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| dv du \\
 &= \int_0^1 \int_{-2}^0 (u-v)(2u-v) \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right| dv du \\
 &= \int_0^1 \int_{-2}^0 (2u^2 + v^2 - 3uv) \cdot 1 dv du = \dots = 7.
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.11 Θα υπολογίσουμε το $\iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy$ όπου D το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μέσα στον κύκλο $x^2 + y^2 = b^2$ και έξω από τον κύκλο $x^2 + y^2 = a^2$ με $0 \leq a < b$. Για το χωρίο αυτό βρήκαμε το

D^* με τον μετασχηματισμό $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ στο Παράδειγμα 5.6. Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \right| = |r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta| = |r| = r.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \iint_D \log(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\pi/2} \int_a^b \log(r^2) r dr d\theta \\ &= \pi \int_a^b r \log r dr = \pi \int_a^b \left(\frac{r^2}{2} \right)' \log r dr \\ &= \pi \left(\frac{r^2}{2} \log r \Big|_a^b - \int_a^b \frac{r^2}{2} (\log r)' dr \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.12 Θα υπολογίσουμε το $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ όπου $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Δηλαδή θέλουμε τον όγκο κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και πάνω από το R . Χωρίζουμε το R σε δύο τμήματα R_1 και R_2 χρησιμοποιώντας τη διαγώνιο $y = x$ όπως στο σχήμα. Έτσι

σχήμα

$$\begin{aligned} R_1 : \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi & \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \\ R_2 : \quad \frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi & \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}. \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός θα είναι και πάλι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες, οπότε η Ιακωβιανή είναι r όπως στο Παράδειγμα 5.11. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_{R_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy + \iint_{R_2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} \sqrt{r^2} dr d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\sin \theta} \sqrt{r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=1/\cos \theta} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^{r=1/\sin \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta + \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \int \frac{1}{\cos \theta} (\tan \theta)' d\theta \\ &= \dots = \frac{\tan \theta}{\cos \theta} - \int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta + \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta, \end{aligned}$$

οπότε

$$2I_1 = \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \int \frac{1}{\cos \theta}.$$

Ομοίως υπολογίζουμε και το δεύτερο ολοκλήρωμα $I_2 = \int (1/\sin^3 \theta) d\theta$ με τη βοήθεια της $\cot \theta$. Και τα δύο αυτά ολοκληρώματα καταλήγουν στον υπολογισμό των $\int (1/\cos \theta) d\theta$ και $\int (1/\sin \theta) d\theta$. Υπενθυμίζουμε τον υπολογισμό τους: για το δεύτερο γράφουμε

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} (\tan \frac{\theta}{2})' d\theta \\ &\stackrel{u=\tan(\theta/2)}{du=(\tan(\theta/2))' d\theta} \int \frac{1}{u} du. \end{aligned}$$

Έτσι καταλήγουμε στο ότι $\int (1/\sin \theta) d\theta = \log |\tan(\theta/2)| + c$.

Για το $\int (1/\cos \theta) d\theta$ απλώς γράφουμε $\cos \theta = \sin((\pi/2) - \theta)$ και με το προηγούμενο ολοκλήρωμα βρίσκουμε

$$\int (1/\cos \theta) d\theta = \log \left| \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right| + c.$$

5.3 Αλλαγή μεταβλητών στις τρεις διαστάσεις

Για ένα μετασχηματισμό $T : W \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ που είναι συνεχώς διαφορίσιμος και

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

ορίζουμε την Ιακωβιανή του ορίζουσα να είναι η

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Με αυτό τον ορισμό, ό,τι ισχύει στις δύο διαστάσεις ισχύει και στις τρεις:

Θεώρημα 5.13 Έστω ότι τα D, D^* είναι στοιχειώδη χωρία στον \mathbb{R}^3 , και $T : D^* \mapsto D$ συνάρτηση C^1 (δηλαδή συνεχώς διαφορίσιμη). Υποθέτουμε ότι η T είναι 1-1 και επί. Τότε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \\ = \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du dv dw. \end{aligned} \quad \square$$

Παράδειγμα 5.14 Θα υπολογίσουμε το $I = \iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx dy dz$ όπου το D είναι η μοναδιαία μπάλα του \mathbb{R}^3 . Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή τον μετασχηματισμό $T(\rho, \varphi, \theta) = (x, y, z)$ όπου

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Φανερά το D^* ώστε $T(D^*) = D$ είναι το παραλληλόγραμμο στον \mathbb{R}^3 όπου $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ και $\varphi \in [0, \pi]$, δηλαδή το $[0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ όπου στον πρώτο άξονα έχουμε τις τιμές του ρ , στον δεύτερο του θ και στον τρίτο του φ .

Υπολογίζουμε τώρα την Ιακωβιανή ορίζουσα:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = \dots \\ &= -\rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} |-\rho^2 \sin \varphi| \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{3} e^{\rho^3} \sin \varphi \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \, d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e-1}{3} \sin \varphi \, d\varphi d\theta \\ &= \frac{e-1}{3} 2\pi (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi = \frac{4}{3} \pi (e-1). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.15 θα υπολογίσουμε τον όγκο της Ευκλείδειας μπάλας B_2^3 ακτίνας $R > 0$ με τριπλό ολοκλήρωμα (εναλλακτικά υπολογίζεται και με

την αρχή του Cavallieri ή διπλό ολοκλήρωμα).

$$\begin{aligned} \text{vol} B_2^3 &= \iiint_{B_2^3} 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\substack{\text{σφαιρικές} \\ \text{συντεταγμένες}}}{=} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} \rho^3 \sin \varphi \right) \Big|_0^R \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = \dots = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.16 θα υπολογίσουμε το $\iiint_B z \, dx \, dy \, dz$ όπου B το χωρίο μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$, πάνω από το xy -επίπεδο και κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_B z \, dx \, dy \, dz &\stackrel{\substack{\text{πολικές: } x=r \cos \theta \\ y=r \sin \theta, \quad z=z}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^r z r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^3}{2} \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \pi. \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες: θέτουμε

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = -\rho^2 \sin \varphi.$$

Επίσης ισχύουν

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos(\pi/2 - \varphi)} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} &\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sin \varphi} \rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sin \varphi} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \dots = \frac{1}{4} \pi. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.17 θα υπολογίσουμε το $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \, dx \, dy \, dz$ όπου D το χωρίο στο οποίο ισχύει $1/2 \leq z \leq 1$ και $x^2 + y^2 + z^2 \leq$

1. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες το ολοκλήρωμά μας, εύκολα βρίσκουμε ότι γράφεται ως

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz r dr d\theta.$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| 2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right|, & \text{αν } a > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Ο υπόλοιπος υπολογισμός αφήνεται ως άσκηση.

Ασκήσεις

Άσκηση 5.3.1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D x^2 dx dy$ όπου

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \text{ και } x^2 + y^2 \leq 1\},$$

με δυο τρόπους: αλλάζοντας σε πολικές συντεταγμένες και χωρίς αλλαγή μεταβλητών.

Άσκηση 5.3.2. Εκφράστε το $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy dy dx$ ως ολοκλήρωμα πάνω στο

$$D^* = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\},$$

και υπολογίστε το. Επίσης υπολογίστε το και χωρίς αλλαγή μεταβλητών.

Κεφάλαιο 6

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

6.1 Καμπύλες

Ορισμός 6.1 Μια καμπύλη στον \mathbb{R}^n είναι μια απεικόνιση $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in [a, b]$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

στον \mathbb{R}^n υπό την έννοια ότι υπάρχει σημείο $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} - \gamma'(t_0) \right\|_2 = 0.$$

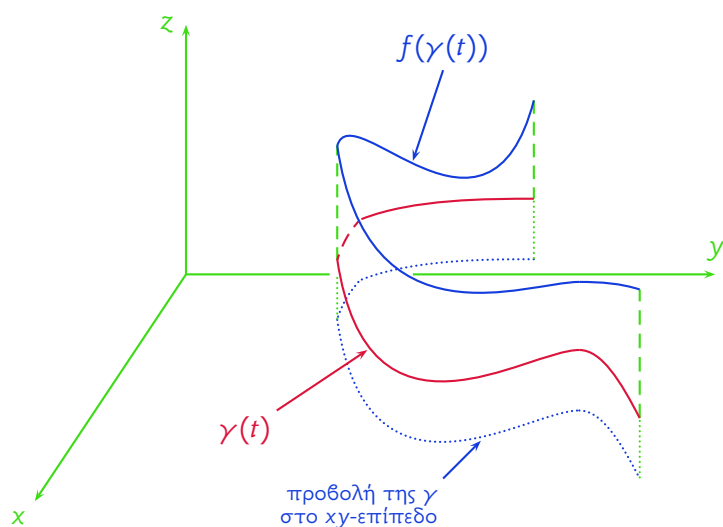
Τα $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$ λέγονται άκρα της καμπύλης.

Αν $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη με $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ εύκολα βλέπουμε ότι $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, η οποία λέγεται ταχύτητα της γ και το μέτρο $S(t) = \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ είναι το μέτρο της ταχύτητας. Η γ'' λέγεται επιτάχυνση της γ .

Αν η $\varphi : [c, d] \mapsto [a, b]$ είναι μια 1-1 και επί απεικόνιση, η καμπύλη $\rho(t) = \gamma(\varphi(t))$ με $t \in [c, d]$ έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο τιμών με τη γ και λέγεται αναπαραμετροποίηση της γ . Παρατηρήστε ότι μια αναπαραμετροποίηση αλλάζει (εν γένει) την ταχύτητα της γ αφού από τον κανόνα της αλυσίδας θα είναι $\rho'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Ονομάζουμε μήκος της γ την ποσότητα

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

εφόσον η $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη (C^1).



Αν $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ διαμέριση του $[a, b]$, το εμβαδόν από το $\gamma(t_j)$ μέχρι το $\gamma(t_{j+1})$ είναι περίπου $f(\gamma(t_j)) \cdot \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|_2$. Άρα συνολικά το μήκος της καμπύλης είναι κατά προσέγγιση

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N-1} f(\gamma(t_j)) \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|_2 \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f(\gamma(t_j)) \frac{\|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\|_2}{t_{j+1} - t_j} (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Έτσι αν $N \rightarrow \infty$ και το όριο του αθροίσματος υπάρχει αυτό θα είναι το

$$\int_a^b f(t) \|\gamma(t)\|_2 dt$$

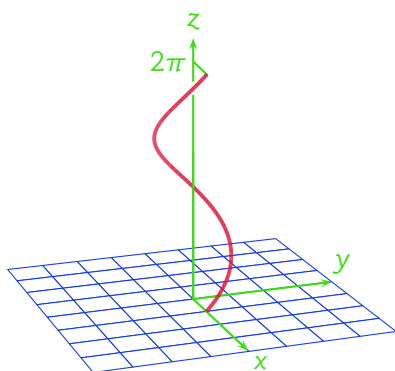
και ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στη γ και γράφουμε $\int_\gamma f dt$. Για παράδειγμα αν η γ είναι C^1 και η $f(\gamma(t))$ είναι συνεχής, τότε το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Παράδειγμα 6.2 Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Σχήμα 6.1: Η καμπύλη του Παράδειγματος 6.2

πάνω στην έλικα $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ φανερά η f



είναι συνεχής και η γ είναι C^1 . Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t) \|\gamma'(t)\|_2 dt \\ &= \frac{\|\gamma'(t)\|_2 = \|(-\sin t, \cos t, 1)\|_2}{=\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \dots \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1.1. Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων στις καμπύλες που δίνονται.

- (i) $f(x, y, z) = x + y + z$ στην καμπύλη $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ για $t \in [0, 2\pi]$.
- (ii) $f(x, y, z) = \cos z$ στην καμπύλη $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ για $t \in [0, 2\pi]$.
- (iii) $f(x, y, z) = x \cos z$ στην καμπύλη $\gamma(t) = (t, t^2, 0)$ για $t \in [0, 1]$.

Άσκηση 6.1.2. Υπολογίστε το $\int_{\sigma} f$ όπου $f(x, y, z) = x + y + yz$ και $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ για $0 \leq t \leq 2\pi$

6.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους

Έστω ότι η $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο, δηλαδή(!) μια συνάρτηση από το \mathbb{R}^3 στο \mathbb{R}^3 (σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^3 αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα). Έστω ότι η $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη και $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ μια διαμέριση \mathcal{P}_N με λεπτότητα να τείνει στο μηδέν, δηλαδή $\|\mathcal{P}_N\| = \max_j |t_{j+1} - t_j| \rightarrow 0$ καθώς $N \rightarrow \infty$.

Από τη Φυσική, μια σταθερή δύναμη \vec{F} που μετατοπίζει ένα αντικείμενο (για παράδειγμα ένα σωματίδιο) κατά το διάνυσμα \vec{d} παράγει έργο $\langle \vec{F}, \vec{d} \rangle$. Άρα κατά προσέγγιση το έργο της \vec{F} πάνω στην καμπύλη γ είναι

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N-1} \left\langle F(\gamma(t_j)), (\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)) \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left\langle F(\gamma(t_j)), \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\rangle (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Έτσι, αν $N \rightarrow \infty$ και η γ και η F είναι C^1 , το έργο της F πάνω στη γ είναι

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \left\langle F(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|_2} \right\rangle \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

Με άλλα λόγια, πρόκειται για ένα κατάλληλο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, το οποίο ονομάζεται *β' είδους*.

Παράδειγμα 6.3 Θα υπολογίσουμε το έργο που παράγει η $F(x, y) = (xy, x^3y^3)$ στην $y = x^2$ για $x \in [0, 1]$. Αν θέσουμε $x = t$ τότε $y = t^2$ και η καμπύλη είναι η $\gamma(t) = (t, t^2)$. Βρίσκουμε $F(\gamma(t)) = (t^3, t^9)$ και $\gamma'(t) = (1, 2t)$. Οπότε το έργο είναι

$$W = \int_0^1 \langle (t^3, t^9), (1, 2t) \rangle dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^{10}) dt = \dots$$

Συχνά στα επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους, χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός. Αν $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$, $\gamma'(t) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ και $F = (F_1, F_2, F_3)$, το έργο είναι

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left\langle (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(\dots), F_3(\dots)), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &\stackrel{\text{συμβολικά}}{=} \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \end{aligned}$$

Σημαντική Παρατήρηση 6.4 Το $\int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ είναι απλώς ένα σύμβολο και δεν είναι ίσο με $\int_a^b F_1 dx + \int_a^b F_2 dy + \int_a^b F_3 dz$. Όταν ζητείται να υπολογιστεί το $\int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ εννοείται ότι αυτό που ζητείται είναι το

$$\int \left\langle (F_1, F_2, F_3), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \right\rangle dt.$$

Αν θέσουμε $x = t$ καθώς παραμετροποιούμε την καμπύλη μας, τότε βεβαίως $dx/dt = 1$, $dy/dt = dy/dx$ και $dz/dt = dz/dx$, και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int F_1 dx + \int \left(F_2 \frac{dy}{dx} \right) dx + \int \left(F_3 \frac{dz}{dx} \right) dx,$$

το οποίο δεν είναι ίσο με $\int F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

Παράδειγμα 6.5 Θα υπολογίσουμε το $\int F_1 dx + F_2 dy$ για την F και γ του Παραδείγματος 6.3.

Α' τρόπος:

$$\begin{aligned} \int F_1 dx + F_2 dy &= \int \left\langle (F_1, F_2), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \right\rangle dt \\ &= \int \left\langle (tt^2, t^3(t^2)^3), (1, 2t) \right\rangle dt = \dots = \frac{1}{4} + \frac{2}{11}. \end{aligned}$$

Β' τρόπος: Αφού $x = t$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int F_1 dx + F_2 dy &= \int F_1 dx + \int \left(F_2 \frac{dy}{dx} \right) dx \\ &\stackrel{y=x^2}{=} \int_0^1 xx^2 dx + \int_0^1 x^3(x^2)^3 2x dx \\ &= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + 2 \frac{x^{11}}{11} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{11}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.6 Θα υπολογίσουμε το $I = \int_{\gamma} \cos z dx + e^x dy + e^y dz$ όπου γ η καμπύλη $\gamma : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (1, t, e^t)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \langle (\cos z, e^x, e^y)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^2 \langle (\cos e^t, e^1, e^t), (0, 1, e^t) \rangle dt \\ &= \int_0^2 (e + e^{2t}) dt = \dots = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 6.2.1. Υπολογίστε το

$$\int_{\gamma} (\sin z) dx + (\cos z) dy - (xy)^{1/3} dz,$$

όπου η καμπύλη γ περιγράφεται από τις $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ και $z = \theta$, με $\theta \in [0, 7\pi/2]$.

Άσκηση 6.2.2. Το $F(x, y, z)$ είναι κάθετο στο $\sigma'(t)$ σε κάθε σημείο της καμπύλης $(x, y, z) = \sigma(t)$. Βρείτε το $\int_{\sigma} F$.

6.3 Προσανατολισμός καμπύλης και ολοκλήρωμα β' είδους

Το έργο κατά μήκος μιας καμπύλης εξαρτάται (εν γένει) από τη φορά με την οποία γράφτηκε η καμπύλη. Θεωρήστε για παράδειγμα την $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ για $t \in [0, \pi/2]$, και τη συνάρτηση $\varphi(t) = (\pi/2) - t$. Η καμπύλη $\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$ έχει τύπο $(\cos((\pi/2) - t), \sin((\pi/2) - t)) = (\sin t, \cos t)$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών είναι το ίδιο για την γ και την γ_1 , δηλαδή πρόκειται για την ίδια καμπύλη. Όμως αυτή γράφεται με διαφορετική φορά. Για παράδειγμα, η γ ξεκινάει για $t = 0$ με το σημείο $(1, 0)$ και καταλήγει για $t = \pi/2$ στο $(0, 1)$, ενώ η γ_1 ξεκινάει για $t = 0$ με το σημείο $(0, 1)$ και καταλήγει για $t = \pi/2$ στο $(1, 0)$. Και οι δύο καμπύλες γράφουν το τεταρτοκύκλιο ακτίνας 1 στο πρώτο τεταρτημόριο.

Αν υπολογίσουμε τώρα το έργο του πεδίου $F(x, y) = (x, y^2)$ στη γ θα βρούμε

$$\begin{aligned} W_\gamma &= \int_\gamma F = \int_0^{\pi/2} x dx + y^2 dy = \int_0^{\pi/2} \left(\cos t \frac{dx}{dt} + \sin^2 t \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \dots = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε το έργο στη γ_1 και εύκολα βρίσκουμε ότι $W_{\gamma_1} = \frac{1}{6} = -W_\gamma$. Το έργο λοιπόν εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης.

Ορισμός 6.7 Η σύνθεση $\gamma \circ \varphi$ μιας C^1 καμπύλης $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ με μια 1-1, επί και C^1 πραγματική συνάρτηση $\varphi : [c, d] \mapsto [a, b]$, λέγεται *αναπααραμετροποίηση* της καμπύλης γ . Λέμε ότι η φ διατηρεί τον προσανατολισμό της γ όταν $\varphi(c) = a$ και $\varphi(d) = b$, ενώ λέμε ότι τον αντιστρέφει, αν $\varphi(c) = b$ και $\varphi(d) = a$.

Θεώρημα 6.8 Έστω ότι το F είναι ένα διανυσματικό πεδίο, συνεχές στη C^1 καμπύλη $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ και $\rho : [c, d] \mapsto [a, b]$ μια αναπααραμετροποίηση της γ . Τότε αν η ρ διατηρεί τον προσανατολισμό της γ , ισχύει $\int_\rho F = \int_\gamma F$. Ενώ αν τον αντιστρέφει τότε $\int_\rho F = -\int_\gamma F$.

Απόδειξη: Επειδή $\rho(t) = \gamma(\varphi(t))$ θα είναι $\rho'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\rho F &= \int_c^d \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_c^d \langle F(\gamma(\varphi(t))), \gamma'(\varphi(t)) \rangle \varphi'(t) dt \\ &= \frac{s=\varphi(t) \Rightarrow ds=\varphi'(t) dt}{t=c \Rightarrow s=\varphi(c) \text{ και } t=d \Rightarrow s=\varphi(d)} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds \\ &= \begin{cases} \int_a^b \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds, & \text{αν η } \varphi \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό} \\ \int_b^a \langle F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds, & \text{αν τον αντιστρέφει} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_\gamma F, & \text{αν η } \varphi \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό} \\ -\int_\gamma F, & \text{αν η } \varphi \text{ αντιστρέφει τον προσανατολισμό,} \end{cases} \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

Ο προσανατολισμός της $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ αντιστρέφεται αν συνθέσουμε με την $\varphi(t) = a + b - t$ για $t \in [a, b]$. Γράφουμε

$$\gamma_{\text{αντ}}(t) = \gamma(a + b - t) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3.$$

Παράδειγμα 6.9 Θα υπολογίσουμε το

$$\int_{\gamma} F = \int yz dx + xz dy + xy dz$$

για την $\gamma : [-5, 10] \mapsto \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, και το $\int_{\gamma_{\text{αντ}}} F$.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_{-5}^{10} \left(t^2 t^3 \frac{dx}{dt} + t t^3 \frac{dy}{dt} + t t^2 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{-5}^{10} (t^5 \cdot 1 + t^4 \cdot 2t + t^3 \cdot 3t^2) dt = \dots = 984,375. \end{aligned}$$

Για την αντίθετη,

$$\gamma_{\text{αντ}} = \gamma(10 + (-5) - t) = \gamma(5 - t) = (5 - t, (5 - t)^2, (5 - t)^3)$$

και

$$\frac{dx}{dt} = -1, \quad \frac{dy}{dt} = -2(5 - t), \quad \frac{dz}{dt} = -3(5 - t)^2.$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\text{αντ}}} F &= \int_{-5}^{10} \left((5 - t)^2 (5 - t)^3 (-1) + (5 - t) (5 - t)^3 (-2)(5 - t) \right. \\ &\quad \left. + (5 - t) (5 - t)^2 (-3)(5 - t)^2 \right) dt \\ &= (5 - t)^6 \Big|_{-5}^{10} = -984,375. \end{aligned}$$

Ειδική περίπτωση έχουμε όταν για το διανυσματικό πεδίο $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ υπάρχει $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $F = \nabla f$. Αυτά τα διανυσματικά πεδία λέγονται *συντηρητικά*. Σε αυτή την περίπτωση

$$F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

και αν $\gamma(t) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ μια C^1 καμπύλη, έχουμε:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \right), \gamma'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b (f(\gamma(t)))' dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (\text{Λήμμα Α'.1}) \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν το επόμενο:

Θεώρημα 6.10 Αν το $F = \nabla f$ ένα συντηρητικό πεδίο, τότε $W = \int_{\gamma} F = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. \square

Παράδειγμα 6.11 Θα υπολογίσουμε το $\int_{\gamma} y dx + x dy$ στην καμπύλη $\gamma(t) = (t^4/4, \sin^3(t\pi/2))$ για $t \in [0, 1]$.

Φανερά $\nabla(xy) = (y, x) = F(x, y)$ δηλαδή $F = \nabla f$ με $f(x, y) = xy$. Άρα

$$\int_{\gamma} y dx + x dy = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1/4, 1) - f(0, 0) = \frac{1}{4}. \quad \square$$

Ορισμός 6.12 Μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ με γράφημα το σύνολο $C = \{(t, \gamma(t)) : t \in [a, b]\}$ λέγεται «απλή» αν η γ είναι 1-1, δηλαδή το γράφημά της δεν τέμνει τον εαυτό του.

Η συνάρτηση γ λέγεται και «προσανατολισμός» της C (αφού καθορίζει από ποιο σημείο ξεκινά η γ και σε ποιο τελειώνει). Μια απλή καμπύλη για την οποία δηλώνουμε τον προσανατολισμό της λέγεται «προσανατολισμένη απλή καμπύλη».

Αν ισχύει $\gamma(a) = \gamma(b)$ η καμπύλη λέγεται «κλειστή».

Παρατήρηση 6.13 Αν $F = \nabla f$ και η γ είναι απλή κλειστή καμπύλη, τότε $W_{\gamma} = \int_{\gamma} F = 0$, διότι $\int_{\gamma} F = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)) = 0$, αφού $\gamma(b) = \gamma(a)$ μια και η καμπύλη γ είναι κλειστή.

Παρατήρηση 6.14 Επειδή το έργο W δεν αλλάζει αν αλλάξει η παραμετροποίηση και διατηρηθεί ο προσανατολισμός, μπορούμε να ορίσουμε το $\int_C f$ να είναι το $\int_{\gamma} f$, όπου η C είναι προσανατολισμένη καμπύλη και γ μια (οποιαδήποτε!) παραμετροποίησή της.

Παρατήρηση 6.15 Αν η γ και η ρ είναι δυο κατά τμήματα C^1 καμπύλες ώστε η $\gamma \cup \rho_{\text{αντ}}$ να είναι κλειστή και $F = \nabla f$, τότε $\int_{\gamma} F = \int_{\rho} F$, διότι φανερά

$$0 = \int_{\gamma \cup \rho_{\text{αντ}}} F = \int_{\gamma} F + \int_{\rho_{\text{αντ}}} F = \int_{\gamma} F - \int_{\rho} F.$$

Παράδειγμα 6.16 Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της

$$F(x, y, z) = (z^3 + 2xy, x^2, 3xz^2) = (z^3 + 2xy)e_1 + x^2e_2 + 3xz^2e_3$$

πάνω στην περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές στα σημεία $(\pm 1, \pm 1, 5)$ και φορά αντίθετη από αυτή του ρολογιού.

Μπορούμε βεβαίως να γράψουμε τις εξισώσεις των πλευρών του τετραγώνου αυτού και να ολοκληρώσουμε όπως πριν. Για παράδειγμα η πλευρά του τετραγώνου αυτού με άκρα στα $(1, -1, 5)$ και $(1, 1, 5)$ μπορεί να περιγραφεί με την

$$\gamma_1(t) = (1-t)(1, -1, 5) + t(1, 1, 5) = (1, 2t - 1, 5)$$

σχήμα

σχήμα

για $t \in [0, 1]$. (Η την $\rho_1(t) = (1, t, 5)$ με $t \in [-1, 1]$. Η παραμετρικοποίηση δεν θα επηρεάσει το αποτέλεσμα.)

Εναλλακτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\nabla(xz^3 + x^2y) = F$, οπότε το F είναι συντηρητικό, και αφού η καμπύλη είναι κλειστή, αναγκαστικά $\int_{\gamma} F = 0$.

Η Παρατήρηση 6.15 μας επιτρέπει τον υπολογισμό ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος μέσω μιας εναλλακτικής διαδρομής με άκρα τα ίδια άκρα με την αρχική καμπύλη. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.17 Μια ποδηλάτισσα ανεβαίνει στην κορυφή ενός βουνού ακολουθώντας την C^1 καμπύλη του σχήματος από το σημείο A στο B . σχήμα
Καθώς ανεβαίνει της ασκείται η δύναμη του βάρους της $F(x, y, z) = ae_3 = (0, 0, a)$ (a το βάρος της σε Newton). Αν η επιφάνεια του βουνού περιγράφεται με την εξίσωση $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ θέλουμε να υπολογίσουμε το έργο που παράγει η ποδηλάτισσα κατά την ανάβασή της.

Παρατηρήστε ότι δεν ξέρουμε την εξίσωση της καμπύλης που ακολουθεί. Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της ευθέως. Αν όμως ονομάσουμε ρ την καμπύλη από το B στο A του xz -επιπέδου, τότε αυτή η καμπύλη είναι τα σημεία $(t, 0, \rho(t)) = (t, 0, 2\pi - t^2)$ με $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$ (θέσαμε $x = t$ και $y = 0$ οπότε $z = 2\pi - t^2$).

Επειδή τώρα το πεδίο F είναι συντηρητικό ($\nabla(az) = F$) από την Παρατήρηση 6.15 θα ισχύει $\int_{\gamma} F = -\int_{\rho} F$. Οπότε

$$\begin{aligned} \int_{\rho} F &= \int_0^{\sqrt{2\pi}} \langle F(\rho(t)), \rho'(t) \rangle dt = f(\rho(\sqrt{2\pi})) - f(\rho(0)) \\ &= f(\sqrt{2\pi}, 0, 0) - f(0, 0, 2\pi) = 2\pi a. \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 6.3.1. Ένα δαχτυλίδι σε κυκλικό σχήμα $x^2 + y^2 = a^2$ από σύρμα ζυγίζει $|x| + |y|$ γραμμάρια ανά μονάδα μήκους στο (x, y) . Βρείτε τη μάζα του δαχτυλιδιού.

Κεφάλαιο 7

Επιφανειακά ολοκληρώματα

7.1 Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες

Σχήματα

Τις επιφάνειες συχνά τις παρουσιάζουμε παραμετρικά αν δεν είναι γραφήματα συναρτήσεων.

Ορισμός 7.1 Μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια είναι μια συνάρτηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ όπου

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

με $(u, v) \in D$ χωρίο του \mathbb{R}^2 . Η επιφάνεια S που αντιστοιχεί στη Φ είναι η εικόνα $S = \Phi(D)$. Την S θα τη λέμε C^1 αν η Φ είναι C^1 συνάρτηση.

Αν σταθεροποιήσουμε το $u = u_0$ η $\Phi(u_0, v) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη στον \mathbb{R}^3 . Το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\Phi(u_0, v)$ στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ είναι το

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0), \right).$$

Ομοίως σταθεροποιώντας το $v = v_0$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\Phi(u, v_0)$ είναι το

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0), \right).$$

Τα διανύσματα T_u και T_v ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$, οπότε το εξωτερικό γινόμενο $T_u \times T_v$ είναι κάθετο στην επιφάνεια.

Ορισμός 7.2 Λέμε ότι η επιφάνεια S είναι «λεία στο $\Phi(u_0, v_0)$ » αν $T_{u_0} \times T_{v_0} \neq 0$. Λέμε ότι η επιφάνεια S είναι «λεία» αν είναι λεία σε κάθε σημείο της.

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι στο $\Phi(u_0, v_0)$ υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο, δηλαδή η S δεν έχει «γωνίες».

Παράδειγμα 7.3 Η επιφάνεια $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$ με $u \geq 0$ δεν είναι λεία. Πράγματι, η $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ είναι διαφορίσιμη επιφάνεια, αφού η Φ είναι φανερά C^1 . Όμως η επιφάνεια που περιγράφει η Φ δεν είναι λεία, διότι η επιφάνεια φανερά ικανοποιεί την εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ δηλαδή πρόκειται για τον κώνο που έχει κορυφή στην αρχή των αξόνων. Επιβεβαιώνεται και με τον ορισμό:

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (\cos v, \sin v, 1),$$

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Άρα $T_u|_{(0,0)} = (1, 0, 1)$, $T_v|_{(0,0)} = (0, 0, 0)$ και συνεπώς στο $(0, 0)$ ισχύει $T_u \times T_v = 0$.

Παρατήρηση 7.4 Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in S$ δίνεται υπολογίζοντας από την παρατήρηση ότι θα πρέπει

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp (T_u \times T_v)|_{(u_0, v_0)},$$

δηλαδή δίνεται από την εξίσωση

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (T_u \times T_v)|_{(u_0, v_0)} \rangle = 0.$$

Παράδειγμα 7.5 Θεωρούμε την επιφάνεια που περιγράφεται από την $\Phi: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ με $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ και $z = u^2 + v^2$. Για να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\Phi(1, 0)$, υπολογίζουμε:

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (\cos v, \sin v, 2u),$$

$$T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = (-u \sin v, u \cos v, 2v).$$

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 2v \end{vmatrix}$$

$$= (2v \sin v + 2u^2 \cos v, -2v \cos v - 2u^2 \sin v, u \cos v + u \sin v).$$

Οπότε στο $\Phi(1, 0) = (1, 0, 1)$ βρίσκουμε ότι $T_u \times T_v = (-2, 0, 1)$. Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο ικανοποιεί την εξίσωση

$$(x - 1)(-2) + (y - 0)0 + (z - 1)1 = 0$$

δηλαδή (μετά από απλές πράξεις) $z = 2x - 1$.

Παράδειγμα 7.6 Θεωρούμε την επιφάνεια που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$x = u^2 - v^2, \quad y = u + v, \quad z = u^2 + 4v.$$

Θα βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(-1/4, 1/2, 2)$. Έχουμε:

$$\Phi(u, v) = (u^2 - v^2, u + v, u^2 + 4v), \quad T_u = (2u, 1, 2u), \quad T_v = (-2v, 1, 4).$$

Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από την $(-1/4, 1/2, 2) = \Phi(u, v)$ βρίσκουμε $u = 0, v = 1/2$, οπότε $T_u = (0, 1, 0), T_v = (-1, 1, 4)$ και

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4, 0, 1).$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$\left(x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)4 + \left(y - \frac{1}{2}\right)0 + (z - 2)1 = 0,$$

ισοδύναμα $4x + z = 1$.

Ασκήσεις

Άσκηση 7.1.1. Θεωρείστε την επιφάνεια που περιγράφεται από την

$$\Phi(u, v) = ((2 - \cos v) \cos u, (2 - \cos v) \sin u, \sin v).$$

Βρείτε το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια σε κάθε $\Phi(u, v)$ με $u \in [-\pi, \pi]$ και $v \in [-\pi, \pi]$. Είναι η επιφάνεια λεία;

7.2 Εμβαδόν Επιφανείας

Στα επόμενα οι επιφάνειες θα είναι κατά τμήματα λείες, ενώσεις εικόνων παραμετρικοποιήσεων $\Phi_i : D_i \mapsto \mathbb{R}^3$, όπου

- (i) κάθε D_i είναι στοιχειώδες χωρίο στο \mathbb{R}^2 ,
- (ii) κάθε Φ_i είναι C^1 και 1-1 εκτός ίσως από το σύνορο του D_i ,
- (iii) η S_i , η εικόνα της Φ_i , είναι λεία επιφάνεια εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων, για κάθε i .

Επειδή κατά προσέγγιση το εμβαδόν του $\Phi(R_{ij})$ είναι $\|T_{u_i} \times T_{v_j}\|_2 \Delta u \Delta v$ δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 7.7 Ορίζουμε το εμβαδόν της επιφανείας S που παραμετρικοποιείται από την $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$ να είναι το

$$A(S) = \int_D \|T_u \times T_v\|_2 \, du \, dv.$$

Παράδειγμα 7.8 Έστω ότι το D είναι το χωρίο που περιγράφουν οι $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq r \leq 1$. Δηλαδή το D στο xy -επίπεδο είναι κύκλος ακτίνας 1 (αλλά στο $r\theta$ -επίπεδο είναι το ορθογώνιο $[0, 2\pi] \times [0, 1]$). Θεωρούμε τη $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$ με $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = r$. Η Φ παραμετρικοποιεί ένα κώνο S ο οποίος είναι λείος εκτός από την κορυφή του. Έχουμε $T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$ και $T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$, οπότε

$$\begin{aligned} T_\theta \times T_r &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} r \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -r \sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -r \sin \theta & r \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} \\ &= (r \cos \theta)i + (r \sin \theta)j + (-r)k. \end{aligned}$$

$$\|T_\theta \times T_r\| = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 + r^2} = r\sqrt{2},$$

και

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{2} \, dr d\theta = 2\pi\sqrt{2} \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

Είναι όμως η Φ 1-1 εκτός ίσως από το σύνορο; Χωρίς το σύνορο, το χωρίο στο $r\theta$ -επίπεδο είναι το $(0, 2\pi) \times (0, 1)$. Αν $\Phi(r, \theta) = \Phi(r, \theta')$, τότε $r \cos \theta = r' \cos \theta'$, $r \sin \theta = r' \sin \theta'$ και $r = r'$. Επειδή $r \neq 0$ συμπεραίνουμε $\cos \theta = \cos \theta'$ και $\sin \theta = \sin \theta'$ οπότε $\theta' = 2k\pi + \theta$ και αν $k \neq 0$ θα πάρουμε άτοπο, αφού $\theta' - \theta = 2k\pi$ και $\theta, \theta' \in (0, 2\pi)$. Άρα $\theta = \theta'$ και συνεπώς η Φ είναι 1-1.

Παράδειγμα 7.9 Ένα ελικοειδές ορίζεται από τη $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$, όπου $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \theta$, και D το χωρίο $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq r \leq 1$. Για να βρούμε το εμβαδόν του, $T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$.

$$\begin{aligned} T_r \times T_\theta &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 1 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ r \cos \theta & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ -r \sin \theta & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= (\sin \theta)i - (\cos \theta)j + rk. \end{aligned}$$

$$\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + r^2} = \sqrt{1 + r^2} \neq 0,$$

συνεπώς η S είναι λεία. Άρα

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} \, dr d\theta \stackrel{r=\sinh t}{1+\sinh^2 t=\cosh^2 t} \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

(η Φ είναι 1-1).

7.2.1 Η S ως γράφημα συνάρτησης

Αν η επιφάνεια S είναι γράφημα μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$ για $(x, y) \in D$ η επιφάνεια επιδέχεται την παραμετρικοποίηση $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$. Οπότε $T_u = (1, 0, \partial f / \partial u)$, $T_v = (0, 1, \partial f / \partial v)$ και

$$\begin{aligned} T_u \times T_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = i \left(-\frac{\partial f}{\partial v} \right) - j \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) + k \\ &= -\frac{\partial f}{\partial v} i - \frac{\partial f}{\partial u} j + k. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.10 Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της σφαίρας $z^2 + y^2 + x^2 = 1$. Η $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ για $x = u$, $y = v$ και $x^2 + y^2 \leq 1$ είναι το άνω ημισφαίριο. Έτσι, αυτό έχει εμβαδόν:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} A(S) &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \|T_u \times T_v\| \, dvdu \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left\| \left(-\frac{-2u}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}, -\frac{-2v}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right) \right\| \, dvdu \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{\frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} + 1} \, dvdu \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \, dvdu \\ &\stackrel{\substack{u=r \cos \theta \\ v=r \sin \theta}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r \, drd\theta \\ &= 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Άρα η επιφάνεια της σφαίρας έχει εμβαδόν $A(S) = 4\pi$.

7.2.2 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Αν περιστρέψουμε την $y = f(x)$ για $x \in [a, b]$ γύρω από τον x -άξονα, προκύπτει επιφάνεια με παραμετρικοποίηση $x = u$, $y = f(u) \cos v$ και $z = f(u) \sin v$, όπου $a \leq u \leq b$ και $0 \leq v \leq 2\pi$. Πράγματι

αυτό συμβαίνει, γιατί με σταθερό u το σημείο $(u, f(u) \cos v, f(u) \sin v)$ περιγράφει κύκλο με κέντρο το $(u, 0, 0)$ και ακτίνας $|f(u)|$. Έχουμε $T_u = (1, f'(u) \cos v, f'(u) \sin v)$, $T_v = (0, -f(u) \sin v, f(u) \cos v)$, και

$$\begin{aligned} T_u \times T_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f'(u) \cos v & f'(u) \sin v \\ 0 & -f(u) \sin v & f(u) \cos v \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & f'(u) \sin v \\ -f(u) \sin v & f(u) \cos v \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & f'(u) \sin v \\ 0 & f(u) \cos v \end{vmatrix} \\ &\quad + k \begin{vmatrix} 1 & f'(u) \cos v \\ 0 & -f(u) \sin v \end{vmatrix} \\ &= (f'(u)f(u))i - (f(u) \cos v)j - (f(u) \sin v)k. \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_a^b \sqrt{(f'(u)f(u))^2 + (f(u))^2} \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + (f'(u))^2} \, dudv. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 7.11 Φανερά ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την παραπάνω περιστροφή είναι το ολοκλήρωμα των εμβαδών των κύκλων, δηλαδή το

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx.$$

Παράδειγμα 7.12 Ας βρούμε το εμβαδόν του τμήματος της μοναδιαίας σφαίρας που αποκόπτεται από τον κώνο $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Το άνω ημισφαίριο περιγράφεται από την παραμετρικοποίηση $z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$, $x = u$, $y = v$ όπου τα (x, y) είναι στον κύκλο $x^2 + y^2 \leq R$, όπου R η ακτίνα του κύκλου που είναι η προβολή στο xy -επίπεδο της τομής της σφαίρας και του κώνου. Αν θέσουμε στην εξίσωση του κώνου $x = 0$, τότε προκύπτει η εξίσωση $z = |y|$ στο zy -επίπεδο η οποία τέμνει τον κύκλο $z^2 + y^2 = 1$ στο $y = 1/\sqrt{2}$. Άρα $R = 1/\sqrt{2}$. Επίσης,

$$T_u = \left(1, 0, \frac{-2u}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right), \quad T_v = \left(1, 0, \frac{-2v}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right).$$

$$\begin{aligned}
T_u \times T_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} \\
&= \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}i + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}j + k.
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{\frac{u^2}{1-u^2-v^2} + \frac{v^2}{1-u^2-v^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
A(S) &= \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1/2-u^2}}^{\sqrt{1/2-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} dv du \\
&\stackrel{\substack{u=r \cos \theta \\ v=r \sin \theta}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta = 2\pi \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \pi.
\end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 7.2.1. Βρείτε το εμβαδόν επιφανείας που ορίζεται από την $\Phi(u, v)$ όπου $x = u + v$, $y = u$, $z = v$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$.

7.3 Ολοκλήρωμα πραγματικών συναρτήσεων σε επιφάνειες

Έστω ότι η S είναι μια παραμετροποιημένη επιφάνεια με παραμετροποίηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto S \subseteq \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Το στοιχειώδες χωρίο $\Delta u \Delta v$ μεταφέρεται από την Φ σε χωρίο με εμβαδόν κατά προσέγγιση ίσο με $\|T_u \times T_v\| \Delta u \Delta v$. Συνεπώς ο όγκος κάτω από το γράφημα της f πάνω από το χωρίο είναι κατά προσέγγιση (σύμφωνα με τον κανόνα «βάση επί ύψος») ίσο με $f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \Delta u \Delta v$.

Ορισμός 7.13 Το ολοκλήρωμα της $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ πάνω στην S είναι το

$$\int_S f dS := \int_S f(x, y, z) ds := \int_D f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| du dv.$$

Παράδειγμα 7.14 Θεωρούμε το ελικοειδές που περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \theta$ για $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq r \leq 1$. Θα υπολογίσουμε το $\int_S f dS$ όπου $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Έχουμε, $T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$, και

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 1 \end{vmatrix} = i \sin \theta - j \cos \theta + kr.$$

Έτσι, $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$, οπότε

$$\begin{aligned} \int_S f dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 + 1} \sqrt{1 + r^2} dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 (1 + r^2) dr = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Όπως και πριν, αν η επιφάνεια περιγράφεται από τη συνάρτηση $z = g(u, v)$, $x = u$, $y = v$, τότε $\|T_u \times T_v\| = \sqrt{1 + (\partial g / \partial u)^2 + (\partial g / \partial v)^2}$.

Παράδειγμα 7.15 Υπολογίζουμε το $\int_S x dS$ όπου η S περιγράφεται από την $z = x^2 + y$, στο χωρίο D με $0 \leq x \leq 1$ και $-1 \leq y \leq 1$. Η παραμετροποίηση είναι $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v$. Η συνάρτηση είναι η $f(x, y, z) = x$, άρα $f(\Phi(u, v)) = u$. $T_u = (1, 0, 2u)$, $T_v = (0, 1, 1)$,

$$\begin{aligned} T_u \times T_v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i(-2u) - j1 + k1 \\ &= -2ui - j + k. \end{aligned}$$

$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{4u^2 + 1 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{2u^2 + 1}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_S x dS &= \int_0^1 \int_{-1}^1 u \sqrt{2} \sqrt{2u^2 + 1} dv du = 2\sqrt{2} \int_0^1 u \sqrt{2u^2 + 1} du \\ &= 2\sqrt{2} \frac{(2u^2 + 1)^{3/2}}{4 \cdot (3/2)} \Big|_0^1 = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.16 Υπολογίζουμε το $\int_S z^2 dS$ στη μοναδιαία σφαίρα: $x = \cos \theta \sin \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$, $z = \cos \varphi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Έχουμε

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mapsto S.$$

$T_\theta = (-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 0)$, $T_\varphi = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi)$.

$$\begin{aligned} T_\theta \times T_\varphi &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= i(-\cos \theta \sin^2 \varphi) - j(\sin \theta \sin^2 \varphi) + k(-\sin \varphi \cos \varphi). \end{aligned}$$

Σχήμα

$$\begin{aligned}\|T_\theta \times T_\varphi\| &= \sqrt{\cos^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \varphi)} = \sin \varphi.\end{aligned}$$

($\sin \varphi \geq 0$, αφού $\varphi \in [0, \pi]$.) Άρα

$$\int_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi \frac{\cos^3 \varphi}{-3} \Big|_0^\pi = \frac{4}{3}\pi.$$

Παράδειγμα 7.17 Θα υπολογίσουμε το $\int_S x dS$, όπου S το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$. Το τρίγωνο είναι τμήμα του επιπέδου $x + y + z = 1$ και συγκεκριμένα περιγράφεται από την $z = 1 - x - y$ για $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq 1 - x$. Άρα παραμετροποιώντας με $x = u$ και $y = v$ θα έχουμε, $z = 1 - u - v$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1 - u$, $T_u = (1, 0, -1)$, $T_v = (0, 1, -1)$,

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i + j + k.$$

$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{3}$, οπότε

$$\begin{aligned}\int_S x dS &= \int_0^1 \int_0^{1-u} u\sqrt{3} dv du = \sqrt{3} \int_0^1 u(1-u) du \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 7.3.1. Βρείτε τα επιφανειακά ολοκληρώματα $\int_S f$ όπου

- (i) $f(x, y, z) = z$ και S το τμήμα της επιφάνειας $x + y + z = 1$ στο πρώτο ογδομήριο ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
- (ii) $f(x, y, z) = x^2$ και S το τμήμα του επιπέδου $x = z$ μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.
- (iii) $f(x, y, z) = x$ και S το τμήμα του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2x$ με $0 < z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.4 Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών συναρτήσεων

Ορισμός 7.18 Έστω ότι το F είναι ένα διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια S , όπου S η εικόνα μιας παραμετροποιημένης επιφάνειας με παραμετροποίηση $\Phi(u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$. Η ροή του πεδίου F μέσω της S ή

σχήμα

αλλιώς το επιφανειακό ολοκλήρωμα του F στην S συμβολίζεται με $\int_{\Phi} F dS$ ή $\iint_{\Phi} F dS$, και ορίζεται ως

$$\int_{\Phi} F dS = \int_D \langle F(\Phi(u, v)), T_u \times T_v \rangle dudv.$$

Παράδειγμα 7.19 Έστω ότι το D είναι το ορθογώνιο του $\theta\varphi$ -επιπέδου που ορίζεται από τις $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ και S η επιφάνεια με παραμετρικοποίηση $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$, με $x = \cos \theta \sin \varphi$, $y = \sin \theta \sin \varphi$, $z = \cos \varphi$, δηλαδή η S είναι η μοναδιαία σφαίρα. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Θα υπολογίσουμε το $\int_{\Phi} F dS$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} T_{\theta} \times T_{\varphi} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= i(-\cos \theta \sin^2 \varphi) - j(\sin \theta \sin^2 \varphi) + k(-\sin \varphi \cos \varphi). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \langle F(\Phi(\theta, \varphi)), T_{\theta} \times T_{\varphi} \rangle &= -\cos^2 \theta \sin^3 \varphi - \sin^2 \theta \sin^3 \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ &= -\sin^3 \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi = -\sin \varphi. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\int_{\Phi} F dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (-\sin \varphi) d\varphi d\theta = 2\pi \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = -4\pi.$$

Στα επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους το ολοκλήρωμα άλλαζε πρόσημο όταν άλλαζε ο προσανατολισμός της καμπύλης. Οπότε για να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην καμπύλη C και αυτό να είναι ανεξάρτητο της παραμετρικοποίησης, θα έπρεπε να σταθεροποιήσουμε τον προσανατολισμό. Έτσι όταν η C ήταν καμπύλη με προσανατολισμό, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους ενός πεδίου F πάνω στη S ορίστηκε ως $\int_{\sigma} F$ για οποιαδήποτε παραμετρικοποίηση σ που τηρεί τον προσανατολισμό.

Το ίδιο θα γίνει και στις επιφάνειες. Θα ορίσουμε την έννοια του προσανατολισμού μιας επιφάνειας και η S είναι επιφάνεια με συγκεκριμένο (δοθέντα) προσανατολισμό, το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου F θα είναι ανεξάρτητο της παραμετρικοποίησης, εφόσον αυτή τηρεί τον προσανατολισμό.

Ορισμός 7.20 «Προσανατολισμένη επιφάνεια» λέμε μια δίπλευρη επιφάνεια της οποίας τη μία πλευρά τη θεωρούμε «εξωτερική» ή «θετική» και την άλλη «εσωτερική» ή «αρνητική». Σε κάθε σημείο της S υπάρχουν δύο κάθετα διανύσματα n_1 και n_2 με $n_1 = -n_2$. Κάθε ένα από αυτά αντιστοιχεί σε μια επιφάνεια.

Υπάρχουν επιφάνειες που δεν έχουν δύο πλευρές, δηλαδή δεν είναι προσανατολισμένες, όπως η «κορδέλα του Möbius» (1858).

Αν η S είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια και το μοναδιαίο κάθετο \vec{n} δείχνει στη θετική πλευρά, η παραμετρικοποίηση $\Phi(u, v)$ διατηρεί τον προσανατολισμό της S αν το $T_u \times T_v$ δείχνει την εξωτερική πλευρά της S , δηλαδή ισχύει

$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = n(\Phi(u, v)).$$

Παράδειγμα 7.21 Στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ αν $n(x, y, z) = xi + yj + zk$ δείχνει τη θετική πλευρά τότε η $\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ αντιστρέφει(!) τον προσανατολισμό, αφού

$$T_\theta \times T_\varphi = (-\sin \varphi)((\cos \theta \sin \varphi)i + (\sin \theta \sin \varphi)j + (\cos \varphi)k) = (-\sin \varphi) \cdot \vec{n}.$$

Άρα

$$\frac{T_\theta \times T_\varphi}{\|T_\theta \times T_\varphi\|} = -n,$$

δηλαδή το $T_\theta \times T_\varphi$ δείχνει προς το εσωτερικό της σφαίρας.

Θεώρημα 7.22 Αν η S είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια, και οι Φ_1, Φ_2 είναι δυο παραμετρικοποιήσεις που διατηρούν τον προσανατολισμό, τότε

$$\int_{\Phi_1} F dS = \int_{\Phi_2} F dS.$$

Ενώ αν η μία διατηρεί τον προσανατολισμό και η άλλη τον αντιστρέφει, τότε

$$\int_{\Phi_1} F dS = - \int_{\Phi_2} F dS.$$

Άρα, μπορούμε να γράφουμε $\int_S F dS$ αντί για $\int_\Phi F dS$ υπό την προϋπόθεση ότι η S είναι προσανατολισμένη και η Φ διατηρεί τον προσανατολισμό.

Παράδειγμα 7.23 Έστω ότι η S είναι η μοναδιαία ευκλείδεια σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, μια συνάρτηση θερμοκρασίας. Αν η S είναι προσανατολισμένη με το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα θα υπολογίσουμε τη ροή της θερμότητας διαμέσου της S του διανυσματικού πεδίου $F = -\nabla T$.

Έχουμε $F(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z)$. Στην S το κάθετο μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα είναι το $\vec{n} = xi + yj + zk$. Παρατηρούμε ότι $\int_S F dS = \int_D \langle F, T_u \times T_v \rangle dudv$, όπου η $\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3$ διατηρεί τον προσανατολισμό. Αφού λοιπόν τον διατηρεί, θα είναι

$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = \vec{n}.$$

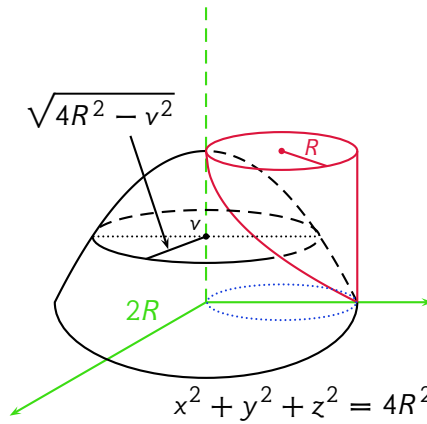
Άρα

$$\begin{aligned} \int_S F dS &= \int_D \langle F, T_u \times T_v \rangle dudv = \int_D \left\langle F, \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \right\rangle \|T_u \times T_v\| dudv \\ &= \int_D \langle F, \vec{n} \rangle \|T_u \times T_v\| dudv. \end{aligned}$$

Όμως $\langle F, \vec{n} \rangle = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$. Άρα

$$\int_S F dS = \int_D (-2) \|T_u \times T_v\| dudv = -2 \cdot A(S) = -2 \cdot 4\pi = -8\pi.$$

Παράδειγμα 7.24 Ένα κτήριο φτιάχνεται στην πλαγιά ενός βουνού όπως στο σχήμα. Ο κατακόρυφος τοίχος θα φτιαχτεί από γυαλί. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν επιφάνειας του τοίχου. Επίσης, ο όγκος του εσωτερικού πρέπει να υπερβαίνει το $\pi R^4/2$ για να είναι συμφέρουσα η χρήση του. Θέλουμε να υπολογίσουμε τα R ικανοποιούν αυτόν τον περιορισμό.



Ο κατακόρυφος τοίχος είναι η παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου έξω από το παραβολοειδές του λόφου. Έτσι η παράπλευρη επιφάνεια έχει εξίσωση $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ για $0 \leq z \leq 2R$. Η παραμετρικοποίηση $(R \cos \theta, R \sin \theta)$ παραμετρικοποιεί τον κύκλο ακτίνας R με κέντρο στο $(0, 0)$ για $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Άρα η $(0, R) + (R \cos \theta, R \sin \theta)$ παραμετρικοποιεί τη βάση του κυλίνδρου (μπλε κύκλος με τελείες στο σχήμα). Συνεπώς η $\Phi(\theta, v) = (R \cos \theta, R + R \sin \theta, v)$ παραμετρικοποιεί την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου για $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $0 \leq v \leq 2R$.

Πρέπει τώρα να εξαιρέσουμε τα σημεία της παράπλευρης επιφάνειας που σε ύψος v απέχουν από τον άξονα z λιγότερο από $\sqrt{4R^2 - v^2}$. Άρα πρέπει

$$(R \cos \theta)^2 + (R + R \sin \theta)^2 \geq \sqrt{4R^2 - v^2},$$

ισοδύναμα, μετά από απλές πράξεις, $2R^2 + 2R^2 \sin \theta \geq \sqrt{4R^2 - v^2}$. Λύνοντας ως προς v αυτό δίνει $v \geq \sqrt{2R} \sqrt{1 - \sin \theta}$.

Επιπλέον έχουμε $T_\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0)$, $T_v = (0, 0, 1)$,

$$T_\theta \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R \cos \theta)i + (R \sin \theta)j.$$

$$\|T_\theta \times T_\nu\| = \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta} = R. \text{ Οπότε}$$

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \|T_\theta \times T_\nu\| \, d\nu d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}R\sqrt{1-\sin\theta}}^{2R} R \, d\nu d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R\nu \Big|_{\sqrt{2}R\sqrt{1-\sin\theta}}^{2R} d\theta = \int_0^{2\pi} R(2R - \sqrt{2}R\sqrt{1-\sin\theta}) \, d\theta \\ &= 4\pi R^2 - \sqrt{2}R^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\sin\theta} \, d\theta. \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον τύπο διπλασίου τόξου:

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow 1 - \sin \theta = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right).$$

Οπότε,

$$A(S) = 4\pi R^2 - 2R^2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right|.$$

Το τελευταίο ημίτονο είναι μη-αρνητικό όταν $\theta \in [0, \pi/2]$. Άρα

$$\begin{aligned} A(S) &= 4\pi R^2 \\ &\quad - 2R^2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \, d\theta - \int_{\pi/2}^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \, d\theta \right) \\ &= \dots = 4R^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

Για τον όγκο θα πρέπει να αφαιρέσουμε από τον όγκο του κυλίνδρου τον όγκο που αποκόπτει το παραβολοειδές. Ο όγκος αυτός είναι το ολοκλήρωμα πάνω στον μπλε διάστικτο κύκλο του παραβολοειδούς και αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 7.25 Στο προηγούμενο παράδειγμα, μια τυπική καλοκαιρινή μέρα τα σημεία του περιβάλλοντος του κτηρίου έχουν θερμοκρασία $T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$. Μια πυκνότητα ροής θερμότητας $V = -k\nabla T$ περνάει μέσα από όλες τις πλευρές του κτηρίου, όπου το k εξαρτάται από τη μόνωση. Η συνολική ροή της θερμότητας θα είναι

$$\int_S V = \int_{\text{βάση}} V + \int_{\text{οροφή}} V + \int_{\text{παράπλευρη}} V.$$

Το ολοκλήρωμα στην παράπλευρη επιφάνεια είναι

$$\begin{aligned} & \int_D \langle F(\Phi(\theta, \nu)), T_\theta \times T_\nu \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2R}\sqrt{1-\sin\theta}}^{2R} \langle F(R \cos \theta, R + R \sin \theta, \nu), (R \cos \theta, R \sin \theta, 0) \rangle d\nu d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2R}\sqrt{1-\sin\theta}}^{2R} (-k)(6R^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \sin^2 \theta) d\nu d\theta \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\text{οροφή}} V &= \int_S \langle V, \vec{n} \rangle \|T_\nu \times T_\theta\| d\nu d\theta = \int_S \langle V, (0, 0, 1) \rangle \|T_\nu \times T_\theta\| d\nu d\theta \\ &= \int_S (-k32z) \Big|_{\Phi} \|T_\nu \times T_\theta\| = -64kRA(S) = -64\pi kR^3. \end{aligned}$$

Για το ολοκλήρωμα στη βάση, παραμετροποιούμε με $x = u$, $y = \nu$ και $z = \sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}$, αλλά πρέπει $u^2 + (\nu - R)^2 \leq R^2$. Άρα $0 \leq \nu \leq 2R$ και $|u| \leq \sqrt{R^2 - (\nu - R)^2}$.

$$T_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} \right), \quad T_\nu = \left(0, 1, \frac{-\nu}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} \right).$$

$$\begin{aligned} T_u \times T_\nu &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-\nu}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} \end{vmatrix} \\ &= i \frac{-u}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} - j \frac{-\nu}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} + k. \end{aligned}$$

$$V(\Phi(u, \nu)) = -k(6u, 2(\nu - R), 32\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}).$$

$$\int_{\text{βάση}} V = (-k) \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{R^2 - (\nu - R)^2}}^{\sqrt{R^2 - (\nu - R)^2}} G(u, \nu) du d\nu,$$

όπου

$$G(u, \nu) = \frac{6u^2}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} + \frac{2(\nu - R)\nu}{\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}} + 32\sqrt{4R^2 - u^2 - \nu^2}.$$

Παράδειγμα 7.26 (Συνοπτικά) Υπολογίζουμε το $\int_S (\nabla \times F)$ όπου S επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, \vec{n} το προς τα «πάνω» διάνυσμα και

$$F(x, y, z) = (x^2 + y - 4)i + 3xyj + (2xz + z^2)k.$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y - 4 & 3xy & 2xz + z^2 \end{vmatrix} = \dots = (0, -2z, 3y - 1).$$

Παραμετρικοποίηση επιφάνειας:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{16 - u^2 - v^2}, \quad -4 \leq u \leq 4, \quad |v| \leq \sqrt{16 - u^2}.$$

$$T_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}}\right), \quad T_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}}\right).$$

$$T_u \times T_v = i \frac{u}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}} + j \frac{v}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}} + k.$$

Η z συντεταγμένη είναι μη-αρνητική άρα ο προσανατολισμός διατηρείται. Υπολογίζουμε το

$$\left\langle (0, -2\sqrt{16 - u^2 - v^2}, 3v - 1), \left(\frac{u}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{16 - u^2 - v^2}}, 1 \right) \right\rangle$$

και το βρίσκουμε ίσο με $v - 1$, οπότε

$$\int_S \nabla \times F = \int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-u^2}}^{\sqrt{16-u^2}} (v - 1) dv du = \dots$$

Παράδειγμα 7.27 (Συνοπτικά) Υπολογίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου $F(x, y, z) = i + j + z(x^2 + y^2)^2 k$ στην επιφάνεια S του κυλίνδρου $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ με προσανατολισμό προς τα «έξω».

$$\int_S F = \int_{\text{βάση}} F + \int_{\text{οροφή}} F + \int_{\text{παραπλευρη}} F.$$

$$\int_{\text{βάση}} F = \int_{\text{βάση}} \langle F, \vec{n} \rangle \|T_u \times T_v\| dudv = \int_{\text{βάση}} (-z(x^2 + y^2)^2) \Big|_{\Phi} \|T_u \times T_v\| dudv.$$

Όμως $z = 0$ στη βάση, οπότε $\int_{\text{βάση}} F = 0$.

Στην οροφή ισχύει $z = 1$ οπότε έχουμε την παραμετρικοποίηση της οροφής με την $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1)$. $\|T_r \times T_\theta\| = r$. $T_r \times T_\theta / \|T_r \times T_\theta\| = k$ και ο προσανατολισμός διατηρείται.

$$\langle F, \vec{n} \rangle = \langle (1, 1, 1 \cdot (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta))^2, (0, 0, r) \rangle = r^5.$$

$$\int_S F = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 dr d\theta = \dots = \pi/3.$$

Για την παράπλευρη επιφάνεια, το κάθετο διάνυσμα στο (x, y, z) είναι το (x, y) . Παραμετρικοποίηση: $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $z = z$. $T_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $T_z = (0, 0, 1)$. $T_\theta \times T_z = (x, y, 0)$ άρα ο προσανατολισμός διατηρείται.

$$\langle (1, 1, z(x^2 + y^2)^2), (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle = \cos \theta + \sin \theta.$$

Έτσι, $\int_{\text{παράπλευρη}} F = 0$.
Συνολική ροή: $\pi/2$.

Παράδειγμα 7.28 (Συνοπτικά) Νερό ρέει ομοιόμορφα προς τα κάτω (για παράδειγμα, καταρράκτης, δυνατή βροχή κλπ) και περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Θα υπολογίσουμε τη συνολική ροή μέσα από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ για $x^2 + y^2 \leq 1$.

Η παραμετρικοποίηση του κώνου είναι $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ με $|v| \leq \sqrt{1 - u^2}$. Επίσης,

$$T_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), \quad T_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right).$$

$$T_u \times T_v = i \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - j \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} + k.$$

Έτσι η ροή είναι

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \left\langle (0, 0, -1), \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right) \right\rangle dv du.$$

Παράδειγμα 7.29 (Συνοπτικά) Το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού είναι το $F(x, y, z) = \sqrt{y}j$. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του ρευστού που διαρέει την επιφάνεια $x^2 + z^2 = y$ ανά μονάδα χρόνου, για $0 \leq y \leq 1$ στη διεύθυνση που αυξάνει το y .

Παραμετρικοποίηση επιφάνειας: $x = u$, $z = v$, $y = u^2 + v^2$, $-1 \leq u \leq 1$, $|v| \leq \sqrt{1 - u^2}$, $T_u = (1, 2u, 0)$, $T_v = (0, 2v, 1)$, $T_u \times T_v = 2ui - j + 2vk$. Η παραμετρικοποίηση αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

$$\int_S F = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \langle (0, \sqrt{u^2 + v^2}, 0), (2u, -1, 2v) \rangle dv du = \dots = -\frac{2}{3}\pi.$$

Κεφάλαιο 8

Τα θεωρήματα Green, Stokes και Gauss

8.1 Εισαγωγικά

Οι αποδείξεις των τριών αυτών θεωρημάτων, στην πλήρη τους γενικότητα στον \mathbb{R}^3 (ή στον \mathbb{R}^2 για το θεώρημα του Green) δεν είναι απλές. Ειδικά η απόδειξη του θεωρήματος του Gauss είναι δύσκολη και για αυτό μπορεί να επιλέξει κανείς να την παραλείψει. Η απόδειξη του Stokes είναι βατή αν και εκτενής λόγω της αναγκαστικής εφαρμογής του κανόνα της αλυσίδας στην παραγωγή για διανυσματικές συναρτήσεις.

8.2 Συμβολισμός

Συμβολίζουμε με \iint το διπλό ολοκλήρωμα σε υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και με \iiint το τριπλό ολοκλήρωμα σε υποσύνολο του \mathbb{R}^3 .

Με το \oint_C συμβολίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στην προσανατολισμένη καμπύλη C . Όταν η C είναι απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει ένα χωρίο στον \mathbb{R}^2 θεωρούμε ότι είναι θετικά προσανατολισμένη, δηλαδή περπατώντας πάνω στην καμπύλη το χωρίο που περικλείει είναι στα αριστερά μας. Αν η C είναι το σύνορο μιας προσανατολισμένης επιφάνειας στον \mathbb{R}^3 τότε η C θεωρείται προσανατολισμένη θετικά; δηλαδή, αν περπατάμε στην C με το σώμα μας στη φορά του προσανατολισμού της επιφάνειας, η επιφάνεια είναι στα αριστερά μας.

Συμβολίζουμε με \iint_S το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην προσανατολισμένη επιφάνεια S . Αν η S είναι κλειστή επιφάνεια η θετική κατεύθυνση είναι η προς τα έξω κατεύθυνση σε σχέση με το τρισδιάστατο χωρίο που περικλείει.

Γράφουμε $\langle x, y \rangle$ για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y . Τα i, j και k είναι τα βασικά ορθοκανονικά διανύσματα στον \mathbb{R}^3 . Δηλαδή $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ και $k = (0, 0, 1)$.

Αν F διανυσματική συνάρτηση από το \mathbb{R}^3 στο \mathbb{R}^3 και $F = (F_1, F_2, F_3)$, όπου οι F_j έχουν τιμές στο \mathbb{R} γράφουμε

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (8.1)$$

και

$$\langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \quad (8.2)$$

8.3 Θεωρήματα Stokes και Gauss

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μάς λέει ότι υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις το ολοκλήρωμα της παραγώγου f' της f στο διάστημα $[a, b]$ ισούται με ένα κατάλληλο άθροισμα των τιμών της f στο σύνορο $\{a, b\}$ του διαστήματος. Συγκεκριμένα

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a). \quad (8.3)$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα της παραγώγου στο διάστημα $[a, b]$ υπολογίζεται από τις τιμές της συνάρτησης στο σύνορο (στα άκρα) του $[a, b]$. Το ίδιο ακριβώς είναι εννοιολογικά του περιεχόμενο των θεωρημάτων Stokes και Gauss. Στο θεώρημα Stokes το πεδίο ολοκλήρωσης είναι μια επιφάνεια, και ο υπολογισμός με βάση τις τιμές στο σύνορο της επιφάνειας (το αντίστοιχο του $f(b) - f(a)$) γίνεται με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο σύνορό της. Ομοίως, στο θεώρημα του Gauss, το πεδίο ολοκλήρωσης είναι ένα χωρίο στον τρισδιάστατο χώρο, και ο υπολογισμός με βάση τις τιμές στο σύνορο του χωρίου γίνεται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο του χωρίου, δηλαδή στην επιφάνεια που περικλείει το χωρίο.

8.3.1 Το θεώρημα του Stokes

Έστω ότι η S προσανατολισμένη επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 που ορίζεται από μια ένα προς ένα παραμετρικοποίηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ και ∂S το θετικά προσανατολισμένο σύνορό της. Αν $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια C^1 συνάρτηση τότε:

το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας «κατάλληλης παραγώγου» της F υπολογίζεται από τις τιμές της F στο σύνορο της επιφάνειας. Δηλαδή, σε πλήρη αναλογία με τον τύπο (8.3), ισχύει ένας τύπος της μορφής

$$\iint_S \langle F' \rangle = \oint_{\partial S} F,$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F στο ∂S .

Το μόνο που μένει να διευκρινιστεί είναι ποια είναι η «κατάλληλη παράγωγος» της F ώστε να ισχύει ο παραπάνω τύπος.

Θεώρημα 8.1 (Stokes) Έστω ότι η S είναι μια κατά τμήματα C^2 φραγμένη προσανατολισμένη επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 . Αν $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ μια C^1 συνάρτηση και ∂S το θετικά προσανατολισμένο σύνορο της S , το οποίο υποθέτουμε ότι είναι απλή κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε ισχύει

$$\iint_S \nabla \times F = \oint_{\partial S} F. \quad (8.4)$$

Δηλαδή, η «κατάλληλη παράγωγος» είναι η συνάρτηση $\nabla \times F$.

Υπενθυμίζουμε εδώ τα απαραίτητα για τον υπολογισμό των ποσοτήτων του παραπάνω τύπου:

- Αν $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$ μια 1-1 παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S , θέτουμε

$$T_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \quad \text{και} \quad T_v = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right)$$

και το επιφανειακό ολοκλήρωμα στα αριστερά της (8.4) υπολογίζεται με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D \langle \nabla \times F(\Phi(u, v)), T_u \times T_v \rangle dudv.$$

- Αν $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$ για $t \in [a, b]$ μια παραμετρικοποίηση του ∂S , τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στα δεξιά της (8.4) ισούται με

$$\int_a^b \langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt.$$

Παρατήρηση 8.2 Θέλοντας να κάνουμε τον αναγνώστη να νοιώθει σίγουρος για την εννοιολογική ταύτιση της σχέσης (8.4) με τη σχέση (8.3), θα δείξουμε ότι πράγματι το θεώρημα του Stokes εφαρμοσμένο σε κατάλληλη επιφάνεια συνεπάγεται το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Ας υποθέσουμε λοιπόν τη σχέση (8.4), και έστω ότι η f είναι συνάρτηση C^1 στο $[a, b]$. Θεωρούμε την επίπεδη επιφάνεια $S = [a, b] \times [0, 1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ και τη συνάρτηση $F(x, y) = (0, f(x), 0)$. Έχουμε

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & f(x) & 0 \end{vmatrix} = f'(x)k.$$

Για την παραμετρικοποίηση της S θέτουμε $D = S$ και για $(u, v) \in D$, $\Phi(u, v) = (u, v, 0)$. Έτσι $T_u = (1, 0, 0)$, $T_v = (0, 1, 0)$ και εύκολα προκύπτει ότι $T_u \times T_v = k$. Οπότε, το αριστερό μέλος της (8.4) γίνεται

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times F &= \iint_D \langle \nabla \times F(\Phi(u, v)), T_u \times T_v \rangle dudv \\ &= \int_0^1 \int_a^b f'(u) dudv \\ &= \int_a^b f'(x) dx. \end{aligned}$$

Στρεφόμαστε τώρα στο δεξιό σκέλος. Το σύνορο του S αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα

$$C_1 = \{(t, 0, 0) : t \in [a, b]\},$$

$$C_2 = \{(t, 1, 0) : t \in [a, b]\},$$

$$B_1 = \{(a, t, 0) : t \in [0, 1]\},$$

και

$$B_2 = \{(b, t, 0) : t \in [0, 1]\}.$$

Οι παραμετρικοποιήσεις που δίνονται στα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα δίνουν τον θετικό προσανατολισμό στα C_1 και B_2 ενώ δίνουν τον αρνητικό προσανατολισμό στα C_2 και B_1 . Συνεπώς

$$\oint_{\partial S} F = \oint_{C_1} F - \oint_{C_2} F - \oint_{B_1} F + \oint_{B_2} F. \quad (8.5)$$

Όμως

$$\oint_{C_1} F = \int_a^b \langle F(t, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle dt = \int_a^b \langle (0, f(t), 0), (1, 0, 0) \rangle dt = 0.$$

$$\oint_{C_2} F = \int_a^b \langle F(t, 1, 0), (1, 0, 0) \rangle dt = \int_a^b \langle (0, f(t), 0), (1, 0, 0) \rangle dt = 0.$$

Και

$$\begin{aligned} \oint_{B_2} F &= \int_0^1 \langle F(b, t, 0), (0, 1, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle (0, f(b), 0), (0, 1, 0) \rangle dt \\ &= \int_0^1 f(b) dt \\ &= f(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{B_1} F &= \int_0^1 \langle F(a, t, 0), (0, 1, 0) \rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle (0, f(a), 0), (0, 1, 0) \rangle dt \\
&= \int_0^1 f(a) dt \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (8.5) παίρνουμε $\int_{\partial S} F = f(b) - f(a)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Έτσι το θεώρημα του Stokes *πράγματι* αποτελεί επέκταση του γνωστού μας θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού μίας μεταβλητής σε περισσότερες μεταβλητές.

Το θεώρημα του Green

Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος Stokes είναι η περίπτωση όπου η επιφάνεια S είναι επίπεδη, υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και η συνάρτηση F έχει πεδίο τιμών το \mathbb{R}^2 . Σε αυτή την περίπτωση το πεδίο ορισμού της παραμετρικοποίησης Φ της S , το D , ταυτίζεται με την S , και η Φ είναι η ταυτοτική: $\Phi(u, v) = (u, v)$ (όπου παραλείψαμε την τρίτη, μηδενική συντεταγμένη (μιλώντας αυστηρά ταυτίζουμε το \mathbb{R}^2 με το $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, ή αλλιώς ταυτίζουμε τα (u, v) με τα $(u, v, 0)$).

Όπως και στην Παρατήρηση 8.2 υπολογίζουμε ότι $T_u \times T_v = k$, οπότε σε αυτή την περίπτωση

$$\oint_S \nabla \times F = \iint_D \langle \nabla \times F(u, v), k \rangle dudv.$$

Τώρα, αν $F = (P, Q) = (P, Q, 0)$ υπολογίζουμε την παράσταση $\langle \nabla \times F(u, v), k \rangle$ με την ορίζουσα (8.1) και βρίσκουμε (άσκηση) ότι

$$\langle \nabla \times F(u, v), k \rangle = \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}.$$

Έτσι, σε αυτή την ειδική περίπτωση, ο τύπος του θεωρήματος Stokes γράφεται ως

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} F,$$

όπου $F = (P, Q)$. Αυτός ο τύπος, ο τύπος που προκύπτει από το θεώρημα Stokes όταν $S \subseteq \mathbb{R}^2$ και $F : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, ονομάζεται «θεώρημα του Green».

Η παρουσίαση του θεωρήματος Green ως συνέπεια του θεωρήματος Stokes έγινε για καθαρά διδακτικούς λόγους. Όμως, όσο αφορά στις αποδείξεις τους (δες ενότητα 8.4), πρώτα αποδεικνύουμε την ειδική και ευκολότερη περίπτωση του θεωρήματος Green και στη συνέχεια αποδεικνύουμε το θεώρημα Stokes.

Εφαρμογή: υπολογισμός εμβαδού χωρίου

Παρατηρούμε ότι αν στον τύπο του Green βάλουμε $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ και $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ θα ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, οπότε

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y, x) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \text{Εμβαδόν}(D).$$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο

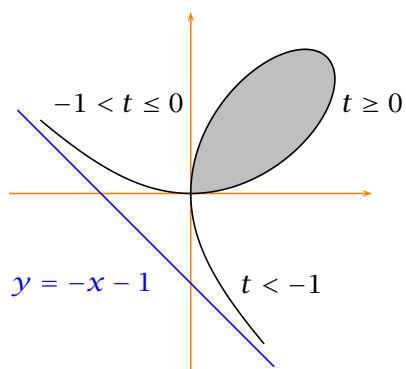
$$\text{Εμβαδόν}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y, x).$$

Οι επιλογές που κάναμε για τα P και Q δεν είναι μοναδικές. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να είχαμε επιλέξει $Q = x$ και $P = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του φύλλου του Καρτέσιου. Πρόκειται για τον βρόγχο που παράγεται από την καμπύλη με παραμετρικοποίηση

$$\sigma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right),$$

όπου $t \in [0, \infty)$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες και σε πεπλεγμένη μορφή, η εξίσωση είναι $x^3 + y^3 - 3xy = 0$). Το σχήμα της καμπύλης φαίνεται στο σχήμα 8.1. Σύμφωνα με τον τύπο του εμβαδού που βρήκαμε παραπάνω,



Σχήμα 8.1: Το φύλλο του Καρτέσιου (the folium of Descartes).

το εμβαδόν του φύλλου ισούται με

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} (-y, x) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\langle \left(-\frac{3t^2}{1+t^3}, \frac{3t}{1+t^3} \right), \sigma'(t) \right\rangle dt \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{3t}{1+t^3} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{-3}{1+t^3} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

8.3.2 Το θεώρημα του Gauss

Θεωρούμε Ω ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 το οποίο έχει κατά τμήματα C^2 σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε επίσης ότι το $\partial\Omega$ είναι προσανατολισμένο με τη θετική φορά, δηλαδή με το «προς τα έξω» από το Ω διάνυσμα. Αν F διανυσματική C^1 συνάρτηση στο Ω τότε:

το χωρικό (τριπλό) ολοκλήρωμα μιας «κατάλληλης παραγώγου» της F υπολογίζεται από τις τιμές της F στο σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω . Δηλαδή, σε πλήρη αναλογία με τον τύπο (8.3), ισχύει ένας τύπος της μορφής

$$\iiint_{\Omega} \langle F' \rangle = \iint_{\partial\Omega} F,$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα της F στο $\partial\Omega$.

Το μόνο που μένει να διευκρινιστεί και πάλι, είναι ποια είναι η «κατάλληλη παράγωγος» της F ώστε να ισχύει ο παραπάνω τύπος.

Θεώρημα 8.3 (απόκλισης του Gauss) Έστω ότι το Ω είναι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 κλειστό και φραγμένο με κατά τμήματα C^2 σύνορο $\partial\Omega$. Τότε, αν η F με πεδίο τιμών το \mathbb{R}^3 είναι C^1 συνάρτηση στο Ω ισχύει

$$\iiint_{\Omega} \langle \nabla, F \rangle = \iint_{\partial\Omega} F.$$

Η «κατάλληλη παράγωγος» δηλαδή εδώ είναι η ποσότητα $\langle \nabla, F \rangle$. Υπενθυμίζουμε ότι για να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα χρειαζόμαστε μια 1-1 και κατά τμήματα C^2 παραμετρικοποίηση $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial\Omega$, της επιφάνειας $\partial\Omega$, οπότε

$$\iint_{\partial\Omega} F = \iint_D \langle \nabla \times F(\Phi(u, v)), T_u \times T_v \rangle dudv,$$

όπου

$$T_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \quad \text{και} \quad T_v = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right).$$

8.4 Αποδείξεις

8.4.1 Απόδειξη του θεωρήματος Green

Όπως είπαμε και στο τέλος της υποενότητας 8.3.1 η παρουσίαση του θεωρήματος Green ως συνέπεια του θεωρήματος Stokes έγινε για καθαρά διδακτικούς λόγους. Ξεκινάμε με την απόδειξη του θεωρήματος Green.

Λήμμα 8.4 Έστω ότι το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι χωρίο τύπου I, C το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του και $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε

$$\oint_C (P, 0) = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Απόδειξη: Αφού το χωρίο είναι τύπου I υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Οπότε το διπλό ολοκλήρωμα, από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, ισούται με

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \right) dx. \end{aligned}$$

Τα $(x, \varphi_1(x))$ για $x \in [a, b]$, παραμετρικοποιούν την C_1 με τη δηλωμένη φορά (δες σχήμα 8.2), οπότε

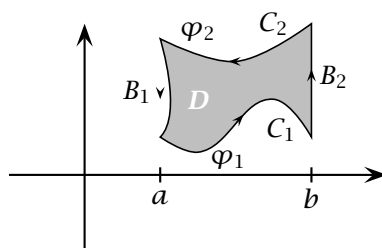
$$\int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx = \oint_{C_1} (P, 0).$$

Ομοίως τα $(x, \varphi_2(x))$ για $x \in [a, b]$, παραμετρικοποιούν την C_2 με την αντίθετη φορά, οπότε

$$\int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx = - \oint_{C_2} (P, 0).$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = - \oint_{C_1 \cup C_2} (P, 0). \quad (8.6)$$



Σχήμα 8.2: Χωρίο τύπου I.

Επειδή το x είναι σταθερό στα ευθύγραμμα τμήματα B_1 και B_2 συνεπάγεται ότι $\oint_{B_1} (P, 0) = \oint_{B_2} (P, 0) = 0$: για παράδειγμα, $B_1 = \{(a, y) : \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)\}$, δηλαδή παραμετροποιείται από την $\sigma_1(t) = (a, t)$ για $t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$, και έτσι $\sigma_1'(t) = (0, 1)$, συνεπώς

$$\oint_{B_1} (P, 0) = \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} \langle (P, 0)(a, y), (0, 1) \rangle dy = 0.$$

Προσθέτοντας τα μηδενικά ολοκληρώματα στις B_1 και B_2 στην (8.6) παίρνουμε

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_C (P, 0).$$

□

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και το ακόλουθο:

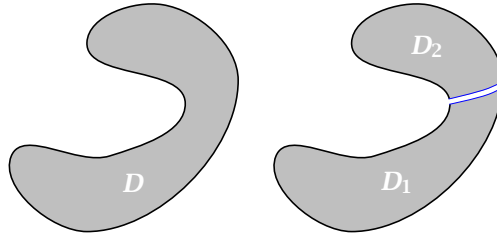
Λήμμα 8.5 Έστω ότι το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι χωρίο τύπου II, C το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του και $Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε

$$\oint_C (0, Q) = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

□

Τα δύο παραπάνω λήμματα έχουν πολύ ισχυρούς περιορισμούς για το χωρίο D . Συγκεκριμένα απαιτούν το χωρίο να είναι τύπου I και τύπου II αντίστοιχα. Μπορούμε να αποδείξουμε τα ίδια αποτελέσματα σε γενικότερα χωρία. Αντί να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό για τα επιτρεπτά χωρία προτιμάμε να βασιστούμε σε εικόνες. Ένα χωρίο όπως το πρώτο χωρίο στο σχήμα 8.3 δεν είναι τύπου I. Όμως μπορούμε να το κόψουμε σε δύο τμήματα, το D_1 και το D_2 τα οποία είναι τύπου I. Έτσι σύμφωνα με το Λήμμα 8.4 ισχύουν οι σχέσεις

$$\oint_{\partial D_1} (P, 0) = - \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$



Σχήμα 8.3: Χωρίο όχι τύπου I στο οποίο ισχύει το θεώρημα Green.

και

$$\oint_{\partial D_2} (P, Q) = - \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στα δεξιά κάνει

$$- \iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

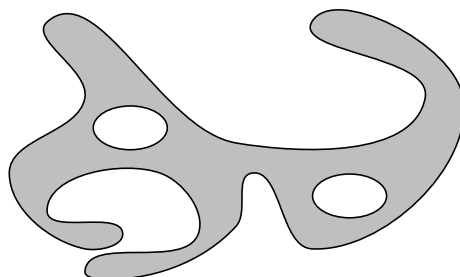
Για το άθροισμα στα αριστερά, παρατηρούμε ότι το κομμάτι του συνόρου στο οποίο κόψαμε το D , τα σύνορα που στο σχήμα εμφανίζονται με μπλε χρώμα έχουν μεταξύ τους αντίθετο προσανατολισμό όταν τα D_1 και D_2 έχουν και τα δύο τον θετικό προσανατολισμό. Οπότε, όταν προσθέσουμε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στο ∂D_1 και στο ∂D_2 , θα έχουμε απαλοιφή των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων πάνω στις μπλε καμπύλες. Έτσι το αποτέλεσμα θα είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο ∂D . Αποδείξαμε με αυτόν τον τρόπο ότι και σε τέτοια χωρία, που δεν είναι τύπου I ισχύει

$$\oint_{\partial D} (P, Q) = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Ανάλογη είναι η κατάσταση σε σχέση με το Λήμμα 8.5. Αν το χωρίο κόβεται σε κομμάτια τύπου II τότε το Λήμμα 8.5 συνεχίζει να ισχύει.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι το χωρίο μπορεί να είναι ιδιαίτερα περίπλοκο και να απαιτείται να κοπεί σε πολλά τμήματα, όπως για παράδειγμα το χωρίο του σχήματος 8.4. Για την παρακάτω απόδειξη του θεωρήματος Green θα υποθέσουμε ότι στο χωρίο D ισχύουν και το Λήμμα 8.4 και το Λήμμα 8.5.

Απόδειξη του θεωρήματος Green: Έστω ότι το D είναι ένα χωρίο στον \mathbb{R}^2 στο οποίο ισχύουν και τα δύο παραπάνω λήμματα. Αν $F = (P, Q)$



Σχήμα 8.4: Χωρίο που απαιτεί πολλά κοψίματα ώστε κάθε τμήμα του να είναι τύπου I ή τύπου II.

τότε

$$\begin{aligned}
 \iint_D \langle \nabla \times F, k \rangle &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \oint_{\partial D} (0, Q) + \oint_{\partial D} (P, 0) \\
 &= \oint_{\partial D} (P, Q) \\
 &= \oint_{\partial D} F,
 \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

8.4.2 Απόδειξη του θεωρήματος Stokes

Θα αποδείξουμε το θεώρημα Stokes στην περίπτωση που η επιφάνεια παραμετροποιείται από μια C^2 παραμετροποίηση. Στην αντίθετη περίπτωση το θεώρημα αποδεικνύεται κόβοντας την επιφάνεια σε τμήματα όπου το καθένα περιγράφεται από μία παραμετροποίηση και στο τέλος αθροίζουμε τους τύπους από κάθε τμήμα της, όπως κάναμε και στο θεώρημα του Green για χωρία που έπρεπε να κοπούν για να περιγραφούν ως τύπου I ή II.

Ας θέσουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Η F αφού έχει πεδίο τιμών στο \mathbb{R}^3 έχει τρεις συνιστώσες συναρτήσεις, δηλαδή γράφεται $F = (F_1, F_2, F_3)$, όπου οι F_1, F_2 και F_3 είναι C^1 συναρτήσεις από την επιφάνεια S στο \mathbb{R} . Έστω ότι η επιφάνεια S περιγράφεται από την παραμετροποίηση $\Phi(u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ με

$$\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$$

όπου οι Φ_1, Φ_2, Φ_3 είναι C^2 συναρτήσεις από το D στο \mathbb{R} , και για το D υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει το θεώρημα του Green. Θέτουμε επίσης

$\sigma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ παραμετρικοποίηση του ∂D , $\varphi(t) = \Phi(\sigma(t))$ παραμετρικοποίηση του ∂S , και υποθέτουμε ότι όλες οι προηγούμενες παραμετρικοποιήσεις διατηρούν τον θετικό προσανατολισμό.

Τέλος, σημειώνουμε ότι θα χρειαστούμε τον κανόνα της αλυσίδας στην παραγωγή για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Η απόδειξη θα γίνει αποδεικνύοντας πρώτα το θεώρημα στην ειδική περίπτωση όπου $F_2 = F_3 = 0$, οπότε $F = (F_1, 0, 0)$. Στη συνέχεια αλλάζοντας κυκλικά τους δείκτες (ή επαναλαμβάνοντας τις ίδιες πράξεις) θα προκύψουν τύποι για τις περιπτώσεις όπου $F = (0, F_2, 0)$ και $F = (0, 0, F_3)$. Στο τέλος θα προσθέσουμε αυτούς τους τρεις τύπους.

Ξεκινάμε την απόδειξη του θεωρήματος του Stokes από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\iint_S \nabla \times F = \iint_D \langle (\nabla \times F)(\Phi(u, v)), T_u \times T_v \rangle,$$

όπου

$$T_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \quad \text{και} \quad T_v = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right).$$

Υπολογίζουμε το $\nabla \times F$ με τη σχετική ορίζουσα (δες την ορίζουσα παρακάτω) και το βρίσκουμε ίσο με $\frac{\partial F_1}{\partial z} j - \frac{\partial F_1}{\partial y} k$. Έτσι

$$\iint_S \nabla \times F = \iint_S \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial z}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} &= \iint_D \left\langle \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} (\Phi(u, v)), \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\rangle dudv \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} (\Phi(u, v)) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial F_1}{\partial y} (\Phi(u, v)) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right) \right) dudv. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Κρατάμε αυτή την έκφραση και στρεφόμαστε τώρα στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Σκοπός μας είναι με τη βοήθεια της σύνθεσης με την Φ να περάσουμε από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ∂S στο επικαμπύλιο ολοκλή-

ρωμα στο ∂D ώστε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Green. Έχουμε

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F &= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle F(\Phi(\sigma(t))), \frac{d}{dt}(\Phi(\sigma(t))) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle F(\Phi(\sigma(t))), \left(\frac{d}{dt}\Phi_1(\sigma(t)), \frac{d}{dt}\Phi_2(\sigma(t)), \frac{d}{dt}\Phi_3(\sigma(t)) \right) \right\rangle dt, \end{aligned}$$

το οποίο, επειδή $F = (F_1, 0, 0)$ ισούται με

$$\int_a^b F_1(\Phi(\sigma(t))) \frac{d}{dt}\Phi_1(\sigma(t)) dt.$$

Από τον κανόνα αλυσίδας ισχύει

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(\sigma(t)) = \left\langle \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}(\sigma(t)), \frac{\partial\Phi_1}{\partial v}(\sigma(t)) \right), \sigma'(t) \right\rangle.$$

Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F &= \int_a^b \left[F_1(\Phi(\sigma(t))) \cdot \left\langle \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}(\sigma(t)), \frac{\partial\Phi_1}{\partial v}(\sigma(t)) \right), \sigma'(t) \right\rangle \right] dt \\ &= \int_a^b \left\langle \left((F_1 \circ \Phi) \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right) \right)(\sigma(t)), \sigma'(t) \right\rangle dt \\ &= \oint_{\partial D} \left((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial\Phi_1}{\partial u}, (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right) = \oint_{\partial D} \Psi, \end{aligned}$$

όπου θέσαμε

$$\Psi = \left((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial\Phi_1}{\partial u}, (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial\Phi_1}{\partial v} \right) =: (\Psi_1, \Psi_2).$$

Συνοπώς σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Green, οπότε

$$\oint_{\partial D} \Psi = \iint_D \langle \nabla \times \Psi, k \rangle dudv,$$

δηλαδή

$$\oint_{\partial S} F = \iint_D \langle \nabla \times (\Psi_1, \Psi_2), k \rangle dudv.$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \times (\Psi_1, \Psi_2), k \rangle &= \left\langle \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & 0 \end{vmatrix}, k \right\rangle \\
 &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \left((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + F_1(\Phi(u, v)) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u \partial v} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial v} F_1(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + F_1(\Phi(u, v)) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u \partial v} \right).
 \end{aligned}$$

Οι όροι με τις παραγώγους δεύτερης τάξης διαγράφονται, οπότε καταλήγουμε στην

$$\langle \nabla \times (\Psi_1, \Psi_2), k \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial u} F_1(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial v} F_1(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \right).$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε ότι η τελευταία παράσταση είναι ίση με

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\
 &- \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\Phi(u, v)) \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}.
 \end{aligned}$$

Ελέγχουμε εύκολα (άσκηση) ότι αυτοί οι όροι είναι οι ίδιοι που εμφανίζονται στην (8.8), και άρα με τη βοήθεια της (8.7) έχουμε δείξει ότι

$$\oint_{\partial S} (F_1, 0, 0) = \iint_{\partial S} \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial z}, -\frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Με όμοιες πράξεις ή εναλλάσσοντας τους δείκτες και τις θέσεις των ποσοτήτων μέσα στα διανύσματα κυκλικά ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$), βλέπουμε ότι

$$\oint_{\partial S} (0, F_2, 0) = \iint_{\partial S} \left(-\frac{\partial F_2}{\partial z}, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)$$

και

$$\oint_{\partial S} (0, 0, F_3) = \iint_{\partial S} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}, -\frac{\partial F_3}{\partial x}, 0 \right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις τελευταίες σχέσεις οδηγούμαστε στην

$$\oint_{\partial S} (F_1, F_2, F_3) = \iint_{\partial S} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Εύκολα ελέγχεται με την γνωστή μας ορίζουσα, ότι το διάνυσμα μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι το $\nabla \times F$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. \square

8.4.3 Απόδειξη του θεωρήματος Gauss

Ας υποθέσουμε για να απλοποιήσουμε λίγο την απόδειξη ότι το σύνορο του Ω είναι C^2 . Θα χρησιμοποιήσουμε δύο ισχυρισμούς που δεν θα αποδείξουμε σε αυτό το μάθημα. Όμως, πρώτον θα είναι πειστικοί, και δεύτερον ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να καταφύγει σε ένα βιβλίο διαφορικής γεωμετρίας για τις πλήρεις λεπτομέρειες.

Θα είναι ευκολότερο για την απόδειξη αντί να χρησιμοποιήσουμε τα x , y και z για τις συντεταγμένες ενός διανύσματος τον \mathbb{R}^3 να γράφουμε x_1 , x_2 , x_3 . Έτσι αν $F = (F_1, F_2, F_3)$ το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial \Omega} (F_1, F_2, F_3).$$

Οι δύο ισχυρισμοί στους οποίους αναφερθήκαμε παραπάνω είναι οι εξής:

Ισχυρισμός 1 Το Ω είναι δυνατόν να γραφτεί ως ένωση ευκλείδειων δίσκων αρκετά μικρής ακτίνας, ώστε αν B ένας τέτοιος δίσκος ο οποίος τέμνει το σύνορο του Ω , τότε το $B \cap \Omega$ να γράφεται (όπως φαίνεται στο σχήμα 8.5) με τη βοήθεια του γραφήματος μιας συνάρτησης $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, είτε ως

$$(I) B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 > \varphi(x_1, x_3)\} \text{ ή } B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 < \varphi(x_1, x_3)\}, \text{ είτε ως}$$

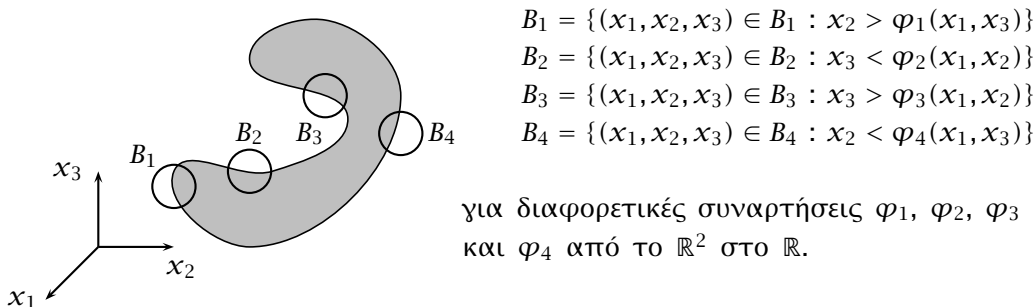
$$(II) B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\} \text{ ή } B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 < \varphi(x_1, x_2)\} \text{ είτε ως}$$

$$(III) B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_1 > \varphi(x_2, x_3)\} \text{ ή } B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_1 < \varphi(x_2, x_3)\}.$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 8.5, το αν η περιγραφή θα είναι όπως στην περίπτωση (I) ή στην περίπτωση (II) ή στην (III) έχει να κάνει με το που βρίσκεται ο δίσκος B σε σχέση με το σύνορο του Ω .

Το ότι το παραπάνω είναι εφικτό σχετίζεται με το ότι το Ω είναι κλειστό και φραγμένο καθώς και με το ότι το σύνορό του είναι C^2 . Δεν θα μπούμε όμως σε λεπτομέρειες απόδειξης.

Ισχυρισμός 2 Το παρακάτω είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο το οποίο ονομάζεται *διαμέριση της μονάδας*.



Σχήμα 8.5: Διάφορες περιπτώσεις τομών ευκλείδειων δίσκων με το σύνορο του Ω .

Έστω B_1, B_2, \dots, B_N οι ευκλείδειοι δίσκοι που περιγράφει ο Ισχυρισμός 1. Υπάρχουν συναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ οι οποίες είναι C^1 και ικανοποιούν τις εξής συνθήκες

- $\sum_{j=1}^N \psi_j = 1$ πάνω στο Ω .
- $\psi_j \Big|_{\mathbb{R}^3 \setminus B_j} = 0$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, N$.

Αυτός ο ισχυρισμός δεν είναι τόσο δύσκολος όσο ίσως ακούγεται. Απλά βρίσκει κανείς συναρτήσεις που να ικανοποιούν τη δεύτερη συνθήκη και πάνω στο Ω να έχουν θετικό άθροισμα (κάντε ένα σχήμα). Τέλος διαιρούμε κάθε συνάρτηση με το άθροισμά τους ώστε να ικανοποιείται και η πρώτη συνθήκη!

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ξεκινήσουμε την απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\partial\Omega} (0, 0, F_3), \end{aligned}$$

διότι μετά, απλώς θα προσθέσουμε κατά μέλη. Η απόδειξη αυτών είναι ίδια οπότε αρκεί, για παράδειγμα, να αποδείξουμε την τελευταία. Απλοποιώντας περαιτέρω, θα γράφουμε f αντί για F_3 οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} (0, 0, f).$$

Θα κάνουμε ακόμα μια απλοποίηση:

Έστω B_j , $j = 1, 2, \dots, N$ ένας από τους δίσκους του Ισχυρισμού 1, και ψ_j οι αντίστοιχες συναρτήσεις από τον Ισχυρισμό 2. Αν αποδείξουμε ότι

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} (0, 0, \psi_j f),$$

για κάθε j μετά θα προσθέσουμε κατά μέλη για όλα τα j , και επειδή το άθροισμα των ψ_j πάνω στο Ω ισούται με 1 θα πάρουμε το ζητούμενο. Τώρα, η ψ_j είναι μηδέν έξω από το B_j σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2, οπότε η παραπάνω ολοκλήρωση είναι στην πραγματικότητα ολοκλήρωση πάνω στο $B_j \cap \Omega$ και το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι πάνω στο $B_j \cap \partial\Omega$. Δηλαδή ζητάμε να ισχύει

$$\iiint_{B_j \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{B_j \cap \partial\Omega} (0, 0, \psi_j f).$$

Για να μην γράφουμε λοιπόν συνεχώς $\psi_j f$ κάνουμε την εξής απλοποίηση: επειδή η ψ_j μηδενίζεται έξω από το B_j και άρα και η $\psi_j f$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{B \cap \partial\Omega} (0, 0, f), \quad (8.9)$$

όπου B ευκλείδειος δίσκος από τον Ισχυρισμό 1 και f μια C^1 συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το B . Παρατηρούμε ότι επειδή η f είναι συνεχής (ως C^1) είναι αναγκαστικά μηδέν και στο σύνορο του B .

Περίπτωση 1 Το B δεν τέμνει το σύνορο του Ω , δηλαδή είναι μέσα στο εσωτερικό Ω . Αυτή η περίπτωση αντιμετωπίζεται εύκολα, διότι στα αριστερά της (8.9) ολοκληρώνουμε πρώτα ως x_3 , και χρησιμοποιούμε ότι η f είναι μηδέν εκτός του B :

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 dx_2 dx_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_3=-\infty}^{x_3=+\infty} dx_2 dx_1 = 0.$$

Αλλά μηδέν είναι και το δεξιό μέρος της (8.9), αφού $B \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Περίπτωση 2 Το B τέμνει το σύνορο του Ω . Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις I ή II ή III της σελίδας 78. Αν ισχύουν οι περιπτώσεις με τις ανισότητες $<$ η αντιμετώπιση είναι ίδια με τις περιπτώσεις όπου ισχύει η $>$. Επειδή η f βρίσκεται στην τρίτη συντεταγμένη στο $(0, 0, f)$ οι περιπτώσεις I και III αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Οπότε θα ασχοληθούμε μόνο με τις περιπτώσεις

$$B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 > \varphi(x_1, x_3)\}$$

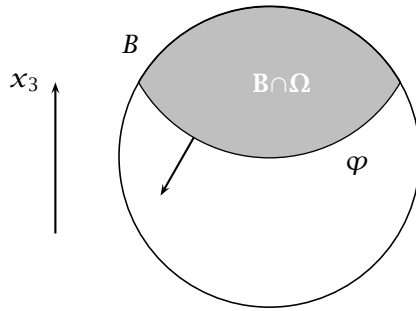
και

$$B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\},$$

Υποπερίπτωση $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 dx_2 dx_1 &= \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \iint_D \left(-f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \right) dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με το



Σχήμα 8.6: Η περίπτωση $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\}$.

$$\oiint_{B \cap \partial \Omega} (0, 0, f).$$

Η παραμετρικοποίηση του $B \cap \partial \Omega$ είναι η $\Phi(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))$. Υπολογίζουμε με την γνωστή ορίζουσα το $T_{x_1} \times T_{x_2}$ και βρίσκουμε:

$$T_{x_1} \times T_{x_2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} j + k.$$

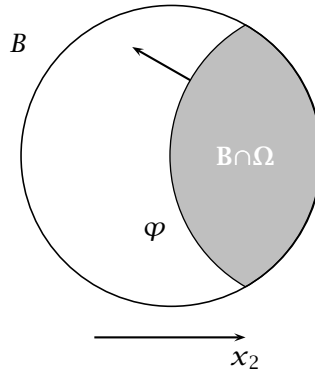
Φανερά $\langle T_{x_1} \times T_{x_2}, k \rangle > 0$ οπότε (δες σχήμα 8.6) η Φ αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \oiint_{B \cap \partial \Omega} (0, 0, f) &= - \int_D \langle (0, 0, f)(\Phi(x_1, x_2), T_{x_1} \times T_{x_2}) \rangle dx_2 dx_1 \\ &= \iint_D \left(-f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \right) dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Υποπερίπτωση $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 > \varphi(x_1, x_3)\}$.

Η παραμετρικοποίηση της επιφάνειας του $\partial \Omega$ μέσα στο B είναι τώρα η $\Phi(x_1, x_3) = (x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3)$ και υπολογίζοντας με την ορίζουσα βρίσκουμε ότι

$$T_{x_1} \times T_{x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} i - j + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$



Σχήμα 8.7: Η περίπτωση $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 > \varphi(x_1, x_3)\}$.

Προφανώς $\langle T_{x_1} \times T_{x_3}, j \rangle = -1 < 0$, άρα (δες σχήμα 8.7) η παραμετροποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό. Θέλοντας να υπολογίσουμε το $\iiint_{B \cap \Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 dx_2 dx_1$ θα ήταν εύκολη δουλειά αν μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x_3 , αφού θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, όπως στην προηγούμενη υποπερίπτωση. Όμως τώρα δεν ξέρουμε πού κινείται το x_3 αλλά το x_2 (συγκεκριμένα $x_2 > \varphi(x_1, x_3)$). Παρόλα αυτά θα επιμείνουμε: η πρώτη ολοκλήρωση πρέπει να γίνει ως προς μεταβλητή που γνωρίζουμε τα άκρα μεταβολής. Οπότε θα επιχειρήσουμε να αλλάξουμε το dx_3 σε dx_2 στην προς ολοκλήρωση ποσότητα. Για να το πετύχουμε αυτό αλλάζουμε μεταβλητή. Θέτουμε $x_2 = \varphi(x_1, x_3) + t$. Όταν $x_2 = \varphi(x_1, x_3)$ το $t = 0$. Και βεβαίως $dx_2 = dt$. Έτσι

$$\begin{aligned}
 \iiint_{B \cap \Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 dx_2 dx_1 &= \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1, x_3)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) dx_2 \right) dx_1 dx_3 \\
 &= \iint_D \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) dt \right) dx_1 dx_3 \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) dt dx_1 dx_3.
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \right) &= \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_3} (x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \right\rangle \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3).
 \end{aligned}$$

Άρα η προς ολοκλήρωση ποσότητα στην (8.10) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \right) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3). \end{aligned}$$

Έτσι από την (8.10) προκύπτουν δύο ολοκληρώματα. Το πλεονέκτημα από αυτή τη διαδικασία είναι ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα περιέχει την $\partial f / \partial x_2$, και για το x_2 ξέρουμε άκρα ολοκλήρωσης! Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το

$$\iint_D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3} \left(f(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \right) dx_3 dx_2 dx_1 = 0,$$

αφού η f είναι μηδέν έξω από το B .

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το

$$\iiint_{\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3) \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) \right) dx_1 dx_3 dt.$$

Επανερχόμαστε τώρα στη μεταβλητή x_2 αλλάζοντας ξανά μεταβλητή, θέτοντας $t = x_2 - \varphi(x_1, x_3)$. Οπότε παίρνουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3) \right) \left(\int_{\varphi(x_1, x_3)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \\ = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} f(x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3). \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα όμως είναι ίσο με το $\oint_{B \cap \partial \Omega} (0, 0, f)$, διότι

$$\begin{aligned} \oint_{B \cap \partial \Omega} (0, 0, f) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left\langle (0, 0, f)(x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3), T_{x_1} \times T_{x_3} \right\rangle dx_1 dx_3 \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left\langle (0, 0, f(x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3)), \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, -1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \right\rangle dx_1 dx_3 \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} f(x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3). \end{aligned}$$

□

Παράρτημα Α'

Τύποι παραγώγισης

Λήμμα Α'.1 Αν $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση, $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ μια C^1 καμπύλη και $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, τότε

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f((x(t), y(t), z(t))) - f((x(t_0), y(t_0), z(t_0)))}{t - t_0} \\ &= \frac{f((x(t), y(t), z(t))) - f((x(t_0), y(t), z(t)))}{t - t_0} \end{aligned} \quad (A'.1)$$

$$+ \frac{f((x(t_0), y(t), z(t))) - f((x(t_0), y(t_0), z(t)))}{t - t_0} \quad (A'.2)$$

$$+ \frac{f((x(t_0), y(t_0), z(t))) - f((x(t_0), y(t_0), z(t_0)))}{t - t_0}. \quad (A'.3)$$

Από το θεώρημα μέσης συναρτήσεων τιμής μίας μεταβλητής για τη συνάρτηση $g(x) = f(x, y, z)$ με τα y, z σταθερά, υπάρχει c ανάμεσα στα $x(t)$ και $x(t_0)$ ώστε

$$g(x(t)) - g(x(t_0)) = g'(c)(x(t) - x(t_0)) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=c} (x(t) - x(t_0)).$$

Άρα

$$\frac{f((x(t), y(t), z(t))) - f((x(t_0), y(t), z(t)))}{t - t_0} = \frac{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=c} (x(t) - x(t_0))}{t - t_0}.$$

Οπότε αν $t \rightarrow t_0$, τότε $x(t) \rightarrow x(t_0)$, $y(t) \rightarrow y(t_0)$ και $z(t) \rightarrow z(t_0)$. Συνεπώς $c \rightarrow x(t_0)$. Εδώ χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η f είναι C^1 , δηλαδή η $\partial f / \partial x$ είναι συνεχής, άρα

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=c} \xrightarrow{c \rightarrow x(t_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0), z(t_0)).$$

οπότε το κλάσμα στην (A'.1) συγκλίνει στο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \cdot x'(t_0).$$

Ομοίως και για τα κλάσματα (A'.2) και (A'.3). Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} \varphi'(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0))y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t_0))z'(t_0) \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \right\rangle = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

[1] Αντώνης Τσολομύτης, *Σύνολα και Αριθμοί*, Leader Books 2004.
