Προπτυχιακό Σεμινάριο
Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής
(Editors)

2019–2021

Καρλόβασι, Σάμος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Προπτυχιακό Σεμινάριο
Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής
(Editors)

2019–2021

Καρλόβασι, Σάμος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βιβλιογραφικά δεδομένα:

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης και Γεωμετρίας / Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής (Editors). —

Έκδοση 1.0 ¶ 5 4 3 2 1

viii. 103 σελ. 11 σχ. 6 φωτ. 29,7 cm

1. Μαθηματική Ανάλυση
2. Γεωμετρία

I. Μ. Ανούσης.
II. Χ. Τσιχλιάς.
III. Α. Τσολομύτης.
IV. Β. Φελουζής.

LCC: QA 299.6—433 2019 | DEWEY: 515.15—DC 23

Το πρόγραμμα και οι σελίδες του σεμιναρίου βρίσκονται στη διεύθυνση
http://myria.math.aegean.gr/psag/

Στοιχειοθετήθηκε με το XƎLaTeX.

Πρόλογος

Το Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας έχει σκοπό να αναπτύξει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά ανάμεσα στους φοιτητές και τις φοιτήτριες και να προκαλέσει τη συζήτηση για αυτά, παρουσιάζοντας θέματα που σχετίζονται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο με την περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Γεωμετρίας, είτε από την ιστορική της είτε από τη σύγχρονη περίοδό της.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι συνήθως ελάχιστες και μπορούν να παρακολουθήσουν και πρωτοετείς φοιτητές.

Ο τόμος αυτός περιέχει τις διαλέξεις που έγιναν τα δύο τελευταία ακαδημαϊκά έτη, τα έτη 2019–2020 και 2020–2021 διότι εξ' αιτίας των μέτρων που ελήφθησαν για την πανδημία, το διάστημα αυτό έγιναν λιγότερες διαλέξεις.

Οι ομιλίες στον τόμο αυτό παρουσιάζονται με τη χρονολογική σειρά που δόθηκαν.

Όπου χρειάστηκε δεσμός προς διεύθυνση του διαδικτύου τοποθετήθηκε στο περιθώριο η λέξη «δεσμός» η οποία είναι ενεργή για κλικ όταν το αρχείο διαβάζεται σε οθόνη και δίπλα δίνεται ο ίδιος δεσμός με QR-code στην περίπτωση που το αρχείο διαβάζεται τυπωμένο. Το QR-code μπορεί να σκαναριστεί με οποιοδήποτε QR-code scanner από κινητό ή tablet με σύνδεση στο διαδίκτυο.

Μ. Ανούσης, Χ. Τσιχλιάς,
Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής.

Σάμος 2020–2021

Περιεχόμενα

Ομιλία 1

Μορφές της μαθηματικής επαγωγής, η αρχή της καλής διάταξης και αναδρομικοί ορισμοί

Χαράλαμπος Κορνάρος

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kornaros@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να αποδείξουμε την πρόταση $P(n)$ η οποία περιέχει εκτός των άλλων μεταβλητών την ελεύθερη μεταβλητή n. Όταν λέμε ότι η n είναι ελεύθερη στην P, εννοούμε ότι η αλήθεια της $P(n)$ εξαρτάται από την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής n. Για κάποιες τιμές που θα πάρει η μεταβλητή n μπορεί να είναι αληθής, για άλλες τιμές μπορεί να είναι ψευδής. Η μαθηματική επαγωγή μας βοηθεί να αποδείξουμε την αλήθεια όλων των παρακάτω προτάσεων

$$P(1), P(2), \dots, P(n), \dots$$

κάνοντας μόνο λίγα βήματα. Τα βήματα αυτά περιγράφονται παρακάτω.

Σχολιο 1.0.1.

- Μια πρόταση (στα κλασικά Μαθηματικά) μπορεί να είναι είτε αληθής ή ψευδής. Δεν γίνεται να μην μπορούμε να δώσουμε σε μια πρόταση των Μαθηματικών μια συγκεκριμένη τιμή, αλήθεια ή ψέματα. Η τιμή αυτή δεν αλλάζει όσο βρισκόμαστε στο ίδιο μαθηματικό μοντέλο.
- Η $P(n)$ είναι μια πρόταση σχετικά με τις ιδιότητες του n . Το n μπορεί να είναι ένα δέντρο, ή ένας πίνακας ή κάποιο άλλο μαθηματικό αντικείμενο, αλλά προς το παρόν περιοριζόμαστε μόνο σε προτάσεις που αναφέρονται σε φυσικούς αριθμούς.

Ορισμος 1.0.2 (Αρχή της συνηθισμένης ή απλής Επαγωγής). Για να αποδείξουμε την αλήθεια της $P(n)$ για όλα τα $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ αρκεί να κάνουμε δύο μόνο βήματα:

- *Βασική Περίπτωση* Αποδεικνύουμε, με κάποιο παραδεκτό τρόπο, ότι η πρόταση $P(1)$ είναι αληθής.
- *Επαγωγικό βήμα* Υποθέτουμε ότι η $P(n)$ αληθεύει, όπου $n \geq 1$ είναι ένας τυχαίος φυσικός. Αποδεικνύουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθινή πρόταση χρησιμοποιώντας, αν βέβαια χρειαστεί, το γεγονός ότι οι προτάσεις $P(1)$ και $P(n)$ είναι αληθείς.

Σχολιο 1.0.3.

- Η υπόθεση ότι αληθεύει η $P(n)$ στο επαγωγικό βήμα λέγεται και επαγωγική υπόθεση.
- Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που η $P(n)$ αληθεύει *τελικά* για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n_0 τέτοιος που η $P(n)$ είναι αληθινή για όλα τα $n \geq n_0$, ενώ για μικρότερες τιμές $n < n_0$ να μην αληθεύει καθόλου ή να αληθεύει μόνο για λίγες τιμές. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να αποδείξουμε την αλήθεια της πρότασης

  $$\forall n \geq n_0 \; P(n)$$

  με μια μικρή τροποποίηση της αρχής: θα επαναλάβουμε τα βήματα της επαγωγής με μόνη διαφορά ότι το 1 θα το αντικαταστήσουμε, όπου εμφανίζεται, με το n_0. Έτσι, για παράδειγμα η επαγωγική υπόθεση θα είναι ότι η $P(n)$ αληθεύει, όπου n είναι ένας τυχαίος ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του n_0.
- Στη επαγωγική υπόθεση δεν μας επιτρέπεται να υποθέσουμε ότι η $P(n)$ είναι αληθινή για κάποιες άλλες τιμές εκτός του n και 1 (ή γενικότερα του n_0). Έτσι αν κατά την διάρκεια του επαγωγικού βήματος αποδείξουμε ότι η $P(n+1)$ είναι αληθινή χρησιμοποιώντας εκτός των άλλων και την υπόθεση ότι π.χ η $P(n-1)$ είναι αληθινή, τότε θα έχουμε κάνει λάθος χρήση της συνηθισμένης επαγωγής και άρα

πιθανότατα να έχουμε πέσει σε σοβαρό σφάλμα (και η $P(n)$ να μην είναι γενικά αληθινή).

Παραδειγμα 1.0.4. Θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόταση $P(n)$ με ορισμό

$$P(n) : 2^n > n^2$$

είναι γενικά αληθινή. Κάνοντας κάποιες δοκιμές διαπιστώνουμε γρήγορα ότι οι παρακάτω είναι ψευδείς: $P(2), P(3), P(4)$ ενώ η $P(5) : 2^5 > 25$ είναι αληθινή, και το ίδιο μάλλον ισχύει για κάθε $n \geq n_0$ (όπου $n_0 = 5$ στην περίπτωσή μας). Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα της επαγωγής για να δείξουμε ότι

$$\forall n \geq 5 \; P(n).$$

Η βασική περίπτωση είναι η $P(5)$, με $n_0 = 5$, την οποία ήδη έχουμε αποδείξει. Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε την αλήθεια της $P(n)$, δηλαδή ότι για το n αληθεύει η ανίσωση $2^n > n^2$, με $n \geq 5$ και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και η $2^{n+1} > (n+1)^2$. Έχουμε: $2^{n+1} = 22^n > 2n^2$. Το $2n^2$ είναι μεγαλύτερο του $(n+1)^2$ διότι

$$2n^2 > (n+1)^2 \leftrightarrow 2n^2 > n^2 + 2n + 1 \leftrightarrow n^2 - 2n + 1 > 2 \leftrightarrow (n-1)^2 > 2.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανώς αληθινή διότι $n - 1 \geq 4$ και άρα $(n-1)^2 > 2$.

Σχολιο 1.0.5.
- Αν προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την πρόταση $\forall n \geq 1 \; P(n)$ τότε ενώ ισχύει η βασική περίπτωση, δεν μπορεί όμως να αποδειχθεί το επαγωγικό βήμα (γιατί;). Συνεπώς δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποδείξαμε το ισχυρισμό $\forall n \geq 1 \; P(n)$!

- Στην απόδειξη χρειαστήκαμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $2^{n+1} = 22^n$. Αυτός ο ισχυρισμός δεν έχει σχέση με την πρόταση $P(n)$ αλλά έχει να κάνει με τον *αναδρομικό ορισμό* της εκθετικής συνάρτησης. Οι αναδρομικοί ορισμοί είναι πολύ χρήσιμοι στα μαθηματικά, διότι μας επιτρέπουν να κτίζουμε νέα αντικείμενα (αριθμούς, λίστες, συναρτήσεις κοκ.) από απλούστερα με χρήση κάποιων πράξεων. Στην περίπτωσή μας το 2^n «κτίζεται» από τον αριθμό 2 χρησιμοποιώντας n φορές την πράξη του πολλαπλασιασμού:

  $$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2.$$

  Με παρόμοιο τρόπο, αν η $P(n)$ περιέχει το παραγοντικό $n!$ τότε θα χρειαστεί πιθανότατα στο επαγωγικό βήμα της επαγωγής να θυμηθούμε τον αναδρομικό «κτίσιμο» του παραγοντικού:

  $$0! = 1, (n+1)! = (n+1)n!$$

  Θα δούμε παρακάτω ένα τέτοιο παράδειγμα.

- Το σχήμα της επαγωγής μπορεί να το σκεφτόμαστε ως ένα είδος αναδρομικού κτισίματος μιας απόδειξης. Υποθέτουμε ότι έχουμε κτίσει την $P(n)$, δηλαδή την έχουμε αποδείξει και συνεχίζουμε στο κτίσιμο (στην απόδειξη) της $P(n+1)$ χρησιμοποιώντας την αλήθεια της $P(n)$.

Παραδειγμα 1.0.6. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\forall n \geq 1,\ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n * n! = (n+1)! - 1$$

χρησιμοποιώντας την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Στην περίπτωσή μας $n_0 = 1$ και η $P(n)$ είναι μια ισότητα με αριστερό μέλος το

$$a_n = 1 \cdot 1! + 2 * 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n * n!$$

και δεξιό το $b_n = (n+1)! - 1$.

Είναι άξιο παρατήρησης ότι το αριστερό μέλος αποτελείται ακριβώς από n το πλήθος αθροιστέους. Προφανώς για $n = n_0 = 1$ έχουμε $a_1 = 1$ (γιατί;) και $b_1 = 2! - 1 = 1$, οπότε η $P(1)$ αληθεύει. Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε $a_n = b_n$ και θα αποδείξουμε ότι $a_{n+1} = b_{n+1}$. Το τελευταίο προκύπτει εύκολα, αρκεί να ανακαλύψουμε τις αναδρομικές σχέσεις μεταξύ των a_n και a_{n+1} και μεταξύ των b_n και b_{n+1}. Έχουμε: $a_{n+1} = a_n + (n+1)(n+1)!$ (το a_n συν τον όρο $(n+1)(n+1)!$ μας κάνει το a_{n+1}) και $b_{n+1} = (n+2)! - 1 = (n+2)(n+1)! - 1$. Επειδή $b_n + 1 = (n+1)!$, και $a_n = b_n$ προκύπτει ότι το $a_{n+1} = b_n + (n+1)(b_n+1)$ και $b_{n+1} = (n+2)(b_n+1) - 1$. Από τις τελευταίες ισότητες είναι προφανές ότι $a_{n+1} = b_{n+1}$.

Ασκηση 1.0.7. Μπορούμε επίσης με επαγωγή να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει ότι αληθεύει η πρόταση $P(n)$:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{n(4n+1)(2n+1)}{3}.$$

Βέβαια, λόγω απροσεξίας, ίσως νομίζουμε ότι η $P(n)$ έχει στα αριστερά μόνο n το πλήθος αθροιστέους και αυτό μπορεί να προκαλέσει σοβαρό πρόβλημα στην απόδειξη του επαγωγικού βήματος. Στα αριστερά υπάρχουν $2n$ το πλήθος αθροιστέοι, οπότε, το $P(n+1)$ έχει ακριβώς 2 περισσότερους (απ' τα αριστερά) απ' όσους έχει ο $P(n)$. Με λίγη προσοχή αποδεικνύεται εύκολα και το επαγωγικό βήμα ανιχνεύοντας τις αναδρομικές σχέσεις μεταξύ των a_n και a_{n+1} και μεταξύ των b_n και b_{n+1}.

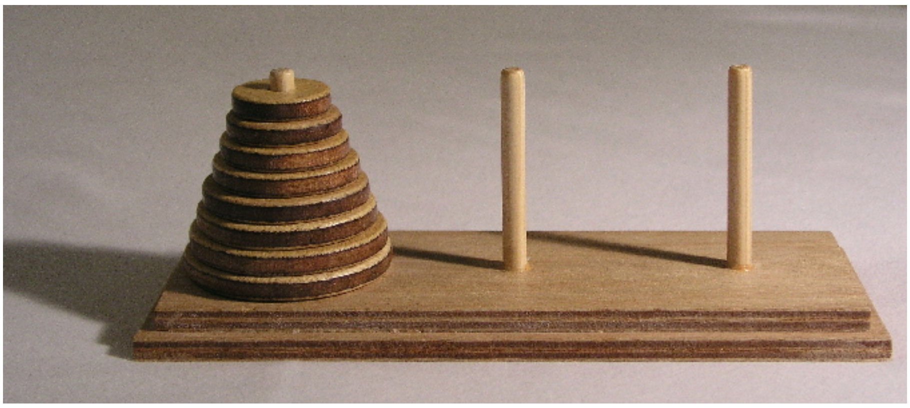
Θα δώσουμε δύο παραδείγματα της μαθηματικής επαγωγής σε πρακτικές εφαρμογές.

Παραδειγμα 1.0.8. Τα μηχανήματα ΑΤΜ δίνουν μόνο χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Έτσι αν ζητηθεί ανάληψη των 30 €, τότε το μηχάνημα αδυνατεί να ικανοποιήσει τον πελάτη. Με λίγη διαίσθηση μπορούμε να διαμορφώσουμε την πρόταση ότι το ATM μπορεί να μας δώσει οποιοδήποτε ποσό που είναι πολλαπλάσιο των 10 € και μεγαλύτερο των 30 €. Ας αποδείξουμε λοιπόν με μαθηματικά ότι για κάθε $n > 3$ ισχύει $n = 2x + 5y$ όπου το n παριστάνει το πλήθος από τα 10 €, το x το πλήθος από τα 20 € και το y από τα 50 €. Με άλλα λόγια, $P(n)$:

$$(\exists x \geq 0)(\exists y \geq 0)\ n = 2x + 5y.$$

Στη βασική περίπτωση για $n = n_0 = 4$ έχουμε $4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$ οπότε προφανώς αληθεύει η $P(n_0)$. Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ισχύει η $P(n)$ για κάποιο $n > 3$ και θα αποδείξουμε την αλήθεια της $P(n + 1)$. Για το n υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις. Η μία περίπτωση είναι να υπάρχουν μόνο δυάρια, δηλαδή χαρτονομίσματα των 20 €: $n = 2x$ με $x > 1$. Οπότε αφαιρούμε 2 απ' αυτά και στην θέση τους βάζουμε ένα 50 €: $2 \cdot (x - 2) + 5 \cdot 1 = 2 \cdot x + 1 = n + 1$. Σε αυτήν την περίπτωση όπως βλέπουμε το ζητούμενο y είναι ακριβώς το 1 (=ένα 50 €). Στην περίπτωση που έχουμε και κάποια 50 € στην κατασκευή του n, τότε αφαιρούμε ένα από αυτά και στην θέση του επιστρέφουμε τρία χαρτονομίσματα των 20 €: $2 \cdot x + 5 \cdot (y - 1) + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot (x + 3) + 5 \cdot (y - 1)$. Προφανώς η τελευταία ποσότητα είναι το $n+1$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, αποδείξαμε την $P(n + 1)$.

Παραδειγμα 1.0.9. Οι πύργοι *Hanoi* είναι ένα παζλ που εφευρέθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Édouard Lucas το 1883. Ας παρατηρήσουμε προσεκτικά την εικόνα. Οι n το πλήθος δίσκοι έχουν διαφορετικές διαμέτρους (με



τρύπα στο κέντρο) και έχουν τοποθετηθεί στο αριστερό κοντάρι με τέτοιο τρόπο ώστε ένας οποιοσδήποτε δίσκος με μικρή διάμετρο να βρίσκεται ψηλότερα από ένα άλλο με μεγαλύτερη διάμετρο. Θέλουμε να τους μεταφέρουμε όλους στο δεξιό κοντάρι, μετακινώντας ένα δίσκο την φορά και τοποθετώντας τον σε ένα οποιοδήποτε κοντάρι από τα τρία (διαφορετικό βέβαια απ' αυτό που ήδη βρίσκεται ο δίσκος). Μπορούμε να κάνουμε τέτοιες κινήσεις όσες φορές θέλουμε, έως ώσπου να τοποθετηθούν όλοι οι δίσκοι στο δεξιό κοντάρι. Όμως αυτές οι κινήσεις πρέπει να είναι *επιτρεπτές*. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρέπει να παραβιάζεται ο περιορισμός που έχουμε βάλει για τους δίσκους του ίδιου κονταριού: ένας δίσκος με μια οποιαδήποτε διάμετρο να βρίσκεται οπωσδήποτε να χαμηλότερα από ένα άλλο δίσκο με μικρότερη διάμετρο (απ' αυτόν). Ο σκοπός μας είναι να ανακαλύψουμε το ελάχιστο πλήθος επιτρεπτών κινήσεων που χρειάζονται για να μετακινηθούν οι n δίσκοι από το αριστερό στο δεξί κοντάρι (με βοηθητικό το μεσαίο κοντάρι).

Η απάντηση είναι ότι απαιτούνται τουλάχιστον $2^n - 1$ κινήσεις! Τον ισχυρισμό μπορούμε να τον αποδείξουμε με την μαθηματική επαγωγή. Εδώ θα αποδείξουμε απλά ότι ακριβώς με $2^n - 1$ επιτρεπτές κινήσεις είναι εφικτό να πετύχουμε το ζητούμενο. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για να αποδείξουμε την πρόταση

P(n): μπορούμε να μεταφέρουμε n δίσκους από το οποιοδήποτε κοντάρι σε κάποιο άλλο, χρησιμοποιώντας βοηθητικά το εναπομείναν κοντάρι (εκ των τριών), με $2^n - 1$ το πλήθος επιτρεπές κινήσεις.

Θα αποδείξουμε ότι $\forall n \geq 1 \; P(n)$. Πράγματι, για $n = 1$ έχουμε ένα δίσκο σε ένα κοντάρι και χρειαζόμαστε μια μόνο κίνηση για να τον μεταφέρουμε σε ένα άλλο κοντάρι. Έχουμε $2^1 - 1 = 1$ κινήσεις και έτσι αποδείξαμε την βασική περίπτωση. Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε το $P(n)$ και θα αποδείξουμε το $P(n+1)$. Έχουμε λοιπόν τοποθετήσει $n + 1$ δίσκους με την σωστή σειρά σε ένα κοντάρι (πχ το αριστερό) και θέλουμε να τους μεταφέρουμε στο δεξιό κοντάρι. Επιλέγουμε τους πρώτους n δίσκους από την στοίβα (δεν ακουμπάμε τον δίσκο με την μεγαλύτερη διάμετρο) και τους μεταφέρουμε στο μεσαίο κοντάρι, χρησιμοποιώντας βοηθητικά αν χρειαστεί και το δεξιότερο κοντάρι. Οι κινήσεις που χρειάζονται είναι σύμφωνα με την $P(n)$ πλήθους $2^n - 1$. Στην συνέχεια, με μια μόνο κίνηση, μεταφέρουμε τον εναπομείναντα δίσκο από το αριστερό κοντάρι στο δεξιό. Τέλος, μεταφέρουμε ξανά τους n δίσκους από το μεσαίο στο δεξιό κοντάρι (χρησιμοποιώντας βοηθητικά αν χρειαστεί και το αριστερό κοντάρι) με $2^n - 1$ επιτρεπτές κινήσεις. Αυτές τις κινήσεις μας τις εξασφαλίζει ξανά η επαγωγική μας υπόθεση $P(n)$. Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε *ξανά* την πρόταση $P(n)$ διότι δεν εμφανίζεται πουθενά στην πρόταση αυτή ο περιορισμός ότι το κοντάρι στο οποίο θα καταλήξουν οι n δίσκοι πρέπει να είναι κενό, δηλαδή χωρίς άλλους δίσκους! (ο μόνος περιορισμός είναι οι κινήσεις να είναι επιτρεπτές). Σύνολο επιτρεπτών κινήσεων: $2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ και έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο.

Λανθασμένες χρήσεις της μαθηματικής επαγωγής.

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε με λάθος τρόπο την μαθηματική επαγωγή με αποτέλεσμα να εξάγουμε κάποια γενικά συμπεράσματα που δεν είναι αληθινά. Για παράδειγμα, το 1, το 3, το 5, το 7 κοκ έχουν την ιδιότητα να είναι όλοι περιττοί. Ακόμα όλοι τους είναι είτε πρώτοι αριθμοί είτε γινόμενα 2 πρώτων. Αυτό μπορεί να μας οδηγήσει λανθασμένα στο συμπέρασμα ότι όλοι οι περιττοί έχουν αυτή την ιδιότητα. Η αδυναμία όμως να αποδείξουμε την αντίστοιχη πρόταση με επαγωγή, δείχνει ακριβώς ότι έχουμε κάνει λάθος στην γενίκευση. Πράγματι το 27 γράφεται 3 επί 9 που δεν είναι τίποτα από τα παραπάνω.

Υπάρχουν και περιπτώσεις που αποδεικνύουμε με μια λανθασμένη χρήση επαγωγής εντελώς παράλογες γενικεύσεις. Όμως το λάθος δεν είναι πάντοτε εύκολο να εντοπισθεί! Μια τέτοια περίπτωση συναντάμε στο επόμενο παράδειγμα.

Παραδειγμα 1.0.10. n το πλήθος άλογα έχουν πάντα το ίδο χρώμα

Πράγματι, ας ονομάσουμε $P(n)$ την προηγούμενη πρόταση. Αυτή προφανώς ισχύει για το $n = 1$. Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε την $P(n)$ και αποδεικνύουμε την $P(n + 1)$. Χωρίζουμε τα άλογα αυτά σε δύο κατηγορίες από n το πλήθος άλογα: Στα άλογα 1,2,3 έως το n και στα $2, 3, 4,$ έως το $n + 1$. Τα άλογα της κάθε ομάδος έχουν το ίδιο χρώμα σύμφωνα με την επαγωγική μας υπόθεση $P(n)$. Όμως το 2 άλογο βρίσκεται και στις δύο ομάδες, άρα όλα τα άλογα έχουν αναγκαστικά το ίδιο ακριβώς χρώμα, δηλαδή αποδείξαμε την $P(n + 1)$.

Φυσικά η παραπάνω επαγωγή δεν πρέπει να είναι σωστή, διότι καταλήξαμε κάπου ενάντια στην διαίσθησή μας (δεν έχουν όλα τα άλογα το ίδιο χρώμα!). Άρα κάπου πρέπει να έχουμε κάνει λάθος στην επαγωγή. Το λάθος είναι ότι δεν μπορούμε να εξάγουμε από την $P(n)$ την $P(n + 1)$ για $n = 1$! Δηλαδή αν κάθε ένα άλογο έχει ένα μοναδικό χρώμα, αυτό ΔΕΝ συνεπάγεται ότι κάθε 2 άλογα έχουν το ίδιο χρώμα! Ο παραπάνω συλλογισμός αποτυγχάνει, διότι είναι αδύνατον να χωρίσουμε $n + 1 = 2$ άλογα σε δυο ομάδες στις οποίες το άλογο 2 να είναι κοινό και στις δύο ομάδες!

Στο παρακάτω παράδειγμα συναντάμε μια «σωστή» χρήση της επαγωγικής μεθόδου σε μια πρόταση $P(n)$ η οποία δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως κανονική πρόταση.

Παραδειγμα 1.0.11. $P(n)$: Έχω n το πλήθος τρίχες στο κεφάλι μου και θεωρώ τον ευατό μου φαλακρό. Θα αποδείξουμε ότι $\forall n\, P(n)$ με την επαγωγική μέθοδο.

Πράγματι είναι αληθινή η $P(1)$ διότι κάποιος με μια τρίχα στο κεφάλι του είναι λογικό να θεωρεί τον ευατό του φαλακρό. Όμως, αν υποθέσουμε την $P(n)$, τότε μπορούμε να «αποδείξουμε» ότι και η $P(n+1)$ είναι όμοια αληθινή, αφού μια τρίχα παραπάνω σε ένα φαλακρό κεφάλι δεν έχει καμιά διαφορά, και το κεφάλι μου το θεωρώ φαλακρό ξανά! Άρα ακόμα και ένα τρισεκατομμύριο τρίχες να είχα πάλι φαλακρό θα θεωρούσα τον εαυτό μου (μέσος όρος είναι το πολύ 150 χιλιάδες τρίχες για μαλιαρούς...).

Το πρόβλημα εδώ δεν είναι ότι δεν ακολουθήσαμε σωστά την επαγωγική μέθοδο, αλλά στο ότι την χρησιμοποιήσαμε με μια ασαφή πρόταση της καθομιλουμένης, η οποία είναι φυσικά αδύνατον να περιγραφεί με μια απλή πρόταση των μαθηματικών. Το δίδαγμα που προκύπτει απ' τούτο το «παράδοξο» είναι ότι η απλή επαγωγή μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε καλοσχηματισμένες προτάσεις $P(n)$ (των μαθηματικών), για τις οποίες έχουμε ισχυρά κίνητρα να πιστεύουμε ότι γενικεύονται για όλα τα n ή για σχεδόν όλα τα n που ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{N}$ (ή σε κάποιο άλλο άπειρο αναδρομικό σύνολο, δείτε τον ορισμό σε επόμενη ενότητα).

Η $P(n)$ που χρησιμοποιήσαμε στο παράδοξο, δεν μπορεί να θεωρηθεί μια «φυσιολογική πρόταση», διότι αν και η $P(1)$ είναι αληθινή και η $P(10^{1000})$ είναι ψευδής, είναι *αδύνατον* να προσδιορίσουμε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίο η $P(n+1)$ είναι ψευδής και η $P(n)$ αληθινή. Όμως, όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω, το σύνολο των φυσικών αριθμών ικανοποιεί την αρχή του ελαχίστου αριθμού! Άρα η P δεν είναι φυσιολογική!

Η ισχυρή επαγωγή και οι καλές διατάξεις.

Υπάρχουν κάποιες προτάσεις των μαθηματικών που ενώ φαίνονται γενικά αληθινές δεν φαίνεται να μπορούν να αποδειχθούν (εύκολα, απλά και κατανοητά) με το παραπάνω σχήμα επαγωγής. Ας δώσουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παραδειγμα 1.0.12. Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$ ισχύει η πρόταση $P(n) : 12|(n^4 - n^2)$ με την μέθοδο της επαγωγής.

Για $n = 1$, τότε προφανώς ισχύει η $P(1)$ αφού το 12 διαιρεί το 1-1=0. Έστω ότι ισχύει η $P(n)$ και προσπαθούμε να δείξουμε την $P(n+1)$. Έχουμε:

$$(n+1)^4 - (n+1)^2 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - (n^2 + 2n + 1) =$$

$$(n^4 - n^2) + 4n^3 + 6n^2 + 2n = 12a + 4n^3 + 6n^2 + 2n.$$

Οπότε ερχόμαστε στην δυσάρεστη θέση να μην γνωρίζουμε πως πρέπει να προχωρήσουμε. Μάλλον, θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ η ποσότητα $4n^3 + 6n^2 + 2n$ είναι πολλαπλάσιο του 12, για να μπορούμε να συνεχίσουμε το επαγωγικό βήμα! Θα χρειαστούμε λοιπόν να ξεκινήσουμε μια δεύτερη επαγωγή και στην συνέχεια να ολοκληρώσουμε την τρέχουσα!

Αν θέλουμε να αποδείξουμε με απλό τρόπο την παραπάνω πρόταση, τότε ίσως θα πρέπει να αλλάξουμε μεθοδολογία. Για παράδειγμα, μπορούμε να κάνουμε χρήση της ισχυρής επαγωγής.

Η *ισχυρή επαγωγή* αποτελείται από δύο βήματα: Την *βασική περίπτωση* (στην οποία αποδεικνύουμε την αλήθεια της $P(n_0)$) και *το επαγωγικό βήμα*. Στο επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι αληθεύει κάθε μια από τις $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)$, με $n \geq n_0$ τυχαίο, και αποδεικνύουμε την αλήθεια της $P(n+1)$. Με άλλα λόγια, για να αποδείξουμε την $P(n+1)$ έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε την αλήθεια της $P(m)$ για οποιοδήποτε $m \geq n_0$ *μικρότερο* από το $n+1$: έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $P(n)$ αλλά και την $P(n-1)$, και την $P(n-2)$, κοκ. έως και την $P(n_0)$, δηλαδή την αρχική μας βασική πρόταση.

Θα αποδείξουμε το παραπάνω παράδειγμα με την χρήση της ισχυρής επαγωγής.

Η βασική περίπτωση έχει ακριβώς ως και στην απλή επαγωγή. Για το επαγωγικό βήμα, θα αποδείξουμε την $P(n+1)$ για $n+1 = 2, 3, 4, 5, 6$ *χωρίς* (να χρειαστεί) να χρησιμοποιήσουμε την $P(n)$ ή κάποια άλλη επιπλέον υπόθεση. Πράγματι, κάνοντας απλές πράξεις βλέπουμε ότι π.χ. $P(2)$: $12 | 2^4 - 2^2 = 16 - 4 = 12$ αληθεύει, $P(3)$: $12 | 3^4 - 3^2 = 9(9-1) = 72$ αληθεύει, κοκ. Για την απόδειξη της $P(n+1), n+1 \geq 7$, θα χρειαστούμε την επαγωγική μας υπόθεση και συγκεκριμένα ότι η $P(n+1-6)$ αληθεύει για να αποδείξουμε την $P(n+1)$ (προφανώς $n+1-6 < n+1$). Έχουμε

$$\begin{aligned}(n+1-6+6)^4 &- (n+1-6+6)^2 \\ &= m^4 + 4m^3 6 + 6m^2 6^2 + 4m 6^3 + 6^4 - (m^2 + 2m6 + 6^2),\end{aligned}$$

όπου με m συμβολίζουμε το $n+1-6$. Το τελευταίο γράφεται $m^4 - m^2 + 12a$ για κάποια ποσότητα a. Λόγω της $P(m) = P(n+1-6)$ το $m^4 - m^2$ είναι πολλαπλάσιο του 12 και έτσι αποδείχθηκε η ζητούμενη $P(n+1)$.

Παραδειγμα 1.0.13. Οι κοτομπουκιές McDonald's.

Οι κοτομπουκιές πωλούνται μόνο σε συσκευασίες των εννέα και είκοσι. Οπότε, για παράδειγμα, είναι αδύνατον να παραγγείλουμε 15 κοτομπουκιές. Το ερώτημα είναι να βρούμε το ελάχιστο αριθμό κοτομπουκιών n_0, έτσι ώστε οποιοδήποτε πλήθος $n \geq n_0$ κοτομπουκιών, να μπορεί να συσκευαστεί σε συσκευασίες των 9 ή των 20. Η απάντηση είναι $n_0 = 152$. Αυτό που θα δείξουμε εδώ είναι ότι «κάθε πλήθος από $n \geq 152$ κοτομπουκιές, μπορεί να συσκευαστεί». Ακριβέστερα, θα δείξουμε με την μέθοδο της ισχυρής επαγωγής, ότι η πρόταση

$$P(n) : \exists x \exists y (n = 9x + 20y),$$

αληθεύει για όλα τα $n \geq 152$. Τα x, y παριστάνουν αντίστοιχα, το πλήθος των μικρών πακέτων (από 9 κοτομπουκιές) και των μεγάλων πακέτων (από 20 κοτομπουκιές).

Βασικό Περίπτωση (βασικό βήμα): $152 = 9 \cdot 8 + 20 \cdot 4$, συνεπώς $x = 8, y = 4$ και η $P(152)$ αληθεύει.
Επαγωγικό βήμα: Έστω, ότι $n \geq 152$ και οι προτάσεις $P(n_0) = P(152)$, $P(n_0 + 1) = P(153)$, ..., $P(n)$ αληθεύουν συγχρόνως (αυτή είναι η επαγωγική μας υπόθεση). Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε και την αλήθεια της $P(n + 1)$ (με ή χωρίς την χρήση της επαγωγικής υπόθεσης).

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε τις $P(153), P(154), \ldots P(160)$, χωρίς την χρήση της επαγωγικής υπόθεσης. Οι αποδείξεις τους είναι πολύ απλές. Για παράδειγμα, $153 = 9cdot17$. Οι προτάσεις $P(n + 1)$ για $n \geq 160$ αποδεικνύονται επίσης απλά, αλλά με την βοήθεια της επαγωγικής μας υπόθεσης: Έχουμε $m = n + 1 - 9 \geq 161 - 9 = 152$. Το m είναι μικρότερος του $n + 1$ και μεγαλύτερος του 152. Από την επαγωγική μας υπόθεση για το m, έχουμε ότι η $P(m)$ είναι αληθινή. Οπότε, για κατάλληλα x', y' έχουμε $m = 9x' + 20y'$. Οπότε,

$$n + 1 = 9(x' + 1) + 20y',$$

και έτσι αποδείξαμε την $P(n + 1)$.

Παραδειγμα 1.0.14. Το πρόβλημα της σοκολάτας. Έχουμε μια μπάρα σοκολάτας σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου και θέλουμε να την διαμοιράσουμε σε μικρά κομμάτια σε σχήμα τετραγώνου. Η σοκολάτα μας περιέχει $n \geq 1$ το πλήθος τέτοια τετράγωνα (ίδιου μεγέθους). Το κομμάτιασμα κάθε φορά πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε από ένα κομμάτι της σοκολάτας να προκύπτουν δυο (νέα) τμήματα σοκολάτας σε σχήμα *ορθογωνίου παραλληλογράμμου* και χωρίς να σπάζουν τα

μικρά σοκολατένια τετράγωνα. Η διαδικασία σταματάει όταν δεν μπορούμε να κομματιάσουμε περισσότερο την σοκολάτα, δηλαδή όταν έχουμε πάρει τα n τετράγωνα. Ο σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι το πλήθος των απαιτούμενων σπασιμάτων στην παραπάνω διαδικασία, είναι $n-1$.

Η απόδειξη του ισχυρισμού, στηρίζεται στην ισχυρή επαγωγή. Η πρότασή που θέλουμε να δείξουμε με επαγωγή είναι η $P(n)$ που λέει ότι «απαιτούνται ακριβώς $n-1$ σπασίματα για να διαμερίσουμε την σοκολάτα στα n τετράγωνά της». Θα δείξουμε ότι η $P(n)$ αληθεύει για κάθε $n \geq n_0 (n_0 = 1)$.

Βασικό Περίπτωση (βασικό βήμα): η $P(1)$ προφανώς αληθεύει. Αν έχουμε ένα μόνο τετράγωνο, τότε απαιτούνται 0 σπασίματα για να το πάρουμε.

Επαγωγικό βήμα: Έστω, ότι $n \geq 2$ και οι προτάσεις $P(n_0) = P(1), P(n_0 + 1) = P(2), \ldots, P(n)$ αληθεύουν συγχρόνως (η επαγωγική μας υπόθεση).

Η σοκολάτα μας αποτελείται από $n+1 \geq 2$ τετράγωνα κομμάτια. Την σπάζουμε (με οποιοδήποτε τρόπο) σε δύο μικρότερα κομμάτια σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο έχει n_1 τετράγωνα και το δεύτερο n_2, με $n_1 + n_2 = n + 1$. Από επαγωγική υπόθεση παίρνουμε ότι οι $P(n_1)$ και $P(n_2)$ αληθεύουν. Άρα συνολικά με $n_1 - 1 + n_2 - 1$ επιπλέον σπασίματα θα έχουμε ολοκληρώσει την διαδικασία. Συνολικά χρειαστήκαμε $1 + n_1 - 1 + n_2 - 1 = (n+1) - 1$ σπασίματα. Έτσι αποδείξαμε την $P(n+1)$.

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή της ισχυρής επαγωγής είναι στην απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος της αριθμητικής:

Παραδειγμα 1.0.15. Κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ «σπάει», δηλαδή παραγοντοποιείται σε μοναδικό γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με άλλα λόγια, γράφεται ως

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m,$$

όπου $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \ldots \leq p_m$ είναι όλοι οι πρώτοι διαιρέτες του n (σε αύξουσα διάταξη).

Απόδειξη: *Βασικό Περίπτωση* (βασικό βήμα): η $P(2)$ προφανώς αλη-

θεύει. Το 2 έχει μοναδικό πρώτο παράγοντα τον εαυτό του!
Επαγωγικό βήμα: Έστω, ότι $n \geq 2$ και οι προτάσεις $P(n_0) = P(2), P(n_0 + 1) = P(3), \ldots, P(n)$ αληθεύουν συγχρόνως (η επαγωγική μας υπόθεση). Εάν $n + 1 =$ ένας πρώτος αριθμός, έστω ο p_1, τότε $n + 1 = p_1$ και δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί με άλλο τρόπο. Άρα η $P(n + 1)$ αληθεύει. Αν το $n + 1$ δεν είναι ένας πρώτος αριθμός τότε σπάει ως $n + 1 = n_1 n_2$, όπου $n_1 \geq 2, n_2 \geq 2$ είναι οι παράγοντες του $n + 1$. Από την επαγωγική υπόθεση, ισχύουν οι $P(n_1), P(n_2)$. Οπότε, το $n + 1$ μπορεί να γραφτεί ως ένα γινόμενο πρώτων παραγόντων. Κάθε τέτοιος πρώτος παράγοντας προέρχεται από την (μοναδική) παραγοντοποίηση των n_1 και n_2. Όμως δεν έχουμε ακόμα αποδείξει ότι αυτή η παραγοντοποίηση του $n + 1$ είναι και η μοναδική! Ας υποθέσουμε ότι το $n + 1$ έχει και κάποιο άλλο πρώτο διαιρέτη p που δεν εμφανίζεται στην παραγοντοποίηση των n_1, n_2. Το $n + 1$ γράφεται και ως pa, όπου $a > 1$ είναι κάποιος παράγοντας του $n + 1$. Έχουμε $xp + yn_1 = 1$ και $x'p + y'n_2 = 1$ για κάποιους ακέραιους x, y, x', y' (δείτε το σχόλιο παρακάτω). Οπότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε $zp + yy'n_1 n_2 = 1$, για κάποιο z.

Πολλαπλασιάζοντας ξανά και τα δυο μέλη της τελευταίας ισότητας με το a προκύπτει ότι $z(n + 1) + ayy'(n + 1) = a$. Οπότε το $n + 1$ διαιρεί το a και άρα πρέπει να είναι ίσο ή μικρότερο του. Αυτό όμως δεν γίνεται διότι το $n + 1 = pa$ με $p \geq 2$. Οπότε καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι δυο οποιεσδήποτε παραγοντοποιήσεις του $n + 1$ περιέχουν ακριβώς τους ίδιους πρώτους παράγοντες! Για να τελειώσουμε το παράδειγμα, μένει να δείξουμε ότι κάθε πρώτος παράγοντας p εμφανίζεται σε κάθε παραγοντοποίηση του $n + 1$ ακριβώς το ίδιο πλήθος φορές. Έστω λοιπόν m_1 και m_2 δύο παραγοντοποιήσεις του $n + 1$ σε πρώτους παράγοντες και p ένας πρώτος διαιρέτης του $n + 1$. Οπότε,

$$\frac{m_1}{p} = \frac{m_2}{p} = \frac{n + 1}{p}.$$

Η πρόταση $P((n + 1)/p)$ είναι αληθής, οπότε τα m_1/p και m_2/p έχουν ακριβώς την ίδια (μοναδική) παραγοντοποίηση. Συνεπώς και οι παραγοντοποιήσεις m_1 και m_2 του $n + 1$ είναι ακριβώς οι ίδιες! Έτσι αποδείξαμε το $P(n + 1)$.

Σχολιο 1.0.16. Αν το n_1 είναι γραμμένο ως μοναδικό γινόμενο πρώτων αριθμών και ο πρώτος p δεν είναι κανένας απ' αυτούς τους πρώτους, τότε το p δεν μπορεί να διαιρεί το n_1, διότι τότε θα είχαμε δυο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις για το n_1 (πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση μας $P(n_1)$). Άρα ο ΜΚΔ των p και n_1 είναι ακριβώς το 1. Είναι γνωστό όμως από την Θεωρία Αριθμών ότι αν m είναι ο ΜΚΔ των a, b τότε υπάρχουν κάποιοι ακέραιοι x, y, έτσι ώστε

$$xa + yb = m.$$

Οπότε υπάρχουν κάποιοι ακέραιοι συντελεστές x, y, με την ιδιότητα $xp + yn_1 = 1$ (όμοια ισχύουν και για το n_2).

Η οποιαδήποτε μορφή επαγωγής (στους φυσικούς αριθμούς ή σε ένα διατεταγμένο σύνολο), συσχετίζεται με τον ορισμό του καλά διατεταγμένου συνόλου $E \neq \emptyset$. (Κάνουμε την υπόθεση ότι είναι γνωστό πότε μια διμελής σχέση στο E ονομάζεται *διάταξη* και πότε ολική διάταξη.)

Ορισμος 1.0.17. Έστω $\leq$ είναι μια διάταξη στο E. Το E λέγεται *καλά διατεταγμένο* και η διάταξη $\leq$ *καλή*, αν κάθε μη κενό υποσύνολο A του E έχει ελάχιστο στοιχείο (αναφορικά με την $\leq$). Αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε καλή διάταξη είναι ολική διάταξη του E.

Το παρακάτω θεώρημα συσχετίζει την έννοια της καλής διάταξης με την ισχυρή επαγωγή.

Θεωρημα 1.0.18. *Έστω ότι για την ολική διάταξη $\leq$ του E γνωρίζουμε ότι υπάρχει το ελάχιστο στοιχείο e_0 του E (ως προς την διάταξη αυτή). Τότε ο ισχυρισμός: για όλες τις προτάσεις $P(x)$ αληθεύει ότι*

$$(\forall x \in E)[(\forall y < x\, P(y)) \to P(x)] \to (\forall x \in E)\ P(x)$$

είναι ισοδύναμος με το ότι η $\leq$ είναι καλή διάταξη.

Σχολιο 1.0.19. Με απλά λόγια το θεώρημα λέει αν δεχτούμε ότι ισχύει η ισχυρή επαγωγή για κάθε πρόταση P, τότε η $\leq$ είναι καλή. Αντίστροφα, αν η $\leq$ είναι καλή και για κάθε $x \in E$ έχουμε αποδείξει ότι

$$(\forall y < x\, P(y)) \to P(x),$$

τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $P(x)$ είναι καθολικά αληθινή, δηλαδή $(\forall x \in E)\ P(x)$.

Όμως, η συνεπαγωγή $(\forall y < xP(y)) \to P(x)$ είναι ακριβώς τα δύο βήματα της ισχυρής επαγωγής, όσο και αν αυτό φαίνεται περίεργο!

Το πρωταρχικό βήμα, δηλαδή ότι αληθεύει η $P(e_0)$ είναι λογικά ισοδύναμο με τον ισχυρισμό $(\forall y < e_0P(y)) \to P(e_0)$. Ο ισχυρισμός αυτός για να είναι αληθινός θα πρέπει να αποδείξουμε το $P(e_0)$ από την υπόθεση $(\forall y < e_0P(y))$. Η υπόθεση του ισχυρισμού είναι προφανώς αληθινή, αφού δεν υπάρχει (αυστηρά) μικρότερο στοιχείο από το (ελάχιστο) e_0, που να διαψεύδει την πρόταση P. Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθινός αν και μόνο εάν η πρόταση $P(e_0)$ αληθεύει.

Το επαγωγικό βήμα της ισχυρής επαγωγής είναι ακριβώς το $(\forall y < xP(y)) \to P(x)$, διότι αποδεικνύουμε το $P(x)$ χρησιμοποιώντας ως (επαγωγική) υπόθεση ότι η $P(y)$ αληθεύει για όλες τις τιμές $y \in E$ μικρότερες του x (και μεγαλύτερες ή ίσες του e_0).

Συνεπώς η ισχυρή επαγωγή είναι ένα σωστός τρόπος να αποδεικνύουμε την καθολικότητα κάποιων προτάσεων που αναφέρονται σε κάποιο σύνολο E με την προϋπόθεση ότι το E είναι καλά διατεταγμένο!

Απόδειξη του Θεωρήματος. Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι η $\leq$ είναι μια καλή διάταξη του E και ισχύουν τα δύο βήματα της ισχυρής επαγωγής για την πρόταση P. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $(\forall x \in E)\ P(x)$. Προφανώς υπάρχουν x για τα οποία ισχύει η P. Για παράδειγμα, για $x = e_0$ έχουμε $P(x)$. Ας συγκεντρώσουμε σε ένα σύνολο A όλα τα x για τα οποία επαληθεύεται η P:

$$A = \{x \in E : P(x)\}.$$

Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: Πρώτη περίπτωση $A = E$. Τότε, κάθε στοιχείο x του E ανήκει στο A ή με άλλα λόγια η P είναι πάντα αληθής. Δηλαδή αποδείξαμε το ζητούμενο! Δεύτερη περίπτωση: $A \neq E$, οπότε το συμπλήρωμα του A μέσα στο E, δηλαδή το $A' = E \setminus A$ είναι μη κενό και $e_0 \notin A'$. Αφού το E είναι καλά διατεταγμένο, μπορούμε να βρούμε το $e_1 = \min A'$, δηλαδή το ελάχιστο στοιχείο του A'. Κανένα στοιχείο $x < e_1$ δεν μπορεί να ανήκει στο A', αφού το e_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A'. Συνεπώς ανήκει στο A και άρα δείξαμε ότι $\forall x < e_1 P(x)$. Λόγω του ότι έχουμε υποθέσει ότι ισχύει το επαγωγικό βήμα, προκύπτει ότι $P(e_1)$, δηλαδή $e_1 \in A$. Άρα το e_1 ανήκει και στο A και στο A', πράγμα άτοπο, διότι η τομή $A \cap A'$ είναι το $\emptyset$. Άρα, θα πρέπει να αποκλείσουμε την δεύτερη περίπτωση! Εδώ τελείωσε η μια κατεύθυνση.

Μένει να δείξουμε την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή αν ισχύει η ισχυρή επαγωγή τότε πρόκειται για καλά διατεταγμένο σύνολο. Δουλεύουμε με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι δεν είναι καλά διατεταγμένο, οπότε υπάρχει $A \neq \emptyset$, υποσύνολο του E, που δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Προφανώς $e_0 \notin A$ (διότι διαφορετικά το A θα είχε ελάχιστο στοιχείο). Οπότε $e_0 \in A' = E \setminus A$. Θεωρούμε την πρόταση $P(x) : x \in A'$. Οπότε, δείξαμε ότι αληθεύει η $P(e_0)$. Θα αποδείξουμε τώρα και το επαγωγικό βήμα της ισχυρής επαγωγής για την πρόταση $P(x)$. Έστω ότι αληθεύει

$$\forall y < x\ P(y).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η $P(x)$. Αν δεν αληθεύει η $P(x)$, σημαίνει ότι το x είναι στοιχείο του A. Όμως όλα τα μικρότερα στοιχεία από το x, ικανοποιούν την P και άρα δεν ανήκουν στο A. Συνεπώς, όλα τα στοιχεία $z \in A$ δεν μπορεί να είναι μικρότερα του x, άρα είναι μεγαλύτερά του. Και άρα το x είναι το ελάχιστο στοιχείο του A. Αυτό όμως είναι άτοπο (το A δεν μπορεί να έχει ελάχιστο στοιχείο). Άρα ισχύει η $P(x)$. Από την ισχυρή επαγωγή προκύπτει η καθολικότητα της $P(x)$, ή με άλλα λόγια, όλα τα στοιχεία $x \in E$ ανήκουν στο A'. Οπότε το A είναι το κενό σύνολο, άτοπο! Οπότε το A έχει πράγματι ελάχιστο στοιχείο και άρα το E είναι καλά διατεταγμένο σύνολο!

Σχολιο 1.0.20. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι για $E = \mathbb{N}$ η συνηθισμένη επαγωγή είναι ισοδύναμη με την ισχυρή επαγωγή. Επίσης η γνωστή μας διάταξη $\leq_{\mathbb{N}}$ στους φυσικούς αριθμούς είναι καλή και συνεπώς ισχύει η ισχυρή επαγωγή. Δεν μπορούμε όμως να κάνουμε κάποια επαγωγή σε τυχαίο E π.χ. αν το E είναι το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών διότι δεν έχουμε στα χέρια μας κάποια δεδομένη καλή διάταξη του συνόλου αυτού. Η $\leq_{\mathbb{R}}$ είναι ολική στο E και το ελάχιστο στοιχείο του E είναι το 0, αλλά δεν είναι καλή διάταξη, άρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάποιο σχήμα ισχυρής επαγωγής. Με άλλα λόγια, ακόμα και άν υποθετικά καταφέρουμε να δείξουμε ότι $(\forall y <_{\mathbb{R}} x P(y)) \to P(x)$, για κάθε $x \in E$, αυτό δεν συνεπάγεται ότι η P αληθεύει στο E.

Σχολιο 1.0.21. Το γεγονός ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένο (ως προς την διάταξη $\leq_{\mathbb{N}}$), συνήθως ονομάζεται *αρχή του ελαχίστου αριθμού* (που λέει ότι κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ένα και μοναδικό ελάχιστο στοιχείο). Παράδειγμα: Το σύνολο των αρτίων αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο (το 2), το σύνολο όλων των πρώτων αριθμών $p > 100$ έχει ελάχιστο στοιχείο κοκ. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η αρχή του ελαχίστου αριθμού είναι ισοδύναμη αρχή με την αρχή της επαγωγής για το σύνολο $\mathbb{N}$.

Σχολιο 1.0.22. Το «σύνολο» $A = \{ n :$ έχω n τρίχες στο κεφάλι μου και θεωρούμαι φαλακρός$\}$ αν και θα δεχόμασταν ότι είναι μη κενό, δεν θεωρείται κανονικό υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{N}$. Αν ήταν κανονικό υποσύνολο, τότε θα ήταν παράδοξο να δεχτούμε το $A = \mathbb{N}$ διότι εάν έχω π.χ. ένα δισεκατομμύριο τρίχες δε μπορώ να θεωρώ το κεφάλι μου φαλακρό…Άρα το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι μή κενό! Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή του ελαχίστου αριθμού για το $\mathbb{N} \setminus A$ και να βρίσκαμε το ελάχιστο στοιχείο του m, δηλαδή το ελάχιστο πλήθος τριχών που δεν θεωρούμαι φαλακρός. Όμως τότε προφανώς αν αφαιρέσουμε μια τρίχα ακόμα, πάλι δεν θα θεωρούμαι φαλακρός, δηλαδή $m-1 \in \mathbb{N} \setminus A$ γεγονός που αντίκειται στην αρχή ελαχίστου αριθμού. Συνεπώς το σύνολο A δεν είναι κανονικό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αρχή ελαχίστου για το A ή ισοδύναμα την μαθηματική επαγωγή για να αποδείξουμε την πρόταση P που κρύβεται πίσω από τον ορισμό του A.

Καλά θεμελιωμένες σχέσεις

Ορισμος 1.0.23. Στα μαθηματικά, μια διαδική σχέση R καλείται *καλά θεμελιωμένη* (well-founded) πάνω σε μια κλάση X (=συλλογή από σύνολα), εάν κάθε μη κενό υποσύνολο $S \subseteq X$ έχει ένα *minimal* στοιχείο ως προς τη R, δηλαδή υπάρχει $s \in S$, για το οποίο *δεν* ισχύει $(\exists s \in S) sRm$, με απλά λόγια δεν υπάρχει στοιχείο s του S που να συσχετίζεται από αριστερά με το m μέσω της R (δηλαδή sRm). Ας το γράψουμε ισοδύναμα και με σύμβολα των μαθηματικών:

$$(\forall S \subseteq X)[S \neq \emptyset \rightarrow (\exists m \in S)(\forall s \in S)\neg(sRm)]$$

Είναι σχεδόν προφανές ότι αν η παραπάνω R είναι μια σχέση ολικής διάταξης πάνω σε ένα σύνολο X τότε αυτή είναι καλή διάταξη. Όμως γενικά η έννοια της καλής θεμελιωμένης σχέσης είναι γενικότερη από την έννοια της καλής διάταξης.

Σχολιο 1.0.24. Αν υποθέσουμε το αξίωμα DC (=axiom of dependent choice, αξίωμα της εξαρτημένης επιλογής) το οποίο είναι ασθενέστερο από το AC (αξίωμα επιλογής), τότε μια σχέση R είναι καλά θεμελιωμένη εάν δεν υπάρχει μια αριθμήσιμη αλυσίδα $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από στοιχεία του X η οποία είναι «φθίνουσα» επ' άπειρο:

$$\ldots x_{n+1}Rx_nRx_{n-1}R\ldots Rx_2Rx_1.$$

Ο λόγος που οι καλές θεμελιωμένες σχέσεις είναι σημαντικότατες είναι ότι *συνεπάγονται* την ισχυρή μαθηματική επαγωγή. Πιο συγκεκριμένα: έστω ότι έχουμε μια πρόταση P και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι καθολικά αληθινή, δηλαδή $\forall x \in XP(x)$. Για να το αποδείξουμε, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την *ισχυρή επαγωγή* για την R και το X, δηλαδή να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει:

$$[(\forall y \in X, yRx)P(y)] \rightarrow P(x).$$

Η παραπάνω συνεπαγωγή με απλά λόγια λέει ότι είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την πρόταση P για το x (δηλαδή την $P(x)$) χρησιμοποιώντας ως υπόθεση ότι ήδη έχουμε αποδείξει την $P(y)$ για όλα τα $y \in X$ που συσχετίζονται από τα αριστερά με το x μέσω της σχέσης R (δηλαδή yRx). Φυσικά, αν το x τύχει να είναι minimal τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια τέτοια υπόθεση διότι δεν υπάρχουν y τα οποία είναι R-αριστερά του x. Αυτό όμως δεν μας απαλλάσσει και από την υποχρέωση να αποδείξουμε το $P(x)$! (π.χ. η $P(x)$ θα πρέπει να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του x ή του X)

Παραδειγμα 1.0.25. Θέτουμε $X = \mathbb{N}$ και ορίζουμε την σχέση μας R με τον παρακάτω τρόπο: για κάθε φυσικό $k \geq 1$ που δεν είναι δύναμη του 2 ισχύει: $(k+1)Rk$ και για κάθε $k \geq 2$ που είναι δύναμη του 2 ισχύει: $kR(2k)$. Για παράδειγμα, $2R4, 4R8, 8R16\ldots$ Ακόμα $2R1, 4R3, 8R7, 7R6, 6R5$.

Η R δεν μπορεί να είναι σχέση διάταξης διότι δεν είναι μεταβατική π.χ. ενώ $8R7, 7R6$ δεν προκύπτει από κάπου ότι $8R6$. Η R είναι καλά θεμελιωμένη! Πράγματι, έστω S μη κενό υποσύνολο του X. Αν $2 \in S$, τότε το 2 είναι minimal του S. Αν το X δεν περιέχει το 2 αλλά κάποια άλλη μεγαλύτερη δύναμη του 2, τότε έστω 2^n η μικρότερη δύναμη του 2 που δεν ανήκει στο σύνολο S με την ιδιότητα $2^{n+1} \in S$. Μεταξύ του 2^n και 2^{n+1} υπάρχουν το πολύ πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $2^n < s < 2^{n+1}$ του S. Για κανένα απ' αυτά δεν ισχύει $sR2^{n+1}$, άρα το 2^{n+1} είναι R-minimal. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το S δεν περιέχει δυνάμεις του 2 και έστω m το μικρότερο στοιχείο του. Τότε κάποιο από τα $m+1, m+2, \ldots, 2m$ θα είναι κάποια δύναμη του 2. Συνεπώς, υπάρχει στοιχείο $m' \geq m$ του S με την ιδιότητα $m'+1 \notin S$. Το m' είναι ένα R-minimal του S.

Σχολιο 1.0.26. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι το 2 είναι το μικρότερο R-minimal στοιχείο του X και επίσης για κάθε άλλο φυσικό n υπάρχει μια «αύξουσα» R-αλυσίδα που ξεκινάει από αριστερά με το 2 και τελειώνει στα δεξιά στο n. Για παράδειγμα, αν $n = 18$, τότε η αλυσίδα είναι η

$$2R4, 4R8, 8R16, 16R32, 32R31, 31R30, \ldots, 19R18.$$

Οπότε, αν θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση $P(18)$ για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι η $P(19)$ αληθεύει. Η τελευταία μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ως υπόθεση την $P(20)$, κοκ. προχωράμε ανηφορικά, η $P(31)$ μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ως υπόθεση την $P(32)$. Απ' εδώ και πέρα αρχίζουμε τις δυνάμεις του 2 και κατηφορίζουμε: Η $P(32)$ μπορεί να χρησιμοποιήσει την $P(16)$ ως υπόθεση, η $P(16)$ την $P(8)$ κοκ. και τέλος η $P(4)$ μπορεί να χρησιμοποιήσει ως υπόθεση την $P(2)$. Φυσικά η $P(2)$ πρέπει να αποδειχθεί χωρίς την χρήση κάποιας επιπλέον υπόθεσης της μορφής $P(n), n \neq 2$, διότι το 2 είναι R-minimal στοιχείο!

Οπότε η R μας *κατευθύνει* ως προς τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε για να αποδείξουμε την $P(n)$ για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$. Το ίδιο φυσικά ισχύει για οποιαδήποτε καλά θεμελιωμένη σχέση R πάνω σε ένα μή κενό σύνολο X. Έτσι, αν γνωρίζουμε nRm, και θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση $P(m)$ για κάποιο $m \in X$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως υπόθεση $P(n)$(η $P(n)$ είναι μια από τις επαγωγικές υποθέσεις μας)!

Emmy Noether

Σχολιο 1.0.27. Η ισχυρή επαγωγή για μια καλά θεμελιωμένη σχέση R στο X ονομάζεται και καλά θεμελιωμένη επαγωγή ή *επαγωγή της Noether* προς τιμή της Γερμανού Μαθηματικού Emmy Noether (1882–1935). Για κάθε τέτοια R προκύπτει μια διαφορετική μορφή (version) της επαγωγής. Για παράδειγμα, για την R που αναφέραμε παραπάνω, προκύπτει η εξής μορφή της επαγωγής για την απόδειξη της πρόταση P: Για να αποδείξουμε ότι η P αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκεί να κάνουμε τα παρακάτω βήματα

Βασική περίπτωση (ή βασικό βήμα): αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $P(2)$ αληθεύει.

Επαγωγικό βήμα: (α) Αν η πρόταση $P(2^n), n \geq 1$ αληθεύει τότε αληθεύει και η $P(2^{n+1})$ (αυτό διότι, το μοναδικό στοιχείο που συνδέεται από τα αριστερά με το 2^{n+1}, μέσω της σχέσης R, είναι το 2^n).
(β) Αν η πρόταση $P(k+1)$ αληθεύει, τότε και η $P(k)$ επίσης αληθεύει (αυτό διότι, το μοναδικό στοιχείο που συνδέεται από τα αριστερά με το k, όταν το k δεν είναι δύναμη του 2, είναι το $k+1$).

Αυτό ακριβώς το σχήμα επαγωγής χρησιμοποίησε και ο Cauchy για να αποδείξει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου για τους θετικούς αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_n}{n}.$$

Δεν θα δώσουμε τις λεπτομέρειες της απόδειξης του Cauchy. Απλά να αναφέρουμε ότι η πρόταση $P(n)$ είναι ο ισχυρισμός μας ότι «για κάθε n το πλήθος θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \dots, x_n$ ισχύει η παραπάνω ανισότητα». Λεπτομέρειες της απόδειξης μπορούμε να βρούμε σε κάποια βιβλία ανάλυσης ή στο διαδίκτυο για παράδειγμα στον διπλανό δεσμό.

δεσμός

Αναδρομικοί ορισμοί και δομική επαγωγή.

Μια καλή θεμελιωμένη σχέση μας δίνει την δυνατότητα να ορίζουμε (=κατασκευάζουμε) αντικείμενα χρησιμοποιώντας αναδρομή, δηλαδή αυτοαναφορά. Για να γίνουμε πιο σαφείς, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια καλή θεμελιωμένη σχέση R πάνω σε μια κλάση X από σύνολα, με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in X$ η συλλογή $\{m \in X : mRx\}$ είναι ένα (κανονικό) σύνολο, το οποίο μάλιστα λέγεται *αρχικό τμήμα* του X. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η $F(x, g)$ είναι μια συνάρτηση 2 μεταβλητών με πεδίο τιμών ένα σύνολο Y. Η πρώτη μεταβλητή x παριστάνει ένα τυχαίο στοιχείο του X, ενώ η δεύτερη g είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το αρχικό τμήμα $\{m \in X : mRx\}$ του X και τιμές μέσα στο Y. Τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση G με πεδίο ορισμού το X, έτσι ώστε η G να ορίζεται *αναδρομικά* δηλαδή

$$G(x) = F(x, G\restriction_{\{m \in X : mRx\}}).$$

Με απλά λόγια, ο ορισμός της $G(x)$ εξαρτάται από την δοθέν συνάρτηση F και από το περιορισμό της G στο αρχικό τμήμα $\{m \in X : mRx\}$.

Σχολιο 1.0.28. Εάν το x είναι R-minimal, τότε προφανώς $\{m \in X : mRx\} = \emptyset$, οπότε $G\restriction_{\emptyset} = \emptyset$ και η τιμή $G(x)$ είναι ίση με $F(x, \emptyset)$, δηλαδή εξαρτάται αποκλειστικά από τον ορισμό της F. Αν το x δεν είναι R-minimal, τότε η τιμή της $G(x)$ έχει μέσα της *αυτοαναφορά* διότι για την εύρεσή της δεν αρκεί να γνωρίζουμε το x αλλά χρειάζεται και η γνώση των τιμών $G(m)$ για mRx.

Παραδειγμα 1.0.29. Ας υποθέσουμε ότι $X = \mathbb{N}$ και η R είναι μια σχέση για την οποία ισχύει $nR(n+1)$ για κάθε $n \in X$. Η R είναι προφανώς καλά θεμελιωμένη. Κάθε $n > 1$ συσχετίζεται με ένα μοναδικό n^- από τα αριστερά του: $n^- R n$ (προφανώς $n^- = n-1$). Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση F στο $(1, \emptyset)$ δίνει την τιμή 5 και στο ζεύγος $(n, g), n > 1$ δίνει την τιμή $1 + g(n-1)$. Είναι προφανές ότι μέσω της F *ορίζεται* η αναδρομική συνάρτηση $G(1) = 5$, $G(n) = 1 + G(n-1)$, για $n > 1$ (και με τιμές, 6,7,8,...).

Άλλο παράδειγμα:

Παραδειγμα 1.0.30. Έστω $X = (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ και η σχέση R ορίζεται ως $(b \bmod a, a)R(a, b)$ για $0 < a \leq b$ και $(b, a)R(a, b)$ για $a > b$. Η R είναι καλά θεμελιωμένη (γιατί;). Έστω $F((0, b), \emptyset) = b$. Ακόμα, αν το ζεύγος (x, y) είναι διαφορετικό από το κάποιο ζεύγος της μορφής $(0, b)$, τότε ορίζουμε $F((x, y), g) = g((x, y)^-)$ όπου με $(x, y)^-$ παριστάνουμε το *μοναδικό* ζεύγος για το οποίο ισχύει $(x, y)^- R(x, y)$. Με βάση τα παραπάνω, υπάρχει μοναδική συνάρτηση G έτσι ώστε για κάθε $b \geq 0$ έχουμε $G((0, b)) = b$ και για κάθε άλλο ζεύγος (x, y) έχουμε $G((x, y)) = G((x, y)^-)$. Ίσως είναι δύσκολο να αναγνωρίσουμε τι κρύβεται πίσω από αυτήν την αναδρομή. Ας κάνουμε ένα απλό παράδειγμα: $G((7, 3)) = G((3, 7)) = G((7 \bmod 3, 3)) = G((1, 3)) = G((3 \bmod 1, 1)) = G((0, 1)) = 1$. Το G ορίζεται κατάλληλα έτσι ώστε να υπολογίζει το ΜΚΔ των αριθμών (a, b) με αναδρομικό τρόπο!

Μπορούμε εκτός από συναρτήσεις να ορίσουμε αναδρομικά και σύνολα από αντικείμενα.

Παραδειγμα 1.0.31. Έστω $X = \mathbb{N}$ και $R =$ η γνωστή μας σχέση $\leq = \leq_{\mathbb{N}}$. Είναι προφανές ότι η R είναι καλά θεμελιωμένη. Ορίζουμε μια «περίεργη» F με τιμές κάποια υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Ορίζουμε $F(1, \emptyset) = \{2\}$ και $F(n, g) = g(n-1) \cup \sum g(n-1), n > 1$ όπου με $\sum g(n-1)$ ορίζουμε το σύνολο που παίρνουμε όταν προσθέσομε τα στοιχεία του $g(n-1)$ *ανά δύο*. Η G που θα προκύψει κατασκευάζει αναδρομικά το σύνολο A όλων των αρτίων φυσικών. Για παράδειγμα,

$$G(1) = \{2\}, G(2) = \{2, 4\}, G(3) = \{2, 4, 6\}, G(4) = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Η ένωσή των $G(n)$ είναι ακριβώς το A. Δηλαδή το σύνολο A έχει ορισμό

$$m \in A \text{ ανν } \exists n \in X (m \in G(n))$$

Γενικά, μέσω μιας κατάλληλης αναδρομικής συνολο- συνάρτησης G μπορούμε να ορίσουμε σπουδαία σύνολα (όπως το A παραπάνω) τα οποία λέμε ότι έχουν οριστεί *αναδρομικά*. Τα στοιχεία των αναδρομικών συνόλων κατασκευάζονται είτε στο πρώτο βήμα (στην περίπτωσή μας το $G(1)$) είτε σε επόμενα ($G(n), n > 1$). Για τα δεύτερα στοιχεία χρησιμοποιούμε οπωσδήποτε κάποιο κανόνα κατασκευής (η F κρύβει τον κανόνα ή τους κανόνες κατασκευής του υπό κατασκευή συνόλου).

Σχολιο 1.0.32. Συνήθως χρησιμοποιούμε ένα απλουστευμένο τρόπο να ορίζουμε αναδρομικά σύνολα, χωρίς να μπαίνουμε στο κόπο να περιγράφουμε με λεπτομέρειες ποια είναι τα X, R, F ή η G. Για παράδειγμα, το παραπάνω σύνολο περιγράφεται απλά ως $2 \in A$, και $a \in A, b \in A \to a + b \in A$. Το αρχικό βήμα (εδώ είναι το $2 \in A$) αποτελείται από όλα τα *βασικά στοιχεία* με τα οποία ξεκινάει το αναδρομικό «κτίσιμο» του σύνολου. Το επαγωγικό βήμα (π.χ. $a \in A, b \in A \to a + b \in A$) αποτελείται από όλους εκείνους τους *κανόνες* με τους οποίους κατασκευάζουμε νέα στοιχεία του αναδρομικού συνόλου από κάποια άλλα που έχουν ήδη κατασκευαστεί (στην περίπτωσή μας, έχουμε μόνο ένα κανόνα: το άθροισμα 2 ήδη κατασκευασμένων στοιχείων του A είναι ένα νέο στοιχείο του A).

Σχολιο 1.0.33. Όμοια, συνήθως δεν είναι ξεκάθαρο ποιά στοιχεία ανήκουν σε ένα σύνολο που έχει κτιστεί αναδρομικά. Η μέθοδος της επαγωγής είναι ιδιαίτερη χρήσιμη σε αυτές τις περιπτώσεις.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλουμε να δείξουμε την πρόταση $P(n)$ για κάθε $n \in A$. Αφού το A έχει ορισθεί (=κατασκευαστεί) αναδρομικά θα υπάρχουν τα βασικά στοιχεία του και αυτά που κατασκευάζονται σε κάποιο επαγωγικό βήμα. Οπότε πρώτα θα αποδείξουμε την $P(m)$ για όλα τα βασικά $m \in A$. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την $P(m)$, για όλα τα m που ανήκουν σε κάποιο βήμα $G(n)$ της κατασκευής, έχοντας υποθέσει ότι αληθεύει η $P(m)$ για όλα τα m του «προηγούμενου» βήματος κατασκευής του A. Το βήμα n είναι τυχαίο και δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο στην επαγωγική απόδειξη.

Η παραπάνω επαγωγή που κάνουμε σε σύνολα που έχουν οριστεί αναδρομικά λέγεται δομική.

Ορισμος 1.0.34. Έστω $P(n)$ μια πρόταση την οποία θέλουμε να την επαληθεύσουμε για όλα τα στοιχεία $n \in A$ ενός *αναδρομικά* ορισμένου συνόλου A. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω μορφή επαγωγής ή οποία ονομάζεται και *structural* (=δομική) επαγωγή:

(α) Αρχικό βήμα: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση $P(m)$ αληθεύει για κάθε m βασικό στοιχείο του A

(β) Επαγωγικό βήμα: Αποδεικνύουμε την $P(m)$ για κάθε $m \in A$ που προέρχεται από κάποια άλλα στοιχεία m_1 του A με χρήση κάποιου κατασκευαστικού κανόνα του ορισμού του A, και με τις επιπλέον υποθέσεις $P(m_1)$ για κάθε στοιχείο $m_1 \in A$ που εμπλέκεται στην κατασκευή που m.

Θα δούμε αμέσως ένα παράδειγμα.

Παραδειγμα 1.0.35. Θα δείξουμε ότι το σύνολο A που ορίσαμε παραπάνω αναδρομικά αποτελείται μόνο από άρτιους αριθμούς. Το $P(m)$ είναι η πρόταση «το m είναι ένας άρτιος» (α) Αρχικό βήμα. Το 2 είναι το μοναδικό βασικό στοιχείο του A και προφανώς είναι άρτιος (β) Στο επαγωγικό βήμα χρησιμοποιούμε τον κανόνα κατασκευής νέων στοιχείων: το m είναι το άθροισμα δυο στοιχείων m_1, m_2 του A για τα οποία έχουμε υποθέσει τις $P(m_1)$ και $P(m_2)$. Άρα τα m_1, m_2 είναι άρτιοι και συνεπώς και το $m = m_1 + m_2$ είναι όμοια άρτιο. Άρα αποδείξαμε το ζητούμενο: $P(m)$.

Ισχύει και το αντίστροφο. Κάθε άρτιος αριθμός ανήκει στο σύνολο A. Και αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά χρησιμοποιώντας την απλή επαγωγή στο σύνολο $\mathbb{N}$. Ορίζουμε $P(n) : 2n \in A$. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι ισχύει η $P(1)$. Όσο αφορά το επαγωγικό βήμα, ζητάμε να δείξουμε την $P(n+1) : 2(n+1) \in A$. Όμως από $P(n)$ έχουμε $2n \in A$. Και από τους κανόνες κατασκευής του A προκύπτει $2n + 2 \in A$. Έτσι, χωρίς ιδιαίτερο κόπο αποδείξαμε την $P(n+1)$ από την $P(n)$.

Οπότε, συμπερασματικά το αναδρομικό σύνολο A είναι ακριβώς το σύνολο όλων των αρτίων αριθμών!

Θα δώσουμε άλλο ένα παράδειγμα κατασκευής ενός αναδρομικού συνόλου, μιας αναδρομικής συνάρτησης και μιας δομικής επαγωγής.

Παραδειγμα 1.0.36. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο Σ που τα στοιχεία του θα τα λέμε γράμματα και το Σ θα το λέμε αλφάβητο. (Για παράδειγμα $\Sigma = \{0, 1\}$). Μπορούμε να φτιάχνουμε λέξεις από τα γράμματα με απλή επικόλληση γραμμάτων σε μια λέξη από τα δεξιά. (π.χ. με επικόλληση του 0 στο 0 παίρνουμε την λέξη [00]. Όμοια, με νέες επικολλήσεις γραμμάτων μπορούμε να πάρουμε τις [001], [0011] κοκ.) Το σύνολο όλων των λέξεων Σ^* ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

Βασικό βήμα: η κενή λέξη (ας την συμβολίσουμε [ ]) ανήκει στο Σ^*. Αν $\lambda \in \Sigma$ τότε η $[\lambda] \in \Sigma^*$.

Επαγωγικό βήμα: Αν $x \in \Sigma^*$ και $y \in \Sigma^*$ τότε μπορούμε να τις επικολλήσουμε και να πάρουμε μια νέα λέξη: $x * y \in \Sigma^*$.

Σχολιο 1.0.37. Η πράξη * της επικόλλησης μεταξύ δύο λέξεων, αν και φαίνεται διαισθητικά ιδιαίτερα απλή, (πχ. η επικόλληση της λέξης m_1 με την m_2 είναι απλά μια μεγαλύτερη λέξη $m_1 m_2$ που προέρχεται από την m_1 με την προσθήκη όλων των γραμμάτων της m_2 δεξιά από το δεξιότερο γράμμα της m_1) δεν είναι τόσο απλό να ορισθεί και χρειάζεται να κατασκευαστεί ένας κατάλληλος αναδρομικός ορισμός που περιγράφει την παραπάνω πράξη, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προφανείς συνθήκες, όπως π.χ. $m_1 * [\ ] = m_1 = [\ ] * m_1$ και $m_1 * (m_3 * m_4) = (m_1 * m_3) * m_4$ για τυχαίες λέξεις m_1, m_3, m_4.

Θα ορίσουμε τώρα μια κατάλληλη αναδρομική συνάρτηση L. Θέτουμε $X = \Sigma^*$ και ορίζουμε την σχέση R για δύο λέξεις m_1, m_2 ως εξής: $m_1 R m_2$ ανν η m_2 προκύπτει από την m_1 με επικόλληση ενός γράμματος από δεξιά του m_1. Η R είναι καλά θεμελιωμένη και για κάθε $m \neq [\ ]$ στοιχείο του Σ^* υπάρχει μοναδική λέξη m^- έτσι ώστε $m^- R m$. Ο κανόνας F είναι πολύ απλός. $F([\ ], \emptyset) = 0$ και $F(m, g) = 1 + g(m^-)$. Οπότε, με βάση αυτά που αναφέραμε περί αναδρομικών ορισμών, υπάρχει μοναδική αναδρομική συνάρτηση, ας την πούμε L, έτσι ώστε $L([\ ]) = 0$ και $L(\lambda * [x]) = 1 + L(\lambda)$ για κάθε $x \in \Sigma$.

Παραδειγμα 1.0.38. Η $L(x)$ είναι το *μήκος* της λέξης $x \in \Sigma^*$. Παράδειγμα:

$$L([0011]) = 1 + L([001]) = 2 + L([00]) = 3 + L([0]) = 4 + L([\ ]) = 4.$$

Το μήκος $L([0011])$ είναι ίσο με 4 που είναι ίσο με $2 + 2 = L([00]) + L([11])$. Είναι διαισθητικά ορθό ότι $L(m_1 * m_2) = L(m_1) + L(m_2)$ για τυχαίες λέξεις m_1, m_2. Όμως χρειάζεται τη *δομική επαγωγή* για να το αποδείξουμε.

Παραδειγμα 1.0.39. Ορίζουμε την πρόταση

$$P(m) : (\forall m_1 \in \Sigma^*) L(m_1 * m) = L(m_1) + L(m).$$

Θα δείξουμε με δομική επαγωγή ότι η $P(m)$ αληθεύει για κάθε λέξη $m \in \Sigma^*$.

(α) Αρχικό βήμα: Έστω $m = [\ ]$. Τότε $P([\ ]) : L(m_1 * [\ ]) = L(m_1) + L([\ ])$ που αληθεύει διότι $m_1 * [\ ] = m_1$ και $L([\ ]) = 0$. Αν $m = [x], x \in \Sigma$, τότε $P([x]) : L(m_1 * [x]) = L(m_1) + L([x])$. Όμως $L([x]) = L([\ ] * [x]) = 1 + L([\ ]) = 1 + 0 = 1$ οπότε η $P([x])$ είναι η $L(m_1 * [x]) = 1 + L(m_1)$ που ισχύει λόγω των ιδιοτήτων της L.

(β) Επαγωγικό βήμα. Έστω $m = m_3 * m_4$ και ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι προτάσεις $P(m_3), P(m_4)$. Θα αποδείξουμε την $P(m) : \forall m_1 \in \Sigma^* : L(m_1 * (m_3 * m_4)) = L(m_1) + L(m_3 * m_4)$. Έστω λοιπόν m_1 μια τυχαία λέξη. Έχουμε από τις ιδιότητες της $*$: $m_1 * (m_3 * m_4) = (m_1 * m_3) * m_4$. Οπότε, $L(m_1 * (m_3 * m_4)) = L((m_1 * m_3) * m_4)$ και λόγω της $P(m_4)$ έχουμε $L((m_1 * m_3) * m_4) = L(m_1 * m_3) + L(m_4)$. Από $P(m_3)$ προκύπτει: $L(m_1 * m_3) = L(m_1) + L(m_3)$. Οπότε, $L(m_1 * (m_3 * m_4)) = L(m_1) + L(m_3) + L(m_4)$. Τέλος από $P(m_4)$ έχουμε $L(m_3) + L(m_4) = L(m_3 * m_4)$ και έτσι αποδείχτηκε η ζητούμενη πρόταση $P(m)$.

Έλεγχος ορθότητας αλγορίθμων.

Στο τελευταίο μέρος της ομιλίας θα περιγράψουμε μια σπουδαία εφαρμογή της δομικής επαγωγής στον έλεγχο ορθότητας των αλγορίθμων. Ένα βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι προγραμματιστές είναι αν ο αλγόριθμος τους δουλεύει σωστά και επιπλέον αν θα τερματίσει και θα βγάλει την επιζητούμενη έξοδο (δηλαδή το αποτέλεσμα που προσδοκούν). Ας δούμε ένα κλασσικό παράδειγμα ενός αλγορίθμου που παράγει το $n!$ (το παραγοντικό) για $n \geq 1$.

```
int prod=1;
for(int k=1; k<=n; k++)
 prod*=k;
 return prod;
```

Ορισμος 1.0.40. Οι εντολές for και while είναι οι πιο γνωστές εντολές του προγραμματισμού για την κατασκευή ενός loop. *Loop* στον προγραμματισμό σημαίνει βρόχος, δηλαδή μια ακολουθία από εντολές που εκτελείται επαναληπτικά *κάμποσες φορές*. Οι εντολές αυτές βρίσκονται στο εσωτερικό του loop και λέγονται το *σώμα* του loop. Το πλήθος των φορών εξαρτάται από κάποια συνθήκη, η οποία γράφεται πάντοτε στην αρχή του loop πριν την περιγραφή των εσωτερικών εντολών του loop. Για το παραπάνω παράδειγμα, η συνθήκη στην περίπτωσή μας είναι η $k <= n$. Οι εντολές του εσωτερικού του loop είναι ο υπολογισμός του $prod* = k$. Αυτές εκτελούνται συνεχώς (κυκλικά). Στον αρχικό κύκλο έχουμε ορίσει $k = 1$ (αυτό δηλώνεται με το int $k = 1$), ελέγχεται η συνθήκη $k \leq n$ και αν είναι αληθινή (που είναι, διότι $n \geq 1 = k$) εκτελείται το σώμα (οι εντολές κάτω από το for). Σε κάθε νέο κύκλο το k αυξάνει κατά 1 (αυτό παριστάνει η εντολή $k++$), γίνεται έλεγχος της συνθήκης για το (νέο) k, και άν αυτή είναι αληθινή τότε το $prod$ αυξάνει κατά k πολλαπλάσιο του τρέχοντος $prod$, δηλαδή $prod = prod * k$, αυτό ακριβώς περιγράφει η εντολή $prod* = k$ (Η ισότητα στον προγραμματισμό, πχ. $prod = 1$ σημαίνει ότι αναγκάζεται η μεταβλητή $prod$ να πάρει την τιμή που βρίσκεται στα δεξιά του $=$ δηλαδή 1. Άρα η $=$ *δεν είναι σύμβολο σύγκρισης* δυο ποσοτήτων, αλλά αντικατάστασης!). Εδώ τελειώνει και ο τρέχον κύκλος και ξεκινάει ένας νέος.

Στο παραπάνω παράδειγμα, η συνθήκη παραμένει αληθινή όταν η τιμή του k είναι το πολύ ίση με n. Όσο η συνθήκη αυτή παραμένει αληθινή, τόσο επαναλαμβάνονται οι κύκλοι, δηλαδή ο υπολογισμός του $prod$. Αν η συνθήκη γίνει *ψευδής* (εδώ όταν η τιμή της μεταβλητής k ξεπεράσει το n) τότε έχουμε ως αποτέλεσμα το βίαιο σταματημό των εντολών του loop και την έξοδο απ' το loop. Έκτοτε δεν πρόκειται να αλλάξει άλλο η τιμή της $prod$. Στο παραπάνω παράδειγμα, μετά την έξοδο απ' το loop μας, *επιστρέφεται* (return) η τελική τιμή της prod όπως αυτή έχει διαμορφωθεί κατά την διάρκεια εκτέλεσης των εντολών του σώματος του loop. Αυτή είναι η *έξοδος* (το αποτέλεσμα που προκύπτει από το loop).

Ορισμος 1.0.41. Μια *loop invariant* είναι μια πρόταση που περιγράφει την μαθηματική σχέση μεταξύ των μεταβλητών που εντοπίζονται στο σώμα του loop και έχει την ιδιότητα να είναι αληθινή πριν αλλά και μετά από ένα οποιοδήποτε κύκλο, δηλαδή πριν και μετά την εκτέλεση των εντολών του σώματος του loop.

Για παράδειγμα, για το παραπάνω loop μια loop invariant είναι η πρόταση

$$P((k, prod)) : prod = k!$$

Όπως βλέπουμε η πρόταση P εξαρτάται από 2 μεταβλητές $k, prod$ οι οποίες εμφανίζονται στο σώμα του loop του for. Για να αποδείξουμε ότι είναι loop invariant θα πρέπει να αποδείξουμε ότι παραμένει αληθινή σε όλους τους κύκλους του loop έως ότου το loop τερματίσει. Με άλλα λόγια θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$(\forall (k, prod) \in A) P((k, prod)).$$

Το A είναι το αναδρομικό σύνολο που *κτίζεται* κατά την διάρκεια του loop. Περιλαμβάνει όλες τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται στο loop.

Το A στην περίπτωσή μας εξαρτάται από την τιμή του n. Τα βασικά του στοιχεία είναι μόνο ένα, το $(1, 1)$. Έχουμε και ένα μόνο κανόνα κατασκευής: Αν $k < n$ και $(k, prod) \in A$ τότε $(k + 1, prod * (k + 1)) \in A$. Οπότε το A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων, αφού η πρώτη συντεταγμένη k κάθε ζεύγους του A δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το n.

Δείχνουμε την πρόταση P με την μέθοδο της δομικής επαγωγής:

Αρχικό βήμα: Για $k = 1$ και $prod = 1$ βρισκόμαστε στο τέλος του πρώτου κύκλου του loop. Προφανώς ισχύει $prod = k!$.

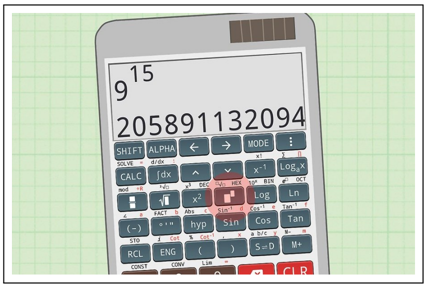
Επαγωγικό βήμα: Έστω $(k, prod) \in A$ δεν είναι το βασικό. Κατά συνέπεια υπάρχει ένα ζεύγος $(k', prod')$ έτσι ώστε $k = k' + 1$ και $prod = prod' * (k' + 1)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης $P((k', prod'))$, έχουμε $prod' = k'!$ και κατά συνέπεια $prod = k'! * k = (k - 1)! * k = k!$ Με άλλα λόγια, στο τέλος του k κύκλου το $prod$ είναι ίσο με το $k!$

Άρα σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής, η P αληθεύει για κάθε στοιχείο του A. Συνεπώς πράγματι, ο αλγόριθμος είναι σωστός και κατά την έξοδό του παίρνουμε το $n!$, διότι στο τελευταίο κύκλο το k έχει πάρει (τελευταία) τιμή n.

Το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζει το a^n, για δοσμένο a και n είναι ένας μή αρνητικός ακέραιος, με πολύ γρήγορο τρόπο!

Παραδειγμα 1.0.42. (Γρήγορος υπολογισμός του εκθετικού).

```
int x=a,y=n,z=1;
while(y>0)
 if(y%2==0){
  x*=x; y=y/2;}
  else {
  y-=1;z*=x;}
return z;
```



Εδώ φυσικά, ίσως χρειάζεται να κάνουμε κάποιες διευκρινήσεις. Η εντολή while έχει την γενική μορφή

```
[precondition]
while(guard)
loop-body
return value;
```

όπου στο precondition ορίζουμε τις αρχικές τιμές κάποιων μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν στο loop, με guard συμβολίζομαι την συνθήκη που πρέπει να πληρούται ώστε να μπορεί να επαναληφθεί το σώμα του loop (loop-body) και με value συμβολίζουμε την έξοδο που δίνει το loop όταν τερματίσει.

Σχολιο 1.0.43. Βέβαια, σε αυτή τη μορφή του loop, μπορεί δυστυχώς το guard να είναι σε κάθε βήμα (δηλαδή απεριόριστα) αληθινό, και κατά συνέπεια να επαναλαμβάνεται ξανά και ξανά το σώμα των εντολών που βρίσκεται μέσα στο loop-body και με αποτέλεσμα να μην σταματάει ποτέ ο αλγόριθμος!

Το == ελέγχει αν το αριστερό μέλος είναι ίσο με το δεξιό, δηλαδή το == είναι η γνωστή μας ισότητα των μαθηματικών! Το $y\%2$ βρίσκει το υπόλοιπο της διαίρεσης του y με το 2, οπότε αν το y είναι ένας άρτιος τότε $y\%2$ μας κάνει 0 άρα η ισότητα $y\%2 == 0$ θα είναι αληθινή! Αν όμως το y είναι ένας περιττός τότε θα έχουμε 1==0, δηλαδή η ισότητα θα είναι ψευδής! Συνεπώς, μέσα στο σώμα του loop περιγράφονται οι παρακάτω εντολές: Εάν (if) το y είναι άρτιο τότε αντικατέστησε το x με το τετράγωνό του (δηλαδή $x* = x$) και μείωσε το y στο μισό ($y = y/2$), διαφορετικά (else) θέσε $y = y - 1$ (αυτό δηλώνει η εντολή αντικατάστασης $y- = 1$) και πολλαπλασίασε την τρέχουσα τιμή του z κατά x, δηλαδή $z = z * x$ (αυτό περιγράφεται συνοπτικά ως $z* = x$).

Το loop-invariant θα πρέπει να μας εξασφαλίσει ότι όχι μόνο θα σταματήσει το loop, αλλά και επιπλέον η έξοδος (value) είναι αυτή ακριβώς που θέλουμε!

Για το παραπάνω πρόγραμμά μας ορίζουμε ως loop-invariant την πρόταση

$$P(x, y, z) : zx^y = a^n.$$

Θα αποδείξουμε με δομική επαγωγή ότι

$$(\forall (x, y, z) \in A) P(x, y, z),$$

όπου το σύνολο A κτίζεται αναδρομικά με τον παρακάτω ορισμό:

- Βασικά στοιχεία: $(a, n, 1) \in A$
- Κανόνες κατασκευής: Αν $(x, y, z) \in A$ και $y > 0$ άρτιος, τότε $(x^2, \frac{y}{2}, z) \in A$. Αν όμως το y είναι περιττός, τότε $(x, y-1, zx) \in A$.

Η δομική επαγωγή αποτελείται από δύο βήματα:

(α) Στο αρχικό βήμα αποδεικνύουμε ότι αληθεύει η $P((a, n, 1))$, δηλαδή $1a^n = a^n$ που προφανώς ισχύει!

(β) Στο επαγωγικό βήμα, αποδεικνύουμε την $P((x, y, z))$ για τυχαίο $(x, y, z) \in A$ μή βασικό. Χωρίζουμε σε δύο περιπτώσεις.

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει άρτιος $b > 0$ και μια τριάδα $(x_1, b, z) \in A$ έτσι ώστε $x = x_1^2, y = \frac{b}{2}$. Από την επαγωγική μας υπόθεση έχουμε ότι ισχύει η $P((x_1, b, z))$, οπότε $zx_1^b = a^n$. Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε $zx^y = z(x_1^2)^{(b/2)} = zx_1^b = a^n$ και αποδείξαμε την $P((x, y, z))$.

Στην δεύτερη περίπτωση, υπάρχει περιττός $b > 0$ και μια τριάδα

$$(x, b, z_1) \in A \text{ με } y = b-1, z = z_1x.$$

Από επαγωγική υπόθεση, $z_1b^x = a^n$. Οπότε, $zx^y = z_1xx^{b-1} = z_1x^b = a^n$ και έτσι ξανά αποδείξαμε την $P((x, y, z))$.

Το loop θα σταματήσει, διότι όπως παρατηρούμε η τιμή της μεταβλητής μειώνεται στο εσωτερικό του loop τουλάχιστον κατά 1 σε κάθε κύκλο. Οπότε κάποια στιγμή θα γίνει 0 και έτσι η συνθήκη (guard) $y > 0$ θα πάψει να είναι αληθινή. Στο τέλος κάθε κύκλου προκύπτει μια νέα τριάδα $(x, y, z) \in A$ με $y \geq 0$. Μετά όμως τον τελευταίο κύκλο θα έχει προκύψει η τριάδα $(x, 0, z) \in A$. Από την $P((x, 0, z))$ έχουμε ότι $zx^0 = a^n$ ή με άλλα λόγια $z = a^n$ και άρα πράγματι η έξοδος (return) είναι το ζητούμενο εκθετικό!

Σχολιο 1.0.44. Δεν απαιτούνται πολλές πράξεις όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Για $a = 9, n = 15$, παίρνουμε στο τέλος του πρώτου κύκλου $z = 9, y = 14$. (Το $x = 9$ από τις αρχικές συνθήκες). Στο τέλος του δευτέρου κύκλου έχουμε $x = 81, y = 7$ Στο τέλος του τρίτου κύκλου έχουμε $y = 6, z = 9 * 81 = 729$. Στο τέλος του τετάρτου $y = 3, x = 81^2 = 6561$. Στο τέλος του πέμπτου $y = 2, z = 729 * 6561 = 4.782.969$ στο τέλος του 6ου $y = 1, x = 6561^2 = 43.046.721$ Το τελευταίο βήμα αφήνεται στον/στην αναγνώστη/τρια. (Σημείωση: Το αποτέλεσμα που δείχνει η εικόνα παραπάνω δεν είναι σωστό. Το κομπιουτεράκι δεν μπόρεσε να μας δείξει όλα τα ψηφία, λόγω της μικρής οθόνης...)

Ομιλία 2

Μια εισαγωγή στα απειρογινόμενα

Νίκος Δαφνής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
nikdafnis@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

2.1 Εισαγωγή

Θέλουμε να μελετήσουμε το άπειρο γινόμενο των όρων μιας ακολουθίας πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών $(u_n)_{n=0}^{\infty}$. Συμβολίζουμε, κατ' αναλογία με τα άπειρα αθροίσματα (σειρές), το *απειρογινόμενο* της ακολουθίας $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdots ,$$

το οποίο θέλουμε, να ισούται με το όριο $\lim\limits_{N\to\infty} p_N$, της ακολουθίας των *μερικών γινομένων* της $(u_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$p_N := \prod_{n=0}^{N} u_n = u_0 \cdot u_1 \cdots u_N,$$

όταν βέβαια αυτό το όριο υπάχει.

Ας δούμε τρία παραδείγματα ακολουθιών $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, των οποίων τα άπειρα γινόμενα, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, συγκλίνουν στο μηδέν.

(1) Έστω ότι η $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ έχει πεπερασμένο πλήθος από μηδενικούς όρους, δηλαδή υπάρχει ενα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $u_n \neq 0$, για κάθε $n > n_0$. Τότε, προφανώς θα έχουμε ότι

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0.$$

(2) Έστω ότι η $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ έχει άπειρο πλήθος από μηδενικούς όρους, δηλαδή υπάρχει υπακολουθία $(u_{k_n})_{n=0}^{\infty}$ ώστε $u_{k_n} = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, και πάλι θα έχουμε ότι $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0$.

(3) Στο τρίτο παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ βρίσκονται μακριά κάτω από το 1. Δηλαδή, υπάρχουν $\varepsilon \in (0,1)$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|u_n| \leq \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$. Τότε και πάλι

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} P_N = 0$$

Είθισται, για τεχνικούς λόγους, οι δυο τελευταίες περιπτώσεις (2) και (3), να μην συμπεριλαμβάνονται στον ορισμό της σύγκλιση (στο 0) και να μελετούνται ξεχωριστά, όταν χρειάζεται.

Ο λόγος για αυτήν την κάπως ασυνήθιστη σύμβαση, είναι γιατί με αυτόν τον τρόπο η ανάπτυξη της θεωρίας των απειρογινομένων, δομείται παράλληλα και αντίστοιχα με αυτή των σειρών, δίνοντάς μας τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε απρόσκοπτα την εργαλειοθήκη των σειρών για τη μελέτη των απειρογινιμένων, αλλά και αντιστρόφως.

2.2 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμος 2.2.1. Έστω ότι η $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Θα λέμε ότι το *απειρογινόμενο* $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ *συγκλίνει*, αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(Γ1) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $u_n \neq 0$ για κάθε $n > n_0$.

(Γ2) Η ακολουθία των *μερικών γινομένων* από το n_0 και πάνω

$$p_N(n_0) := \prod_{n=n_0+1}^{N} u_n = u_{n_0+1} \cdots u_N\,, \quad N > n_0,$$

συγκλίνει (σε ένα μη μηδενικό όριο) $\lim_{N\to\infty} p_N(n_0) := p(n_0) \neq 0$.

Σε αυτήν την περίπτωση, το απειρογινόμενο έχει την τιμή

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \prod_{n=0}^{n_0} u_n \cdot \lim_{N\to\infty} p_N(n_0) \tag{2.1}$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση λέμε ότι το απειρογινόμενο *αποκλίνει*.

Παρατηρήστε, ότι στο παράδειγμα (2) προηγουμένως δεν ικανοποιείται η συνθήκη (Γ1), ενώ στο παράδειγμα (3) είναι $\lim_{N\to\infty} p_N(n_0) = 0$ και άρα δεν ικανοποιείται η (Γ2). Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό και για τα δύο απειρογινόμενα λέμε ότι *αποκλίνουν στο* 0.

Το πρώτο που πρέπει να ελέγξουμε είναι ότι ο Ορισμός 2.2.1 είναι καλός και η τιμή του απειρογινομένου δεν εξαρτάται από την επιλογή του n_0 στη συνθήκη (Γ1). Πράγματι, αν θέσουμε

$$n_0 = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : u_n = 0\}, & \text{αν} \quad \exists n \in \mathbb{N} : u_n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

τότε για κάθε άλλο $n_1 \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την (Γ1), θα ισχύει ότι $n_1 > n_0$ και $p_N(n_0) = \prod_{n=n_0+1}^{n_1} u_n \cdot p_N(n_1)$, για κάθε $N > n_1 > n_0$. Οπότε,

$$\lim_{N\to\infty} p_N(n_0) = \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=n_0+1}^{n_1} u_n \cdot p_N(n_1) \right) = \prod_{n=n_0+1}^{n_1} u_n \cdot \lim_{N\to\infty} p_N(n_1)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} u_n &= \prod_{n=0}^{n_1} u_n \cdot \lim_{N\to\infty} p_N(n_1) = \prod_{n=0}^{n_0} u_n \cdot \prod_{n=n_0+1}^{n_1} u_n \cdot \lim_{N\to\infty} p_N(n_1) \\ &= \prod_{n=0}^{n_0} u_n \cdot \lim_{N\to\infty} \left(\prod_{n=n_0+1}^{n_1} u_n \cdot p_N(n_1) \right) = \prod_{n=0}^{n_0} u_n \cdot \lim_{N\to\infty} p_N(n_0) \end{aligned}$$

Ο ορισμός αυτός μας επιτρέπει να διατυπώσουμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες των απειρογινομένων, ανάλογες με αυτές των απλών πεπερασμένων γινομένων αλλά και των άπειρων σειρών.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ συγκλίνει. Τότε*

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \ \text{ώστε}\ u_m = 0.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι άμεση από τον Ορισμό 2.2.1 και αφήνεται στον αναγνώστη να συμπληρώσει τις λεπτομέρειες. Παρατηρήστε την αναλογία με το απλό, πεπερασμένο, γινόμενο αριθμών. □

Για τις άπειρες σειρές ξέρουμε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$. Βάση το ορισμού που έχουμε δώσει, μπορούμε να δείξουμε ότι και τα άπειρα γινόμενα ικανοποιούν ανάλογα την επόμενη ιδιότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.3. *Αν ένα απειρογινόμενο* $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ *συγκλίνει, τότε* $u_n \to 1$.

Απόδειξη. Αφού το απειρογινόμενο συγκλίνει, από το (Γ1) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $u_n \neq 0$ για κάθε $n > n_0$. Τότε,

$$\lim_{N\to\infty} u_N = \lim_{N\to\infty} \frac{\prod_{n=n_0+1}^{N} u_n}{\prod_{n=n_0+1}^{N-1} u_n} \overset{(\Gamma 2)}{=} \frac{\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0+1}^{N} u_n}{\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0+1}^{N-1} u_n} = 1. \qquad \square$$

Ονομάζουμε *παράγοντες* τους όρους της ακολουθίας $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ σε ένα απειρογινόμενο $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$. Συνηθίζεται, λόγω της ιδιότητας του Θεωρήματος 2.2.3, να γράφουμε κάθε παράγοντα u_n στη μορφή $u_n = 1 + a_n$ και οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_n$, ονομάζονται *όροι* του άπειρου γινομένου $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$.
Έτσι, ένα άπειρο γινόμενό $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$ *συγκλίνει*, αν και μόνο αν

(Γ1) Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \neq -1$ για κάθε $n > n_0$.

(Γ2) $p_N(n_0) := \prod_{n=n_0+1}^{N}(1 + a_n) \to p(n_0) \neq 0$.

Ενώ, το Θεώρημα 2.2.3 γράφεται ως

$$\text{το } \prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n) \text{ συγκλίνει} \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0. \tag{2.2}$$

Όπως και στις άπειρες σειρές η συνθήκη «$a_n \to 0$» είναι αναγκαία ώστε να συγκλίνει το απειρογινόμενο $\prod_{n=0}^{\infty}(1 + a_n)$. Δεν είναι όμως και ικανή, όπως βλέπουμε στα επόμενα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2.4.

(i) Το $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει στο ∞

(ii) Το $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει στο 0

Λύση. Παρατηρούμε ότι οι όροι, και των δύο γινομένων, $1/n$, $-1/n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι όλοι διαφορετικοί από το -1 και συγκλίνουν στο 0. Όμως,

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{N-1}\right)\left(1 + \frac{1}{N}\right)\\ &= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N+1}{N} = N + 1 \to \infty,\end{aligned}$$

ενώ για το δεύτερο απειρογινόμενο είναι

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)\left(1 - \frac{1}{N}\right)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{N-2}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N} \to 0. \qquad \square\end{aligned}$$

2.3 Απειρογινόμενα με μη αρνητικούς όρους

Αν ένα απειρογινόμενο $\prod(1+a_n)$ έχει μη αρνητικούς όρους, δηλαδή $a_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η συμπεριφορά του ως προς τη σύγκλιση, ταυτίζεται με τη συμπεριφορά της αντίστοιχης σειράς $\sum a_n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.1. *Έστω $(a_n)_n$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, ώστε $a_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \text{ συγκλίνει} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει} \tag{2.3}$$

Απόδειξη. Έστω $a_n \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, το $\prod(1+a_n)$ ικανοποιεί πάντα τη συνθήκη (Γ1) του ορισμού σύγκλισης και μάλιστα με $n_0 = 0$. Επιπλέον, οι ακολουθίες

$$p_N = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \text{ (μερικά γινόμενα), και}$$
$$s_N = \sum_{n=0}^{N}(1+a_n) \text{ (μερικά αθροίσματα),}$$

για $N \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσες.

(⇒) Έστω ότι το $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει. Άρα η ακολουθία των μερικών γινομένων είναι φραγμένη, δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$p_N = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Ακόμα, χρησιμοποιώντας επαγωγή, μπορεί κανείς να δείξει ότι

Ισχυρισμός. Αν $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\sum_{n=0}^{N} a_n < \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη ισχυρισμού:

- Για $N = 1$, ο ισχυρισμός είναι τετριμμένα σωστός:

$$(1+a_0)(1+a_1) = 1 + a_0 + a_1 + a_0a_1 > a_0 + a_1.$$

- (Ε.Υ) Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $N \in \mathbb{N}$.

– Τότε, για $N+1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\prod_{n=0}^{N+1}(1+a_n) &= \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) + a_{N+1}\prod_{n=0}^{N}(1+a_n)\\ &\geq \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) + a_{N+1}\\ &\overset{(\text{E.Y})}{>} \sum_{n=0}^{N} a_n + a_{N+1} = \sum_{n=0}^{N+1} a_n.\end{aligned}$$

Οπότε, από την (2.4) και τον ισχυρισμό, έχουμε ότι η ακολουθία $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum a_n$, είναι φραγμένη. Ξέρουμε επίσης ότι είναι και αύξουσα και άρα έπεται ότι η (s_N) συγκλίνει, αποδεικνύοντας έτσι τη μία κατεύθυνση του ισχυρισμού.

($\Leftarrow$) Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει. Δηλαδή η ακολουθία (s_N) των μερικών αθροισμάτων της σειράς, συγκλίνει, και άρα είναι φραγμένη.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1 + x \leq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, παίρνουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$

$$1 < p_N = \prod_{n=0}^{N}(1+a_n) \leq \prod_{n=0}^{N} e^{a_n} = \exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \tag{2.5}$$

Άρα, η ακολουθία (p_N) των μερικών γινομένων του $\prod(1+a_n)$, είναι αύξουσα και φραγμένη, Οπότε συγκλίνει και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Μάλιστα, παίρνοντας όρια στην (2.5), δείξαμε ότι

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \leq \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right). \qquad \square$$

Παραδειγμα 2.3.2. Το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+n^{-2})$ συκλίνει, γιατί η αντίστοιχη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ συκλίνει.

Πράγματι, για κάθε $n \geq 2$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Άρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{N} \leq 1$$

Δηλαδή, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum 1/n^2$, είναι μονότονη και φραγμένη και άρα συγκλίνει.

Παραδειγμα 2.3.3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει, γιατί όπως είδαμε, το αντίστοιχο απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + n^{-1})$ αποκλίνει.

2.4 Απειρογινόμενα με γενικούς όρους

Για τα απειρογινόμενα με γενικούς, όχι κατ' ανάγκη μη αρνητικούς, όρους το κύριο εργαλείο που έχει κανείς είναι το επόμενο κριτήριο του Cauchy. Παρόλο που η απόδειξή του είναι σχετικά τεχνική, η ιδέα του είναι απλή και βασίζεται στην έννοια της ακολουθίας Cauchy σε έναν πλήρη χώρο.

Θεωρημα 2.4.1 (Κριτήριο του Cauchy). *Για κάθε ακολουθία $(a_n)_n$, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*:

(i) *Το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ συγκλίνει.*

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$\Big|(1 + a_{m+1})\cdots(1 + a_n) - 1\Big| < \varepsilon \qquad \forall n > m > n_0.$$

Απόδειξη.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Έστω ότι το $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ συγκλίνει και έστω $\varepsilon > 0$.

- Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$, από το (Γ1), ώστε $a_n \neq -1 \;\; \forall n > n_1$ και άρα

$$p_N = p_N(n_1) = (1 + a_{n_1+1})\cdots(1 + a_N) \neq 0 \qquad \forall N > n_1. \tag{2.6}$$

- $p_N \to p \neq 0$ και άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|p_N| > \frac{|p|}{2} \qquad \forall N > n_2. \tag{2.7}$$

- Ακόμα αφού η (p_N) συγκλίνει, είναι ακολουθία Cauchy, και άρα υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$, ώστε

$$|p_N - p_M| < \varepsilon\frac{|p|}{2} \qquad \forall N > M > n_3. \tag{2.8}$$

Άρα λοιπόν, αν $N > M > n_0 := \max\{n_1, n_2, n_3\}$, τότε από τις (2.6), (2.7) και (2.8) θα έχουμε ότι

$$|p_N - p_M| < \varepsilon\frac{|p|}{2} < \varepsilon|p_M|.$$

Δηλαδή,

$$\Big|(1 + a_{M+1})\cdots(1 + a_N) - 1\Big| = \left|\frac{p_N}{p_M} - 1\right| = \frac{|p_N - p_M|}{|p_M|} < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* : Έστω ότι ισχύει το *(ii)*. Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\left(1 + a_{n_0+1}\right)\cdots\left(1 + a_n\right) - 1\right| < \frac{1}{2} \qquad \forall n > n_1. \tag{2.9}$$

Ειδικότερα λοιπόν έχουμε ότι $a_n \neq -1$, για κάθε $n > n_1$ και άρα ικανοποιείται η συνθήκη (Γ1) του ορισμού 2.2.1.

Ακόμα από την (2.9), έχουμε ότι για τη ακολουθία των μερικών γινομένων $p_n = \prod_{k=n_0+1}^{n}(1 + a_k)$, ισχύει

$$\frac{1}{2} < p_n < \frac{3}{2} \qquad \forall n > n_1 \tag{2.10}$$

και άρα $p_n \neq 0$ για κάθε $n > n_1$. Επίσης, αν η (p_n) συγκλίνει τότε και το όριο θα πρέπει αναγκαστικά να είναι διαφορετικό από το 0.

Θα δείξουμε λοιπόν, για να τελειώσουμε την απόδειξη, ότι η (p_n) συγκλίνει και για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι είναι ακολουθία Cauchy.

Θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Από το *(ii)*, για $\varepsilon' = \frac{2}{3}\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\left(1 + a_{m+1}\right)\cdots\left(1 + a_n\right) - 1\right| < \frac{2}{3}\varepsilon \qquad \forall n > m > n_2. \tag{2.11}$$

Οπότε, αν $n > m > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, από τις (2.10) και (2.11) έπεται ότι

$$\frac{|p_n - p_m|}{|p_m|} = \left|\left(1 + a_{m+1}\right)\cdots\left(1 + a_n\right) - 1\right| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

και άρα,

$$|p_n - p_m| < \frac{2}{3}\varepsilon\,|p_m| < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι η (p_n) είναι ακολουθία Cauchy και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Ορισμος 2.4.2. Λέμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *συγκλίνει απολύτως*, αν και μόνο αν το $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + |a_n|\right)$ συγκλίνει.

Η κύρια εφαρμογή του κριτηρίου του Cauchy, μας λέει ότι όπως συμβαίνει αντίστοιχα και στις σειρές, η απόλυτη σύγκλιση ενός απειρογινομένου είναι ισχυρότερερη της απλής. Θα χρειαστούμε επιπλέον την παρακάτω στοιχειωδώς απλή ανισότητα.

Λημμα 2.4.3. *Για κάθε ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$, ισχύει οτι*

$$\left|\left(1 + a_1\right)\cdots\left(1 + a_n\right) - 1\right| \leq \left|\left(1 + |a_1|\right)\cdots\left(1 + |a_n|\right) - 1\right|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Η αριστερή παράσταση ισούται με

$$\left|(1+a_1)\cdots(1+a_n)-1\right| = \left|1+A_1+\cdots+A_N-1\right| = \left|A_1+\cdots+A_N\right|,$$

όπου τα A_k, $k \leq N$, είναι της μορφής

$$A_k = a_{i_1}\cdots a_{i_m},$$

για κάποια $m \in \mathbb{N}$ και $i_1 \dots i_m \in \{1, \dots, N\}$.

Όμοίως η δεξιά παράσταση είναι

$$\left|(1+|a_1|)\cdots(1+|a_n|)-1\right| = |A_1|+\cdots+|A_N|$$

και το λήμμα έπεται από την τριγωνική ανισότητα

$$\left|A_1+\cdots+A_N\right| \leq |A_1|+\cdots+|A_N|. \qquad \square$$

Από το Κριτήριο του Cauchy και το λήμμα άμεσα έπεται ότι

Θεωρημα 2.4.4. *Έστω $(a_n)_n$ μία ακολουθία αριθμών. Αν το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και απλά. Δηλαδή,*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+|a_n|\right) \text{ συγκλίνει } \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ συγκλίνει.} \tag{2.12}$$

Πορισμα 2.4.5. *Έστω $(a_n)_n$ μία ακολουθία αριθμών. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ συγκλίνει } \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \text{ συγκλίνει.} \tag{2.13}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των Θεωρημάτων 2.4.4 και 2.3.1. $\square$

Το Πόρισμα 2.4.5 μας δίνει τους επόμενους χαρακτήρισμούς

Θεωρημα 2.4.6. *Έστω $(a_n)_n$ μία ακολουθία αριθμών, τέτοια ώστε $0 \leq a_n < 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(i) *το $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ συγκλίνει.*

(ii) *το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει.*

(iii) *η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Έστω ότι το $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ συγκλίνει. Άρα από το (Γ2), τα μερικά γινόμενα συγκλίνουν σε ένα μη μηδενικό όριο δηλαδή,

$$p_N := \prod_{n=0}^{N}(1-a_n) \to p > 0.$$

Επίσης, η (p_N) είναι φθίνουσα και άρα $p_N \geq p$, για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Όμως, από την τετριμένη ανισότητα $1 \leq 1+\alpha \leq \frac{1}{1-\alpha}$, $\forall \alpha \in [0,1)$, έχουμε ότι

$$1 \leq (1+a_0)\cdots(1+a_N) \leq \frac{1}{(1-a_0)\cdots(1-a_N)} \leq \frac{1}{p},$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και επομένως, τα μερικά γινόμενα του $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ είναι μια άυξουσα και φραγμένη ακολουθία με γνήσια θετικούς όρους, οπότε συγκλίνει σε ένα θετικό όριο. Αυτό σημαίνει ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* : Άμεσα από το Θεώρημα 2.3.1.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* : Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.4.5 για $b_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Έτσι λοιπόν αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$, τότε θα συγκλίνει και το αντίστοιχο απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$. $\square$

Ομιλία 3

Μια εισαγωγή στα συνεχή κλάσματα

Βαγγέλης Φελουζής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
felouzis@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

3.1 Εισαγωγή

Μια ακολουθία αριθμών $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ μπορεί να καθορίσει διάφορες άλλες ακολουθίες αριθμών που η μελέτη τους είναι σημαντική στην Ανάλυση. Μερικά παραδείγματα:

- **Σειρές**: Είναι η ακολουθία $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

Δίνεται από τον αναδρομικό τύπο:

(i) $\sigma_0 = a_0$.

(ii) $\sigma_{n+1} = \sigma_n + a_{n+1}$.

- **Μέσοι όροι**: Είναι η ακολουθία $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$M_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{n} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

- **Απειρογινόμενα**: Είναι η ακολουθία $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \cdots a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$$

  Δίνεται από τον αναδρομικό τύπο:

  (i) $P_0 = a_0$.

  (ii) $P_{n+1} = P_n \cdot a_{n+1}$.

Ένα *συνεχές κλάσμα* είναι μια παράσταση της μορφής

$$x = [(a_0; (b_1, a_1), (b_2, a_2) \dots] = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ddots}}}}$$

Ένας άλλος τρόπος γραφής ενός συνεχούς κλάσματος είναι

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \cdots$$

η οποία καθορίζεται από δύο ακολουθίες αριθμών $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Αν $b_n = 1$ για κάθε n τα b_n παραλείπονται δηλαδή αν συνεχές κλάσμα έχει την μορφή

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$$

Σε αυτή την περίπτωση το συνεχές κλάσμα θα λέγεται *απλό*. Διαφορετικά θα το καλούμε *σύνθετο*. Μια ειδική περίπτωση απλών συνεχών κλασμάτων είναι τα απλά συνεχή κλάσματα $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ όπου το a_0 είναι μη-αρνητικός ακέραιος και τα a_n είναι (αυστηρά) θετικοί ακέραιοι.

Εδώ θα ασχοληθούμε κυρίως με τα απλά συνεχή κλάσματα. Τα (απλά) συνεχή κλάσματα είναι μια αναδρομική κατασκευή, γνωστή από πολύ παλιά, που προκύπτει από τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

3.1.1 Αναπαράσταση των ρητών σαν συνεχή κλάσματα

Ας θεωρήσουμε έναν θετικό ρητό αριθμό x, δηλαδή ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός της μορφής $x = \frac{a}{b}$ όπου a, b ακέραιοι > 0. Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης (Αλγόριθμος του Ευκλείδη)

$$a = a_0 b + b_0, 0 \leq b_0 < b$$

δηλαδή

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{b_0}{b}, \quad 0 \leq b_0 < b \tag{3.1}$$

Αν $b_0 = 0$ τότε $a/b = a_0$. Ας υποθέσουμε ότι $b_0 \neq 0$. Επαναλαμβάνοντας τον αλγόριθμο της διαίρεσης

$$b = a_1 b_0 + b_1, \quad 0 \leq b_1 < b,$$

δηλαδή

$$\frac{b}{b_0} = a_1 + \frac{b_1}{b_0}$$

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_1}{b_0}}, \qquad 0 \leq b_1 < b_0. \tag{3.2}$$

Αν $b_1 = 0$ τότε

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $b_1 \neq 0$. Από τον αλγόριθμο της διαίρεσης

$$b_0 = a_2 b_1 + b_2, \quad 0 \leq b_1 < b,$$

δηλαδή

$$\frac{b_0}{b_1} = a_2 + \frac{b_2}{b_1}$$

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_1}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{b_2}{b_1}}}, \qquad 0 \leq b_2 < b_1. \tag{3.3}$$

Αν $b_2 = 0$ τότε

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Αν $b_2 \neq 0$ συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο.

Επειδή η διαδικασία θα σταματήσει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα έχω ότι ο αριθμός x γράφεται στη μορφή

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} \tag{3.4}$$

όπου οι $a_1, \dots, a_n$ είναι όλοι αυστηρά θετικοί ακέραιοι.

3.1.2 Αναπαράσταση των άρρητων σαν συνεχή κλάσματα

Ας θεωρήσουμε έναν θετικό πραγματικό αριθμό x. Ας υποθέσουμε ότι αυτός είναι άρρητος και θέλουμε να βρούμε μια «καλή» προσέγγιση του από έναν ρητό.

- Μια πρώτη προσέγγιση του θα μπορούσε να είναι το ακέραιο μέρος $[x]$ του x. Θέτουμε $a_0 = [x]$ και $b_0 = x - [x_0]$ να είναι το κλασματικό μέρος του x που είναι μικρότερος από 1 και μεγαλύτερος από το 0. Έστω $x_1 = 1/b_0 > 1$. Έχουμε λοιπόν

$$x = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}. \tag{3.5}$$

- Κάνουμε την ίδια διαδικασία για τον άρρητο αριθμό $x_1 > 1$. Θέτουμε $a_1 = [x_1]$ και $b_1 = x_1 - [x_1]$ να είναι το κλασματικό μέρος του x που είναι μικρότερος από 1 και μεγαλύτερος από το 0. Έστω $x_2 = 1/b_1 > 1$. Έχουμε λοιπόν

$$x = a_0 + b_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} \tag{3.6}$$

- Κάνουμε την ίδια διαδικασία για τον άρρητο αριθμό $x_2 > 1$. Θέτουμε $a_2 = [x_2]$ και $b_2 = x_2 - [x_2]$ να είναι το κλασματικό μέρος του x_2 που είναι μικρότερος από 1 και μεγαλύτερος από το 0. Έστω $x_3 = 1/b_2 >$

1. Έχουμε λοιπόν

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} \tag{3.7}$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον (αφού ο x είναι άρρητος) και έτσι μπορούμε να βρούμε μια άπειρη ακολουθία αυστηρά θετικών ακέραιων $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ώστε

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \ddots}}}}}} \tag{3.8}$$

Προκύπτουν δύο ερωτήματα:

- Ερωτημα 1:
  Οι ρητοί αριθμοί

$$\rho_0 = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}.$$

$$\rho_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\rho_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} = \frac{a_0(a_2 a_1 + 1)}{a_2 a_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\vdots$$

$$\rho_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}$$

είναι διαδοχικές προσεγγίσεις του x από ρητούς, δηλαδή συγκλίνουν στον x;

- Ερωτημα 2:
  Πόσο καλές είναι αυτές οι προσεγγίσεις;

Στη συνέχεια της διάλεξης θα απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα. Το δεύτερο ίσως σε μια επόμενη διάλεξη. Πριν από αυτό θα δώσουμε κάποια παραδείγματα. Πριν όμως τα παραδείγματα είναι χρήσιμο (και για τους υπολογισμούς) να ψάξουμε αναδρομικούς τύπους για τα συνεχή κλάσματα, δηλαδή αν

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}$$

να βρεθούν με αναδρομικό τρόπο οι αριθμοί p_n, q_n από τους προηγούμενούς τους p_k, q_k, $k < n$.

Εύρεση Αναδρομικών τύπων για p_n, q_n:
Θέτουμε

- $[a_0; a_1, \dots, a_n] = \dfrac{p_n}{q_n}$.
- $[a_1; a_2, \dots, a_n] = \dfrac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$.
- $p_{-1} = 1$ και $q_{-1} = 0$.
- $p_0 = a_0$ και $q_0 = 1$.

Παρατηρείστε ότι είναι άμεσο από τους ορισμούς ότι για κάθε $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_0 p'_n + q'_n \\ q_{n+1} &= p'_n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Επαγωγική υπόθεση (Ε(n)):
Αν $n \geq 1$ τότε

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

- $E(1)$ αληθεύει.

- Έστω ότι $E(k)$ αληθεύει για $k \leq n$. θα δείξω ότι ισχύει η $E(n+1)$.

$$\begin{aligned}
[a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] &= a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n, a_{n+1}]} \\
&= a_0 + \frac{q'_n}{p'_n} \\
&= \frac{a_0 p'_n + q'_n}{p'_n}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση και τις σχέσεις (3.9) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= a_0 p'_n + q'_n \\
&= a_0(a_{n+1}p'_{n-1} + p'_{n-2}) + (a_{n+1}q'_{n-1} + q'_{n-2}) \\
&= a_{n+1}(a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}) + (a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) \\
&= a_{n+1}p_n + p_{n-1}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= q'_n \\
&= a_{n+1}q'_{n-1} + q'_{n-2} \\
&= a_{n+1}q_n + q_{n-1}.
\end{aligned}$$

Τελικά έχουμε τους εξής αναδρομικούς τύπους:

- $p_{-1} = 1$ και $q_{-1} = 0$.
- $p_0 = a_0$ και $q_0 = 1$.
- Αν $n \geq 1$ τότε

$$\begin{aligned}
p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.2.1 (Η χρυσή τομή). Πρόκειται για την θετική λύση ϕ της εξίσωσης

$$x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{x}$$

Συνεπώς

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033989$$

αλλά και $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\phi}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}}$

Η k-προσέγγιση του ϕ είναι ίση με το κλάσμα p_k/q_k όπου

$$
\begin{aligned}
&p_0 = 1 \quad p_1 = 2, \qquad p_k = p_{k-1} + p_{k-2} \\
&q_0 = 1, q_1 = 1, \qquad q_k = q_{k-1} + q_{k-2}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

(δηλαδή ο αριθμητής και ο παρανομαστής είναι διαδοχικοί αριθμοί Fibonacci).

p_k :	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
q_k :	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$\frac{p_k}{q_k}$	1	2	1,5	1,66	1,60	1,625	1,615	1,619	1,617	1,6182	1,6179	1,61805	1,618025

$$\frac{610}{377} = 1,618037, \ \frac{987}{610} = 1,6180327, \ \frac{1597}{987} = 1,618034, \ \frac{2584}{1597} = 1,6180338, \ \frac{4181}{2584} = 1,6180340$$

$$\frac{6765}{4181} = 1,618033963, \ \frac{10946}{6765} = 1,618033999, \ \frac{17711}{10946} = 1,618033985, \ \frac{28657}{17711} = 1,61803399$$

$$\phi \simeq \frac{46368}{28657} = 1,618033988$$

Παραδειγμα 3.2.2.

$$\sqrt{2} = [1;\bar{2}] = [1,2,2,2,\dots] \tag{3.12}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$$

Συνεπώς $x = \sqrt{2} + 1 = 2 + \dfrac{1}{x} = 2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x}} = 2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x}}}$

Άρα $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} = [1,2,2,2,\dots]$

Η $k-$προσέγγιση του $\sqrt{2}$ είναι ίση με το κλάσμα p_k/q_k όπου

$$
\begin{aligned}
&p_0 = 1, p_1 = 3, \qquad p_k = 2p_{k-1} + p_{k-2} \\
&q_1 = 1, q_2 = 2, \qquad q_k = 2q_{k-1} + q_{k-2}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Υπολογισμοί

k	$p_k = 2p_{k-1} + p_{k-2}$	$q_k = 2q_{k-1} + q_{k-2}$	$\left(\frac{p_k}{q_k}\right)$	$\left(\frac{p_k}{q_k}\right)^2$
0	1	1	1	1
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	2	$\frac{3}{2} = 1.5$	2.25
2	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$\frac{7}{5} = 1.4$	1,96
3	$2 \cdot 7 + 3 = 17$	$2 \cdot 5 + 2 = 12$	$\frac{17}{12} = 1,416666667$	2,006944444
4	$2 \cdot 17 + 7 = 41$	$2 \cdot 12 + 5 = 29$	$\frac{41}{29} = 1,413793103$	1,998810939
5	$2 \cdot 41 + 17 = 99$	$2 \cdot 29 + 12 = 70$	$\frac{99}{70} = 1,414285714$	2,000204082
6	$2 \cdot 99 + 41 = 239$	$2 \cdot 70 + 20 = 169$	$\frac{239}{169} = 1,414201183$	1,999964987
7	$2 \cdot 239 + 99 = 577$	$2 \cdot 169 + 70 = 408$	$\frac{577}{408} = 1,414215686$	2,000006007
8	$2 \cdot 577 + 239 = 1393$	$2 \cdot 408 + 169 = 985$	$\frac{1393}{985} = 1,414213198$	1,999998969
9	$2 \cdot 1393 + 577 = 3363$	$2 \cdot 985 + 408 = 2378$	$\frac{3363}{2378} = 1,414213625$	2,000000177

$$1,41421362 = \frac{1393}{985} < \sqrt{2} < \frac{3363}{2378} = 1,41421365.$$

Παραδειγμα 3.2.3. Έστω D θετικός ακέραιος. Γράφουμε τον $D = a^2 + b$ όπου a είναι το ακέραιο μέρος της $\sqrt{D}$ (πχ $D = 4729494 = 2174^2 + 3218$). Έστω

$$\sqrt{D} = \sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{x}$$

$$a^2 + b = a^2 + \frac{b^2}{x^2} + 2a\left(\frac{b}{x}\right).$$

Θέτουμε $y = \frac{b}{x}$ οπότε $b = y^2 + 2ay = y(y + 2a)$ και συνεπώς

$$y = \cfrac{b}{2a + y} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + y}} = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + y}}}}$$

και τελικά

$$\sqrt{D} = \sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{\ddots}}}}}} \tag{3.14}$$

Προσεγγίσεις του $\sqrt{a^2 + b}$	$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4}$	$\sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 2}$
$\sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{b}{2a}$	$\sqrt{13} \simeq 3 + \frac{2}{3} \simeq 3,66$	$\sqrt{11} \simeq 3 + \frac{1}{3} \simeq 3,33$
$\sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{2ab}{4a^2 + b}$	$\sqrt{13} \simeq 3 + \frac{6}{10} \simeq 3,60$	$\sqrt{11} \simeq 3 + \frac{6}{19} \simeq 3,3157$
$\sqrt{a^2 + b} \simeq a + \frac{4a^2b + b^2}{8a^3 + 4ab}$	$\sqrt{13} \simeq 3 + \frac{20}{33} \simeq 3,605$	$\sqrt{11} \simeq 3 + \frac{76}{240} \simeq 3,3166$

Παραδειγμα 3.2.4 (Euler).

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{3.15}$$

$$
\begin{aligned}
e &= [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \dots] \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Παραδειγμα 3.2.5 (π). Δεν υπάρχει (μέχρι τώρα) αναδρομικός τρόπος για το ανάπτυγμα του π σε απλό συνεχές κλάσμα. Οι διαδοχικοί όροι του υπολογίζονται από το ήδη υπάρχον δεκαδικό ανάπτυγμα.

$$
\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}
\tag{3.17}
$$

$$
[\ 3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 1, 3, 1, 1, 8, 1, 1, 2, 1, 6, 1, 1, 5, 2, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 16, 1, 161, 45, 1, 22, 1, 2, 2, 1, 4, 1, 2, 24, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, \dots]
$$

Ωστόσο, υπάρχουν αναδρομικοί τύποι που εκφράζουν το π σαν σύνθετο συνεχές κλάσμα:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \cfrac{13^2}{2 + \cfrac{15^2}{2 + \cfrac{17^2}{2 + \ddots}}}}}}}}} \tag{3.18}$$

(Lord Brouncker (1620-1686)), χωρίς απόδειξη. Η πρώτη απόδειξη οφείλεται στον Leonard Euler (1775) που έδειξε ότι η σειρά

$$\arctan x = \sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1$$

είναι ισοδύναμη με το σύνθετο κλάσμα

$$\frac{x}{1} + \frac{1 \cdot x^2}{3 - x^2} + \frac{3^2 \cdot x^2}{5 - 3x^2} + \cdots + \frac{(2n-1)^2 x^2}{(2n+1) - (2n-1)x^2} + \cdots$$

θέτοντας $x = 1$.

Ο Ramanujan έδειξε ότι

$$4\frac{\left(\Gamma\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)^2}{\left(\Gamma\left(\frac{x+1}{4}\right)\right)^2} = x + \frac{1^2}{2x} + \frac{3^2}{2x} + \frac{5^2}{2x} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{2x} + \cdots$$

$$= x + \cfrac{1^2}{2x + \cfrac{3^2}{2x + \cfrac{5^2}{2x + \cfrac{7^2}{2x + \cfrac{9^2}{2x + \cfrac{11^2}{2x + \ddots}}}}}} \tag{3.19}$$

και από αυτήν παίρνουμε για $x = 3$ αφού $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ότι

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{\ddots}}}}}} \tag{3.20}$$

Παραδειγμα 3.2.6 (Ακέραιες τιμές της συνάρτησης ζ του Riemann.). Η συνάρτηση ζ του Riemann ορίζεται ξεκινώντας από τον τύπο

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \Re(z) > 1, \tag{3.21}$$

και η μελέτη της παίζει σημαντικό ρόλο στην Θεωρία Αριθμών (την κατανομή των πρώτων). Η συνάρτηση αυτή εισήχθη από τον Euler (και μελετήθηκε από τον Riemann). Ο Euler έδειξε ότι

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \tag{3.22}$$

$$\zeta(2k) = B_{2k}\frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}. \tag{3.23}$$

Όπου οι B_k είναι *ρητοί αριθμοί* που εισήχθηκαν από τον J. Bernoulli, (1687) και δίνονται με αναδρομικό τύπο. Συνεπώς οι αριθμοί $\zeta(n)$ είναι *άρρητοι αν ο n είναι άρτιος αριθμός*.

Τι συμβαίνει αν το n είναι περιττός αριθμός είναι ακόμη άγνωστο. Το πρώτο αποτέλεσμα που δείχτηκε προς αυτή την κατεύθυνση είναι του Roger Apéry το 1978 και αφορά τον $\zeta(3)$.

Θεωρημα 3.2.7 (Roger Apéry, 1978). *Έστω*

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Τότε

$$\zeta(3) = [a_0; (b_1, a_1), (b_2, a_2), \dots] = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ddots}}}}$$

όπου οι ακολουθίες $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *και* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *δίνονται από τους τύπους:*

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = 34n^3 + 51n^2 + 27n^4 + 5 \tag{3.24}$$

$$b_1 = 6, \quad b_n = -n^6, \text{ αν } n > 1. \tag{3.25}$$

Πόρισμα 3.2.8 (Roger Apéry, 1978). *Ο αριθμός* $\zeta(3)$ *είναι άρρητος.*

3.3 Ορισμοί—Βασικά Θεωρήματα

Αν και η κατασκευή των συνεχών κλασμάτων μπορεί να γίνει ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *θα θεωρούμε εδώ ότι* $a_n > 0$ *για κάθε* $n \geq 1$ *και για τις ανάγκες μας τα* a_n *θα είναι συνήθως ακέραιοι αριθμοί.*

Ορισμός 3.3.1. Για μια οποιαδήποτε ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ από γνήσια θετικούς αριθμούς ορίζουμε αναδρομικά δύο νέες ακολουθίες αριθμών $(p_k)_{k=-1}^{\infty}$ και $(q_k)_{k=-1}^{\infty}$ ως εξής:

(k = −1) :

$$p_{-1} = 1 \qquad q_{-1} = 0. \tag{3.26}$$

(k = 0) :

$$p_0 = a_0 \qquad q_0 = 1. \tag{3.27}$$

(k = 1) :

$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} = a_1 a_0 + 1 \qquad q_1 = a_1 = a_1 q_0 + q_{-1}. \tag{3.28}$$

(k ≥ 2) :

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \tag{3.29}$$

Θέτουμε

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}. \tag{3.30}$$

Η άπειρη ακολουθία

$$[a_0; a_1, \ldots, a_k, \ldots] = \left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k=0}^{\infty} \tag{3.31}$$

θα λέγεται το *συνεχές κλάσμα που επάγει η ακολουθία* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.2.

(i) *Για κάθε* $k \geq 0$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{3.32}$$

(ii) *Για κάθε* $k \geq 1$

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{3.33}$$

(iii) *Για κάθε* $k \geq 1$

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k. \tag{3.34}$$

(iv) *Για κάθε* $k \geq 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}. \tag{3.35}$$

(v)

$$\frac{p_0}{q_0} \leq \frac{p_2}{q_2} \leq \frac{p_4}{q_4} \leq \frac{p_6}{q_6} \leq \cdots$$

$$\frac{p_1}{q_1} \geq \frac{p_3}{q_3} \geq \frac{p_5}{q_5} \geq \frac{p_7}{q_7} \geq \cdots$$

(vi)

$$\forall n \forall m \quad \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \geq \frac{p_{2m}}{q_{2m}}$$

Απόδειξη. (i) Από τις σχέσεις (3.29) θα έχουμε, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με q_{k-1} και την δεύτερη με p_{k-1},

$$q_{k-1}p_k = a_k p_{k-1} q_{k-1} + p_{k-2} q_k, \quad p_{k-1} q_k = ak q_{k-1} p_k + q_{k-2} p_{k-1},$$

και αφαιρώντας την πρώτη από την δεύτερη θα έχουμε

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2})$$

και επαναλαμβάνοντας άλλες $k-1$ φορές έχουμε

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k (q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1}) = (-1)^k 1 = (-1)^k$$

Άμεσο από το προηγούμενο.

Από τις σχέσεις (3.29) θα έχουμε πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με q_{k-2} και την δεύτερη με p_{k-2} και αφαιρώντας θα έχουμε

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k (q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k$$

(ii) Άμεσο από το προηγούμενο. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3.3.

(i) *Οι ακολουθίες* $(p_{2k}/q_{2k})_{k=0}^{\infty}$, $(p_{2k+1}/q_{2k+1})_{k=0}^{\infty}$ *συγκλίνουν.*

(ii) *Η ακολουθία* $(p_k/q_k)_{k=0}^{\infty}$ *συγκλίνει αν και μόνο αν οι ακολουθίες*

$$\left(\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right)_{k=0}^{\infty} \quad \text{και} \quad \left(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right)_{k=0}^{\infty}$$

έχουν το ίδιο όριο.

Από την εξίσωση (3.33) και το προηγούμενο Πόρισμα θα έχουμε ότι

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3.4. *Η ακολουθία* $(p_k/q_k)_{k=0}^{\infty}$ *συγκλίνει αν και μόνο αν*

$$\lim_{k\to+\infty} q_k q_{k+1} = +\infty. \tag{3.36}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.5. *Η ακολουθία* $(p_k/q_k)_{k=0}^{\infty}$ *συγκλίνει αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{3.37}$$

Απόδειξη. Έστω

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{p_{2k}}{q_{2k}}\right) = a \le b = \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right).$$

Αφού για κάθε k ισχύει

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$$

έχουμε ότι για κάθε k

$$b - a \le \frac{1}{q_k q_{k-1}}.$$

Συνεπώς η ακολουθία $(p_k/q_k)_{k=0}^{\infty}$ συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\lim_{k\to+\infty} q_k q_{k+1} = +\infty. \tag{3.38}$$

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η σειρά (3.37) συγκλίνει, και άρα $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι για μεγάλα k ισχύει $a_k < 1$. Αφού $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ θα έχουμε ότι $q_k > q_{k-2}$ και συνεπώς θα ισχύει για κάθε k

$$q_k > q_{k-1} \text{ ή } q_{k-1} > q_{k-2}.$$

Στη πρώτη περίπτωση $q_k < a_k q_k + q_{k-2}$ και συνεπώς (για μεγάλα $k \ge k_0$)

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1 - a_k}$$

Από την άλλη αν $q_{k-1} > q_{k-2}$, αφού $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ θα έχω $q_k < a_k q_{k-1} + q_{k-1}$ και άρα (για $k \geq k_0$)

$$q_k < (1 + a_k) q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1 - a_k}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε ότι θα έχουμε

$$q_k < \frac{q_s}{(1 - a_k)(1 - a_{m_1}) \dots (1 - a_{m_t})} \tag{3.39}$$

όπου $k > m_1 > \cdots > m_t \geq k_0$ και $s < k_0$. Αφού $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_n < +\infty$ το απειρογινόμενο $\prod_{n=k_0}^{+\infty}(1 - a_n)$ συγκλίνει σε έναν θετικό αριθμό λ. Αλλά

$$(1 - a_k)(1 - a_{m_1}) \dots (1 - a_{m_t}) \geq \prod_{k=k_0}^{\infty} (1 - a_n) = \lambda.$$

Έστω $Q = \max\{q_0, \dots, q_{k_0-1}\}$. Τότε λόγω της (3.39)

$$q_k < \frac{Q}{\lambda}, \quad (k \geq k_0)$$

$$q_k q_{k+1} < \frac{Q^2}{\lambda^2}, \quad (k \geq k_0),$$

και συνεπώς η (3.38) δεν μπορεί να ισχύει και άρα το συνεχές κλάσμα δεν συγκλίνει.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Θέτουμε $c = \min\{q_0, q_1\}$. Αφού $q_k > q_{k-2}$ θα έχουμε ότι για κάθε k θα ισχύει $q_k \geq c$ και συνεπώς για κάθε k ισχύει $q_k \geq c a_k + q_{k-2}$, και άρα

$$\begin{aligned}
q_k + q_{k+1} &\geq c(a_k + a_{k+1}) + (q_{k-2} + q_{k-1}) \\
&\geq c(a_k + a_{k+1}) + c(a_{-2} + a_{k-1}) + (q_{k-4} + q_{k-3}) \\
&\vdots \\
&\geq c \sum_{n=1}^{k} a_n + (p_0 + p_1) \\
&> c \sum_{n=1}^{k} a_n
\end{aligned}$$

Άρα τουλάχιστον ένας από τους q_k, q_{k+1} θα ξεπερνά το

$$\frac{1}{2} c \sum_{n=1}^{k} a_n$$

ενώ ο άλλος θα είναι $\geq c$. Συνεπώς

$$q_k q_{k+1} \geq \frac{1}{2} c^2 \sum_{n=1}^{k} a_n \to +\infty$$

και συνεπώς το συνεχές κλάσμα συγκλίνει. □

Αναφορές

[1] Sergey Khruschev, *Orthogonal Polynomials and Continued Fractions From Euler's Point of View*, Cambridge University Press, 2008.

[2] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover, 1997.

[3] Claude Brezinski *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer, 1991.

[4] Euler L. (1744). *De fractionibus continuus*, Dissertatio, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae IX for 1737, 98–137 (presented on February 7, 1737); Opera Omnia, ser. 1, vol. 14, 187–216; E071. English translation: Mathematical Systems Theory (1985) 4 (18).

[4] Lagrange J. L. (1776). *Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral*, Nouvelles de l'Académie Royale des Science et Belles-lettres de Berlin; Œures IV, 301–332.

Ομιλία 4

Το θεώρημα Tychonoff

Χαράλαμπος Τσιχλιάς

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
tsichlias@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: βασικές έννοιες τοπολογικών χώρων

4.1 Ιστορικά στοιχεία

Ο Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906–1993) (ή Andrei Nikolaevich Tikhonov, Андре́й Никола́евич Ти́хонов στα ρωσικά) υπήρξε σπουδαίος Ρώσος μαθηματικός, ο οποίος ασχολήθηκε με πολλούς κλάδους των μαθηματικών (τοπολογία, συναρτησιακή ανάλυση, διαφορικές εξισώσεις, υπολογιστικά μαθηματικά, μαθηματική φυσική κα)

A. N. Tychonoff

Σε νεαρή ηλικία κατασκεύασε τοπολογική δομή σε γινόμενα τοπολογικών χώρων η οποία σήμερα αναφέρετε ως τοπολογία Tychonoff ή τοπολογία γινόμενο [10]. Το 1930 [11] απέδειξε το θεώρημα Tychonoff (γινόμενο συμπαγών είναι συμπαγής) σε γινόμενα του κλειστού διαστήματος $[0, 1]$, αργότερα το 1935 [12] επέκτεινε το αποτέλεσμα αυτό σε κάθε γινόμενο τοπολογικών χώρων παρατηρώντας ότι η προηγούμενη απόδειξη του μπορεί να εφαρμοστεί ανάλογα σε κάθε τοπολογικό γινόμενο συμπαγών χώρων. Το θεώρημα Tychonoff έχει θεωρηθεί από πολλούς μαθηματικούς ως ένα από τα σπουδαιότερα αποτελέσματα της γενικής τοπολογίας (για παράδειγμα [6] σελ 143, [13] σελ 120, [9] σελ 114). Ο Tychonoff υπήρξε μαθητής του Pavel Aleksandrov ο οποίος, όπως ο ίδιος δηλώνει μεταξύ άλλων, αρχικά έβλεπε με δυσπιστία την κατασκευή της τοπολογίας Tychonoff:

> «...*But nevertheless at the time when Tikhonov—he was only 20—concluded that the topology on the product should be defined in this way rather than another, his chosen method of definition seemed not only unexpected but perfectly paradoxical. One of the two authors of this article, who at the time we describe was capable (because of his age) of understanding Tikhonov's idea, remembers very well with what mistrust he met Tikhonov's proposed definition. How was it possible that a topology introduced by means of such enormous neighbourhoods, which are only distinguished from the whole space by a finite number of the coordinates, could catch any of the essential characteristics of a topological product? But later Tikhonov again "bowled us over" with his famous theorem that the product of any number of compact spaces is compact*...» ([1], σελ 110–111).

Έχουν δοθεί πολλές αποδείξεις του Θεωρήματος Tychonoff (για παράδειγμα δες [11], [12], [5], [6], [7], [8]), στην συνέχεια παρουσιάζουμε την τοπολογία γινόμενο, βασικές έννοιες της θεωρίας φίλτρων και την απόδειξη του Θεωρήματος Tychonoff όπως αυτά εμφανίζονται στο βιβλίο [9]. Η θεωρία φίλτρων εισηχθεί από τον Henri Cartan το 1937 ([3], [4]) και αυτή η απόδειξη του θεωρήματος Tychonoff με την χρήση φίλτρων οφείλεται στην ομάδα Nicolas Bourbaki [2].

Ορισμος 4.1.1. Έστω $\{X_i : i \in I\}$ μια συλλογή συνόλων. Το καρτεσιανό γινόμενο της συλλογής αυτής συμβολίζεται με

$$\times\{X_i : i \in I\}$$

και ορίζεται να είναι το σύνολο,

$$\{f : f \text{ είναι απεικόνιση στο } I \text{ με} f(i) \in X_i, \forall i \in I\}.$$

Το σύνολο X_i είναι η i-συνιστώσα σύνολο του γινομένου και το $f(i)$ είναι η i-συνιστώσα του σημείου f του γινομένου. Η απεικόνιση $\pi_i : \times\{X_i : i \in I\} \to Xi$ με τύπο $\pi_i(f) = f(i)$ λέγεται προβολή στην i-συνιστώσα σύνολο. Συνηθίζουμε να γράφουμε f_i αντί του $f(i)$ και ακόμη γράφουμε x το σημείο του γινομένου και x_i την i-συνιστώσα του.

Στόν παραπάνω ορισμό εύλογη είναι η ερώτηση, αν τα I και X_i είναι μη κενά σύνολα τότε το γινόμενο τους είναι διάφορο του κενού; Η απάντηση είναι ναι διότι κάθε $f \in \times\{X_i : i \in I\}$ είναι μια απεικόνιση επιλογής για την συλλογή $\{X_i : i \in I\}$ και γνωρίζουμε από το αξίωμα επιλογής ότι τελικά αυτή η απεικόνιση υπάρχει.

Ορισμος 4.1.2. Έστω (X_i, τ_i) τοπολογικοί χώροι για κάθε $i \in I$ και έστω $X = \times\{X_i : i \in I\}$. Ορίζουμε τ να είναι η συλλογή όλων των ενώσεων συνόλων της μορφής

$$W = \times\{W_i : i \in I, W_i \in \tau_i \text{ και } W_i = X_i \text{ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος}\}$$

Θεωρημα 4.1.3. *Η τ είναι μία τοπολογία στο X.*

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι το X γράφεται στη μορφή που έχει το W στον προηγούμενο ορισμό, και $\emptyset = W$ αν κάποια από τα $W_i = \emptyset$, έτσι τα X και $\emptyset$ είναι στοιχεία της τ.

Αφού ενώσεις ενώσεων είναι ενώσεις έπεται ότι ενώσεις συνόλων τις τ ανήκει στην τ.

Έστω $O_1, O_2 \in \tau$ και $x \in O_1 \cap O_2$, τότε υπάρχουν σύνολα $W = \times\{W_i : i \in I, W_i \in \tau_i, W_i = X_i$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος $\}$ και $V = \times\{V_i : i \in I, V_i \in \tau_i, V_i = X_i$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος $\}$ τέτοια ώστε $x \in W \subset O_1$ και $x \in V \subset O_2$. Αν θέσουμε $U_i = W_i \cap V_i$ και $U = \times\{U_i, i \in I\}$ τότε το U έχει την απαραίτητη μορφή του ορισμού και $x \in U \subset O_1 \cap O_2$. Άρα το $O_1 \cap O_2$ είναι ένωση συνόλων της μορφής που θέλουμε και άρα ανήκει στη τ. Άρα η τ είναι τοπολογία στο X.

Ορισμος 4.1.4. Η τ λέγεται τοπολογία Tychonoff, ή καρτεσιανή τοπολογία γινόμενο ή τοπολογία γινόμενο στο X και ο (X, τ) λέγεται καρτεσιανός τοπολογικός χώρος ή τοπολογικός χώρος γινόμενο των X_i και τα σύνολα X_i συντελεστές του X.

Θεωρημα 4.1.5. *Έστω (X, τ) ο τοπολογικός χώρος γινόμενο των χώρων $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ και έστω $\pi_i : X \to X_i$ η απεικόνιση προβολής. Τότε ισχύουν:*

i) *Η π_i είναι συνεχής, ανοικτή και «επί».*

ii) *Αν (Y, u) ένας τοπολογικός χώρος και f μια απεικόνιση από τον Y στον X, τότε η f είναι συνεχής αν και μονο αν οι $\pi_i \circ f$ είναι συνεχείς για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη: i) Έστω U_i ανοικτό εν X_i τότε $\pi_i^{-1}(U_i) = \times\{W_i : i \in I\}$, όπου $W_i = U_i$ και $W_j = X_j$ για $i \neq j$. Άρα $\pi_i^{-1}(U_i) \in \tau$ και συνεπώς η π_i είναι συνεχής.

Αφού η π_i διατηρεί τις ενώσεις, για να δείξουμε ότι στέλνει ανοικτά σε ανοικτά, αρκεί να δείξουμε ότι το $\pi_i(W)$ είναι ανοικτό, όπου

$$W = \times\{W_i : i \in I, W_i \in \tau_i \text{ και } W_i = X_i \text{ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος}\}.$$

Είναι $\pi_i(W) = W_i$ το οποίο είναι ανοικτό εν X_i. Επίσης προφανώς η π_i είναι «επί».

ii) Αν η f είναι συνεχής τότε από i) έπεται ότι και $\pi_i \circ f$ συνεχής για κάθε $i \in I$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\pi_i \circ f$ συνεχής για κάθε $i \in I$. Αφού η σχέση f^{-1} διατηρεί τις ενώσεις, αρκεί να δείξουμε ότι $f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό, όπου το W έχει τη μορφή

$$W = \times\{W_i : i \in I, W_i \in \tau_i \text{ και } W_i = X_i \text{ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος}\}.$$

Αν $i_1, i_2, \dots, i_n$ είναι οι μοναδικοί δείκτες για τους οποίους $W_i \neq X_i$ τότε $W = \pi_{i_1}^{-1}(W_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(W_{i_2}) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(W_{i_n})$ άρα το σύνολο $f^{-1}(W) = f^{-1}(\pi_{i_1}^{-1}(W_{i_1})) \cap f^{-1}(\pi_{i_2}^{-1}(W_{i_2})) \cap \dots \cap f^{-1}(\pi_{i_n}^{-1}(W_{i_n})$ είναι μια πεπερασμένη τομή ανοικτών αφού κάθε $\pi_i \circ f$ είναι συνεχής και W_i ανοικτό. Άρα το $f^{-1}(W)$ είναι ανοικτό και η f συνεχής.

Θεωρημα 4.1.6. *Έστω $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ μη κενοί τοπολογικοί χώροι και έστω (X, τ) ο τοπολογικός χώρος γινόμενο των (X_i, τ_i). Ο χώρος (X, τ) περιέχει έναν υπόχωρο ομοιομορφικό με τον (X_i, τ_i) για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε ένα $j \in I$ και για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε ένα $x_i \in X_i$. Έστω $X_j' = X_j \times \times\{\{x_i\} : i \in I, i \neq j\}$. Ορίζουμε $e : X_j \to X$ ως εξής $e(z) = \{z\} \times \times\{\{x_i\} : i \in I, i \neq j\}$ οπότε είναι

$$(e(z))_\kappa = \begin{cases} z & \kappa = j \\ x_\kappa & \kappa \neq j \end{cases}$$

Η συνάρτηση e είναι «1-1» από το X_j επί του X_j'. Ακόμη $\pi_\kappa \circ e$ είναι προφανώς συνεχής για όλα τα κ άρα από το θεώρημα 4.1.5 η e είναι συνεχής. Επίσης έχουμε $e^{-1} = \pi_j|_{X_j'}$ άρα η e^{-1} είναι συνεχής. Έτσι η e είναι ομοιομορφισμός και ο X_j' είναι υπόχωρος του X ομοιομορφικός με το X_j.

Παρατηρηση 4.1.7. Η συλλογή συνόλων της μορφής

$$W = \times\{W_i : i \in I, W_i \text{ ανοικτό εν } X_j \text{ και } |i : W_i \neq X_i| < \infty\}$$

αποτελεί βάση της τοπολογίας τ.

Παρατηρηση 4.1.8. Η συλλογή συνόλων της μορφής

$$W = \times\{W_i : i \in I, W_i \text{ ανοικτό εν } X_j \text{ και } |i : W_i \neq X_i| < \infty\}$$

είναι υποβάση της τοπολογίας τ.

Παρατηρηση 4.1.9. Η τ είναι η μικρότερη τοπολογία του X ώστε κάθε προβολή να είναι συνεχής.

Παρατηρηση 4.1.10. Από το θεώρημα 4.1.6 έπεται ότι οι συνιστώσες σύνολα X_i έχουν τις τοπολογικές ιδιότητες του χώρου γινόμενο, που κληρονομούνται στους υπόχωρους.

Παρατηρηση 4.1.11. Από το θεώρημα 4.1.5 έπεται ότι οι συνιστώσες σύνολα X_i έχουν τις τοπολογικές ιδιότητες του χώρου γινόμενο, που μεταφέρονται με τις «επί», συνεχείς, ανοικτές συναρτήσεις.

Ορισμος 4.1.12. Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ σε ένα σύνολο X είναι μια μη-κενή συλλογή από μη-κενά υποσύνολα του X, τέτοια ώστε:

i) Αν $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ τότε $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ και

ii) Αν $F_1 \subset F_2 \subset X$ και $F_1 \in \mathcal{F}$ τότε $F_2 \in \mathcal{F}$.

Ορισμος 4.1.13. Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ συγκλίνει στο σημείο x του τοπολογικού χώρου X όταν για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ με $F \subset U$ και γράφουμε τότε $\mathcal{F} \to x$.

Ορισμος 4.1.14. Έστω f μια απεικόνιση από το X στο Y και έστω $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X. Το φίλτρο $f(\mathcal{F})$ ορίζεται ώς $f(\mathcal{F}) = \{B \subset Y : \exists F \in \mathcal{F}$ με $f(F) \subset B\}$.

(Είναι εύκολο να δούμε ότι όντως το $f(\mathcal{F})$ είναι φίλτρο.)

Θεωρημα 4.1.15. *Έστω f μια απεικόνιση από τον χώρο X στον χώρο Y. Η f είναι συνεχής στο $x \in X$ αν και μονο αν $f(\mathcal{F}) \to f(x)$ για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στον X με $\mathcal{F} \to x$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x \in X$ και $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο με $\mathcal{F} \to x$. Αν V είναι μια περιοχή του $f(x)$, τότε $f^{-1}(V)$ είναι μία περιοχή του x (λόγω της συνέχειας της f). Αφού $f^{-1}(V)$ είναι μία περιοχή του x και $\mathcal{F} \to x$ έπεται ότι υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ με $F \subset f^{-1}(V)$. Αλλά τότε $f(F) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$ άρα το V είναι στοιχείο του $f(\mathcal{F})$. Άρα $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{U}_x$ η συλλογή των περιοχών του x, η $\mathcal{U}_x$ είναι φίλτρο με $\mathcal{U}_x \to x$ και άρα $f(\mathcal{U}_x) \to f(x)$. Άρα για κάθε περιοχή V του $f(x)$ υπάρχει $B \in f(\mathcal{U}_x)$ με $B \subset V$ και συνεπώς από τον ορισμό του $f(\mathcal{U}_x)$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}_x$ με $f(U) \subset B \subset V$. Έτσι έχουμε $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$ και συνεπώς $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x. Άρα η f είναι συνεχής στο x.

Θεωρημα 4.1.16. *Έστω X το γινόμενο των χώρων $X_i, i \in I$. Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ του X συγκλίνει στο x αν και μόνο αν τα $\pi_i(\mathcal{F})$ συγκλίνουν στο $\pi_i(x)$ για κάθε $i \in I$.*

Απόδειξη: Κάθε π_i είναι συνεχής και άρα σύμφωνα με το θεώρημα 4.1.15 έχουμε ότι $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x)$ όταν $\mathcal{F} \to x$.

Αντίστροφα, έστω $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x)$, για κάθε $i \in I$. Κάθε περιοχή του x περιέχει μια περιοχή της μορφής $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \pi_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$ όπου $i_1, i_2, \dots i_n \in I$ και U_{i_r} είναι περιοχές του $\pi_{i_r}(x)$ στον χώρο X_{i_r}. Οπότε αφού $\pi_{i_r}(\mathcal{F}) \to \pi_{i_r}(x)$ έχουμε ότι $U_{i_r} \supset \pi_{i_r}(F_r)$ για κάποιο $F_r \in \mathcal{F}$. Άρα $F_r \subset \pi_{i_r}^{-1}(U_{i_r})$ και συνεπώς το στοιχείο $F_1 \cap F_2 \cdots \cap F_n$ του $\mathcal{F}$ περιέχεται στην $\pi^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi^{-1}(U_{i_n})$. Άρα $\mathcal{F} \to x$.

Ορισμος 4.1.17. i) Ένα φίλτρο $\mathcal{G}$ λέγεται λεπτότερο του $\mathcal{F}$ όταν $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$.

ii) Ένα φίλτρο $\mathcal{U}$ λέγεται υπέρ-φίλτρο αν το $\mathcal{U}$ δεν περιέχεται σε κανένα άλλο φίλτρο.

iii) Μια οικογένεια $\mathcal{C}$ συνόλων λέμε ότι έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών αν η τομή οποιασδήποτε πεπερασμένης υποοικογένειας της $\mathcal{C}$ είναι μη κενή.

Θεωρημα 4.1.18. i) *Ένας χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε οικογένεια κλειστών συνόλων με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών έχει μή κενή τομή.*

ii) *Μια μη κενή οικογένεια συνόλων περιέχεται σε κάποιο φίλτρο αν και μόνο αν η οικογένεια έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών.*

Απόδειξη: i) Έστω ότι ο X είναι συμπαγής και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια κλειστών συνόλων με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Αν $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{E}$ τότε

$$\begin{aligned}\emptyset \neq C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n &= X \setminus (X \setminus (C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n)) \\ &= X \setminus ((X \setminus C_1) \cup (X \setminus C_2) \cup \cdots \cup (X \setminus C_n)),\end{aligned}$$

οπότε καμία πεπερασμένη υπο-οικογένεια της $\{X \setminus C : C \in \mathcal{E}\}$ δεν καλύπτει τον X. Άρα αφού ο X είναι συμπαγής έχουμε

$$\emptyset \neq X \setminus (\cup\{X \setminus C : C \in \mathcal{E}) = \cap(\{X \setminus (X \setminus C\} : C \in \mathcal{E}) = \cap(\{C : C \in \mathcal{E})\}.$$

Με ακριβώς όμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται το αντίστροφο.

(ii) Έστω ότι η οικογένεια $\mathcal{F}'$ περιέχεται σε κάποιο φίλτρο $\mathcal{F}$, τότε με επαγωγή έχουμε ότι $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{F}$ όταν $F_1, F_2, \dots F_n \in \mathcal{F}'$ και άρα αφού $\emptyset \notin \mathcal{F}$ η $\mathcal{F}'$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\mathcal{F}'$ είναι μη-κενή οικογένεια συνόλων με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Έστω $\mathcal{F} = \{\hat{F} : \hat{F} \supset F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ με $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}'\}$. Προφανώς $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο και $\mathcal{F}'$ περιέχεται στο $\mathcal{F}$.

Θεωρημα 4.1.19. *Κάθε φίλτρο περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{F}$ ένα φίλτρο στο X και $\mathcal{S}$ το σύνολο όλων των φίλτρων στο X που περιέχουν το $\mathcal{F}$ δηλαδή

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ είναι φίλτρο στο } X \text{ λεπτότερο του φίλτρου } \mathcal{F}\}.$$

Το $\mathcal{S}$ είναι μη-κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο με την σχέση του περιέχεσθε. Έστω $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ ένα δίκτυο στο $\mathcal{S}$, έστω $\mathcal{V} = \cup\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A\}$. Κάθε $\mathcal{F}_\alpha$ είναι μή κενό οπότε $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Κανένα $\mathcal{F}_\alpha$ δεν περιέχει το $\emptyset$ άρα το $\mathcal{V}$ δεν περιέχει το $\emptyset$. Αν $G \supset F \in \mathcal{V}$, τότε $F \in \mathcal{F}_\beta$ για κάποιο $\beta \in A$ και έτσι αφού το $\mathcal{F}_\beta$ είναι φίλτρο έχουμε ότι $G \in \mathcal{F}_\beta \subset \mathcal{V}$. Αν $F_1 \in V$ και $F_2 \in V$ τότε για κάποια $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ έχουμε $F_1 \in \mathcal{F}_{\alpha_1}$ και $F_2 \in \mathcal{F}_{\alpha_2}$. Έστω ότι $\mathcal{F}_{\alpha_1} \subset \mathcal{F}_{\alpha_2}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας αφού έχουμε δίκτυο) τότε $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{\alpha_2}$ άρα $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_{\alpha_2} \subset \mathcal{V}$. Άρα το $\mathcal{V}$ είναι φίλτρο στο X το οποίο περιέχει το $\mathcal{F}$. Άρα το δίκτυο έχει άνω φράγμα το $\mathcal{V}$ οπότε από το λήμμα του Zorn το $\mathcal{S}$ έχει μεγιστικά στοιχεία. Έστω $\mathcal{U}$ ένα μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{S}$. Τότε το $\mathcal{U}$ είναι φανερά ένα υπερφίλτρο το οποίο περιέχει το $\mathcal{F}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.20. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για έναν τοπολογικό χώρο X.*

i) *X είναι συμπαγής.*

ii) *Κάθε φίλτρο στον X έχει ένα λεπτότερο φίλτρο το οποίο συγκλίνει.*

iii) *Κάθε υπερφίλτρο στον X συγκλίνει.*

Απόδειξη: i) $\Longrightarrow$ ii). Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο στον X. Τότε η συλλογή $\{\bar{F} : F \in \mathcal{F}\}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών άρα από το θεώρημα 4.1.18 υπάρχει σημείο x στη τομή $\cap\{\bar{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Άρα $x \in \bar{F}$ οπότε κάθε περιοχή του x τέμνεται με το F. 'Αρα η συλλογή $\{N \cap F : N$ περιοχή του $x, \bar{F} \in \mathcal{F}\}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών και συνεπώς περιέχεται σε κάποιο φίλτρο $\mathcal{G}$. Είναι φανερό τώρα ότι $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ συγκλίνει στο x.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Αν $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο στον X, τότε υπάρχει ένα φίλτρο $\mathcal{V}$ λεπτότερο του $\mathcal{U}$ και το $\mathcal{V}$ συγκλίνει, Αλλά κανένα φίλτρο δεν είναι λεπτότερο του υπερφίλτρου $\mathcal{U}$ οπότε $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ και άρα το $\mathcal{U}$ συγκλίνει.

iii) $\Longrightarrow$ i). Έστω $\mathcal{E}$ μια οικογένεια κλειστόν συνόλων με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Τότε η $\mathcal{E}$ περιέχεται σε ένα φίλτρο το οποίο περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ το οποίο συγκλίνει έστω στο x. Κάθε περιοχή του x περιέχει ένα στοιχείο του $\mathcal{U}$ και άρα τέμνει κάθε στοιχείο C της $\mathcal{E}$. Οπότε το x ανήκει στο κλειστό σύνολο C. Άρα $\cap\{C : C \in \mathcal{E}\} \neq \emptyset$ και συνεπώς ο X είναι συμπαγής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.21. i) *Ένα φίλτρο $\mathcal{U}$ στον X είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν για κάθε $A \subset X$ ισχύει ότι $A \in \mathcal{U}$ ή $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

ii) *Αν $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο στον X και f μια απεικόνιση «επί» από το X στο Y, τότε το $f(\mathcal{U})$ είναι υπερφίλτρο στο Y.*

Απόδειξη: i) Υποθέτουμε ότι $\mathcal{U}$ είναι ένα υπερφίλτρο στον X, $A \subset X$ και $A \notin \mathcal{U}$. Αν $A \supset U$ για κάποιο $U \in \mathcal{U}$ τότε έχουμε $A \in \mathcal{U}$. Άρα πρέπει να είναι $(X \setminus A) \cap U \neq \emptyset$ για κάθε $U \in \mathcal{U}$. Οπότε η συλλογή $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών και συνεπώς περιέχεται σε κάποιο φίλτρο $\mathcal{V}$. Αλλά $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο, άρα $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ και συνεπώς $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\mathcal{U}$ περιέχεται σε κάποιο φίλτρο $\mathcal{V}$. Αν $A \in \mathcal{V}$ και $A \notin \mathcal{U}$ τότε η υπόθεση έπεται ότι $X \setminus A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Αλλά τότε τα στοιχεία A και $X \setminus A$ του $\mathcal{V}$ έχουν μή κενή τομή αφού το $\mathcal{V}$ είναι φίλτρο, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ και συνεπώς το $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο.

ii) Για να δείξουμε ότι το $f(\mathfrak{U})$ είναι υπερφίλτρο πέρνουμε $B \subset Y$ και θα δείξουμε ότι ή $B \in f(\mathfrak{U})$ ή $Y \setminus B \in f(\mathfrak{U})$. Αφού $\mathfrak{U}$ είναι υπερφίλτρο ή $f^{-1}(B) \in \mathfrak{U}$ ή $X \setminus f^{-1}(B) \in \mathfrak{U}$, αλλά τότε ή $B \supset f(f^{-1}(B))$ θα ανήκει στο $f(\mathfrak{U})$ ή $Y \setminus B \supset f(f^{-1}(Y \setminus B))$ θα ανήκει στο $f(\mathfrak{U})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.22. (*Tychonoff*). *Το γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη: Έστω $\{X_j : j \in J\}$ μια συλλογή συμπαγών χώρων και έστω $X = \times\{X_j : j \in J\}$. Έστω $\mathfrak{U}$ ένα υπερφίλτρο στον X. Τότε $\pi_i(\mathfrak{U})$ είναι υπερφίλτρο στον X_i και άρα σύμφωνα με το θεώρημα 4.1.20 συγκλίνει. Άρα από το θεώρημα 4.1.18 το $\mathfrak{U}$ συγκλίνει. Οπότε από το θεώρημα 4.1.20 ο X είναι συμπαγής.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1.23. Από την παρατήρηση 4.1.11 και το θεώρημα Tychonoff προκύπτει άμεσα ότι ο χώρος $X = \times\{X_j : j \in J\}$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε X_j είναι συμπαγής χώρος.

Αναφορές

[1] P. S. Aleksandrov and S. V. Fomin, *The work of Tikhonov in topology and functional analysis*, Russ. Math. Surv. 22 (1967), 110–113.

[2] N. Bourbaki, *Livre* III, *Topologie générale*, Actualités Scientifiques et industrielles, Hermann & Cie, éditeurs 858 (1940).

[3] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, CR Acad. Paris, 205, (1937) 777–779.

[4] H. Cartan, *Théorie des filtres*, CR Acad. Paris, 205, (1937) 595–598.

[5] P. R. Chernoff *A Simple Proof of Tychonoff's Theorem Via Nets*, The American Mathematical Monthly Vol. 99, No. 10 (Dec., 1992), pp. 932–934.

[6] J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand Company Inc. 1955.

[7] J. R. Munkres, *Topology*, Second edition. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2000.

[8] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη *Γενική τοπολογία και συναρτησιακή ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1997.

[9] A. W. Schurle, *Topics in topology*, North-Holland, New York-Oxford, 1979.

[10] A. N. Tychonoff, *Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn*, Mathematische Annalen 95 (1926). 139–142.

[11] A. N. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, (German) Math. Ann. 102 (1930), no. 1, 544–561.

[12] A. N. Tychonoff, *Über die Abbildungen bikompakter Räume in Euklidische Räume*, (German) Math. Ann. 111 (1935), no. 1, 760–761.

[13] S. Willard, *General Topology*, Mineola, NY: Dover Publications, 2004.

Ομιλία 5

Ιδιοδιανύσματα από ιδιοτιμές

Αντώνης Τσολομύτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: γραμμική άλγεβρα, διαγωνοποίηση πινάκων

Αρχές Αυγούστου του 2019 ο Fields Medalist Terence Tao λαμβάνει ένα email από τρεις Φυσικούς που δεν τους γνώριζε. Του έγραφαν ότι παρατήρησαν στα πειράματά τους στα νετρίνα κάποια σύμπτωση ιδιοδιανυσμάτων με εκφράσεις ιδιοτιμών και αναρωτιόταν αν υπάρχει κάποια σύνδεση.

Μπορούμε να υπολογίσουμε ιδιοδιανύσματα από ιδιοτιμές;

Απευθύνθηκαν στον Tao γιατί δεν έβρισκαν κάποιο σχετικό τύπο στα βιβλία της Γραμμικής Άλγεβρας.

«Κάτι τόσο στοιχειώδες» σκέφτηκε ο Tao «θα έπρεπε να είναι στα βιβλία της Γραμμικής Άλγεβρας του πρώτου έτους. Δεν είναι, άρα είναι λάθος».

Η προσπάθεια να βρει αντιπαράδειγμα απέτυχε και σε μερικές ώρες είχε τρεις αποδείξεις για τη νέα ταυτότητα.

Το θέμα ενδιέφερε τους Φυσικούς Stephen Parke (Fermi National Acceleration Lab), Xining Zhang (University of Chicago) και Peter Denton (Brookheaven National Lab), διότι αν ήταν αληθές τους έλυνε τα χέρια σε διάφορους υπολογισμούς, μια και ο υπολογισμός ιδιοτιμών πινάκων είναι εύκολος αλλά ο υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων δυσχερής.

Το άρθρο που προέκυψε δημοσιεύθηκε και από τους τέσσερις στο Communications of Math. Physics.

Zhang: «με τον νέο τύπο μπορεί κανείς να υπολογίσει τις ταλαντώσεις του νετρίνου στην ύλη γρήγορα και απλά».

Τον προηγούμενο Μάιο ο Jiyuan Zang και ο επιβλέποντας καθηγητής του Peter Forester είχαν δουλέψει σε πολύ παρόμοιους τύπους βασισμένους στη δουλειά του Yuliy Baryshnikov (University of Illinois at Urbana-Champain) από άρθρο του από το 1981, αλλά δεν πρόσεξαν τη σύνδεση.

Λημμα 5.0.1. *Αν ο B είναι ένας $n \times (n-1)$ πίνακας και συμβολίσουμε με $(I_{n-1}|0)$ τον πίνακα I_{n-1} όπου προσθέτουμε μια n-στη στήλη με μηδενικά, και αν $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$ τότε ισχύει*

$$\det\Big((B^*DB)_{(n-1)\times(n-1)}\Big) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(D)\right) \cdot \Big|\det\Big((I_{n-1}|0)\cdot B\Big)\Big|^2. \tag{5.1}$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\det(B^*DB) = \det B^*_{(n-1)\times n} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \mathrm{B}_{n\times(n-1)}$$

$$= \det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1,n-1} & \cdots & b_{n,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots & \lambda_1 b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n-1} b_{n-1,1} & \cdots & \lambda_{n-1} b_{n-1,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n-1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1,n-1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots & \lambda_1 b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n-1} b_{n-1,1} & \cdots & \lambda_{n-1} b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n-1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1,n-1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \det(B^*DB) &= \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \det\Big((I_{n-1}|0)B\Big)^*\Big((I_{n-1}|0)B\Big) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1} \Big|\det\Big((I_{n-1}|0)B\Big)\Big|^2, \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Αν ο A είναι συμμετρικός $n \times n$ πίνακας τότε υπάρχει πίνακας V ώστε $V^*V = VV^* = I_n$ ώστε $A = VDV^*$ οπότε $D = V^*AV$. Παρατηρήστε ότι

$\lambda_j(D) = \lambda_j(A)$. Άρα αν $\lambda_n(A) = 0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (5.1) τον D, οπότε θα έχουμε

$$\det(B^*V^*AVB) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A) \cdot \left|\det\big((I_{n-1}|0)B\big)\right|^2$$
$$\det\big((VB)^*A(VB)\big) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A) \cdot \left|\det\big((I_{n-1}|0)B\big)\right|^2.$$

Θέτουμε $\Gamma = VB$ οπότε $B = V^*\Gamma$ άρα

$$\text{(5.2)} \qquad \det(\Gamma^*A\Gamma) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A) \cdot \left|\det\big((I_{n-1}|0)V^*\Gamma\big)\right|^2$$
$$= \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A) \cdot \left|\det\left(\left(V\frac{I_{n-1}}{0}\right)\right)^*\Gamma\right|^2,$$

όπου με $\frac{I_{n-1}}{0}$ συμβολίζουμε τον πίνακα I_{n-1} που του έχουμε προσθέσει μια n-στη γραμμή με $n-1$ μηδενικά. (Ο τελευταίος αυτός τύπος μοιάζει με τους τύπους Cauchy-Binet.)

Ας συμβολίσουμε τώρα με M_j τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν του διαγράψουμε την j στήλη και τη j γραμμή. Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεωρημα 5.0.2. *Αν v_i είναι τα ιδιοιδιανύσματα του συμμετρικού $n \times n$ πίνακα A και v_{ij} οι συντεταγμένες τους, τότε*

$$|v_{ij}|^2 \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \big(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j)\big).$$

Ο τύπος αυτός υπολογίζει τις απόλυτες τιμές των συντεταγμένων των ιδιοδιανυσμάτων από τις ιδιοτιμές τους, και είναι ο τύπος που έλειπε μέχρι τώρα από τη Γραμμική Άλγεβρα. *Απόδειξη*: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $j = 1$ και $i = n$. Έτσι ο ζητούμεννος τύπος είναι ο

$$|v_{n1}|^2 \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} \big(\lambda_n(A) - \lambda_k(A)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_n(A) - \lambda_k(M_1)\big).$$

Αλλάζουμε τον A σε $A - \lambda_n(A)I_n =: \tilde{A}$, και παρατηρούμε ότι

- αν $A = VDV^*$ τότε $\tilde{A} = VDV^* - \lambda_n(A)VV^* = V\big(D - \lambda_n(A)I_n\big)V^*$ άρα $\lambda_n(\tilde{A}) = 0$ και $\lambda_k(\tilde{A}) = \lambda_k(A) - \lambda_n(A)$.
- αν τα v_k είναι ιδιοδιάνυσμα του A και $Av_k = \lambda_k(A)v_k$, τότε

$$\tilde{A}(v_k) = Av_k - \lambda_k(A)I_nv_k = \big(\lambda_k(A) - \lambda_n(A)\big)v_k.$$

Δηλαδή οι A και $\tilde{A}$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα. Επιπλέον οι ιδιοτιμές του $\tilde{M}_1$ είναι οι $\lambda_k(M_1) - \lambda_n(A)$, διότι αν το $x_k = (x_{k2}, \dots, x_{kn})^t$ είναι ιδιοδιάνυσμα του M_1 με ιδιοτιμή $\lambda_k(M_1)$ τότε

$$\tilde{M}_1 x_k = \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_n(A) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_k(M_1)x_k - \lambda_n(A)x_k = \big(\lambda_k(M_1) - \lambda_n(A)\big)x_k,$$

δηλαδή το $\lambda_k(M_1) - \lambda_n(A)$ είναι ιδιοτιμή του $\tilde{M}_1$. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$|v_{n1}|^2 \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(A) = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(M_1), \tag{5.3}$$

υπό τον όρο $\lambda_n(A) = 0$.

Θέτουμε

$$\Gamma = \left(\frac{0}{I_{n-1}} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)}$$

και εφαρμόζουμε τον τύπο (5.2). Άρα

$$\det(\Gamma^* A \Gamma) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A) \; \Big|\det\big((I_{n-1}|0)V^*\Gamma\big)\Big|^2 .$$

Όμως $\det(\Gamma^* A \Gamma) = \det M_1$ διότι ο πολλαπλασιασμός $\Gamma^* A$ διαγράφει την πρώτη γραμμή του A:

$$\Gamma^* A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n-1) \times n} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

και ο πολλαπλασιασμός $(\Gamma^* A)\Gamma$ διαγράφει την πρώτη στήλη:

$$\begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n-1) \times n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times (n-1)} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Μένει να δείξουμε ότι $|\det(I_{n-1}|0)V^*\Gamma| = |v_{n1}|$. Υπολογίζοντας το γινόμενο $(I_{n-1}|0)V^*\Gamma$ βρίσκουμε ότι

$$|\det(I_{n-1}|0)V^*\Gamma| = \left|\det\begin{pmatrix} v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,2} & v_{n-1,3} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}\right|.$$

Αλλά η τελευταία ποσότητα είναι το εμβαδόν της προβολής της έδρας με ακμές τα $v_1, \dots, v_{n-1}$ στο επίπεδο που παράγουν τα βασικά διανύσματα $e_2, \dots, e_{n-1}$. Άρα ισούται με το εμβαδόν της έδρας που παράγουν τα $v_1, \dots, v_{n-1}$ (το οποίο ισούται με 1 (αφού τα v_i είναι ορθογανονικά από την $V^*V = I_n$)) επί το συνημίτονο της γωνίας του v_n με το e_1. Δηλαδή είναι ίσο με $|v_{n1}|$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Ομιλία 6

Αλγεβρικοί αριθμοί

Αντώνης Τσολομύτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

Ορισμος 6.0.1. Ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λέγεται αλγεβρικός αν είναι ρίζα πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές ή (μετά από απαλοιφή των παρονομαστών) με ακέραιους συντελεστές. Ονομάζουμε βαθμό του αλγεβρικού αριθμού τον βαθμό του ελάχιστου πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές που τον έχει ρίζα.

- Κάθε ρητός αριθμός m/n είναι αλγεβρικός ως ρίζα του $x - m/n$.
- Κάθε ρίζα $\sqrt[n]{a}$, με $a \in \mathbb{Q}$, είναι αλγεβρικός ως ρίζα του $x^n - a$.
- Είναι γνωστό ότι οι π και e δεν είναι αλγεβρικοί (Lindemann-Weierstrass).
- Από την πλευρά του μέτρου οι αλγεβρικοί είναι αριθμήσιμο σύνολο διότι, αφού χρησιμοποιούμε πολυώνυμα με ρητούς συντελεστές αυτά είναι αριθμήσιμα στο πλήθος και καθένα έχει πεπερασμένο σύνολο ριζών (τους αλγεβρικούς αριθμούς). Έτσι το σύνολο των υπεβατικών αριθμών έχει πλήρες μέτρο σε κάθε διάστημα.
- άλλοι γνωστοί αλγεβρικοί αριθμοί είναι οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ρητών πολλαπλασίων του π. Πχ οι $\cos \pi/7$, $\cos 3\pi/7$ και $\cos 5\pi/7$ είναι ρίζες του $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$.
- Η χρυσή τομή είναι αλγεβρικός αριθμός, αφού $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Στο παρόν θα αποδείξουμε το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.0.2. *Αν t και s δύο αλγεβρικοί αριθμοί τότε οι $t \pm s$, ts και t/s (για $s \neq 0$) είναι και αυτοί αλγεβρικοί.*

Θα παρουσιάσουμε δύο αποδείξεις για το ότι το άθροισμα και το γινόμενο αλγεβρικών είναι αλγεβρικός. Μία υπαρξιακή και μία κατασκευαστική.

6.1 Υπαρξιακή απόδειξη

ΛΗΜΜΑ 6.1.1. *Αν ο t είναι αλγεβρικός θέτουμε $\mathbb{Q}[t]$ όλες τις πολυωνυμικές παραστάσεις του t. Το $\mathbb{Q}[t]$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Q}$ και* $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[t] < \infty$.

Απόδειξη: Έστω ότι το $p(x)$ είναι πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές ώστε $p(t) = 0$, και ας υποθέσουμε ότι $\deg p = n$. Αν $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$ θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a_0, \dots, a_{n-1}$ ώστε

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}.$$

Αν $\deg q \geq n$ τότε από τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης υπάρχουν $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ με $\deg \upsilon(x) \leq n-1$ ώστε

$$q(x) = \pi(x) p(x) + \upsilon(x).$$

Άρα

$$q(t) = \pi(t) p(t) + \upsilon(t) = 0 + \upsilon(t) = \upsilon(t).$$

Αφού $\deg \upsilon(x) \leq n-1$ το $\mathbb{Q}[t]$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Το ότι είναι διανυσματικός χώρος είναι προφανές. □

ΛΗΜΜΑ 6.1.2. *Το $\mathbb{Q}[t]$ για t αλγεβρικό είναι αλγεβρικό σώμα.*

Απόδειξη: Έστω ότι το $p(x)$ είναι ρητό πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού n ώστε $p(t) = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πολυώνυμο $q(x)$ το $1/q(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των

$$1, t, t^2, \dots, t^{n-1},$$

δηλαδή και πάλι πολυώνυμο του t. Από το Λήμμα 6.1.1 αρκεί να το κάνουμε αν $\deg q \leq n-1$. Τα $q(x)$ και $p(x)$ δεν έχουν κοινό διαιρέτη βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 1, γιατί τότε το p θα παραγοντοποιόταν και το t θα ήταν ρίζα πολυωνύμου με μικρότερο βαθμό από n. Άρα $\text{ΜΚΔ}(q(x), p(x)) = 1$. Συνεπώς υπάρχουν πολυώνυμα $r(x)$ και $s(x)$ ώστε

$$r(x) q(x) + s(x) p(x) = 1,$$

(δείτε Παρατήρηση 6.1.5) από όπου, θέτοντας $x = t$ παίρνουμε $r(t) q(t) = 1$ οπότε $1/q(t) = r(t)$, δηλαδή είναι πολυώνυμική έκφραση του t. □

Λημμα 6.1.3. *Ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{Q}[t][s] = \mathbb{Q}[t,s]$ *επί του σώματος* $\mathbb{Q}[t]$ *έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη του Λήμματος 6.1.1. □

Λημμα 6.1.4. *Το* $\mathbb{Q}[t,s]$ *επί του* $\mathbb{Q}$*, για* t*,* s *αλγεβρικούς, έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Απόδειξη: Κάθε πολυώνυμο των t και s μετά από πράξεις είναι πολυώνυμο του s με συντελεστές από το $\mathbb{Q}[t]$ βαθμού $\deg s = m-1$. Οι συντελεστές του ως πολυώνυμα του t πάνω στο $\mathbb{Q}$ είναι το πολύ βαθμού $n-1$, άρα το αρχικό πολυώνυμο γράφεται ως συνδυασμός των $t^i s^j$ για $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ και $j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Άρα $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[t,s] \leq nm$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.0.2: Τα

$$1, (t+s), (t+s)^2, \dots (t+s)^{nm}$$

δεν γίνεται να είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως προς το $\mathbb{Q}$, αφού είναι $nm+1$ το πλήθος και $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[t,s] \leq nm$. Άρα υπάρχουν ρητοί $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{nm}$ όχι όλοι μηδέν ώστε

$$\lambda_0 + \lambda_1(t+s) + \dots + \lambda_{nm}(t+s)^{nm} = 0.$$

Ομοίως και για το ts.

Για το t/s αρκεί να δείξουμε ότι το $1/s$ είναι αλγεβρικός. Αλλά αυτό προκύπτει αμέσως, αφού αν $\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_m s^m = 0$ τότε φανερά

$$\alpha_m + \alpha_{m-1}\frac{1}{s} + \dots + \alpha_0\frac{1}{s^m} = 0,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Παρατηρηση 6.1.5. [Ταυτότητα του Bézout] Αν ΜΚΔ$(a,b) = 1$ τότε υπάρχουν ακέραιοι x, y ώστε $ax + by = 1$. Η απόδειξη αυτής της ταυτότητας δίνεται παρακάτω. Η ίδια ταυτότητα ισχύει και για πολυώνυμα ως εξής: αν $p(x)$, $q(x)$ πολυώνυμα τότε τα p και q δεν έχουν κοινή ρίζα *αν και μόνο αν* υπάρχουν πολυώνυμα $a(x)$ και $b(x)$ ώστε

$$a(x)p(x) + b(x)q(x) = 1.$$

Η γενίκευση αυτής της ταυτότητας σε περισσότερα από δύο πολυώνυμα, είναι το διάσημο θεώρημα του Hilbert, γνωστό ως Nullstellensatz (=το θεώρημα των ριζών), του οποίου η διατύπωση λέει ότι ένα ιδεώδες $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ (K αλγεβρικά κλειστό σώμα) περιέχει το 1 *αν και μόνο αν* τα πολυώνυμα στο I δεν έχουν κοινή ρίζα στο K^n.

Απόδειξη της αρχικής ταυτότητας του Bézout: Το

$$S = \{ax + by \,:\, x, y \in \mathbb{Z},\ ax + by > 0\} \subseteq \mathbb{N}$$

είναι μη κενό (για παράδειγμα, αν $a>0$ θέτουμε $x = 1$ και $y = 0$, ενώ αν $a < 0$ θέτουμε $x = -1$ και $y = 0$). Έστω ότι $d = ax_0 + by_0 := \min S$. Τότε $d|a$ και $d|b$ διότι αν r το υπόλοιπο της διαίρεσης του a με το d τότε $a = sd + r$ με $0 \leq r < d$ από όπου

$$r = a - sd = a - s(ax_0 + by_0) = a(1 - sx_0) + b(-sy_0) \in S,$$

οπότε αφού $r < d$ αναγκαστικά $r = 0$. Άρα το d είναι διαιρέτης των a και b. Επίσης ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b, διότι αν $c > 0$ ώστε $c|a$ και $c|b$ τότε $a = \rho c$ και $b = \sigma c$ (για κατάλληλους ακεραίους ρ και σ), και άρα

$$d = ax_0 + by_0 = \rho c x_0 + \sigma c y_0 = c(\rho x_0 + \sigma y_0),$$

δηλαδή $c|d$ άρα $c \leq d$. □

6.2 Κατασκευαστική λύση

Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο πινάκων ως εξής: αν ο $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και ο $B = (b_{ij})$ είναι ένας $l \times k$ πίνακας, ορίζουμε ως τανυστικό γινόμενο των A και B τον $(ml) \times (kn)$ πίνακα

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} & b\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ c\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} & d\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & be \\ af & bf \\ ce & de \\ cf & df \end{bmatrix}.$$

Έτσι αν ο A είναι τετραγωνικός $n \times n$ και ο B είναι τετραγωνικός $m \times m$, τότε ο $A \otimes B$ είναι τετραγωνικός $(nm) \times (nm)$. Επιπλέον αν $u = [u_1, \dots, u_n]^t$ και $v = [v_1, \dots, v_m]^t$, τότε ο Au είναι $n \times 1$, ο Bv είναι $m \times 1$ και ο $u \otimes v$ είναι $(mn) \times 1$. Άρα ορίζεται και το διάνυσμα $(A \otimes B)(u \otimes v)$ και είναι $(nm) \times 1$ πίνακας. Ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = (Au) \otimes (Bv).$$

Επίσης, αν $m = n$ τετριμμένα ισχύει $(A + B)u = Au + Bu$.

Λημμα 6.2.1. *Για κάθε πολυώνυμο*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^{n-1} + x^n$$

υπάρχει πίνακας C_p *ώστε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο* $\det(C_p - xI)$ *να είναι είτε το* $p(x)$ *είτε το* $-p(x)$.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

και ελέγχουμε με επαγωγή ότι $\det(C_p - xI) = (-1)^n p(x)$. Πράγματι, για $n = 2$ ισχύει $p(x) = a_0 + a_1 x + x^2$, $C_p = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ και

$$\det(C_p - xI) = \begin{vmatrix} -x & -a_0 \\ 1 & -a_1 - x \end{vmatrix} = a_1 x + x^2 + a_0 = p(x).$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για n, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix} = (-1)^n (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}^{n-1} + x^n).$$

Αναπτύσσουμε την

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -x & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_n - x \end{vmatrix}$$

ως προς την πρώτη στήλη και παίρνουμε

$$-x\Big((-1)^n (a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + x^n)\Big) - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -x & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_n - x \end{vmatrix}.$$

Η τελευταία ορίζουσα αναπτύσσεται ως προς την πρώτη γραμμή και η προηγούμενη ποσότητα ισούται με

$$(-1)^{n+1}(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^{n+1}) - (-1)^{n-1}(-a_0)$$

η οποία μετά από απλές πράξεις ισούται με

$$(-1)^{n+1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + x^{n+1}),$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή και την απόδειξη. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.0.2

Κατασκευαστική απόδειξη: Αφού t και s αλγεβρικοί αριθμοί υπάρχουν πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές p και q ώστε $p(t) = 0$ και $q(s) = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας τα πολυώνυμα αυτά είναι μονικά, δηλαδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου τους είναι 1 (αν όχι διαιρούμε με αυτόν). Συνεπώς ο t είναι ιδιοτιμή του C_p και ο s είναι ιδιοτιμή του C_q (αφού $\det(C_p - xI) = (-1)^n p(x)$). Έστω ότι τα u και v είναι αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλαδή $C_p u = tu$ και $C_q v = sv$.

Παρατηρήστε τώρα ότι οι πίνακες C_p και C_q έχουν ρητούς όρους (μονάδες και τους συντελεστές των p και q). Άρα το ίδιο ισχύει και για τους $C_p \otimes C_q$ και

$$(C_p \otimes I) + (I \otimes C_q).$$

Όμως ισχύει

$$\begin{aligned}
\big((C_p \otimes I) + (I \otimes C_q)\big)(u \otimes v) &= (C_p \otimes I)(u \otimes v) + (I \otimes C_q)(u \otimes v) \\
&= (C_p u \otimes v) + (u \otimes C_q v) = (tu \otimes v) + (u \otimes sv) \\
&= (t + s)(u \otimes v).
\end{aligned}$$

Δηλαδή το $t + s$ είναι ιδιοτιμή του $(C_p \otimes I) + (I \otimes C_q)$, άρα ρίζα του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου, άρα αλγεβρικός αριθμός.

Ομοίως,

$$(C_p \otimes C_q)(u \otimes v) = C_p u \otimes C_q v = (tu) \otimes (tv) = (ts)(u \otimes v),$$

άρα ts αλγεβρικός αριθμός. □

Ομιλία 7

Ποια είναι η πιθανότητα δυο στοιχεία μιας ομάδας να μετατίθενται;

Μιχάλης Ανούσης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
mano@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

Η μελέτη προβλημάτων της θεωρίας ομάδων με χρήση θεωρίας πιθανοτήτων ξεκινά την δεκαετία του 1960 με τις εργασίες των P. Erdös and P. Turán. Στην παρουσίαση αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα με ποιά πιθανότητα μετατίθενται δύο στοιχεία μιας πεπερασμένης μη μεταθετικής ομάδας. Η παρουσίαση μας ακολουθεί κυρίως το [4].

7.1 Ομάδες

Μερικά παραδείγματα ομάδων είναι τα ακόλουθα:

Παραδειγματα 7.1.1. (i) Η προσθετική ομάδα των ακεραίων $(\mathbb{Z}, +)$.

(ii) Η προσθετική ομάδα των ακεραίων mod n $(\mathbb{Z}_n, +)$.

(iii) Η συμμετρική ομάδα $\mathbb{S}_n = \{\phi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n,\ 1-1 \text{ και επί}\}$, όπου $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, με πράξη την σύνθεση.

(iv) Η διεδρική ομάδα $\mathbb{D}_n$. Η ομάδα αυτή παράγεται από δύο στοιχεία a, b που ικανοποιούν τις σχέσεις $a^n = b^2 = e, bab = a^{-1}$. Έχουμε $\mathbb{D}_n = \{a^k b^m : k = 0, 1, 2, \ldots, n, b = 0, 1\}$. Για $n \geq 3$ η διεδρική ομάδα $\mathbb{D}_n$ είναι η ομάδα των ισομετριών του επιπέδου που αφήνουν αναλλοίωτο ένα κανονικό πολύγωνο με n-πλευρές.

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού μιας ομάδας περιγράφει πλήρως την ομάδα. Δίνουμε ορισμένα παραδείγματα πινάκων πολλαπλασιασμού.

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού της ομάδας $\mathbb{Z}_4$ είναι ο ακόλουθος.

$\mathbb{Z}_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Η $\mathbb{D}_2$ παράγεται από δύο στοιχεία a, b που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a^2 = b^2 = e, bab = a^{-1}.$$

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού της είναι ο ακόλουθος

$\mathbb{D}_2$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Η $\mathbb{D}_3$ παράγεται από δύο στοιχεία a, b που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a^3 = b^2 = e, bab = a^{-1}.$$

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού της είναι ο ακόλουθος

$\mathbb{D}_3$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
1	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

Η $\mathbb{D}_4$ παράγεται από δύο στοιχεία a, b που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a^4 = b^2 = e, bab = a^{-1}.$$

Ο πίνακας πολλαπλασιασμού της είναι ο ακόλουθος

$\mathbb{D}_4$	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	e	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	e	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^eb	a^2	a	e	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	e

7.2 Το πρόβλημα

Η πιθανότητα να μετατίθενται δύο στοιχεία μιας πεπερασμένης ομάδας ορίζεται ως ακολούθως: θεωρούμε στον πίνακα πολλαπλασιασμού της ομάδας, το πλήθος των ζευγών (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $xy = yx$ και διαιρούμε αυτόν τον αριθμό με το πλήθος των ζευγών (x, y). Δηλαδή αυτή η πιθανότητα δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{Pr}(G) = \frac{\text{πλήθος ζευγών που μετατίθενται}}{\text{συνολικό πλήθος ζευγών}}.$$

Για παράδειγμα, στον πίνακα πολλαπλασιασμού της ομάδας $\mathbb{D}_3$ αν σημειώνουμε με κόκκινο το αποτέλεσμα xy, όταν $xy \neq yx$ και μετρήσουμε τα ζεύγη (x, y) που ικανοποιούν την σχέση $xy = yx$ έχουμε:

$\mathbb{D}_3$	e	a	a^2	b	ab	a^2b
1	e	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	e	ab	a^2b	b
a^2	a^2	e	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	e	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	e	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	e

$$\mathrm{Pr}(G) = \frac{|C|}{|G|^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Άρα αν η G είναι μεταθετική για όλα τα ζεύγη (x, y) με $x, y \in G$ έχουμε $xy = yx$ και άρα $\Pr(G) = 1$. Κατά συνέπεια το πρόβλημα έχει ενδιαφέρον για μη μεταθετικές ομάδες.

7.3 Σύμπλοκα

Για να μελετήσουμε το πρόβλημα, θα χρειαστούμε κάποια στοιχεία από την θεωρία ομάδων, τα οποία ο αναγνώστης μπορεί να βρεί στα [1, 3].

Αν G είναι μία ομάδα και H μία υποομάδα της G, ορίζουμε την ακόλουθη σχέση στην G:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας. Για $a \in G$, συμβολίζουμε aH το σύνολο $\{ah : h \in H\}$. Η ακόλουθη πρόταση αποδεικνύεται εύκολα:

Πρόταση 7.3.1. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

- $a \sim b$
- $a \in bH$
- $b \in aH$
- $aH = bH$

Προκύπτει απο την πρόταση ότι αν $a \in G$, η κλάση ισοδυναμίας του είναι το σύνολο aH.

Ορισμός 7.3.2. Μια κλάση ισοδυναμίας της σχέσης ισοδυναμίας που ορίσαμε, λέγεται σύμπλοκο της H στην G.

Δηλαδή, ένα σύμπλοκο της H στην G είναι ένα σύνολο της μορφής aH για κάποιο $a \in G$.

Θα συμβολίζουμε $|X|$ το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X.

Παρατήρηση 7.3.3. Δύο σύμπλοκα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.

Πράγματι, η απεικόνιση $f : H \to aH$ με $f(x) = ax$ είναι 1-1 και επί. Το γεγονός ότι είναι επί είναι προφανές. Αν $f(x) = f(y)$ δηλαδή $ax = ay$ τότε $a^{-1}ax = a^{-1}ay$ και συνεπώς $x = y$, που δείχνει ότι η f είναι 1-1.

Παράδειγμα 7.3.4. Αν $G = \mathbb{D}_3$ και $H = \{e, b\}$, τότε τα σύμπλοκα της H στην G είναι

$$\{e, b\}, \quad \{a, ab\}, \quad \{a^2, a^2b\}.$$

Παράδειγμα 7.3.5. Αν $G = \mathbb{Z}$ και $H = 3\mathbb{Z} = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$, τότε τα σύμπλοκα της H στην G είναι

$$\{3k : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \{3k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}, \quad \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Συμβολίζουμε G/H το σύνολο των συμπλόκων της H στην G. Μία υποομάδα H της G λέγεται κανονική αν $x \in G, y \in H \Rightarrow xyx^{-1} \in H$.

Πρόταση 7.3.6. *Αν η H είναι κανονική υποομάδα της G, τότε το G/H με πράξη*

$$(aH, bH) \mapsto abH$$

είναι ομάδα.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι η πράξη είναι καλά ορισμένη.

Έστω $a, b, a', b' \in G$, τέτοια ώστε $a \sim a'$, $b \sim b'$. Τότε

$$ab \sim a'b'$$

γιατί $a' = ah, b' = bk$ για κάποια $h, k \in H$ και έχουμε

$$a'b' = ahbk = abb^{-1}hbk \in abH.$$

Δείχνουμε ότι το αντίστροφο είναι καλά ορισμένο.

Αν $a \sim a'$ τότε $a^{-1} \sim a'^{-1}$ γιατί $a' = ah$ για κάποιο $h \in H$ και

$$a'^{-1} = h^{-1}a^{-1} = a^{-1}ah^{-1}a^{-1} \in a^{-1}H.$$

Αφού δείχτηκε ότι η πράξη είναι καλά ορισμένη είναι εύκολο να δείξουμε ότι η G/H με την πράξη αυτή είναι ομάδα. □

7.4 Κλάσεις συζυγίας

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι η G είναι πεπερασμένη. Στην ενότητα αυτή θα δούμε ότι

$$\Pr(G) = k/|G|$$

όπου k το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G.

Για $x \in G$ θέτουμε

$$C_x = \{y \in G : xy = yx\}.$$

Συμβολίζουμε C το σύνολο των ζευγών (x, y) με $x, y \in G$ που μετατίθενται. Θέλουμε να βρούμε το $|C|$.

Έχουμε ότι $|C| = \sum_{x \in G} |C_x|$. Πράγματι, αν $\tilde{C}_x = \{(x, y) : yx = xy\} = \{(x, y) : y \in C_x\}$ τότε $C = \bigcup_{x \in G} \tilde{C}_x$. Τα σύνολα $\tilde{C}_x$ είναι ξένα ανά δύο και το κάθε ένα έχει πλήθος στοιχείων ίσο με $|C_x|$.

Πρόταση 7.4.1. *Αν $x \in G$, το*

$$C_x = \{y \in G : xy = yx\}$$

είναι υποομάδα της G.

Απόδειξη. Έστω $y, z \in C_x$. Έχουμε

$$(yz)x = y(zx) = y(xz) = (yx)z = (xy)z = x(yz)$$

και άρα $yz \in C_x$.

Έστω $y \in C_x$. Έχουμε

$$yx = xy \Rightarrow y^{-1}yxy^{-1} = y^{-1}xyy^{-1} \Rightarrow xy^{-1} = y^{-1}x$$

και άρα $y^{-1} \in C_x$. □

Δυο στοιχεία x, y της G λέγονται συζυγή αν υπάρχει $z \in G$ ώστε $x = zyz^{-1}$. Εύκολα βλέπουμε ότι η συζυγία είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση 7.4.2. *Έστω $x \in G, y \in G, z \in G$. Αν $x = zyz^{-1}$ τότε*

$$|C_x| = |C_y|.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι

$$w \in C_y \Leftrightarrow zwz^{-1} \in C_x.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} wy = yw &\Leftrightarrow wz^{-1}zyz^{-1}z = z^{-1}zyz^{-1}zw \\ &\Leftrightarrow wz^{-1}xz = z^{-1}xzw \\ &\Leftrightarrow zwz^{-1}xzz^{-1} = zz^{-1}xzwz^{-1} \\ &\Leftrightarrow zwz^{-1}x = xzwz^{-1}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 7.4.3. *Το πλήθος των στοιχείων που είναι συζυγή με το x είναι ίσο με το πλήθος των συμπλόκων της C_x στην G.*

Απόδειξη. Αν y, z ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο, τότε $y = zw$ με $w \in C_x$. Τότε

$$yxy^{-1} = zwx(zw)^{-1} = zwxw^{-1}z^{-1} = zxz^{-1}$$

και άρα δίνουν το ίδιο συζυγές.

Αντίστροφα, αν

$$yxy^{-1} = zxz^{-1} \Rightarrow z^{-1}yx = xz^{-1}y \Rightarrow z^{-1}y \in C_x$$

και άρα $y = zw$ για κάποιο $w \in C_x$. □

Αν K είναι μία κλάση συζυγίας της G και $x_0 \in K$, από την Πρόταση 7.4.2 έχουμε

$$\sum_{x \in K} |C_x| = |K||C_{x_0}|$$

και από την Πρόταση 7.4.3 έχουμε

$$\sum_{x \in K} |C_x| = [G : C_{x_0}]|C_{x_0}|.$$

Έστω $S_1, S_2, \dots, S_k$ να είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της G με σχέση ισοδυναμίας την σχέση συζυγίας. Αν από κάθε κλάση S_i επιλέξουμε έναν $x_i \in S_i$ έχουμε:

$$|C| = \sum_{x \in G} |C_x| = \sum_{i=1}^{k} [G : C_{x_i}]|C_{x_i}|.$$

Επειδή $[G : C_{x_i}]|C_{x_i}| = |G|$ συμπεραίνουμε ότι $|C| = k|G|$, και τελικά $\Pr(G) = k/|G|$, όπου k το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G.

Το αποτέλεσμα αυτό υπάρχει στο [2].

7.5 Τελικό αποτέλεσμα

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι η G δεν είναι μεταθετική. Συμβολίζουμε $Z(G) = \{x \in G : xy = yx \ \ \forall y \in G\}$ το κέντρο της G, δηλαδή την υποομάδα της G που αποτελείται από τα στοιχεία της G που μετατίθενται με όλα τα στοιχεία της G.

Έστω $K_1, K_2, \dots, K_k$ οι κλάσεις συζυγίας της G. Τότε

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |K_i| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} |K_i|$$

όπου K_i, $i = 1, 2, \dots, r$ οι κλάσεις συζυγίας με περισσότερα από ένα στοιχεία και $k = r + |Z(G)|$.

Έχουμε $|K_i| \geq 2$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, r$ και άρα

$$|Z(G)| + 2r \leq |G| \Rightarrow 2|Z(G)| + 2r \leq |G| + |Z(G)|$$

$$2k \leq |G| + |Z(G)|.$$

Συνεπώς

$$k/|G| \leq \frac{1}{2|G|}\left(|G| + |Z(G)\right) \Leftrightarrow$$
$$k/|G| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|Z(G)|}{|G|}\right).$$

Από την Πρόταση 7.5.3 που θα αποδείξουμε στην συνέχεια, έχουμε ότι

$$\frac{|G|}{|Z(G)|} \geq 4$$

και τελικά

$$k/|G| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|Z(G)|}{|G|}\right) \leq \frac{5}{8}.$$

Άρα έχουμε το ακόλουθο:

Θεωρημα 7.5.1. *Έστω $\mathrm{Pr}(G)$ η πιθανότητα να μετατίθενται δύο στοιχεία μιας πεπερασμένης μη μεταθετικής ομάδας. Τότε*

$$\mathrm{Pr}(G) \leq \frac{5}{8}.$$

Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι

$$\frac{|G|}{|Z(G)|} \geq 4.$$

Χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση. Από την Πρόταση 7.3.6 το $G/Z(G)$ είναι ομάδα.

Προταση 7.5.2. *Αν η G δεν είναι μεταθετική, τότε η $G/Z(G)$ δεν είναι κυκλική.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι αν η $G/Z(G)$ είναι κυκλική, τότε η G είναι μεταθετική. Έστω ότι η $G/Z(G)$ παράγεται απο το σύμπλοκο $aZ(G)$. Τότε τα άλλα σύμπλοκα είναι της μορφής $a^kZ(G)$ με $k \in \mathbb{Z}$. Έστω $x, y \in G$. Τότε $x = a^kz_1, y = a^mz_2$ με $z_1, z_2 \in Z(G)$. Έχουμε

$$xy = a^kz_1a^mz_2 = a^ka^mz_1z_2 = a^ma^kz_2z_1 = a^mz_2a^kz_1 = yx. \qquad \square$$

Προταση 7.5.3.

$$\frac{|G|}{|Z(G)|} \geq 4$$

Απόδειξη. Επειδή

$$|G| = [G : Z(G)]|Z(G)|$$

και $[G : Z(G)] = |G/Z(G)|$ έχουμε ότι

$$\frac{|G|}{|Z(G)|} = |G/Z(G)|.$$

Οι ομάδες με λιγότερα από 4 στοιχεία είναι κυκλικές. Επειδή η $G/Z(G)$ δεν είναι κυκλική,

$$\frac{|G|}{|Z(G)|} = |G/Z(G)| \geq 4$$

$\square$

Το φράγμα του Θεωρήματος 7.5.1 είναι βέλτιστο. Πράγματι στην ομάδα $\mathbb{D}_4$ έχουμε

$$\Pr(G) = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}.$$

$\mathbb{D}_4$	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
e	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	a^3b	a^2b	ab	e	a^3	a^2	a
ab	ab	b	a^3b	a^2b	a	e	a^3	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^3b	a^2	a	e	a^3
a^3b	a^3b	a^2b	ab	b	a^3	a^2	a	e

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\Pr(G_1 \times G_2) = \Pr(G_1)\Pr(G_2)$$

όπου $G_1 \times G_2$ είναι το ευθύ γινόμενο των ομάδων G_1, G_2. Άρα δεν υπάρχει απόλυτο κάτω φράγμα για το $\Pr(G)$.

Αναφορές

[1] Δ. Βάρσος, Δ. Δεριζιώτης, Γ. Εμμανουήλ, Μ. Μαλιάκας, Ο. Ταλλέλη, *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Εκδόσεις Σοφία.

[2] P. Erdös and P. Turán, *On some problems of a statistical group theory* IV, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 19 (1968), 413–435.

[3] J. Fraleigh, *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Ίδρυμα Τεχνολογίας & Έρευνας-Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[4] W. H. Gustafson *The American Mathematical Monthly* Vol. 80, No. 9, pp. 1031–1034.

Ομιλία 8

Η δημιουργία των διαστημάτων* της μουσικής από τον Πυθαγόρα

Αντώνης Τσολομύτης

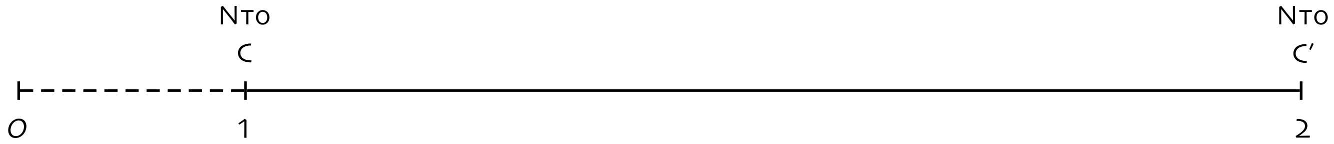
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

Η μουσική συνόδευε τον άνθρωπο στις χαρές και στις λύπες του από τα πανάρχαια χρόνια σε κάθε γωνιά της Γης. Πολλοί λαοί προσπάθησαν να οργανώσουν την κατασκευή μουσικών οργάνων και να τα κάνουν να παίζουν «μελωδικά» χωρίς μεγάλη επιτυχία. Κρατώντας την πολιτική ορθότητα, με το προηγούμενο δεν εννοούμε ότι τα αποτελέσματα δεν ήταν αρεστά. Θα δώσουμε ορθολογικό ορισμό της έννοιας της «παραφωνίας» (φάλτσο) ώστε να μην ειπησέρχονται στη συζήτησή μας υποκειμενικά θέματα. Ποιο είναι όμως το ζητούμενο. Έχοντας μια χορδή στην άκρη της οποίας ασκείται σταθερή τάση (δηλαδή είναι τεντωμένη με σταθερή και συγκεκριμένη δύναμη) επιθυμούμαι να βρούμε τρόπο να την κόψουμε σε υποδιαιρέσεις, δηλαδή σε μικρότερες χορδές, ώστε το σύνολο των χορδών που προκύπτει να παράγει ένα «αρμονικό» (και όχι «παράφωνο») μουσικό αποτέλεσμα. Για να δώσουμε τον ορισμό της «παραφωνίας» θα πρέπει πρώτα να κατανοήσουμε ότι μια χορδή, αν υποθέσουμε ότι παράγει την νότα Ντο (συχνότητα 261,63 Hz, μήκος κύματος 131,87 cm), αν

*διάστημα = νότα

την κόψουμε στη μέση και ταλαντωθεί το μισό τμήμα της θα πάρουμε τη νότα Ντο μια οκτάβα πιο πάνω (συχνότητα $2 \times 261{,}63\,\mathrm{Hz} = 523{,}26\,\mathrm{Hz}$). Δηλαδή θα πάρουμε το ίδιο ηχόχρωμα. Στο επόμενο σχήμα έχουμε σχεδιάσει μια τέτοια χορδή μήκους 2, που επειδή χρειαζόμαστε χώρο από το 1 μέχρι το 2 έχουμε ζωγραφίσει με διακεκομμένη γραμμή το τμήμα από O μέχρι 1 ώστε να χωρέσει στη σελίδα. Δηλαδή τα τμήματα OC και CC' είναι ίσα με μήκος 1 το καθένα. Υποθέτουμε ότι η χορδή OC' παράγει την νότα Ντο (Πυθαγόρεια υπάτη χορδή), οπότε η χορδή OC, αφού είναι η μισή σε μήκος από την OC' παράγει και αυτή την νότα Ντο μια οκτάβα πιο πάνω (Πυθαγόρεια νεατή χορδή (νήτη)).

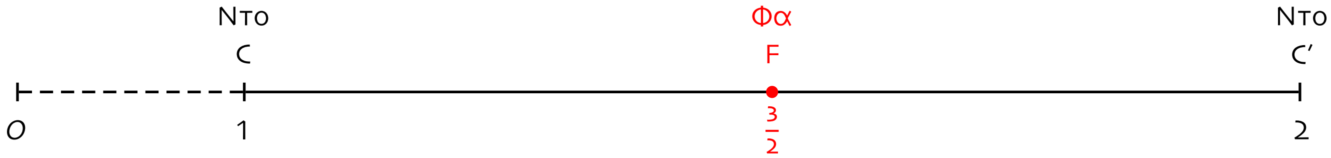


Θέλουμε να βρούμε τρόπο να προσθέσουμε σημεία ανάμεσα στα C και C' ώστε να παραχθούν νότες με την εξής συνθήκη: αν κόψουμε με τον ίδιο τρόπο τη χορδή OC όπως κόψαμε την CC' θα πρέπει να παίρνουμε τις ίδιες νότες μια οκτάβα πάνω. Όταν συμβαίνει αυτό θα λέμε ότι δεν έχουμε «παραφωνίες». Επίσης θέλουμε να προσθέσουμε αρκετές νότες (το πόσες δεν καθορίζεται εκ των προτέρων) γιατί όσες περισσότερες προσθέσουμε τόσο πλουσιότερη θα είναι η μουσική που θα μπορούμε να παίξουμε. Θα μπορούσαμε βεβαίως να μείνουμε με τις δύο Ντο που έχουμε αλλά δεν θα είχε κανένα μουσικό ενδιαφέρον αυτό.

Οι Κινέζοι φτιάχνουν το λεγόμενο «πεντατονικό» μουσικό σύστημα που κόβουν τη χορδή έτσι ώστε να πάρουν 5 νότες. Αλλά τα κοψίματα αυτά αν διατηρηθούν στο τμήμα OC δεν δίνουν τις νότες του CC' μια οκτάβα πάνω, και υπ' αυτή την έννοια είναι «παράφωνα». Μάλιστα αν πάμε στο 1/4 της χορδής και ξανακόψουμε στην πεντατονική κλίμακα τα «λάθη» πολλαπλασιάζονται και το ηχητικό αποτέλεσμα είναι πολύ διαφορετικό από όταν παίζουμε με τα κοψίματα της CC'. Για αυτό η κινέζικη μουσική δεν ανεβοκατεβαίνει πολλές οκτάβες. Γιατί οι αποκλίσεις των ήχων από οκτάβα σε οκτάβα όλο και μεγαλώνει.

8.1 Πυθαγόρας

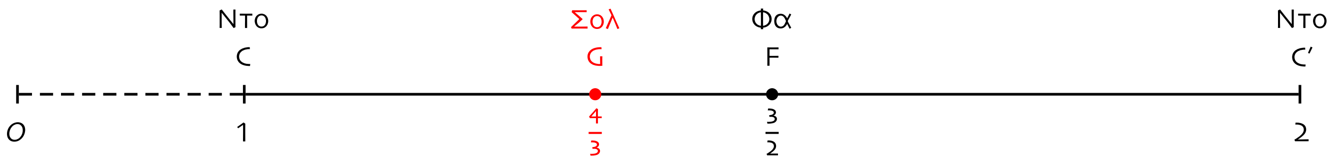
Το πρόβλημα τράβηξε την προσοχή του Πυθαγόρα ο οποίος βάλθηκε να βρει λύση στο πρόβλημα. Καθώς πίστευε ότι οι αριθμοί συνθέτουν τον Κόσμο, και μια και οι αριθμοί 1 και 2 έχουν εξαντλήσει τη χρήση τους (δηλαδή αν ξανακόψουμε τη χορδή δια 2 θα ξαναπάρουμε την Ντο μια οκτάβα ακόμα πιο πάνω) επιστρατεύει τον αριθμό 3 και κόβουμε στα 3/2. Το σημείο αυτό στη σημερινή ορολογία είναι η νότα Φα (πάλλεται το τμήμα OF) (Πυθαγόρειος παράμεσος (παρυπάτη χορδή)):



Τώρα δεν έχει τρόπο να παράγει νέα νότα γιατί το κόψιμο στα 3/2 του 3/2 δεν του ακούγεται καλό. Μην ξεχνάμε ότι ο Πυθαγόρας πειραματίζεται. Προσπαθεί να εφεύρει ένα τρόπο χωρισμού της χορδής οπότε βάζει και υποκειμενικά στοιχεία στις επιλογές του. Αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον λεγόμενο «αρμονικό μέσο». Αν δεν τον θυμάστε από τη γεωμετρία του Λυκείου, ο αρμονικός μέσος είναι ένα σημείο, ας το πούμε x στη χορδή, ώστε να ισχύει

$$\frac{Ox}{OC} = \frac{OC'}{OF}.$$

Οπότε $Ox \cdot (3/2) = 1 \cdot 2$ συνεπώς $Ox = 2 \cdot (2/3) = 4/3$. Στα 4/3 έχουμε τη σημερινή νότα Σολ (πάλεται το τμήμα OG) (Πυθαγόρειος μέσος (μέση χορδή)):



Σίγουρα ο Πυθαγόρας χαίρεται που στη διαδικασία εμπλέκεται πλέον και ο αριθμός 4. Ας κρατήσουμε για τη συνέχεια το εξής:

> Η Ντο ως προς την υψηλότερη νότα Σολ έχει λόγο
>
> $$\frac{OC'}{OG} = \frac{2}{4/3} = \frac{3}{2},$$
>
> και στη σημερινή ορολογία η Σολ ονομάζεται *καθαρή πέμπτη* της Ντο γιατί «απέχει» πέντε ημιτόνια από την υψηλότερη Ντο (Σολ$^\sharp$, Λα, Λα$^\sharp$, Σι, Ντο).

Επίσης δίνουμε τον εξής ορισμό:

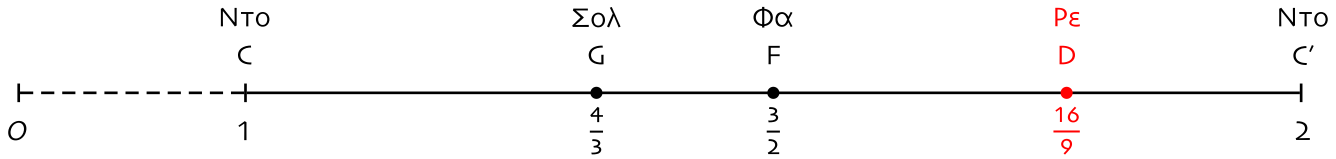
Ορισμος 8.1.1. Το διάστημα που σχηματίστηκε $OG \to OF$ ονομάζεται *τόνος* και έχει λόγο

$$\frac{OG}{OF} = \frac{4/3}{3/2} = \frac{8}{9}.$$

Αυτό το διάστημα (ο τόνος) είναι αρκετά μικρό ώστε ο Πυθαγόρας να προσθέσει και άλλες νότες ανάμεσα στις υπάρχουσες. Ξεκινάμε από την OC' για να βρούμε την επόμενη. Αν αυτή είναι στη θέση x, το Ox θα πρέπει να «απέχει» ένα τόνο από την OC', δηλαδή

$$\frac{Ox}{OC'} = \frac{8}{9} \Rightarrow Ox = \frac{8}{9} \cdot OC' = \frac{8}{9} \cdot 2 = \frac{16}{9}.$$

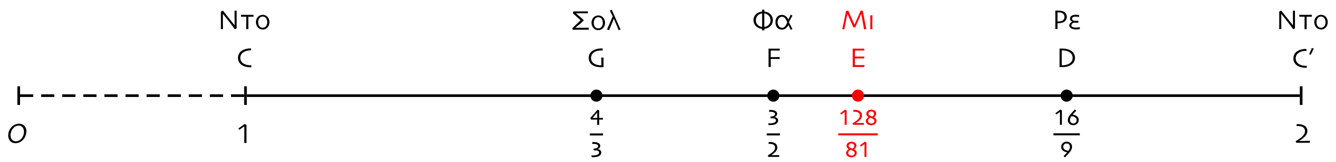
Στα 16/9 είναι η νότα που σήμερα ονομάζεται Ρε (πάλλεται το τμήμα OD):



Για την αμέσως υψηλότερη νότα αν είναι στη θέση x θα πρέπει να ισχύει

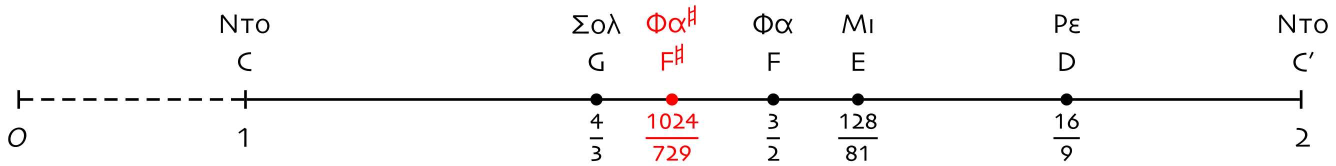
$$\frac{Ox}{OD} = \frac{8}{9} \Rightarrow Ox = \frac{8}{9} \cdot OD = \frac{8}{9} \cdot \frac{16}{9} = \frac{128}{81},$$

νότα που σήμερα ονομάζεται Μι:



Άλλο ένα βήμα για να βρούμε τη σημερινή Φα♯:

$$\frac{Ox}{OE} = \frac{8}{9} \Rightarrow Ox = \frac{8}{9} \cdot OE = \frac{8}{9} \cdot \frac{128}{81} = \frac{1024}{729} \simeq 1{,}4046 < \frac{3}{2} = OF :$$



Δίνουμε τώρα τον ορισμό του ημιτονίου:

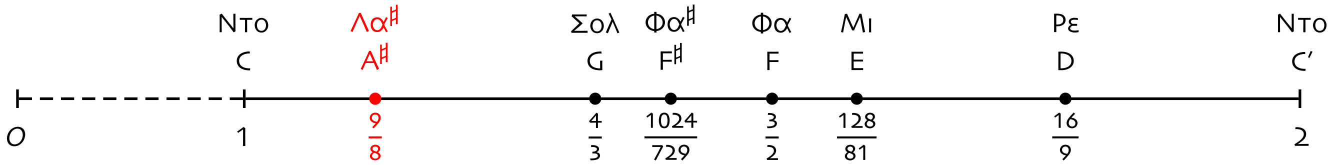
Ορισμος 8.1.2. Το διάστημα από το OG στο $OF^\sharp$ ονομάζεται ημιτόνιο και έχει λόγο

$$\frac{OG}{OF^\sharp} = \frac{4}{3} : \frac{1024}{729} = \frac{4}{3} \cdot \frac{729}{1024} = \frac{243}{256}.$$

Στη συνέχεια ο Πυθαγόρας συνεχίζει να γεμίσει με νότες και με βήμα τον τόνο (8/9) το διάστημα από C μέχρι G. Ένας τόνος χαμηλότερα από την C πρέπει να ικανοποιεί την

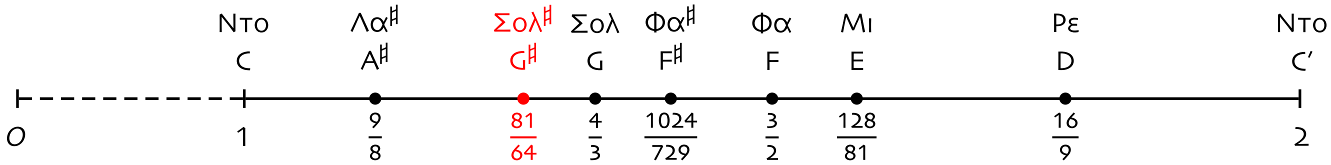
$$\frac{OC}{Ox} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{Ox}{OC} = \frac{9}{8} \Rightarrow Ox = \frac{9}{8},$$

που αντιστοιχεί στη νότα που ονομάζουμε Λα$^\sharp$:



Άλλο ένα βήμα χαμηλότερα για να βρούμε τη σημερινή νότα Σολ$^\sharp$ με λόγο

$$\frac{OA^\sharp}{OG^\sharp} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{OG^\sharp}{OA^\sharp} = \frac{9}{8} \rightarrow OG^\sharp = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64}:$$

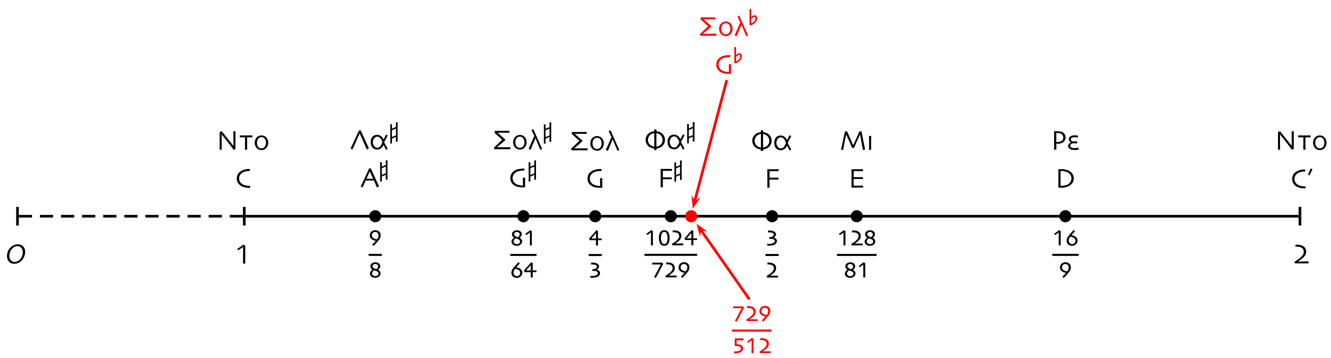


Ετοιμαζόμαστε τώρα για το κρίσιμο σημείο: αν οι επιλογές του Πυθαγόρα είναι σωστές τότε ο επόμενος τόνος χαμηλότερα (δεξιότερα στο σχήμα) πρέπει να είναι η Φα$^\sharp$. Δυστυχώς όμως, αν x το νέο σημείο, θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{OG^\sharp}{Ox} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{Ox}{OG^\sharp} = \frac{9}{8},$$

οπότε

$$Ox = \frac{9}{8} \cdot \frac{81}{64} = \frac{729}{512} \simeq 1{,}4528 > 1{,}4046 \simeq \frac{1024}{729} = OF^\sharp.$$

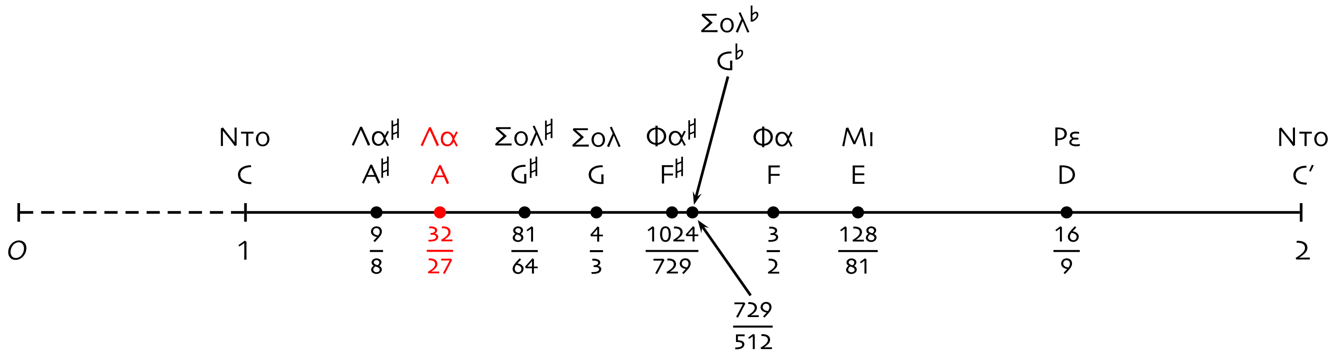


Αυτή είναι η νότα Σολ^b και δεν ταυτίζεται με την Φα$^\sharp$! Αυτή η ασυμφωνία θα συνεχιστεί μέχρι τα σύγχρονα σχεδόν χρόνια μια και δεν υπήρχαν τα μαθηματικά εργαλεία εκείνη την εποχή για να λυθεί το πρόβλημα με ακρίβεια. Έτσι για πολλούς αιώνες οι υφέσεις ΔΕΝ είναι ίδιες με τις διέσεις, και αυτό εξηγεί και την ύπαρξή τους σήμερα παρόλο που σήμερα το πρόβλημα του χωρισμού της χορδής έχει λυθεί με ακρίβεια και δεν υπάρχει αυτό το νέο προβληματικό διάστημα από το $OF^\sharp$ στο OG^b. Με άλλα λόγια σήμερα ισχύει $OF^\sharp = OG^b$ αλλά αυτό δεν ίσχυε πάντα και για αυτό μας έχουν μείνει μέχρι σήμερα οι υφέσεις και οι διέσεις. Το διάστημα αυτό ονομάζεται Πυθαγόρειο κόμμα και αποτελεί «ελλάτωμα» στην Πυθαγόρεια κλίμακα. Είναι όμως ακουστικά μικρό δηλαδή δεν ενοχλεί ιδιαίτερα αν παίζοντας όλες αυτές τις νότες παραλλείψουμε την Σολ^b.

Προσοχή όμως: ο Πυθαγόρας δεν έχει ούτε αυτά τα ονόματα ούτε έχει ακόμα επιλέξει ποιες είναι οι «βασικές» του νότες (ό,τι και αν σημαίνει αυτό). Προς το παρόν το μόνο που έχει είναι χωρίσματα σε μια χορδή. Παρακάτω θα επιλέξει από αυτά τις βασικές του νότες. Πριν όμως φτάσουμε σε αυτό το σημείο, δεν πρέπει να ξεχάσουμε ότι έχουμε και ένα άλλο βασικό διάστημα, το ημιτόνιο. Και με αυτό δε έχουν ακόμα γεμίσει όλα τα διαστήματα. Έτσι ο Πυθαγόρας συνεχίζει να κόβει τη χορδή όπου χωράνε ημιτόνια. Έτσι 1 ημιτόνιο χαμηλότερα από τη Λα$^\sharp$ δίνει

$$\frac{OA^\sharp}{Ox} = \frac{243}{256} \Rightarrow \frac{Ox}{OA^\sharp} = \frac{256}{243} \Rightarrow Ox = \frac{32}{27},$$

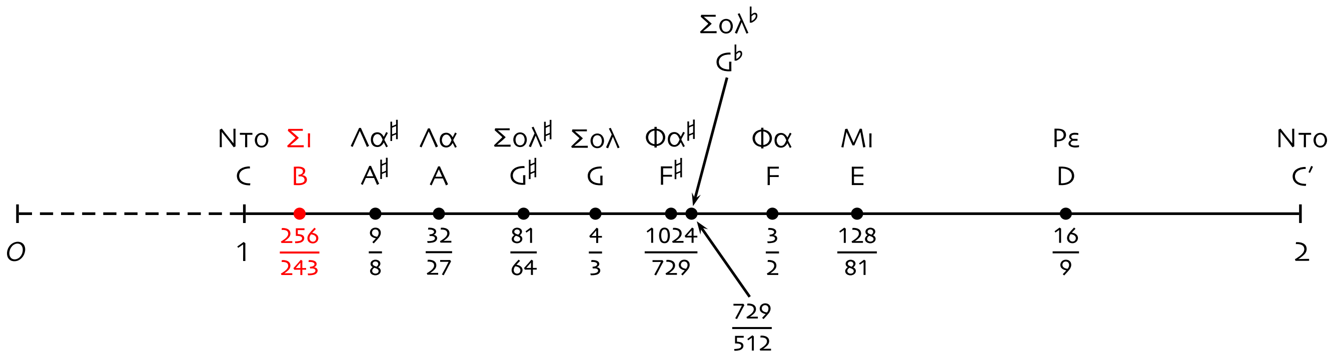
τη σημερινή νότα Λα:



Άλλο ένα κόψιμο κατά ένα ημιτόνιο χαμηλότερα της C θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{OC}{Ox} = \frac{243}{256} \Rightarrow \frac{Ox}{OC} = \frac{256}{243} \Rightarrow Ox = \frac{256}{243},$$

που αντιστοιχεί στη σημερινή νότα Σι:



Ανάμεσα στην Μι και στη Φα δεν χωράει ημιτόνιο διότι βεβαίως

$$\frac{OF}{OE} = \frac{3/2}{128/81} = \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{128} = \frac{243}{256}$$

είναι ήδη ημιτόνιο! Αυτό εξηγεί γιατί η Μι δεν έχει δική της ξεχωριστή δίεση από τη Φα. Υπάρχουν άλλες δύο διέσεις να προστεθούν, η Ντο$^\sharp$ και η Ρε$^\sharp$ που δεν τις προσθέσαμε στο παραπάνω σχήμα και η τοποθέτησή τους αφήνεται ως άσκηση.

Από όλες αυτές τις νότες ο Πυθαγόρας θέλει να διαλέξει κάποιες «βασικές» (τις σημερινές Ντο, Ρε, Μι, Φα, Σολ, Λα, Σι) και τις «δευτερεύουσες» τις διέσεις ή τις υφέσεις τους. Προσέξτε (αν δεν το προσέξατε ήδη) ότι η Σι κατασκευάστηκε όχι ως δίεση της Λα$^\sharp$ αλλά ως ύφεση της Ντο. Ομοίως και η Λα. Αυτό δεν έγινε τυχαία. Ο Πυθαγόρας υπολογίζει και τις διέσεις και τις υφέσεις αλλά στο τέλος πρέπει να κάνει επιλογές με υποκειμενικό κριτήριο.

Επειδή οι πέμπτες του ακούγονται αρκετά «γλυκά» αποφασίζει να πάει με αυτόν τον κανόνα. Δηλαδή θα ξεκινήσει από τη βασική του νότα Ντο και θα αρχίσει να επιλέγει τις επόμενες με το κανόνα να σχηματίζουν λόγο (μεγάλη προς μικρή δηλαδή χαμηλότερη προς ψηλότερη) ίσο με 3/2. Ισοδύναμα θέλει να διαλέξει την επόμενη νότα να είναι πέμπτη της προηγούμενης. Άρα, εφόσον η Σολ είναι πέμπτη της Ντο έχουμε τις δύο πρώτες νότες μας. Την Ντο και τη Σολ. Σολ διά την επόμενη μικρότερη(!) πρέπει να κάνει 3/2 άρα αυτή είναι η Ρε της ψηλότερης οκτάβας. Διότι

$$\frac{OG}{Ox} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{Ox}{OG} = \frac{2}{3} \Rightarrow Ox = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9} < 1.$$

Για να την εντοπίσουμε πρέπει να τη φέρουμε στην οκτάβα που εργαζόμαστε, άρα να πολλαπλασιάσουμε επί δύο, δηλαδή θα πέσουμε στο 16/9 άρα στη Ρε. Έτσι έχουμε τις νότες Ντο, Σολ, Ρε.

Από τη Ρε τώρα στην ψηλότερη νότα με λόγο 3/2 και κάνοντας τις ίδιες πράξεις θα βρούμε τον λόγο 32/27 δηλαδή τη Λα. Έτσι έχουμε τις Ντο, Σολ, Ρε, Λα.

Από τη Λα στην ψηλότερη με λόγο 3/2 θα πέσουμε στο 128/81 = Μι και επαναλαμβάνοντας με τη Μι θα πέσουμε στον λόγο 256/243 = Σι.

Όλες αυτές οι νότες μαζί με τη Φα που δεν μπορεί να αποκλειστεί γιατί αυτή εκκινεί τη διαδικασία σχηματίζουν την μείζονα κλίμακα του Ντο:

Ντο, Σολ, Ρε, Λα, Μι, Σι και Φα

Συνεχίζοντας από τη Σι βρίσκουμε με λόγους 3/2 διαδοχικά τις Φα$^\sharp$, Ντο$^\sharp$, Σολ$^\sharp$, Ρε$^\sharp$, Λα$^\sharp$, Φα, ολοκληρώνοντας τον κύκλο και απορρίπτοντας την Σολ$^\flat$ από το βασικό σχήμα, το οποίο σήμερα ονομάζουμε *χρωματική κλίμακα*. Δηλαδή χρωματική κλίμακα ονομάζουμε όλες τις 7 βασικές νότες και τις 5 διέσεις.

Οι 7 βασικές νότες του Πυθαγόρα (η μείζονα κλίμακα του Ντο) ακούγονται όμορφα και γλυκά και για αυτό κυριαρχούν μέχρι σήμερα στα μωρουδίστικα τραγούδια και μελωδίες (φεγγαράκι μου λαμπρό, τα στρουμφάκια κα). Επίσης πηγαίνοντας σε γειτονικές οκτάβες η ασυμφωνία που προκαλεί το Πυθαγόρειο κόμμα δεν είναι τόσο μεγάλη και είναι ανεκτή (αν και όχι μη ανισχεύσιμη). Αλλά είναι πολύ καλύτερα τα πράγματα από παλαιότερες προσπάθειες τόσο των Ελλήνων όσο και άλλων λαών. Αυτό διότι εφόσον δεν έχουμε έντονες ασυμφωνίες αλλάζοντας σε γειτονικές οκτάβες έχουμε μεγαλύτερη ελευθερία να κινηθούμε στη μουσική σύνθεση και στην κατασκευή οργάνων. Βέβαια αν απομακρυνθούμε πολλές οκτάβες από τη βασική, το σφάλμα που προκαλεί το Πυθαγόρειο κόμμα συσσωρεύεται και ακούγεται πλεον άσχημα. Συνεπώς η δουλεια του Πυθαγόρα δεν είναι το τέλος του ταξιδιού. Θα ακολουθήσουν πολλές προσπάθειες να διορθωθεί η κατάσταση μέχρι τη σύγχρονη εποχή.

Θα παρουσιάσουμε πολύ συνοπτικά τις βασικές από αυτές. Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι ο Πυθαγόρας δεν έλυσε με κάποιο οριστικό τρόπο το πρόβλημα (όπως λύθηκε στη σύγχρονη εποχή) όχι από αδυναμία να κάνει τις σωστές επιλογές. Ο λόγος είναι ότι δεν είχαν ακόμα ανακαλυφθεί τα μαθηματικά που θα το του επέτρεπαν.

8.2 Τα διαστήματα του Πτολεμαίου

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος έζησε από το 85 έως το 165 μετά την αρχή της χριστιανικής χρονολόγησης και προσπάθησε να βελτιώσει τις επιλογές του Πυθαγόρα 600 περίπου χρόνια μετά. Εκείνος αποφασίζει να διατηρήσει τους λόγους 2/1 (οκτάβα όπως και ο Πυθαγόρας) 5/4 και 6/5. Ο λόγος 5/4 ονομάζεται κύρια μείζων τρίτη και στην περίπτωση που η χορδή είναι η Ντο δίνει *περίπου* τη νότα Σολ$^\sharp$. Ο λόγος 6/5 ονομάζεται κύρια ελλάσων τρίτη και προσσεγγίζει το Λα στο παράδειγμά μας. Οι επιλογές του Πτολεμαίου θεωρούνται (υποκειμενικά) πιο αρμονικές, δεν χάνουν τις πέμπτες

του Πυθαγόρα διότι
$$\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3}{2},$$
και χρησιμοποιούνται κατά τον μεσαίωνα.

8.3 Τα διαστήματα Meantime

Κατά την περίοδο του Μπαρόκ από το 1650 έως το 1750 χρησιμοποιείται η κλίμακα «meantime». Σε αυτή διατηρούμε τους λόγους 2/1 (οκτάβα) και μόνο τον λόγο 5/4 (κύρια μείζων τρίτη, *περίπου* η νότα Σολ$^\sharp$). Οι μείζονες τρίτες (τα διαστήματα Ντο→Μι ή Σολ$^\sharp$ →Ντο (4 ημιτόνια)) ακούγονται πολύ μελωδικά και την κλίμακα που προκύπτει χρησιμοποιούσε ο Bach. Αυτός είναι ο λόγος που ακούμε να λένε ότι μια συμφωνία του Bach σε ένα πιάνο δεν ακούγεται το ίδιο γλυκά με τις πρωτότυπες εκτελέσεις. Ο Bach έγραφε με άλλα κοψίματα χορδών. Βεβαίως όργανα που δεν έχουν προκαθορισμένα μήκη χορδών (όπως το βιολί κα) μπορούν να αναπαραγάγουν τον πρωτότυπο ήχο εφόσον ο οργανοπαίκτης είναι αρκετά ικανός να ακολουθήσει τα πατήματα μιας άλλης κλίμακας.

8.4 Μειονεκτήματα των διάφορων τρόπων κατασκευής των διαστημάτων

- Η κλίμακα του Πυθαγόρα δίνει καθαρές πέμπτες στα 3/2 αλλά δεν ακούγονται καλά οι (υποκειμένικα μελωδικές) τρίτες διότι η μελωδική τρίτη του Ντο (4 ημιτόνια από αυτήν) είναι στα 5/4 = 1,25 ενώ 4 ημιτόνια του Πυθαγόρα δίνουν την Σολ$^\sharp$ = 81/64 $\simeq$ 1,265625.
- Του Πτολεμαίου δίνει μείζονες τρίτες αλλά κάθε 6 οκτάβες δίνει μια πολύ κακή ελλάσονα τρίτη.
- Η Meantone προσπαθεί να βρει μια μέση οδό παράγοντας καλές τρίτες και κατά προσσέγγιση πέμπτες.

8.5 Η σύγχρονη μεθοδος

Η σύγχρονη μέθοδος δημιουργίας των μουσικών διαστημάτων λέγεται «equal temperament» («καλός συγκερασμός» στα Ελληνικά). Η επιλογή των λόγων των διαδοχικών ημιτονίων γίνεται έτσι ώστε 12 ημιτόνια να συμπληρώνουν την οκτάβα. Άρα έχουμε κατ' αρχάς παραδοχή της επιλογής του Πυθαγόρα να έχουμε 12 ημιτόνια: 7 κύριες νότες και 5 διέσεις, που τώρα επειδή η επιλογή του λόγου θα είναι απολύτως ακριβής οι διέσεις θα συμπίπτουν με τις υφέσεις. Έτσι αν το πηλίκο μιας χορδής προς την υψηλότερη νότα κατά 1 ημιτόνιο ονομαστεί x θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{OB}{OC}\cdot\frac{OA^\sharp}{OB}\cdot\frac{OA}{OA^\sharp}\cdot\frac{OG^\sharp}{OA}\cdot\frac{OG}{OG^\sharp}\cdot\frac{OF^\sharp}{OG}\cdot\frac{OF}{OF^\sharp}\cdot\frac{OE}{OF}\cdot\frac{OD^\sharp}{OE}\cdot\frac{OD}{OD^\sharp}\cdot\frac{OC'^\sharp}{OD}\cdot\frac{OC'}{OC'^\sharp}=\frac{OC'}{OC}=2,$$

ή αλλιώς

$$x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x=2.$$

Ισοδύναμα

$$x^{12}=2\Rightarrow x=\sqrt[12]{2}.$$

Έτσι αν θέλουμε να χωρίσουμε τη χορδή σε 12 ίσους λόγους το πηλίκο κάθε ημτονίου δεν πρέπει να είναι 256/243 που το έχει ο Πυθαγόρας, αλλά ακριβώς $\sqrt[12]{2}$. Παρατηρήστε πόσο κοντά είναι αυτοί οι αριθμοί:

$$\sqrt[12]{2}\simeq 1{,}059463094 \qquad \frac{256}{243}\simeq 1{,}053497942.$$

Διαφέρουν μόλις στο ψηφίο των χιλιοστών.

Αυτό δείχνει πόσο άριστη ήταν η προσέγγιση του Πυθαγόρα σε μια εποχή που όχι μόνο δεν είχε τον άνετο συμβολισμό για τους αριθμούς και τις πράξεις τους που έχουμε εμείς σήμερα (αν σας δυσκόλεψαν οι παραπάνω πράξεις φανταστείτε τι κόπο κατέβαλε ο Πυθαγόρας) αλλά είχε και άγνοια της 12-της ρίζας. Την εποχή εκείνη δεν ήξερε καν την 2η ρίζα (την τετραγωνική) μια και το λεγόμενο «Πυθαγόρειο» θεώρημα δεν είχε ακόμα αποδειχθεί.

Σήμερα, τα μουσικά όργανα με προκαθοριμένα μήκη χορδών (σημεία ανοίγματος στους αυλούς για τα πνευστά) φτιάχνονται ώστε κάθε ημιτόνιο να ισούται με τη 12η ρίζα του 2. Όσο πιο ακριβές είναι αυτό τόσο περισσότερες οκτάβες μπορεί να ανέβει το όργανο χωρίς να παράγει «παραφωνίες».

Ο καλός συγκερασμός (equal temperament) χρησιμοποιήθηκε από τον Bach το 1722, ο οποίος έγραψε δύο σύνολα από 24 πρελούδια και φούγκες για καθεμιά νότα σε καθεμιά από τις μείζονες και ελλάσονες κλίμακες. Το έργο ονομαζόταν στα γερμανικά Das wohltemperierte Klavier ή στα αγγλικά Well-Tempered Clavier γνωστό στα ελληνικά ως «καλώς συγκερασμένο κλυδοκύμβαλο». Τα προηγούμενά του έργα ήταν γραμμένα με τις νότες που δίνει η μέθοδος meantime.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ: Ευχαριστώ τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μουσικών Σπουδών του Ιόνιου Πανεπιστημίου Στέφανο Ανδρεάδη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του.

Αναφορές

[1] Θέων ο Σμυρναίος, ΤΑ ΚΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΧΡΗΣΙΜΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΝΩΣΙΝ, Εκδόσεις Αίθρα. 2003.

[2] E. Hiller, Theonis Smyrnæi: expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, Leipzig: Teubner, 1878, repr. 1966.

http://myria.math.aegean.gr/psag/