Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης
Α. Τσολομύτης (Editors)

2023

Καρλόβασι, Σάμος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης
Α. Τσολομύτης (Editors)

2023

Καρλόβασι, Σάμος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βιβλιογραφικά δεδομένα:

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης και Γεωμετρίας / Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης, Α. Τσολομύτης (Editors). —

Έκδοση 1.0 ¶ 5 4 3 2 1

vi. 88 σελ. 11 σχ. 6 φωτ. 29,7 cm

1. Μαθηματική Ανάλυση
2. Γεωμετρία

I. Ν. Δαφνής

II. Κ. Τσαπρούνης

III. Α. Τσολομύτης

LCC: QA 299.6 — 433 2019 | DEWEY: 515.15 — DC 23

Το πρόγραμμα και οι σελίδες του σεμιναρίου βρίσκονται στη διεύθυνση http://myria.math.aegean.gr/psag/

Στοιχειοθετήθηκε με το XeLaTeX.

Πρόλογος

Το Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας έχει σκοπό να αναπτύξει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά ανάμεσα στους φοιτητές και τις φοιτήτριες και να προκαλέσει τη συζήτηση για αυτά, παρουσιάζοντας θέματα που σχετίζονται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο με την περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Γεωμετρίας, είτε από την ιστορική της είτε από τη σύγχρονη περίοδό της.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι συνήθως ελάχιστες και μπορούν να παρακολουθήσουν και πρωτοετείς φοιτητές.

Ο τόμος αυτός περιέχει τις διαλέξεις που έγιναν το 2022 οι οποίες παρουσιάζονται με τη χρονολογική σειρά που δόθηκαν.

Όπου χρειάστηκε δεσμός προς διεύθυνση του διαδικτύου τοποθετήθηκε στο περιθώριο η λέξη «δεσμός» η οποία είναι ενεργή για κλικ όταν το αρχείο διαβάζεται σε οθόνη και δίπλα δίνεται ο ίδιος δεσμός με QR-code στην περίπτωση που το αρχείο διαβάζεται τυπωμένο. Το QR-code μπορεί να σκαναριστεί με οποιοδήποτε QR-code scanner από κινητό ή tablet με σύνδεση στο διαδίκτυο.

Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης, Α. Τσολομύτης,

Σάμος 2023

Περιεχόμενα

Ομιλία 1

Το Θεώρημα Ισομορφισμού του Cantor

Κωνσταντίνος Τσαπρούνης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
ktsap@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

Ο Georg Cantor (1845–1918) ήταν Γερμανός μαθηματικός. Υπήρξε ο θεμελιωτής της σύγχρονης συνολοθεωρίας, δηλαδή της μαθηματικής θεωρίας των (άπειρων) συνόλων. Ανάμεσα στα διάφορα σημαντικά μαθηματικά αποτελέσματά του, το θεώρημα ισομορφισμού, το οποίο πλέον φέρει το όνομά του, λέει ότι υπάρχει μόνο μία, έως ισομορφισμού, αριθμήσιμη γραμμική πυκνή διάταξη χωρίς άκρα.

Στα επόμενα, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τις εμπλεκόμενες έννοιες, τη γενική ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος, ενώ θα αναφέρουμε και κάποια περαιτέρω σχετικά αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζουν ενδιαφέρον.

Ορισμος 1.0.1. Έστω ένα (μη κενό) σύνολο A και έστω R μια διμελής σχέση στο A (δηλαδή, $R \subseteq A \times A$). Θα λέμε ότι η R είναι (*γνήσια*) *διάταξη* στο A αν ικανοποιεί τα εξής:

- Δεν υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε xRx (αντιανακλαστική ιδιότητα)
- Για κάθε $x, y, z \in A$, αν xRy και yRz, τότε xRz (μεταβατική ιδιότητα)

Υπάρχουν πολλά οικεία παραδείγματα γνήσιων διατάξεων στα μαθηματικά όπως, π.χ., η συνήθης σχέση του μικρότερου $<$ στους αριθμούς, η σχέση του γνήσιου υποσυνόλου $\subset$ στα σύνολα κ.α.

Σημειώνουμε ότι δεδομένης μιας γνήσιας διάταξης R σε ένα $A \neq \emptyset$, η διμελής σχέση $R \cup \{\langle x, x\rangle : x \in A\}$ είναι διάταξη στο A με την κλασική έννοια (δηλαδή, είναι μια ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική σχέση στο A). Στα επόμενα, επικεντρωνόμαστε στις γνήσιες διατάξεις και θα γράφουμε απλά «διάταξη» εννοώντας «γνήσια διάταξη». Μάλιστα, πολλές φορές παραλείπουμε την αναφορά στο σύνολο A, αν δεν υπάρχει κίνδυνος αμφισημίας. Επίσης, δεδομένης μιας διάταξης $<$ σε ένα $A \neq \emptyset$, θα λέμε ότι η δομή $\langle A, <\rangle$ είναι διατεταγμένο σύνολο.

Ορισμος 1.0.2. Έστω ένα (μη κενό) σύνολο A και έστω $<$ μια διάταξη στο A. Θα λέμε ότι η διάταξη $<$ είναι:

(i) *γραμμική* αν για κάθε $x, y \in A$, ισχύει (ακριβώς) ένα εκ των: $x < y$ ή $y < x$ ή $x = y$ (τριχοτομική ιδιότητα)

(ii) *πυκνή* αν για κάθε $x, y \in A$ με $x < y$, υπάρχει $z \in A$ τέτοιο ώστε $x < z < y$

(iii) *χωρίς άκρα* αν για κάθε $x \in A$ υπάρχουν $y, z \in A$ τέτοια ώστε $y < x < z$

Οι επίσημες ορολογίες του προηγούμενου ορισμού θα έπρεπε να είχαν και την αναφορά στο σύνολο A (π.χ., «πυκνή στο A»), αλλά αυτό παραλείπεται για λόγους συντομίας. Ειδικότερα, παρατηρήστε ότι η παραπάνω έννοια της πυκνότητας αναφέρεται και θεωρείται στο ίδιο το σύμπαν της διάταξης και όχι σε σχέση με έναν περιβάλλοντα χώρο αναφοράς, όπως, π.χ., στην Τοπολογία ή στην Ανάλυση. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να λέμε ότι η διάταξη είναι «πυκνή στον εαυτό της».

Υπάρχει, φυσικά, πληθώρα παραδειγμάτων διατάξεων που (δεν) ικανοποιούν τις προαναφερθείσες ιδιότητες. Η συνήθης σχέση της διάταξης $<$ στους πραγματικούς αριθμούς είναι γραμμική, σε αντίθεση με τη σχέση $\subset$ στα σύνολα (καθώς υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι συγκρίσιμα ως προς τη σχέση του υποσυνόλου μεταξύ τους—π.χ., τα $\{1\}$, $\{2\}$). Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, η συνήθης σχέση $<$ της διάταξης δεν είναι πυκνή, ενώ στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι (γιατί γνησίως μεταξύ δύο διαφορετικών ρητών υπάρχει πάντα άλλος ρητός). Επίσης, είναι σαφές ότι, π.χ., στο $\mathbb{Q}$, σε αντίθεση με το $\mathbb{N}$, η συνήθης διάταξη $<$ δεν έχει άκρα. Μάλιστα, η συνήθης διάταξη στο $\mathbb{Q}$ αποτελεί πρωτοτυπικό παράδειγμα γραμμικής πυκνής διάταξης χωρίς άκρα σε αριθμήσιμο σύνολο.

Προς τη διατύπωση του θεωρήματος, ένας τελικός ορισμός που θα χρειαστούμε είναι αυτός του ισομορφισμού μεταξύ διατεταγμένων συνόλων.

Ορισμος 1.0.3. Έστω $\langle A, <_A\rangle$ και $\langle B, <_B\rangle$ διατεταγμένα σύνολα, όπου $A, B \neq \emptyset$. Θα λέμε ότι τα $\langle A, <_A\rangle$ και $\langle B, <_B\rangle$ είναι (μεταξύ τους) *ισομορφικά*, το οποίο θα το γράφουμε $\langle A, <_A \rangle \simeq \langle B, <_B \rangle$, αν υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ τέτοια ώστε, για κάθε $x, y \in A$:

$$x <_A y \iff f(x) <_B f(y)$$

Μια τέτοια συνάρτηση θα ονομάζεται *ισομορφισμός*.

Για παράδειγμα, το $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ είναι ισομορφικό με το $\langle \{2n : n \in \mathbb{N}\}, < \rangle$, όπως φανερώνεται από τον ισομορφισμό $n \mapsto 2n$, για $n \in \mathbb{N}$. Για ένα ελαφρώς λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα, έστω (a, b) και (c, d) δύο οποιαδήποτε ανοικτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ (με $a < b$ και $c < d$). Τότε, η συνάρτηση $f : (a, b) \longrightarrow (c, d)$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in (a, b)$:

$$f(x) = \frac{(x-a)(d-c)}{b-a} + c$$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ του $\langle (a, b), < \rangle$ και του $\langle (c, d), < \rangle$.

Συχνά, στη διατύπωση της ισομορφικότητας παραλείπεται η αναφορά στα σύνολα A, B και λέμε απευθείας ότι οι διατάξεις είναι (μεταξύ τους) ισομορφικές. Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε το θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.0.4 (Cantor, circa 1895). *Κάθε δύο αριθμήσιμες γραμμικές πυκνές διατάξεις χωρίς άκρα είναι μεταξύ τους ισομορφικές.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ δύο αριθμήσιμα σύνολα και έστω $<_A$ και $<_B$ δύο γραμμικές πυκνές διατάξεις χωρίς άκρα στα A και B αντίστοιχα. Θα κατασκευάσουμε τον ζητούμενο ισομορφισμό κατασκευάζοντας, αναδρομικά, πεπερασμένες προσεγγίσεις του. Για την ακρίβεια, θα ορίσουμε αναδρομικά, για $i \in \mathbb{N}$, σύνολα A_i και B_i καθώς και συνάρτηση $f_i : A_i \longrightarrow B_i$, έτσι ώστε, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, να ισχύουν τα εξής:

(1) $A_i \subseteq A$ και $B_i \subseteq B$

(2) τα A_i και B_i είναι πεπερασμένα

(3) η f_i είναι 1-1 και επί

(4) $f_k \subseteq f_i$, για κάθε $k < i$

(5) για κάθε $x, y \in A_i$ ισχύει ότι:

$$x <_A y \iff f_i(x) <_B f_i(y)$$

Έτσι, σε κάθε βήμα της αναδρομικής κατασκευής η συνάρτηση $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ θα είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των A_i και B_i,[1] η οποία επεκτείνει όλες τις προηγούμενες f_k, για $k < i$. Ο τρόπος με τον οποίο θα ορίσουμε τα A_i και B_i, σε κάθε βήμα, θα είναι τέτοιος ώστε, τελικά, να έχουμε

[1] Πιο συγκεκριμένα, μεταξύ των δομών $\langle A_i, <_A \cap (A_i \times A_i) \rangle$ και $\langle B_i, <_B \cap (B_i \times B_i) \rangle$.

ότι $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Αν επιτύχουμε σε αυτά, τότε προκύπτει άμεσα ότι $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ θα είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός. Αρχικοποιούμε την κατασκευή μας, για $i = 0$, θέτοντας $A_0 = B_0 = f_0 = \emptyset$ (τα οποία προφανώς ικανοποιούν τις αναδρομικές συνθήκες (1)-(5) παραπάνω).

Δεδομένων A_i, B_i και f_i, για κάποιο $i \in \mathbb{N}$, τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες (1)-(5), στο αναδρομικό βήμα της κατασκευής, δηλαδή στο βήμα $i + 1$, διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν το $i + 1$ είναι περιττός ή άρτιος αριθμός.

Περίπτωση 1. Έστω ότι $i + 1 = 2k + 1$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Σε αυτήν την περίπτωση, ασχολούμαστε με το πεδίο ορισμού του ζητούμενου ισομορφισμού και, προς τον τελικό στόχο $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, εξασφαλίζουμε ότι $a_k \in A_{i+1}$. Φυσικά, αν έχουμε ήδη ότι $a_k \in A_i$, τότε άμεσα θέτουμε $A_{i+1} = A_i$, $B_{i+1} = B_i$ και $f_{i+1} = f_i$ και το βήμα τελειώνει. Αλλιώς, αν $a_k \notin A_i$, τότε «επισυνάπτουμε το νέο στοιχείο a_k» και θέτουμε $A_{i+1} = A_i \cup \{a_k\}$.

Τώρα, μιας που το σύνολο A_{i+1} θα είναι το πεδίο ορισμού της f_{i+1}, για να ορίσουμε τόσο το B_{i+1} όσο και την f_{i+1} με τρόπο ώστε να συνεχίζουν να ισχύουν οι αναδρομικές συνθήκες (1)–(5), πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο $b \in B \setminus B_i$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in A_i$, να ισχύει ότι:

$$x <_A a_k \iff f_i(x) <_B b$$

ώστε να θέσουμε $B_{i+1} = B_i \cup \{b\}$ και $f_{i+1} = f_i \cup \{\langle a_k, b\rangle\}$. Διαχωρίζουμε (υπο)περιπτώσεις, ανάλογα με την τοποθέτηση του «νέου» στοιχείου a_k, ως προς τη διάταξη $<_A$, σε σχέση με τα στοιχεία του πεπερασμένου συνόλου A_i. Για την ακρίβεια, ισχύει ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

(i) το a_k είναι $<_A$-μεγαλύτερο από κάθε στοιχείο του A_i, ή

(ii) το a_k είναι $<_A$-μικρότερο από κάθε στοιχείο του A_i, ή

(iii) υπάρχουν $\alpha, \beta \in A_i$ τέτοια ώστε $\alpha <_A a_k <_A \beta$, και δεν υπάρχει $\gamma \in A_i$ τέτοιο ώστε $\alpha <_A \gamma <_A \beta$.

Στις (υπο)περιπτώσεις (i) και (ii), επειδή το B_i είναι πεπερασμένο και η διάταξη $<_B$ δεν έχει άκρα, μπορούμε να βρούμε ένα $b \in B\setminus B_i$ που να είναι $<_B$-μεγαλύτερο, ή $<_B$-μικρότερο, αντίστοιχα, από κάθε στοιχείο του B_i. Στην (υπο)περίπτωση (iii), έχουμε ότι $f_i(\alpha) <_B f_i(\beta)$ και μπορούμε, λόγω του ότι η διάταξη $<_B$ είναι πυκνή, να βρούμε $b \in B \setminus B_i$ τέτοιο ώστε $f_i(\alpha) <_B b <_B f_i(\beta)$.[2]

[2]Και στις τρεις (υπο)περιπτώσεις, επειδή μπορεί να υπάρχουν διάφορα στοιχεία $b \in B \setminus B_i$ που να ικανοποιούν την εκάστοτε απαίτηση (π.χ., στην (iii), η απαίτηση για το $b \in B\setminus B_i$ είναι να ικανοποιεί τη συνθήκη $f_i(\alpha) <_B b <_B f_i(\beta)$), για συγκεκριμενοποίηση της κατασκευής, δεδομένης της απαρίθμησης $B = \{b_k : k \in \mathbb{N}\}$, διαλέγουμε κάθε φορά το $b \in B \setminus B_i$ ως το στοιχείο με τον ελάχιστο δείκτη απαρίθμησης που ικανοποιεί την απαίτηση που μας ενδιαφέρει.

Σε κάθε (υπο)περίπτωση, θέτουμε $B_{i+1} = B_i \cup \{b\}$ και $f_{i+1} = f_i \cup \{\langle a_k, b\rangle\}$ και το βήμα $i+1$ τελειώνει, με τις αναδρομικές συνθήκες (1)-(5) να ικανοποιούνται για τα A_{i+1}, B_{i+1} και f_{i+1}.

Περίπτωση 2. Έστω ότι $i + 1 = 2k + 2$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Σε αυτήν την περίπτωση, ασχολούμαστε με το πεδίο τιμών του ζητούμενου ισομορφισμού και, προς τον τελικό στόχο $\mathrm{B} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_i$, εξασφαλίζουμε ότι $b_k \in B_{i+1}$. Φυσικά, αν έχουμε ήδη ότι $b_k \in B_i$, τότε άμεσα θέτουμε $A_{i+1} = A_i$, $B_{i+1} = B_i$ και $f_{i+1} = f_i$ και το βήμα τελειώνει. Αλλιώς, αν $b_k \notin B_i$, θέτουμε αρχικά $B_{i+1} = B_i \cup \{b_k\}$.

Κατόπιν, ακολουθούμε αντίστοιχη διαδικασία και επιχειρηματολογία με την περίπτωση του περιττού βήματος: πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τώρα τη σχετική τοποθέτηση του «νέου» στοιχείου b_k, ως προς τη διάταξη $<_B$, σε σχέση με τα στοιχεία του πεπερασμένου συνόλου B_i, διαχωρίζοντας τις αντίστοιχες τρεις (υπο)περιπτώσεις, και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της διάταξης $<_A$ για να μπορέσουμε να επεκτείνουμε το A_i και την f_i σε A_{i+1} και f_{i+1} αντίστοιχα, με τρόπο ώστε να συνεχίζουν να ικανοποιούνται οι αναδρομικές συνθήκες (1)–(5)—αφήνουμε τις σχετικές λεπτομέρειες στον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την περιγραφή της αναδρομικής κατασκευής. Τέλος, θέτοντας $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$, ελέγχεται εύκολα ότι η $f : A \longrightarrow B$ είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός μεταξύ των δύο διατάξεων. □

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε στην παραπάνω απόδειξη λέγεται «εμπρός-πίσω» («back-and-forth») και έχει διάφορες εφαρμογές, πέραν του προηγούμενου θεωρήματος. Διαισθητικά, στα περιττά βήματα της αναδρομικής κατασκευής επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού του ισομορφισμού (ώστε να εξασφαλίσουμε τελικά ότι $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$), πηγαίνοντας «εμπρός», αφού ψάχνουμε κατάλληλο στοιχείο στο πεδίο τιμών ώστε να δώσουμε τιμή στο νέο όρισμα που προστέθηκε στο πεδίο ορισμού. Αντίστοιχα, στα άρτια βήματα επεκτείνουμε το πεδίο τιμών (ώστε να εξασφαλίσουμε τελικά ότι $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$), πηγαίνοντας «πίσω», αφού ψάχνουμε κατάλληλο στοιχείο στο πεδίο ορισμού στο οποίο θα δώσουμε τιμή το νέο στοιχείο που προστέθηκε στο πεδίο τιμών.

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει άμεσα ότι κάθε αριθμήσιμη γραμμική πυκνή διάταξη χωρίς άκρα είναι ισομορφική με τη συνήθη διάταξη στους ρητούς αριθμούς. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ των αλγεβρικών αριθμών, με τη συνήθη διάταξή του, τότε έχουμε ότι $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \simeq \langle \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}, < \rangle$.

Προς την ολοκλήρωση αυτής της σύντομης παρουσίασης, αξίζει να αναφέρουμε ότι, με χρήση τεχνικών, εργαλείων και εννοιών από τη Θεωρία Μοντέλων, το θεώρημα του Cantor δίνει, ως πόρισμα, το ότι κάθε δύο γραμμικές πυκνές διατάξεις χωρίς άκρα, όπως για παράδειγμα οι $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$

και $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, είναι μεταξύ τους *στοιχειωδώς ισοδύναμες*. Σε αδρές γραμμές, στο συγκεκριμένο παράδειγμα των δομών $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ και $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, αυτό σημαίνει ότι για κάθε μαθηματική πρόταση σ η οποία περιέχει μόνο (τα λογικά σύμβολα και) το σύμβολο $<$ της διάταξης,[3] η σ ισχύει στη δομή $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ αν και μόνο αν ισχύει στη δομή $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. Με άλλα λόγια, καμία μαθηματική διατύπωση που χρησιμοποιεί (εκτός από τα λογικά σύμβολα) μόνο το σύμβολο της διάταξης δεν μπορεί να «ξεχωρίσει» μεταξύ τους τις δομές $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ και $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, αν και, όπως είναι προφανές, οι δύο αυτές δομές δεν είναι μεταξύ τους ισομορφικές.[4]

Εντελώς αντίστοιχο φαινόμενο προκύπτει και σε άλλα μαθηματικά πλαίσια, πέραν των διατάξεων. Για παράδειγμα, στη γλώσσα της θεωρίας σωμάτων,[5] ισχύει ότι κάθε δύο αλγεβρικά κλειστά σώματα (ίδιας χαρακτηριστικής) είναι μεταξύ τους στοιχειωδώς ισοδύναμα. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε ότι το σώμα των αλγεβρικών αριθμών $\langle \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ είναι στοιχειωδώς ισοδύναμη δομή με το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$. Με άλλα λόγια, καμία μαθηματική διατύπωση που χρησιμοποιεί (εκτός από τα λογικά σύμβολα) μόνο τα σύμβολα $0, 1, +, \cdot$ της δομής σώματος[6] δεν μπορεί να «ξεχωρίσει» μεταξύ τους τις δομές $\langle \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}, 0, 1, +, \cdot \rangle$ και $\langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$, αν και, όπως είναι πάλι προφανές, οι δομές αυτές δεν είναι μεταξύ τους ισομορφικές.

Κλείνοντας, να αναφέρουμε, για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη, ότι μια καλή βιβλιογραφική αναφορά, τόσο για το θεώρημα του Cantor όσο και για τα σχετικά αποτελέσματα και έννοιες της Θεωρίας Μοντέλων, καθώς και για τις εφαρμογές της μεθόδου «εμπρός-πίσω», είναι το βιβλίο *Model Theory*: *An Introduction* του Marker (Springer, 2002).

---

[3] Με μεγαλύτερη ακρίβεια, για κάθε κλειστό (δηλαδή, χωρίς ελεύθερες μεταβλητές) L-τύπο σ της πρωτοβάθμιας γλώσσας $L = \{<\}$. Συμβατικά, θεωρούμε ότι κάθε πρωτοβάθμια γλώσσα περιέχει ήδη τα λεγόμενα *λογικά σύμβολα*, δηλαδή τις μεταβλητές x_i όπου i φυσικός αριθμός, τους λογικούς συνδέσμους $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, την αριστερή και τη δεξιά παρένθεση, το σύμβολο $=$ της ισότητας, καθώς και τα σύμβολα ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$.

[4] Το ότι οι δύο αυτές δομές δεν είναι ισομορφικές προκύπτει άμεσα από την υπεραριθμησιμότητα του $\mathbb{R}$. Περαιτέρω, ωστόσο, γνωρίζουμε ότι η διάταξη στους πραγματικούς αριθμούς, σε αντίθεση με τη διάταξη στους ρητούς, ικανοποιεί την ιδιότητα της *πληρότητας*: κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{R}$. Αυτή η ιδιότητα της διάταξης, η οποία προφανώς «ξεχωρίζει» τις δύο δομές, δεν μπορεί ωστόσο να εκφραστεί από πρόταση της πρωτοβάθμιας γλώσσας $L = \{<\}$.

[5] Δηλαδή, στην πρωτοβάθμια γλώσσα $L = \{0, 1, +, \cdot\}$.

[6] Για την ακρίβεια, καμία L-πρόταση, όπου $L = \{0, 1, +, \cdot\}$.

Ομιλία 2

Leonhard Euler: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Νίκος Δαφνής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
nikdafnis@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

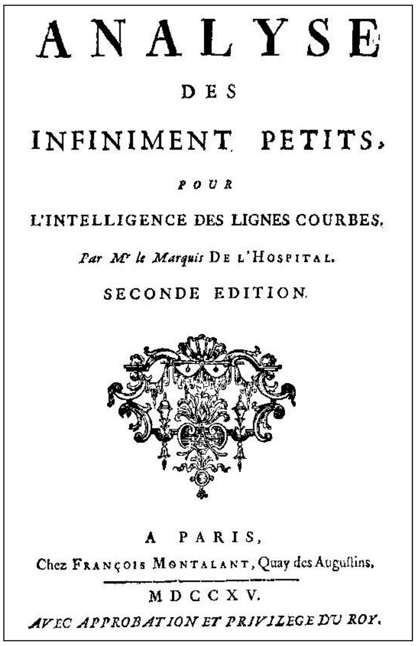
2.1 Ο Euler και η εποχή του

Ο Leonhard Euler γεννήθηκε στις 15 Απριλίου του 1707 στη Βασιλεία της Ελβετίας. Κατέχει αναμφισβήτητα δεσπόζουσα θέση στα μαθηματικά και τις θετικές επιστήμες του 17ου αιώνα ενώ θεωρείται ως ο παραγωγικότερος μαθηματικός όλων των εποχών. Το συνολικό του έργο που ξεπερνάει τους 75 τόμους, εκτείνεται σε ένα ιδιαιτέρως ευρύ φάσμα των σύγχρονων Μαθηματικών, περιλαμβάνοντας μια πληθώρα από πρωτότυπα και θεμελιώδη αποτελέσματα στον Απειροστικό Λογισμό, τη Μαθηματική Ανάλυση, τη Μηχανική, την Οπτική, τη Ρευστομηχανική και την Αστρονομία.

Ο πατέρας του Leonhard ήταν κληρικός αλλά είχε σπουδάσει Μαθηματικά και ήταν φίλος της γνωστής οικογένειας μαθηματικών Bernoulli. Επιθυμούσε για τον γιο του μια καριέρα μέσα στην εκκλησία, όμως ο φίλος του Johann Bernoulli διέγνωσε γρήγορα το πηγαίο ταλέντο του Leonhard και τον έπεισε να τον αφήσει να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά. Ο Johann Bernoulli υπήρξε ο πρώτος δάσκαλος του Leonhard Euler ο οποίος το 1720 γράφεται στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας και το 1723. Τρία χρόνια αργότερα, σε ηλικία 15 ετών παίρνει master στην φιλοσοφία από το ίδιο Πανεπιστήμιο, με την διατριβή «Σύγκριση των φιλοσοφιών των Descartes και Newton».

Ο Λογισμός των Newton (1643–1727) και Leibniz (1646–1716) βρισκόταν τότε σε ένα πρωταρχικό στάδιο μελέτης από τους μαθηματικούς της εποχής. Ειδικότερα, οι αδελφοί Jacob (1654–1705) και Johann (1667–1748) Bernoulli αλληλογραφούσαν συχνά με τον Leibniz και ανέπτυξαν ιδιαίτερα τον Λογισμό του. Ο Johann Bernoulli το 1692 έχει γράψει δύο αδημοσίευτα εγχειρίδια Απειροστικού Λογισμού, ενώ παράλληλα διδάσκει Λογισμό στον Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661–1704).

Ο τελευταίος δημοσιεύει το 1696 το πρώτο βιβλίο Απειροστικού Λογισμού με τίτλο «Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes», το οποίο ουσιαστικά θεωρείται έργο του Johann Bernoulli και αναφέρεται στον Διαφορικό λογισμό του Leibniz.


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT, Quay des Augustins.
MDCCXV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Θέλοντας να δώσουμε στον αναγνώστη μια ιδέα για τα Μαθηματικά της εποχής εκείνης, παραθέτουμε ενδεικτικά, δύο ορισμούς και ένα αξίωμα από το βιβλίο του l'Hospital:

Ορισμός 1. *Μεταβλητές ποσότητες* είναι εκείνες που αυξάνουν ή φθίνουν με συνεχή τρόπο.
Ορισμός 2. *Διαφορικό* μιας μεταβλητής ποσότητας ονομάζεται το απείρως μικρό μέρος κατά το οποίο η ποσότητα αυτή αυξάνει ή φθίνει συνεχώς.
Αξίωμα 1. Δύο ποσότητες των οποίων η διαφορά είναι απείρως μικρή ποσότητα, μπορούν να αντικαταστήσουν η μία την άλλη.

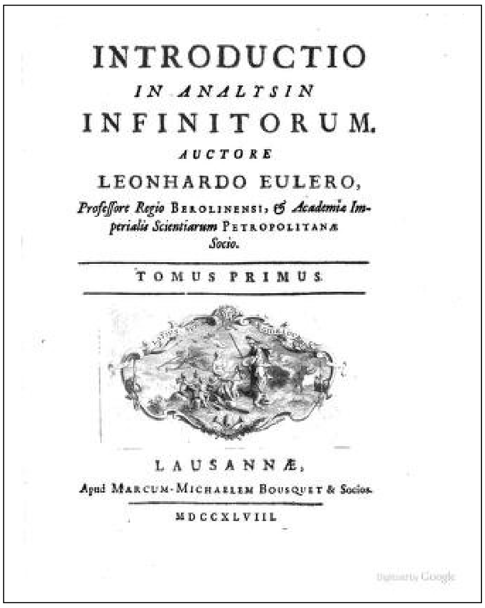
Στο βιβλίο του Marquis de l'Hospital εμφανίζεται επίσης και ο γνωστός σήμερα «κανόνας του de l'Hospital»:

> Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες και $f(a) = g(a) = 0$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ και μάλιστα
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Το επιχείρημα του l'Hospital για την απόδειξη του κανόνα, με σύγχρονο συμβολισμό, είναι το εξής: αν $f'(a) = (f(a+dx) - f(a))/dx$, τότε

$$\frac{f(a+dx)}{g(a+dx)} = \frac{f(a) + f'(a)dx}{g(a) + g'(a)dx} = \frac{f'(a)dx}{g'(a)dx} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Το 1748 ο Leonhard Euler δημοσιεύει το βιβλίο «Inroductio in Analysin Infinitorum», εγκαθιδρύοντας την Ανάλυση ως έναν καινούριο κλάδο των Μαθηματικών, εισάγοντας παράλληλα τον βασικό συμβολισμό και την ορολογία που χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα. Στο βιβλίο αυτό ορίζεται η έννοια των συναρτήσεων καθώς και η αναπαράστασή/μελέτη τους μέσω των άπειρων σειρών. Επίσης για πρώτη φορά στην ιστορία γίνεται συστηματική μελέτη της έννοιας του λογαρίθμου ως εκθέτη και των τριγωνομετρικών αριθμών ως αριθμητικών λόγων και όχι πλέον ως ευθύγραμμα τμήματα. Επτά χρόνια μετά το introductio, ο Euler δημοσιεύει το «Institutiones Calculi Differentialis», ένα βιβλίο για τον Διαφορικό Λογισμό και το 1768 δημοσιεύει το βιβλίο Ολοκληρωτικού Λογισμού με τίτλο «Institutionum Calculi Integralis». Τα τρία αυτά βιβλία του Leonhard Euler περιέχουν ένα μεγάλο μέρος των αποτελεσμάτων και των μεθόδων που συναντάει κανείς και σήμερα στα σύγχρονα βιβλία Απειροστικού Λογισμού και Διαφορικών Εξισώσεων.



2.2 Η Εκθετική Συνάρτηση

Στο κεφάλαιο VII ο Euler ορίζει και μελετά την εκθετική συνάρτηση μέσω των απειροσειρών. Θεωρώντας ένα αριθμό $\alpha > 1$ σημειώνει ότι $\alpha^0 = 1$. Τότε για κάθε *απείρως μικρό* (θετικό) αριθμό ε θα έχουμε ότι

$$\alpha^{\varepsilon} = 1 + \delta,$$

για κάποιον απείρως μικρό αριθμό δ. Θέτοντας τώρα $\delta = c\,\varepsilon$, όπου $c = c(\alpha)$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α, παίρνει ότι

$$\alpha^{\varepsilon} = 1 + c\,\varepsilon \tag{2.1}$$

Σημειωση 2.2.1. Παρατηρήστε ότι στην σχέση (2.1) με τον σύγχρονο συμβολισμό, έχουμε ότι

$$c = \frac{\alpha^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \text{ ``='' } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\alpha^{\varepsilon} - \alpha^0}{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\Big[\alpha^t\Big]_{t=0} = \ln \alpha.$$

Αν τώρα x είναι ένας οποιοσδήποτε πεπερασμένος (θετικός) αριθμός, τότε ο Euler θεωρεί τον *απείρως μεγάλο* αριθμό $N = x/\varepsilon$ και άρα $x = \varepsilon N$. Οπότε από την σχέση (2.1) θα έχουμε ότι

$$\alpha^x = \left(\alpha^{\varepsilon}\right)^N = (1 + c\,\varepsilon)^N = \left(1 + \frac{cx}{N}\right)^N. \tag{2.2}$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιεί την διωνυμική σειρά

$$(A + B)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k,$$

όπου $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ και έτσι προκύπτει το ανάπτυγμα

$$\alpha^x = 1 + N\frac{cx}{N} + \frac{N(N-1)}{2!}\frac{(cx)^2}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\frac{(cx)^3}{N^3} + \cdots$$

Όμως ο N είναι απείρως μεγάλος και άρα $1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \frac{N-3}{N} = \cdots$, άρα

$$\alpha^x = 1 + cx + \frac{(cx)^2}{2!} + \frac{(cx)^3}{3!} + \cdots. \tag{2.3}$$

Στη συνέχεια, από τη θεμελιώδη αυτή σχέση, θέτοντας $x = 1$ παίρνει την ταυτότητα που συνδέει τους αριθμούς α και c:

$$\alpha = 1 + c + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \cdots, \tag{2.4}$$

και θέτοντας τώρα $c = 1$, ορίζει τον αριθμό e ως

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots. \tag{2.5}$$

Έτσι λοιπόν για $\alpha = e$:

- η σχέση (2.3) μας δίνει τον γνωστό σήμερα τύπο

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \tag{2.6}$$

- και η σχέση (2.2) γράφεται ως

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N, \tag{2.7}$$

ή ειδικότερα, για $x = 1$

$$e = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N . \tag{2.8}$$

Σημειωση 2.2.2. Η σχέσεις (2.6) και (2.7) του Euler εκφράζουν τους σύγχρονους ορισμούς της εκθετικής συνάρτησης ως δυναμοσειράς και ως ορίου ακολουθίας αντίστοιχα, δηλαδή

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{x^n}{n!} \qquad \text{και} \qquad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

2.3 Η Λογαριθμική Συνάρτηση

Στο κεφάλαιο VI του inroductio, για πρώτη φορά στην ιστορία, ο Euler ορίζει τους λογαρίθμους ως εκθέτες. Ο *λογάριθμος του X με βάση το α*, ορίζεται ως ο εκθέτης Y ώστε $\alpha^Y = X$. Ο Euler ορίζει δηλαδή τον λογάριθμο όπως και σήμερα, μέσω της ισοδυναμίας.

$$\log_\alpha X = Y \iff \alpha^Y = X.$$

Στο επόμενο κεφάλαιο VII, ο Euler μελετάει την λογαριθμική συνάρτηση ως δυναμοσειρά. Ξεκινάει από τη σχέση (2.2) και για τον (θετικό) αριθμό y γράφει

$$1 + y = \alpha^x = \alpha^{\varepsilon N} = (1 + c\,\varepsilon)^N \tag{2.9}$$

όπου ο ε είναι απείρως μικρός αριθμός και ο $N = x/\varepsilon$ είναι απείρως μεγάλος αριθμός. Τότε, από την (2.9) καταρχήν έχουμε ότι

$$\varepsilon = \frac{(1 + y)^{\frac{1}{N}} - 1}{c}$$

ενώ από από τον ορισμό του λογαρίθμου παίρνουμε ότι

$$\log_\alpha(1 + y) = x = N\varepsilon = \frac{N}{c}\Big((1 + y)^{\frac{1}{N}} - 1\Big),$$

Για $\alpha = e$ και άρα $c = 1$, καταλήγει στο παρακάτω τύπο για τον φυσικό λογάριθμο

$$\ln(1 + y) = N\Big((1 + y)^{\frac{1}{N}} - 1\Big). \tag{2.10}$$

Σημειωση 2.3.1. Στην σύγχρονη μαθηματική γλώσσα, ο τύπος (2.10) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}\ln(1+y) = N\left((1+y)^{\frac{1}{N}}-1\right) \text{“}=\text{”} \lim_{n\to\infty} n\left((1+y)^{\frac{1}{n}}-1\right) \\ = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+y)^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+y)^h-1}{h} \\ = \frac{d}{dt}\Big[(1+y)^t\Big]_{t=0}\end{aligned}$$

Στη συνέχεια ο Euler αναπτύσσει τον όρο $(1+y)^{\frac{1}{N}}$ σε διωνυμική σειρά

$$\begin{aligned}(1+y)^{\frac{1}{N}} &= 1+\frac{1}{N}y+\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}-1\right)\frac{y^2}{2!}+\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}-1\right)\left(\frac{1}{N}-2\right)\frac{y^3}{3!}+\cdots \\ &= 1+\frac{1}{N}y-\frac{N-1}{N^2}\frac{y^2}{2!}+\frac{(N-1)(2N-1)}{N^3}\frac{y^3}{3!}-\frac{(N-1)(2N-1)(3N-1)}{N^4}\frac{y^4}{4!}+\cdots\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας στην σχέση (2.10) παίρνει ότι

$$\begin{aligned}\ln(1+y) &= N\left((1+y)^{\frac{1}{N}}-1\right) \\ &= y-\frac{N-1}{N}\frac{y^2}{2!}+\frac{(N-1)(2N-1)}{N^2}\frac{y^3}{3!}-\frac{(N-1)(2N-1)(3N-1)}{N^3}\frac{y^4}{4!}+\cdots\end{aligned}$$

Όπως και προηγουμένως έτσι κι εδώ ο N είναι απείρως μεγάλος αριθμός και άρα έχουμε ότι

$$\frac{N-1}{N}=1, \quad \frac{2N-1}{N}=2, \quad \frac{3N-1}{N}=3, \quad \cdots$$

παίρνοντας τη γνωστή σήμερα σειρά

$$\ln(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots \tag{2.11}$$

Αναφορές

[1] Leonhard Euler *Inroductio in Analysin Infinitorum*. 1748.

[2] Leonhard Euler *Institutiones Calculi Differentialis*. 1755.

[3] Leonhard Euler *Institutionum Calculi Integralis*. 1768.

[4] I. Grattan-Guinness (editor). *From the Calculus to Set Theory, 1630–1910. An Introductory History*. 1980, Princeton University Press.

[5] Απόστολος Γιαννόπουλος. *Ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού*. Πρόχειρες σημειώσεις.

[6] Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*. 1696.

Ομιλία 3

Το συνεχές

Βαγγέλης Φελουζής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
felouzis@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

3.1 Εισαγωγή

Η διάλεξη αυτή συνδέεται με την προηγούμενη που έγινε σε αυτό το Σεμινάριο από τον Νίκο Δαφνή με τίτλο «*Leonhard Euler*: *Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση*» και εμπνεύστηκε από αυτήν. Στο κείμενο που παρατίθεται στον τόμο αυτό έχουν προστεθεί πολλά επιπλέον στοιχεία που είχαν ετοιμαστεί στα πλαίσια της ομιλίας αλλά ο ομιλητής δεν πρόλαβε να ολοκληρώσει κατά την διάρκεια της ομιλίας.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη διάλεξη η εισαγωγή της εκθετικής συνάρτησης από τον Euler (όπως και κάθε άλλος συλλογισμός της εποχής εκείνης που αφορούσε τον Απειροστικό Λογισμό) έκανε χρήση της έννοιας του «απείρως μικρού» ή «απειροστού» καθώς και του «απείρως μεγάλου» τα οποία τα χρησιμοποιούσε με τρόπο εύλογο μεν αλλά που σήμερα θα τον λέγαμε «μη αυστηρό» ή «αυθαίρετο». Η έλλειψη αυτή «αυστηρότητας» της χρήσης «φανταστικών» ποσοτήτων, όπως είναι τα απειροστά, διορθώνεται με την «$\varepsilon-\delta$» εισαγωγή της έννοιας του «ορίου μιας συνάρτησης» από τον Weierstrass με την οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε την χρήση των απειροστών με «$\varepsilon-\delta$»-συλλογισμούς. Το κόστος αυτής της αντικατάστασης είναι ότι σχετικά απλοί συλλογισμοί που γινόντουσαν με χρήση των απειροστών αντικαθίστανται με πολύ πιο περίπλοκους -και συχνά μη διαισθητικούς- συλλογισμούς.

Θα παραθέσουμε, για λόγους ευκολίας του αναγνώστη και σε χονδρικές γραμμές, τον συλλογισμό του Euler, από το βιβλίο του «Εισαγωγή στην Ανάλυση του Απείρου». Το βιβλίο αυτό απετέλεσε σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών κυρίως για το λόγο ότι εισάγει σαν έννοια αλλά και σαν κύριο αντικείμενο μελέτης του απειροστικού λογισμού την «συνάρτηση». Τον ίδιο συλλογισμό παρέθεσε και ο Νίκος Δαφνής στη δική του διάλεξη.

Θεωρούμε έναν θετικό αριθμό $a \neq 1$. Αφού $a^0 = 1$ αν θεωρήσουμε έναν αριθμό ω που είναι άπειρα μικρός αλλά όχι μηδέν τότε ο αριθμός a^ω θα είναι άπειρα κοντά στον 1 αλλά όχι ίσος με ένα, δηλαδή

$$a^\omega = 1 + \psi \tag{3.1}$$

όπου ο ψ είναι επίσης άπειρα μικρός αριθμός για τον οποίο θα συμβαίνει είτε $\psi = \omega$ είτε $\psi > \omega$ είτε $\psi < \omega$, το οποίο εξαρτάται από τον a. Προκειμένου να εξετάσουμε την σχέση των ψ και ω ας θέσουμε $\psi = k\omega$ ή με άλλα λόγια έχουμε

$$k = \frac{a^\omega - 1}{\omega}.$$

Ας θεωρήσουμε έναν συνηθισμένο αριθμό $x \neq 0$ (δηλαδή ούτε άπειρα μικρό ούτε άπειρα μεγάλο) και έναν φυσικό αριθμό N ο οποίος είναι άπειρα μεγάλος, δηλαδή μεγαλύτερος από κάθε συνηθισμένο φυσικό αριθμό, τότε προφανώς ο αριθμός $\omega = x/N$ είναι άπειρα μικρός και αντικαθιστώντας στην (3.1) θα έχουμε

$$a^{x/N} = 1 + k\frac{x}{N}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
a^x = \left(1 + k\frac{x}{N}\right)^N &= 1 + Nk\frac{x}{N} + \frac{N(N-1)}{2}\left(k\frac{x}{N}\right)^2 \\
&\quad + \frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}\left(k\frac{x}{N}\right)^3 + \cdots \\
&= 1 + kx + \frac{1}{2}\frac{N(N-1)}{N^2}k^2x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{N(N-1)(N-2)}{N^3}k^3x^3 + \cdots \\
&= 1 + kx + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)k^2x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)k^3x^3 + \cdots \\
&= 1 + kx + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}k^3x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

όπου αρχικά χρησιμοποιήθηκε ο τύπος του αναπτύγματος του διωνύμου και στην συνέχεια οι όροι

$$\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \frac{3}{N}, \frac{4}{N}, \ldots, \frac{n}{N}, \ldots$$

απαλείφθηκαν ως μηδενικοί αφού ο καθένας τους είναι πηλίκο ενός πεπερασμένου φυσικού n με τον άπειρο N. Όταν $k = 1$ και $x = 1$ έχουμε τον αριθμό

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \tag{3.2}$$

για τον οποίο προφανώς θα ισχύει για οποιοδήποτε x

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \tag{3.3}$$

3.2 Το συνεχές και η δομή του

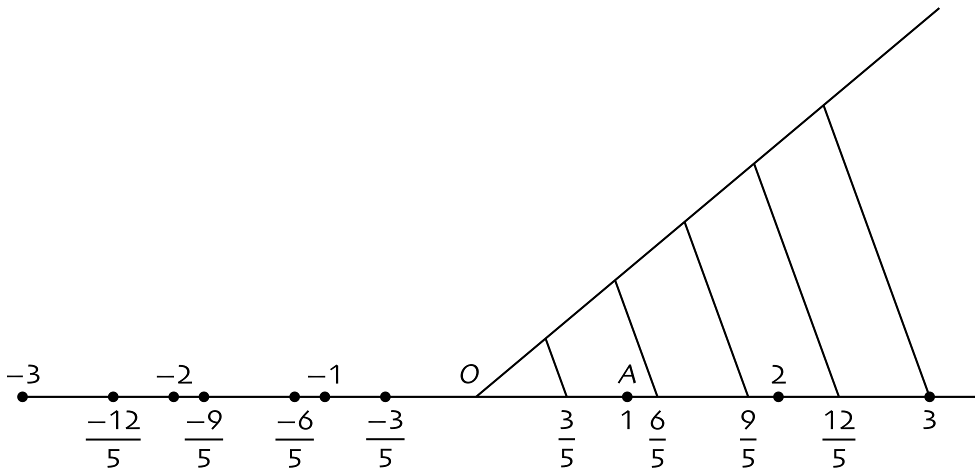
> *Υπάρχουν δύο λαβύρινθοι στην ανθρώπινοι σκέψη: Ο πρώτος σχετίζεται με την σύνθεση του συνεχούς και ο δεύτερος με την φύση της ελευθερίας. Και οι δύο πηγάζουν από την ίδια πηγή: το άπειρο.*
>
> Leibniz, «Περί ελευθερίας»

Μια συνάρτηση είναι ένα εργαλείο ή κανόνας με το οποίο σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό $f(x)$. Αλλά η βασική ερώτηση που πρέπει να κάνουμε είναι: *τι είναι το* x; *Με άλλα λόγια τι είναι ένας πραγματικός αριθμός*; Ουσιαστικά οι πραγματικοί αριθμοί είναι το βασικό εργαλείο με το οποίο κάνουμε μετρήσεις στην γεωμετρία, δηλαδή μετράμε και συγκρίνουμε μήκη γραμμών, ή εμβαδά επίπεδων σχημάτων ή όγκους σωμάτων. Πάνω σε αυτή την υπόθεση θα κάνουμε εδώ μια απαρίθμηση των βασικών ιδιοτήτων που πρέπει να φέρουν οι πραγματικοί αριθμοί και σε αλγεβρική γλώσσα είναι να αποτελούν ένα διατεταγμένο σώμα που να επεκτείνει τους ρητούς.

> *Οι πραγματικοί αριθμοί είναι αριθμοί που μετρούν το συνεχές δηλαδή έρχονται σε μία ένα προς ένα αντιστοιχία με τα σημεία μίας ευθείας.*

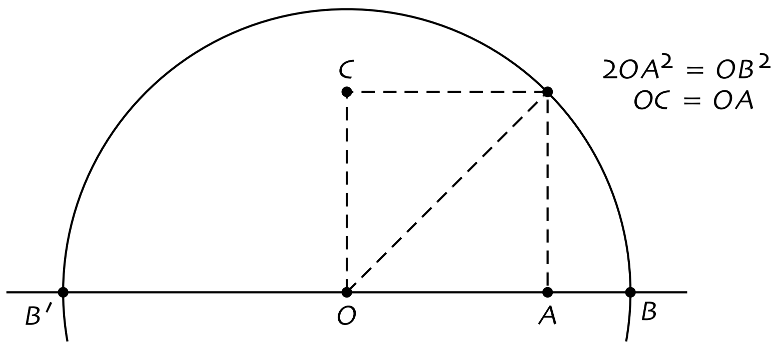
Χρησιμοποιώντας τις βασικές αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι εύκολο να δούμε ότι μπορούμε να τοποθετήσουμε όλους τους ρητούς αριθμούς πάνω στα σημεία μίας ευθείας. Συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε μία ευθεία επιλέγουμε δύο σημεία O, A της ευθείας στα οποία θεωρούμε ότι στο O αντιστοιχεί ο αριθμός 0 (μηδέν) και στο A ο αριθμός 1 (η μονάδα). Μία απλή γεωμετρική κατασκευή (με κανόνα και διαβήτη) μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε όλους τους θετικούς ρητούς αριθμούς σε σημεία της ημιευθείας OA. Πράγματι αν δοθούν δύο θετικοί ακέραιοι m, n μπορούμε να βρούμε ένα σημείο B πάνω στην ημιευθεία OA ώστε να ισχύει

$mOA = nOB$. Στο σημείο B θα αντιστοιχίσουμε τον αριθμό m/n. Αν έχουμε αντιστοιχίσει έναν αριθμό x σε ένα σημείο X τότε στο συμμετρικό του σημείο X' ως προς το O αντιστοιχούμε τον $-x$. Έτσι όλοι οι ρητοί αριθμοί μπορούν να τοποθετηθούν πάνω στα σημεία της ευθείας. Θα δείξουμε την διαδικασία με ένα παράδειγμα-σχήμα:



Σχήμα 3.1: Οι αριθμοί 3/5, 5/5, 6/5, 9/5, 10/5, 12/5, 15/5 πάνω στην ευθεία. Οι αριθμοί −3/5, −5/5, −6/5, −9/5, −10/5, −12/5, −15/5 τοποθετούνται αντιδιαμετρικά του O.

Είναι γνωστό ήδη από τους Πυθαγόρειους ότι οι ρητοί αριθμοί δεν εξαντλούν τα σημεία της ευθείας. Πράγματι, αν B είναι ένα σημείο ώστε το OB να είναι ίσο με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές ίσες με OA τότε σε αυτό δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί ρητός αριθμός (σε σύγχρονη γλώσσα, το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός).

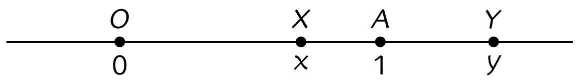


Σχήμα 3.2: Η $\sqrt{2}$ θα τοποθετηθεί στο B αν στο A έχει τοποθετηθεί το 1. Στο B′, με OB′ = OB, θα τοποθετηθεί ο $-\sqrt{2}$.

Με έναν απλό συλλογισμό δείχνεται ότι ο $\sqrt{2}$ δεν μπορεί να εκφραστεί σαν κλάσμα ακεραίων (δηλαδή δεν είναι ρητός). Συνεπώς οι πραγματικοί αριθμοί είναι «πολύ περισσότεροι» από τους ρητούς.

Δύο πράξεις μεταξύ των πραγματικών αριθμών ορίζονται: η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Ο ορισμός αυτός γίνεται με καθαρά γεωμετρικό τρόπο, μέσω των εννοιών του μήκους του εμβαδού και του όγκου. Επίσης μία σχέση σύγκρισης (διάταξης) ορίζεται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών, επίσης με καθαρά γεωμετρικό τρόπο.

Διάταξη. Οι αριθμοί που είναι δεξιά του Ο, δηλαδή αυτοί που είναι πάνω στην ημιευθεία ΟΑ λέγονται *θετικοί*. Θα γράφουμε $x > 0$ για το γεγονός ότι ο x είναι θετικός. Με $x < 0$ θα συμβολίζουμε το γεγονός ότι ο x είναι αρνητικός. Αν X, Y είναι δύο σημεία της ημιευθείας OA με το τμήμα OX να περιέχεται εξ ολοκλήρου στο OY και x, y οι αριθμοί που αντιστοιχούν στα X, Y αντίστοιχα θα γράφουμε $x < y$ και θα λέμε ότι *ο αριθμός x είναι μικρότερος από τον y*. Μπορούμε να επεκτείνουμε την σχέση $<$ σε όλους

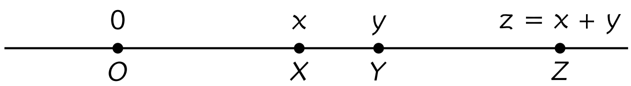


Σχήμα 3.3: $0 < x < 1 < y$

τους αριθμούς με τις εξής παραδοχές:

- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από κάθε θετικό.
- Αν x, y είναι αρνητικοί αριθμοί θα γράφουμε ότι $x < y$ αν $-y < -x$, όπου $-x$ ο θετικός αριθμός που βρίσκεται αντιδιαμετρικά του x ως προς το O.

Η πρόσθεση και η αφαίρεση. Ορίζονται με τον προφανή τρόπο. Θα κάνουμε απλώς ένα σχήμα για την πρόσθεση δύο θετικών αριθμών.



Σχήμα 3.4: Αν $x \leq y$ και μεταφέρουμε το τμήμα OX παράλληλα ώστε να γίνει το τμήμα YZ τότε ο αριθμός z που αντιστοιχεί στο Z είναι ο $x + y$. Η αφαίρεση ορίζεται ανάλογα: $y = z - x$.

Η πρόσθεση επεκτείνεται μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών ως εξής:

- Αν $-x, -y$ είναι δύο αρνητικοί αριθμοί τότε $(-x) + (-y) = -(x + y)$.

- Αν ο $-x$ είναι αρνητικός αριθμός και ο y θετικός με $y > x$ τότε $(-x) + y = y - x$, όπου με $y - x$ συμβολίζουμε τον μοναδικό αριθμό z με $x + z = y$.
- Αν ο $-x$ είναι αρνητικός αριθμός και ο y θετικός με $x > y$ τότε $(-x) + y = -(x - y)$, όπου με $x - y$ συμβολίζουμε τον μοναδικό αριθμό z με $y + z = x$.

Η αφαίρεση μπορεί να οριστεί και σαν $x - y = x + (-y)$ όπου ο $-y$ είναι ο αντιδιαμετρικός του y ως προς το O.
Παρατηρείστε ότι η διάταξη θετικών αριθμών μπορεί να οριστεί μέσω της πρόσθεσης:

Αν $x, y > 0$ τότε $x < y$ ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικός $z > 0$ με $y = x + z$.

Πολλαπλασιασμός: Ο πολλαπλασιασμός δύο θετικών πραγματικών αριθμών x, y ορίζεται επίσης γεωμετρικά σαν το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με κάθετες πλευρές να έχουν μήκη x, y αντίστοιχα. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι ενώ στην πρόσθεση μπορούμε να παραμείνουμε πάνω στην ευθεία (σε μία διάσταση) για τον πολλαπλασιασμό δύο αριθμών πρέπει να πάμε σε δύο διαστάσεις, για τον πολλαπλασιασμό τριών σε τρεις διαστάσεις κλπ. Στη συνέχεια ο πολλαπλασιασμός μπορεί να επεκταθεί σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς ορίζοντας

- Αν $-x, -y$ είναι δύο αρνητικοί αριθμοί τότε $(-x)(-y) = xy$.
- Αν ο $-x$ είναι αρνητικός αριθμός και ο y θετικός τότε $(-x)y = -(xy)$.

Ας συμβολίσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών με $\mathbb{F}$. Είναι εύκολο (σχεδόν άμεσο) να δείξουμε ότι οι πράξεις και η διάταξη που ορίσαμε προηγουμένως έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Για οποιαδήποτε $a, b, c \in \mathbb{F}$ ισχύουν οι σχέσεις, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a + b = b + a$, $a(bc) = (ab)c$, $ab = ba$ kai $a(b + c) = (ab) + (ac)$.

(ii) Υπάρχουν δύο στοιχεία $0, 1$ του $\mathbb{F}$ ώστε για κάθε $a \in \mathbb{F}$ να ισχύουν οι σχέσεις $a + 0 = a, a1 = a$.

(iii) Για κάθε $a \in \mathbb{F}$ υπάρχει ένα $-a \in \mathbb{F}$ με $a + (-a) = 0$.

(iv) Για κάθε $a \in \mathbb{F}$ me $a \neq 0$ υπάρχει ένα $a^{-1} \in \mathbb{F}$ με $aa^{-1} = 1$.

(v) Η $<$ είναι σχέση ολικής διάταξης με $0 < 1$.

(vi) Αν $a < b$ τότε για κάθε c ισχύει $a + c < b + c$.

(vii) Αν $a < b$ τότε για κάθε $c > 0$ ισχύει $ac < bc$.

Οποιοδήποτε σύστημα αριθμών έχει τις παραπάνω ιδιότητες λέγεται ένα *διατεταγμένο σώμα*. Καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

> *Οι πραγματικοί αριθμοί έχουν την δομή ενός διατεταγμένου σώματος που επεκτείνει γνήσια το διατεταγμένο σώμα των ρητών αριθμών.*

3.3 Εύδοξος-Dedekind-Cantor

> Ένα διατεταγμένο σώμα λέγεται *πλήρες* αν κάθε πάνω φραγμένο υποσύνολό του έχει ελάχιστο πάνω φράγμα. Όπως έδειξε ο Hölder [15], υπάρχει ουσιαστικά ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, *το οποίο θα συμβολίζουμε με* $\mathbb{R}$ *και θα το ονομάζουμε το τυπικό σώμα των πραγματικών αριθμών*.

Θα παρουσιάσουμε εδώ εν συντομία τρεις κατασκευές του συνόλου των τυπικών πραγματικών αριθμών, ξεκινώντας από την πιο άγνωστη.

Στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη παρουσιάζεται η «θεωρία των λόγων» η οποία είναι μία μελέτη των πραγματικών αριθμών και αποδίδεται στον Εύδοξο, δάσκαλο του Πλάτωνα. Ένας βασικός ορισμός πάνω στον οποίο βασίζεται η θεωρία αυτή είναι ο πέμπτος ορισμός που έχει ως εξής:

> *Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα.*

Δηλαδή

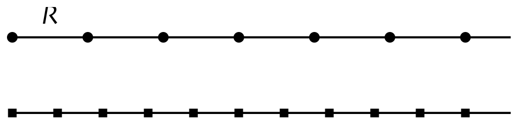
> Δυο λόγοι μεγεθών α/β και γ/δ λέγονται ίσοι όταν για οποιουσδήποτε αριθμούς μ, ν

$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε ισχύει } \mu\alpha > \nu\beta \text{ και } \mu\gamma > \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha = \nu\beta \text{ και } \mu\gamma = \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha < \nu\beta \text{ και } \mu\gamma < \nu\delta. \end{array}\right\}$$

(δες [1]). Όπως αναφέρει ο Heath στην μετάφραση των Στοιχείων του Ευκλείδη ([19]), ο ορισμός αυτός θεωρήθηκε δυσνόητος[1] και μία ερμηνεία του από τον De Morgan έχει ως εξής:
Ας φανταστούμε μια σειρά από δέντρα (κύκλοι στο παρακάτω σχήμα) σε ευθεία γραμμή που απέχουν το κάθε ένα από το επόμενο απόσταση R

[1]ειδικά δες τα σχόλια του Heath πάνω στον πέμπτο ορισμό στο [19], στις σελίδες 120–126, όπου αναφέρεται και η ερμηνεία του De Morgan.

και μία σειρά από κολώνες (τετράγωνα στο παρακάτω σχήμα) σε ευθεία γραμμή παράλληλα με την δενδροστοιχία που απέχουν η κάθε μία από την άλλη μία απόσταση C γνωστή. Θεωρούμε ότι οι δύο σειρές εκτείνονται επ' άπειρον.



Για να μετρήσουμε προσεγγιστικά τον λόγο R/C μετράμε πόσες κολώνες βρίσκονται πριν από $n^{o'}$ δένδρο. Αν είναι m κολώνες τότε προσεγγιστικά $mC = nR$ και συνεπώς προσεγγιστικά $R/C = m/n$. Όσο μεγαλώνει το n η προσέγγιση γίνεται όλο και καλύτερη. Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα, αν θεωρήσουμε ότι $C = 1$ πριν το τρίτο δέντρο υπάρχουν 4 κολώνες και άρα προσεγγιστικά $R/C = R = 4/3 = 1.33\ldots$ Πριν από 5ο δένδρο μετράμε 8 κολώνες που μας δίνει μία καλύτερη προσέγγιση $R/C = R = 8/5 = 1.6$. Πριν από 7ο δένδρο μετράμε 11 κολώνες που μας δίνει μία καλύτερη προσέγγιση $R/C = R = 11/7 = 1.57\ldots$ κ.οκ...

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f(n)$ όπου το για n θετικό ακέραιο το $f(n)$ είναι ο αριθμός m των κολώνων που υπάρχουν πριν από το n δένδρο[2]. Ο Stephen Schanuel γύρω στο 1980 παρουσιάζει μία κατασκευή των πραγματικών αριθμών βασισμένη στις ιδέες του Ευδόξου-De Morgan. Η εργασία αυτή ανακοινώθηκε αρκετές φορές αλλά δεν δημοσιεύτηκε. Ουσιαστικά αυτό που παρατηρεί ο Stephen Schanuel είναι ότι η συνάρτηση f που περιγράψαμε προηγούμενα είναι «σχεδόν ισομορφισμός» στο σύνολο των ακέραιων έννοια που θα περιγράψουμε λίγο παρακάτω και ότι δύο σχεδόν ισομορφισμοί ορίζουν τον ίδιο αριθμό αν διαφέρουν κατά μία φραγμένη ποσότητα. Στο [3] παρουσιάζεται λεπτομερώς η κατασκευή του Stephen Schanuel και αποδεικνύεται ότι οδηγεί σε πλήρες διατεταγμένο σώμα δηλαδή στο $\mathbb{R}$. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο της κατασκευής των Stephen Schanuel - Ευδόξου είναι ότι ξεκινά από τους ακέραιους χωρίς να περάσει από τους ρητούς, όπως οι κατασκευές των Dedekind kai Cantor. Αν $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι μία συνάρτηση από τους ακέραιους στους ακέραιους αυτή ονομάζεται ομομορφισμός αν διατηρεί την πρόσθεση δηλαδή αν για οποιαδήποτε $m, n \in \mathbb{Z}$ ισχύει $f(m+n) = f(m) + f(n)$. Η απόλυτη τιμή της διαφοράς

$$d_f(m,n) = |f(m+n) - f(n) - f(m)|$$

για μια τυχούσα συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ «μετράει» κατά πόσο για δύο ακέραιους m, n η συνάρτηση πλησιάζει να είναι ομομορφισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1. Ορίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι ένας *σχεδόν ομομορφισμός* του $\mathbb{Z}$ αν η συνάρτηση $d_f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ έχει φραγμένο πεδίο

[2] Ουσιαστικά $m = f(n) = [nR]$, το ακέραιο μέρος του nR.

τιμών δηλαδή αν υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε για οποιουσδήποτε ακέραιους m, n να ισχύει ότι $d_f(m, n) = |f(m + n) - f(n) - f(m)| \leq C$

Έστω S να είναι το σύνολο όλων των σχεδόν ισομορφισμών. Αυτό είναι αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση συναρτήσεων. Επίσης κάθε φραγμένη συνάρτηση είναι φανερά σχεδόν ισομορφισμός και άρα η ομάδα S θα έχει υποομάδα την ομάδας B όλων των φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται σαν η ομάδα πηλίκο S/B. Ορίζοντας κατάλληλα τη δομή του (πράξεις και διάταξη) έχουμε ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα δηλαδή το $\mathbb{R}$. Αν $[f]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας μίας φραγμένης συνάρτησης τότε η πρόσθεση ορίζεται απλά σαν $[f]+[g] = [f+g]$ και το S/B γίνεται αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο την κλάση της μηδενικής συνάρτησης όπου $-[f] = [-f]$. Ένα στοιχείο $[f] \in S/B$ λέγεται *θετικό* και γράφουμε $[f] \geq 0$, αν $\sup\{f(n) : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. Αυτό δίνει μια διάταξη $\leq$ στο B/S με $[f] \leq [g]$ αν $[g] - [f] = [g - f] \geq 0$. Τέλος ο πολλαπλασιασμός ορίζεται μέσω της σύνθεσης συναρτήσεων δηλαδή $[f] \cdot [g] = [f \circ g]$.

Με αυτούς τους ορισμούς της πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού και διάταξης το B/S γίνεται διατεταγμένο σώμα και μάλιστα πλήρες δηλαδή ισομορφικό με το $\mathbb{R}$. Η κατασκευή μπορεί να επεκταθεί και άλλο ώστε να επιτρέπει και την ύπαρξη απειροστών (δες [5]).

Ο Dedekind [13] προτείνει μία κατασκευή των πραγματικών αριθμών βασιζόμενος στους ρητούς και συγκεκριμένα στη διάταξη των ρητών. Η κατασκευή αυτή που εισάγει την σημαντική έννοια της «τομής Dedekind» οδηγεί επίσης στο $\mathbb{R}$. Κατά τον Dedekind το συνεχές είναι ένα «πυκνό γραμμικά διατεταγμένο σύνολο χωρίς χάσματα». Ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο S λέγεται πυκνό αν για οποιαδήποτε $x, y \in S$ me $x < y$ υπάρχει ένα $z \in S$ με $x < z < y$. Με τον όρο *τομή* του S εννοείται μια διαμέριση του S σε δύο μη κενά σύνολα A, B ώστε $A \cup B = S$ και αν $a \in A$, $b \in B$ ισχύει $a < b$. Μία τομή λέγεται *χάσμα* αν ούτε το A έχει μεγαλύτερο στοιχείο ούτε το B έχει μικρότερο στοιχείο. Το $\mathbb{Q}$ έχει χάσματα. Η ιδέα του Dedekind είναι σε κάθε χάσμα του $\mathbb{Q}$ να προσθέσει ένα νέο αντικείμενο (έναν άρρητο) και ορίζοντας κατάλληλα τη δομή του (πράξεις και διάταξη) να πάρει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα δηλαδή το $\mathbb{R}$.

Ο Cantor [7] προτείνει μία διαφορετική κατασκευή των πραγματικών αριθμών βασιζόμενος επίσης στους ρητούς. Η κατασκευή αυτή, που βασίζεται στην έννοια της βασικής ακολουθίας ή ακολουθίας Cauchy, αν και εντελώς διαφορετική από αυτήν του Dedekind οδηγεί επίσης στο $\mathbb{R}$. Η σημασία της κατασκευής αυτής είναι μεγάλη καθώς μπορεί να γενικευτεί και σε γενικούς χώρους με νόρμα. Μια *βασική ακολουθία στο* $\mathbb{Q}$ είναι μία ακολουθία ρητών $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ που οι όροι της πλησιάζουν όλο και περισσότερο μεταξύ τους όσο το n μεγαλώνει: Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιος δείκτης n_0 ώστε αν $m, n \geq n_0$ θα ισχύει $|r_n - r_m| < \varepsilon$. Δύο βασικές ακολουθίες $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ θα λέγονται *ισοδύναμες* και θα γράφουμε $(r_n)_{n=1}^{\infty} \sim (q_n)_{n=1}^{\infty}$ αν η διαφορά τους γίνεται όλο και πιο μικρή καθώς μεγαλώνει το n, δηλαδή για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιος δείκτης n_0 ώστε αν $n \geq n_0$ θα ισχύει $|r_n - q_n| < \varepsilon$. Αν $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο όλων των βασικών ακολουθιών τότε το σύνολο των πραγματικών αριθμών ορίζεται να είναι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{C}/\sim$. Ορίζοντας κατάλληλα τη δομή του (πράξεις και διάταξη) έχουμε ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα δηλαδή το $\mathbb{R}$.

Παρατηρηση 3.3.2. Πέρα από τις θεμελιώδεις εργασίες των Ευδόξου-Dedekind-Cantor πρέπει να αναφερθεί και ο Simon Stevin (1585), του οποίου το έργο [27] είναι η πρώτη συστηματική θεωρία των πραγματικών αριθμών, στην οποία μπορούμε να βρούμε και μία απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις πολύ πριν από τους Cauchy-Weierstrass-Bolzano (δες και [21]).

3.4 Υπάρχουν τα απειροστά;

Κανένα συνεχές δεν μπορεί να φτιαχτεί από αδιάσπαστες οντότητες (άτομα), όπως για παράδειγμα μία ευθεία από τα σημεία, αφού η ευθεία είναι συνεχής και το σημείο αδιάσπαστο.

—Αριστοτέλης

Το σημείο δεν μπορεί να αποτελεί συστατικό μέρος της ευθείας.

—Leibniz

Το πραγματικό συνεχές δεν αποτελείται από σημεία.

— René Thom

Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathbb{R}$ ακριβώς επειδή είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα έχει την καλούμενη «Αρχιμήδεια Ιδιότητα»: Αν πάρουμε δύο αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$ με $0 < x < y$ τότε υπάρχει πάντα ένας φυσικός n με $y < nx$. Αυτό αμέσως συνεπάγεται ότι το $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να περιέχει «απειροστά» δηλαδή ποσότητες αυστηρά θετικές που είναι μικρότερες από $1/n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

Μέχρι την εποχή του Weierstass, δηλαδή την εισαγωγή της έννοιας του ορίου και της συνέχειας ($\varepsilon - \delta$ ορισμοί) όλα τα αποτελέσματα της ανάλυσης προέρχονταν με συλλογισμούς που αφορούσαν απειροστά, δηλαδή ποσότητες που δεν ανήκαν στο $\mathbb{R}$. Όλα αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να αποδειχτούν πλέον χωρίς την χρήση των απειροστών παραμένοντας στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών των Ευδόξου-Dedekind-Cantor στο οποίο δεν υπάρχουν απειροστές ποσότητες διαφορετικές από το μηδέν.

Η έννοια του απειροστού αμφισβητήθηκε έντονα μέχρι το σημείο να αποτελέσει πεδίο φιλοσοφικών, θεολογικών ακόμη και πολιτικών μαχών, αλλά και ευκαιρία για διώξεις επιστημόνων ή φιλοσόφων ακόμη και για πολέμους (δες [2]). Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι ο Euler χρησιμοποιούσε τα απειροστά σαν «μέθοδο», ανάλογα με τον Αρχιμήδη, χωρίς να παραδέχεται ρητά την ύπαρξή τους.

Ωστόσο παραμένει το εύλογο ερώτημα: Πώς είναι δυνατόν μια λανθασμένη παραδοχή να οδηγεί σε σωστά συμπεράσματα; Πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να απαντήσουν στο ερώτημα αυτό και να αναπτύξουν μία θεωρία απειροστών.

Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής: Αντιπροσωπεύει το $\mathbb{R}$ το συνεχές; Η πρώτη κριτική ενάντια στην έννοια του συνεχούς σαν κάτι που μπορεί να διασπάται επ΄άπειρον, έως ότου να χαθεί, έγινε από τον Ζήνωνα τον Ελεάτη με τα γνωστά «παράδοξά» του. Ένα από αυτά είναι και το «παράδοξο του βέλους», όπου ο Ζήνων ισχυρίζεται ότι η «διαίρεση επ' άπειρον» καταλήγει στο παράλογο συμπέρασμα ότι «δεν υπάρχει κίνηση». Πράγματι, κανένα βέλος δεν θα μπορούσε να φτάσει στο στόχο του, αφού για φτάσει εκεί πρέπει πρώτα να φτάσει στο μισό της απόστασης, αλλά για το κάνει αυτό πρέπει πρώτα να φτάσει στο μισό του μισού κοκ...Στο [25], το οποίο επιχειρεί μία εξαιρετική μαθηματική και φιλοσοφική μελέτη των απειροστών, δείχνεται πως το παράδοξο αυτό μπορεί να αποφευχθεί με την θεωρία των απειροστών.

Από τους πρώτους που δέχθηκαν ρητά την ύπαρξη των απειροστών σαν μαθηματική έννοια ήταν οι Leibniz και Fermat ενώ ο Euler δεν θεωρούσε ότι υπάρχουν τέτοιες ποσότητες αλλά ωστόσο μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε με παραγωγικό τρόπο, σαν ένα είδος μεθόδου.

Σήμερα υπάρχει μία πλήρης «θεωρία των απειροστών», που αφορά μη-αρχιμήδεια διατεταγμένα σώματα που επεκτείνουν το $\mathbb{R}$ και μέσα στην οποία όλοι σχεδόν οι συλλογισμοί με απειροστά (όπως αυτοί του Euler των οποίων ένα παράδειγμα δώσαμε στην πρώτη παράγραφο) είναι πλήρως δικαιολογημένοι. Ωστόσο υπήρξε μία μακρά πορεία μέχρι να φτάσουμε εκεί και ήταν απαραίτητο να αναπτυχθούν νέοι κλάδοι, όπως η μαθηματική λογική και η θεωρία μοντέλων.

3.5 Cauchy-Du Bois Reymond

Παρά το γεγονός ότι έχει επικρατήσει λανθασμένα ότι ο Cauchy ήταν ενάντια στην θεωρία των απειροστών και για το λόγο αυτό εισήγαγε την έννοια του ορίου, ο Cauchy ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να αναπτύξει μία «θεωρία των απειροστών» ([8], [9], [10],[11], [12]), και μάλιστα την συμπεριέλαβε στο κύριο έργο του «Cours d' Analyse» (Μαθήματα Ανάλυσης

[8]).

Η ιδέα του Cauchy είναι να συνδέσει τα απειροστά με ακολουθίες που συγκλίνουν στο μηδέν και στην συνέχεια να ορίσει αν ω είναι ένα απειροστό τι σημαίνει το $f(\omega)$ όπου f μία συνήθης συνάρτηση πχ ένα πολυώνυμο. Σε κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν αντιστοιχεί ένα μοναδικό απειροστό. Ένα απειροστό ω θεωρείται πιο μικρό από ένα άλλο ω' αν η ακολουθία αριθμών στην οποία αντιστοιχεί το ω συγκλίνει «πιο γρήγορα» στο μηδέν από αυτήν που αντιστοιχεί στο ω'. Επίσης αν ω, ω' είναι δύο απειροστά που αντιστοιχούν στις μηδενικές ακολουθίες (a_n), (b_n) το άθροισμα και το γινόμενό τους είναι τα απειροστά που αντιστοιχούν στις ακολουθίες $(a_n + b_n)$ και $(a_n b_n)$ αντίστοιχα. Προφανώς το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το $0 = (0, 0, 0, 0, \dots)$ και το ουδέτερο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό θα είναι η ακολουθία $1 = (1, 1, 1, \dots)$.

Παραδειγμα 3.5.1. Η ακολουθία $(1/\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$ ορίζει ένα θετικό απειροστό, ας το πούμε α, η ακολουθία $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ ορίζει ένα θετικό απειροστό, ας το πούμε β. Τότε θα έχουμε ότι $\alpha < \beta$ και ότι $\alpha^2 = \beta$. Το άθροισμα των δύο αυτών απειροστών είναι το απειροστό που αντιστοιχεί στην ακολουθία $(1/\sqrt{n} + 1/n)$ και το γινόμενο των δύο αυτών απειροστών είναι το απειροστό που αντιστοιχεί στην ακολουθία $(1/(n\sqrt{n}))$.

Η θεωρία του Cauchy επεκτάθηκε από τον Du Bois Reymond όπου μελετάται η κατάταξη των ακολουθιών που τείνουν στο μηδέν ή στο άπειρο ανάλογα με την ταχύτητα που συγκλίνουν (στο μηδέν ή στο άπειρο). Μια παρουσίαση του εξαιρετικά ενδιαφέροντος έργου του Du Bois Reymond στο ζήτημα αυτό γίνεται στο βιβλίο του Hardy «Οι τάξεις του απείρου» [18]. Ωστόσο η θεωρία των Cauchy-Du Bois Reymond δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι λύνει το ζήτημα των απειροστών αφού δεν καταλήγει στην κατασκευή ενός διατεταγμένου σώματος που να περιέχει απειροστά διαφορετικά από το μηδέν. Εκτός από το πρόβλημα της σύγκρισης των απειροστών υπάρχει και το βασικό πρόβλημα ότι για να δημιουργηθεί ένα σώμα αριθμών απαιτείται οι αριθμοί που είναι διαφορετικοί από το μηδέν να αντιστρέφονται Θεωρείστε για παράδειγμα το απειροστό ω το οποίο αντιστοιχεί στη ακολουθία $(0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0 \dots)$ και το ω' το οποίο αντιστοιχεί στη ακολουθία $(1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, 0, 1/5, \dots)$ τότε το γινόμενό τους είναι μηδέν χωρίς κάποιο αυτά να είναι μηδέν, και συνεπώς δεν μπορεί να αντιστρέφονται. Πράγματι, αν υπήρχε πχ το ω^{-1} τότε αφού $\omega\omega' = 0$ θα είχαμε $\omega' = \omega^{-1}\omega\omega' = 0$, άτοπο.

Παρακάτω ωστόσο θα δούμε ότι πράγματι μια αυστηρή θεωρία των απειροστών μπορεί να βασιστεί στις ιδέες του Cauchy. Για το σκοπό αυτό απαιτείται μία μαθηματική έννοια, που εισήχθη πολύ αργότερα, στον εικοστό αιώνα, στην Γενική Τοπολογία από τους D. Kurepa και A. Weil και έπαιξε σημαντικό ρόλο αργότερα στην Μαθηματική Λογική. Είναι αυτή του φίλτρου και η αντίστοιχη του υπερφίλτρου.

3.6 Μεγάλα και μικρά σύνολα: Υπερφίλτρα

Αυτό που ουσιαστικά έλειπε για να τελειοποιηθεί η θεωρία των απειροστών του Cauchy είναι μία κάταταξη όλων των υποσυνόλων των φυσικών αριθμών σε δύο ξένες κατηγορίες, τα «μικρά» και τα «μεγάλα» σύνολα φυσικών αριθμών ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(i) Το κενό σύνολο δεν είναι «μεγάλο».

(ii) Το $\mathbb{N}$ και κάθε υποσύνολό του που είναι ίσο με το $\mathbb{N}$ μείον ένα πεπερασμένο σύνολο (δηλαδή που το συμπλήρωμά του είναι πεπερασμένο σύνολο) είναι «μεγάλο».

(iii) Αν το A είναι «μεγάλο» τότε και κάθε B με $A \subseteq B$ είναι «μεγάλο».

(iv) Η τομή δύο «μεγάλων» συνόλων είναι «μεγάλο».

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ τότε αυτό είτε είναι «μεγάλο» είτε το συμπλήρωμά του είναι «μεγάλο».

Με άλλα λόγια τα «μεγάλα» σύνολα αποτελούν μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{U}$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ και αν F είναι πεπερασμένο σύνολο φυσικών ή το κενό ισχύει $F \notin \mathcal{U}$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{U}$ τότε $A \cap B \in \mathcal{U}$.

(iii) Αν $A \in \mathcal{U}$ και $A \subseteq B$ τότε $B \in \mathcal{U}$.

(iv) Αn $A \subseteq \mathbb{N}$ τότε είτε $A \in \mathcal{U}$ είτε $A^c \in \mathcal{U}$.

Μια τέτοια οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ λέγεται *γνήσιο* (*ή ελεύθερο*) *υπερφίλτρο*[3]. Αν ικανοποιούνται μόνο τα (i), (ii), (iii) στον προηγούμενο ορισμό η οικογένεια λέγεται απλά ένα *γνήσιο φίλτρο*.

[3] Η περίεργη αυτή ονομασία προέρχεται από την γενική τοπολογία όπου τα φίλτρα και τα υπερφίλτρα παίζουν καθοριστικό ρόλο. Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι αν ορίσουμε μία απεικόνιση $\mu : \wp(\mathbb{N}) \to \{0, 1\}$ με $\mu(A) = 1$ αν και μόνο αν $A \in \mathcal{U}$, όπου $\mathcal{U}$ ένα γνήσιο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$, τότε το μ είναι ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας με τιμές 0 ή 1 πάνω στην άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που δεν περιέχει άτομα. Αντίστροφα, αν το μ είναι ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο πιθανότητας με τιμές 0 ή 1 πάνω στην άλγεβρα όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τότε αν $\mathcal{U} = \{A \in \wp(\mathbb{N}) : \mu(A) = 1\}$ είναι ένα υπερφίλτρο. Συνεπώς τα γνήσια υπερφίλτρα μπορούμε να τα βλέπομε σαν πεπερασμένα προσθετικά μέτρα με τιμές 0 ή 1 πάνω στα υποσύνολα των φυσικών, που δεν περιέχουν άτομα, με την έννοια ότι κάθε μονοσύνολο έχει μέτρο μηδέν.

Ένα γνήσιο υπερφίλτρο είναι απλά ένα φίλτρο που δεν μπορεί να επεκταθεί άλλο δηλαδή δεν μπορεί να περιέχεται γνήσια σε κανένα άλλο φίλτρο. Ισχύει η παρακάτω Πρόταση που θα την χρησιμοποιήσουμε συχνά:

Πρόταση 3.6.1. *Ένα φίλτρο* $\mathfrak{U}$ *πάνω στο* $\mathbb{N}$ *είναι υπερφίλτρο αν και μόνο αν για οποιαδήποτε δύο υποσύνολα* A, B *του* $\mathbb{N}$ *που η ένωσή τους ανήκει στο* $\mathfrak{U}$ *ένα τουλάχιστον από αυτά ανήκει στο* $\mathfrak{U}$.

Παρατηρείστε ότι κάθε γνήσιο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$ αναγκαστικά θα περιέχει το φίλτρο των συμπεπερασμένων συνόλων[4].
Η ύπαρξη γνήσιων υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$ δεν είναι προφανής προκύπτει όμως εύκολα από το Λήμμα του Zorn που είναι μία ισοδύναμη διατύπωση ενός ισχυρού αξιώματος στην Θεωρία Συνόλων, το Αξίωμα της Επιλογής. Σημειώνουμε ότι υπάρχουν άπειρα τέτοια διαφορετικά υπερφίλτρα στο $\mathbb{N}$, και συγκεκριμένα $2^{2^{\aleph_0}}$ το πλήθος.
Τα γνήσια υπερφίλτρα επάγουν μία έννοια σύγκλισης ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ γενικότερη της συνηθισμένης. Ας συμβολίσουμε με $\mathfrak{F}$ το σύνολο όλων των συμπεπερασμένων υποσύνολων του $\mathbb{N}$, δηλαδή των υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ των οποίων το συμπλήρωμα είναι πεπερασμένο σύνολο. Είναι άμεσο να δούμε ότι μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον αριθμό a αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\{n : |a_n - a| < \varepsilon\} \in \mathfrak{F}$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $a = \lim a_n$. Αν αντί του φίλτρου $\mathfrak{F}$ θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε γνήσιο υπερφίλτρο $\mathfrak{U}$ ο προηγούμενος ορισμός επεκτείνεται ως εξής:

Ορισμός 3.6.2. Έστω $\mathfrak{U}$ ένα γνήσιο υπερφίλτρο πάνω στο $\mathbb{N}$. Μια ακολουθία (a_n) *συγκλίνει στον αριθμό* a *ως προς το* $\mathfrak{U}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\{n : |a_n - a| < \varepsilon\} \in \mathfrak{U}$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $\lim_{\mathfrak{U}} a_n = a$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αυτή η γενικευμένη έννοια του ορίου επεκτείνει την έννοια του ορίου αλλά και επιπλέον ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του συνηθισμένου ορίου:

(i) Αν $\lim a_n = a$ τότε και $\lim_{\mathfrak{U}} a_n = a$.

(ii) Αν $\lim_{\mathfrak{U}} a_n = a$ και $\lim_{\mathfrak{U}} b_n = b$ τότε

  (α΄) $\lim_{\mathfrak{U}}(a_n + b_n) = a + b$

  (β΄) $\lim_{\mathfrak{U}}(a_n b_n) = ab$

  (γ΄) $\lim_{\mathfrak{U}}(a_n/b_n) = a/b$

  με την προϋπόθεση στην τελευταία περίπτωση να ισχύει $b \neq 0$.

(iii) Αν $\lim_{\mathfrak{U}} a_n = 0$ τότε για κάθε φραγμένη ακολουθία (b_n) ισχύει

$$\lim_{\mathfrak{U}}(a_n b_n) = 0.$$

[4]Το οποίο ονομάζεται και *φίλτρο Frechet*.

Επιπλέον έχουμε το εξής πολύ ισχυρό αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.6.3. *Έστω $\mathcal{U}$ ένα γνήσιο υπερφίλτρο πάνω στο $\mathbb{N}$. Τότε κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει ως προς το $\mathcal{U}$.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία που περιέχεται σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$. Διαιρώ το I στα δύο υποδιάστηματα $I_1 = [a, (a + b)/2]$, $I_2 = [(a + b)/2, b]$ και έστω $N_1 = \{n : a_n \in I_1\}$ και $N_2 = \{n : a_n \in I_2\}$. Αφού $N_1 \cup N_2 = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ ένα τουλάχιστον από τα N_1, N_2 θα ανήκει στο $\mathcal{U}$ (δες Πρόταση 3.6.1). Συνεπώς υπάρχει ένα υποσύνολο J_1 του I με μήκος $|I|/2 = (b - a)/2$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{n : a_n \in J_1\} \in \mathcal{U}$. Δουλεύοντας στο J_1 όπως στο I επαγωγικά θα πάρουμε μία φθίνουσα ακολουθία από κλειστά διαστήματα (J_n) με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $I \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$.

(ii) Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ισχύει $\{n : a_n \in J_k\} \in \mathcal{U}$.

(iii) Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ισχύει $|J_k| = |I|/2^k$.

Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες θα έχουμε ότι υπάρχει ένα και μοναδικό σημείο c του I που περιέχεται σε όλα τα J_k (Αρχή Εγκιβωτισμού του Cantor). Εύκολα δείχνουμε ότι $c = \lim_{\mathcal{U}} a_n$. □

3.7 Robinson: Η γένεση της μη-τυπικής Ανάλυσης.

> Ο Gödel έδειξε ότι καμία μαθηματική θεωρία που να περιλαμβάνει την στοιχειώδη αριθμητική δεν μπορεί να περιγραφεί αξιωματικά. Οι μαθηματικοί για πολλά χρόνια θεωρούσαν το αποτέλεσμα αυτό σαν μία ατυχία ή μειονέκτημα. Χάρη στη μεγαλοφυΐα του Abraham Robinson το μειονέκτημα αυτό γύρισε σε πλεονέκτημα χάρις στο οποίο οι μαθηματικοί συλλογισμοί μπορούν να απλοποιηθούν σημαντικά.
>
> —Edward Nelson

Το 1966 ο Abraham Robinson δημοσιεύει το βιβλίο του «Μη Τυπική Ανάλυση» [26] στο οποίο δείχνει ότι οι μέθοδοι των «απειροστών» μπορούν να έχουν μια στέρεα μαθηματική βάση, παρουσιάζοντας μια γενική μέθοδο με την οποία κατασκευάζονται «μη τυπικές έννοιες» όπως πχ τα απειροστά ή οι «απείρως μεγάλοι αριθμοί» από «τυπικές έννοιες». Η μέθοδος αυτή δείχνει ότι οι περισσότεροι συλλογισμοί των Fermat, Newton, Leibniz, Euler και γενικά των μαθηματικών πριν την εισαγωγή της έννοιας του ορίου, είναι σωστοί κάτω από το πρίσμα της νέας αυτής θεωρίας. Η θεωρία αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους κλάδους πέραν του Απειροστικού

Λογισμού όπως η Συναρτησιακή Ανάλυση και η Θεωρία Πιθανοτήτων εισάγοντας έτσι μια νέα μέθοδο στην μαθηματική σκέψη, την καλούμενη «Μη Τυπική Ανάλυση».

Θα περιγράψουμε εδώ την κατασκευή ενός διατεταγμένου σώματος $\mathbb{R}^*$ που επεκτείνει γνήσια το $\mathbb{R}$. Η ιδέα είναι απλή και θυμίζει την κατασκευή του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών. Η κατασκευή αυτή έγινε αρχικά από το Hewitt [20] σε διαφορετικό πλαίσιο(δες και [14]).

Αρχικά θεωρούμε όλες τις ακολουθίες ρητών που «θα έπρεπε να συγκλίνουν» που είναι ακριβώς οι ακολουθίες Cauchy $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ ρητών, δηλαδή αυτές που η διαφορά $|r_n - r_m|$ πηγαίνει στο μηδέν όταν τα m, n πηγαίνουν στο άπειρο. Πιο συγκεκριμένα αυτές που αν $\epsilon > 0$ είναι ένας οποιοδήποτε θετικός αριθμός η διαφορά $|r_n - r_m|$ γίνεται μικρότερη από ϵ για όλα τα m, n εκτός ίσως από πεπερασμένα. Δύο τέτοιες ακολουθίες ταυτίζονται αν η διαφορά τους πηγαίνει στο μηδέν. Το προκύπτον σύνολο μετά την ταύτιση είναι το $\mathbb{R}$.

Η κατασκευή αυτή του Cantor ταυτίζει όλες τις μηδενικές ακολουθίες με το μηδέν. Για παράδειγμα οι ακολουθίες

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots$$

ταυτίζονται όλες μεταξύ τους. Η ταχύτητα με την οποία πηγαίνουν στο μηδέν (που είναι βασική για την εισαγωγή των απειροστών, όπως έδειξαν οι Cauchy και du Bois Reymond) δεν λαμβάνεται υπ' όψιν. Το αποτέλεσμα είναι ότι το διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ που προκύπτει από αυτήν την κατασκευή είναι Αρχιμήδειο και δεν περιέχει απειροστά ούτε απείρως μεγάλους αριθμούς.

Η ιδέα του Robinson για την κατασκευή ενός μη Αρχιμήδειου σώματος που να επεκτείνει το $\mathbb{R}$ είναι να μιμηθούμε την κατασκευή του Cantor θεωρώντας όχι μόνο τις ακολουθίες Cauchy αλλά όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Όμως αν ορίσουμε τις πράξεις πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στο σύνολο A όλων των ακολουθιών με τον συνηθισμένο τρόπο

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad (a_n)(b_n) = (a_n b_n)$$

αυτό που προκύπτει δεν είναι σώμα αλλά απλά ένας δακτύλιος. Είναι άμεσο ότι στο A το μηδέν (ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) είναι η ακολουθία $\bar{0} = (0, 0, 0, \ldots)$ και η μονάδα (ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού) είναι η ακολουθία $\bar{1} = (1, 1, 1, \ldots)$. Ο κύριος λόγος που το A δεν είναι σώμα είναι ότι περιέχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία $\bar{a}, \bar{b}$ του A που είναι διαφορετικά από το μηδέν αλλά το γινόμενό τους είναι μηδέν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.7.1. Αν πάρουμε

$$\bar{a} = (1,0,1,0,1,0,1,0,\dots), \bar{b} = (0,1,0,1,0,1,0,\dots)$$

τότε $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ αλλά $\bar{a} \neq \bar{0}$ και $\bar{b} \neq \bar{0}$

Η ιδέα για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο είναι να ταυτίσουμε κάποια στοιχεία του με τέτοιο τρόπο ώστε να πάψει να έχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή αν $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ είτε $\bar{a} = \bar{0}$ είτε $\bar{b} = 0$. Η ταύτιση αυτή είναι ανάλογη με αυτή που γίνεται στην Θεωρία Μέτρου (και αντίστοιχα στην Θεωρία Πιθανοτήτων) όπου μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν παντού (ή σχεδόν σίγουρα στη Θεωρία Πιθανοτήτων) αν το σύνολο των στοιχείων που δεν την ικανοποιούν έχει μέτρο μηδέν (ισοδύναμα, αν το σύνολο των στοιχείων που την ικανοποιούν έχει μέτρο ίσο με ένα στη Θεωρία Πιθανοτήτων)[5].

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μια οικογένεια $\mathcal{U}$ «μεγάλων» υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, δηλαδή ένα γνήσιο υπερφίλτρο πάνω στο $\mathbb{N}$. Δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) θα λέγονται *ισοδύναμες* αν συμπίπτουν σε ένα μεγάλο σύνολο δηλαδή αν $\{n : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$ και σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $(a_n) \sim (b_n)$. Με $[(a_n)]$ θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας μιας ακολουθίας (a_n) δηλαδή

$$[(a_n)] = \{(x_n) : (x_n) \sim (a_n)\}$$

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας θα συμβολίζεται με $\mathbb{R}^*$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το $\mathbb{R}^*$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα ως προς τις (καλά ορισμένες) πράξεις

$$[(a_n)] + [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$$

$$[(a_n)]\,[(b_n)] = [(a_n b_n)]$$

και διάταξη

$$[(a_n)] \leq [(b_n)] \text{ αν και μόνο αν } \{n : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Συνοψίζοντας

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.7.2. *Το $\mathbb{R}^*$ είναι ένα μη Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα το οποίο επεκτείνει γνήσια το $\mathbb{R}$ θεωρώντας κάθε στοιχείο $a \in \mathbb{R}$ να ταυτίζεται με το στοιχείο $[(a)]$ του $\mathbb{R}^*$ όπου $(a) = (a,a,a,\dots)$.*

Τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ αν τα δούμε μέσα στο $\mathbb{R}^*$ λέγονται και τα *τυπικά στοιχεία του* $\mathbb{R}^*$ ή οι *τυπικοί πραγματικοί αριθμοί*. Το μηδέν είναι το μόνο τυπικό απειροστό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7.3. Ένα στοιχείο $x = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$ θα λέγεται:

[5]Δες και την υποσημείωση 3.

(i) *Απειροστό* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x| < \varepsilon$ που ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, με $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\{n : |a_n| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$ ή ισοδύναμα αν $\lim_{\mathcal{U}} a_n = 0$.

(ii) *Πεπερασμένο* αν υπάρχει $M > 0$ me $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|x| < M$, το ποίο που ισοδυναμεί με το ότι υπάρχει $M > 0$, με $M \in \mathbb{R}$, ώστε $\{n : |a_n| \leq M\} \in \mathcal{U}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το x είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $x = [(a_n)]$ όπου η (a_n) είναι μία φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(iii) *Άπειρο* αν δεν είναι πεπερασμένο.

Τα απειροστά ικανοποιούν όλες τις προφανείς ιδιότητες που αναμένουμε: Το άθροισμα και η διαφορά απειροστών είναι απειροστό, το γινόμενο απειροστού αριθμού με πεπερασμένο αριθμό είναι απειροστό κ.λπ

Ένα απλό αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε παρακάτω είναι το εξής:

Πρόταση 3.7.4. *Για κάθε πεπερασμένο $x \in \mathbb{R}^*$ υπάρχουν μοναδικά $a \in \mathbb{R}$ και ω απειροστό ώστε $x = a + \omega$.*

Απόδειξη. Αφού το x είναι πεπερασμένο τότε $x = [(a_n)]$ για κάποια φραγμένη ακολουθία (a_n) τυπικών πραγματικών αριθμών. Από Πρόταση 3.6.3 υπάρχει το $a = \lim_{\mathcal{U}} a_n$. Το $x - a = \omega$ είναι απειροστό και $x = a + \omega$. Η μοναδικότητα των a, ω είναι προφανής. □

Ορισμός 3.7.5. Ο τυπικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ στην προηγούμενη πρόταση λέγεται το *τυπικό μέρος του* x και συμβολίζεται με $\mathrm{st}(x)$.

Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε μερικές πολύ απλές εφαρμογές στον Απειροστικό Λογισμό σαν ένα παράδειγμα του πόσο η Μη-Τυπική Ανάλυση απλουστεύει τους συλλογισμούς στον Απειροστικό Λογισμό αποφεύγοντας πλήρως τους περίπλοκους $\varepsilon - \delta$ συλλογισμούς.

3.8 Εφαρμογές στον Απειροστικό Λογισμό

Θα δείξουμε εδώ δύο μόνο παραδείγματα εφαρμογής της μη-τυπικής Ανάλυσης στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας ξεκινήσουμε με μια απλή παρατήρηση:

Ορισμός 3.8.1. (i) Κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ μπορεί να επεκταθεί σε ένα υποσύνολο A^* του $\mathbb{R}^*$, όπου $x \in A^*$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $x = [(a_n)]$.

(ii) Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια συνάρτηση $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ όπου $f^*([(a_n)]) = [(f(a_n))]$.

Συνεπώς για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (και γενικότερα $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$) έχει νόημα να γράφουμε και $f(x)$ για $x \in A^*$ θεωρώντας ότι το $f(x)$ είναι το $f^*(x)$. Έτσι (όπως έκανε και Euler) έχει νόημα να γράφουμε a^ω όπου $a \in \mathbb{R}$ και το ω είναι ένα απειροστό (που δεν ανήκει στο $\mathbb{R}$ αλλά στο $\mathbb{R}^*$) ή $\sin(2+\omega)$ ή $\sqrt{\omega}$ όταν $\omega > 0$.
Όλοι οι ορισμοί που μαθαίνουμε στον Απειροστικό Λογισμό μπορούν να γραφτούν στην γλώσσα της μη-τυπικής Ανάλυσης. Ο επόμενος ορισμός διευκολύνει προς την κατεύθυνση αυτή:

Ορισμος 3.8.2. Δύο αριθμοί $x, y \in \mathbb{R}^*$ θα λέμε ότι είναι *απείρως κοντά* και θα γράφουμε $x \approx y$ αν η διαφορά τους $x - y$ είναι απειροστός αριθμός.

Ο ορισμός αυτός ήδη υπάρχει σε κείμενα του Fermat, ο οποίος χρησιμοποιεί τον τεχνικό όρο «Adaequetur», τον οποίο όπως ο ίδιος αναφέρει τον δανείζεται από τον Διόφαντο: Adaequetur, ut ait Diophantus aut fere aequetur. Στον Διόφαντο ο όρος αυτός εμφανίζεται σαν «παρισότης». Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με την συμβολή του Fermat στην θεωρία των απειροστών παραπέμπουμε στο άρθρο του A. Weil [28].
Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η διαισθητική έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο a ότι δηλαδή « αν το x είναι απείρως κοντά στο a τότε η εικόνα του $f(x)$ πρέπει να είναι απείρως κοντά στο $f(a)$» εκφράζεται ακριβώς στο πλαίσιο της μη-τυπικής Ανάλυσης.

Προταση 3.8.3. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ με $x \approx a$ ισχύει $f^*(x) \approx f(a)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο a. Θεωρώ $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ ώστε αν $|x - a| < \delta$ με $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (τυπικός ορισμός της συνέχειας). Έστω $x = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$ με $x \approx a$. Τότε $\{n : |a_n - a| < \delta\} \in \mathcal{U}$. Αφού

$$\{n : |a_n - a| < \delta\} \subseteq \{n : |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon\}$$

έχουμε ότι $\{n : |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Συνεπώς $|f^*(x) - f(a)| < \varepsilon$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε θετικό (τυπικό) $\varepsilon \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $f^*(x) \approx f(a)$.

Αντίστροφα, αν η f δεν είναι συνεχής στο a υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και μια ακολουθία (a_n) τυπικών πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο a με $|f(a_n) - f(a)| > \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν $x = [(a_n)]$ τότε $x \approx a$ kai $f^*(x) \not\approx f(a)$. □

Προταση 3.8.4. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα σύνολο Α $\subseteq \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in A^*$ με $x \approx y$ ισχύει $f^*(x) \approx f^*(y)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο a. Θεωρώ $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (τυπικός ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας). Έστω $x = [(a_n)] \in A^*$, $y = [(b_n)] \in A^*$ με $x \approx y$. Τότε $\{n : |a_n - b_n| < \delta\} \in \mathcal{U}$. Αφού

$$\{n : |a_n - b_n| < \delta\} \subseteq \{n : |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon\}$$

έχουμε ότι $\{n : |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Συνεπώς $|f^*(x) - f^*(y)| < \varepsilon$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε θετικό (τυπικό) $\varepsilon \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $f^*(x) \approx f^*(y)$.

Αντίστροφα, αν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες ακολουθία (a_n), (b_n) τυπικών πραγματικών αριθμών με στοιχεία στο A ώστε $a_n - b_n \to 0$ και $|f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν $x = [(a_n)]$, $y = [(b_n)]$ τότε $x, y \in A^*$, $x \approx y$ kai $f^*(x) \not\approx f^*(y)$. □

Το γεγονός ότι το άθροισμα, το γινόμενο και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής είναι εντελώς άμεσο. Για λόγους απλότητας, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, θα γράφουμε $f(x)$ αντί $f^*(x)$. Πράγματι, αν $x \approx a$ και οι f, g είναι συνεχείς στο a τότε φανερά

$$f(x) + g(x) - (f(a) + g(a)) = (f(x) - f(a)) + (g(x)) - g(a) \approx 0$$

αφού από υπόθεση $f(x) \approx f(a)$, $g(x) \approx g(a)$ και το άθροισμα απειροστών είναι απειροστό. Επίσης (αφού το γινόμενο απειροστού με πεπερασμένο είναι απειροστό)

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(a)(g(x) - g(a)) + g(x)(f(x) - f(a)) \approx 0$$

Τέλος αν $x \approx a$ και οι f, g είναι συνεχείς στα a, $f(a)$ αντίστοιχα θα έχουμε ότι $f(g(x)) \approx f(g(a))$ αφού $g(x) \approx g(a)$ και f συνεχής στο $g(a)$.
Τέλος δείχνουμε ότι ένα σημαντικό θεώρημα με πολλές συνέπειες είναι τετριμμένο στα πλαίσια της μη-τυπικής Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.8.5. *Μια συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα I είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in I^*$ με $x \approx y$. Τότε $a = \mathrm{st}(x) = \mathrm{st}(y) \in I$. Αφού η f είναι συνεχής στο I έχουμε $f(x) \approx f(a)$ και $f(y) \approx f(a)$ και συνεπώς $f(x) \approx f(y)$. □

Παρατηρείστε ότι η υπόθεση ότι το I είναι κλειστό είναι βασική. Γιατί διαφορετικά δεν είναι απαραίτητο αν πάρουμε ένα $x \in I^*$ να ισχύει ότι $\mathrm{st}(x) \in I$. Για παράδειγμα αν $I = [0, 1)$ και πάρουμε σαν $x = 1 - \omega$ με ω απειροστό διαφορετικό από το μηδέν (πχ $x = [1 - 1/(n^2 + 5)]$) τότε φανερά $x \in [0, 1)^*$ αλλά $\mathrm{st}(x) = 1 \notin [0, 1)$.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συνάδελφους Ανδρόνικο Βολιώτη και Νίκο Δαφνή που διάβασαν το άρθρο και μου υπέδειξαν αρκετά λάθη και αβλεψίες.

Αναφορές

[1] Ευκλείδης, *Τα Στοιχεία*, Απόδοση στα νέα ελληνικά, Ν. Ροκοπάνος, Σ. Σακελλάρη, Α. Τσολομύτης, https://myria.math.aegean.gr/elements/

[2] Amir Alexander, *Infinitesimal*: *How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*, Scientific American / Farrar, Straus and Giroux, 2014.

[3] R. D. Arthan, *Eudoxus Real Numbers*, 2004, https://arxiv.org/pdf/math/0405454.pdf

[4] Artin, E., Schreier, O. 1926, *Algebraische Konstruktion reeller Körper*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Univeristät, Leipzig 5, pp. 85–9. Reprinted in Serge Lang and John T. Tate (editors), The Collected Papers of Emil Artin, Addison-Wesley Publishing Company, Reeding, MA., 1965, pp. 258–272.

[5] A. Borovik, Renling Jin, M. Katz, *An Integer Construction of Infinitesimals*: *Toward a Theory of Eudoxus Hyperreals*, Notre Dame Journal of Formal Logic Volume 53, Number 4, 2012

[6] A. Borovik and M. Katz, *Who gave you the Cauchy-Weierstrass tale? The dual history of rigorous calculus*. Found. Sci. **17** (2012), no. 3, 245–276.

[7] Georg Cantor, *Uber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. Mathematische Annalen, 5, 123–132, 1872.

[8] Cauchy, A. L.: Cours d'Analyse de L'Ecole Royale Polytechnique. Première Partie. Analyse algébrique (Paris: Imprimérie Royale, 1821).

[9] Cauchy, A. L. (1815) Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indèfinie, Oeuvres (1) 1, 4-318.

[10] Cauchy, A. L. (1827) *Mémoire sur les dèveloppements des fonctions en séries périodiques*. Oeuvres (1) 2, 12–19.

[11] Cauchy, A. L. (1829): *Lecons sur le calcul différentiel*. Paris: Debures. Oeuvres complètes, Series 2, Vol. 4, pp. 263–609. Paris: Gauthier-Villars, 1899.

[12] Cauchy, A. L. (1853) *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données*. Oeuvres complètes, Series 1, Vol. 12, pp. 30–36. Paris: Gauthier-Villars, 1900.

[13] Richard Dedekind. *Was sind und was sollen die Zahlen*. Vieweg, Braunschweig, 1888. The second edition, with a new preface, was published in 1893, and is translated by Wooster Beman as «*The nature and meaning of numbers*» in *Essays on the theory of numbers*, Open Court, Chicago, 1901; reprinted by Dover, New York, 1963.

[14] H. Garth Dales and W. Hugh Woodin *Super-Real Fields– Totally Ordered Fields with Additional Structure*, Oxford University Press, 1996

[15] O. Hölder. *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*. Ber. Verh. Kon. Sch. Ges. Wiss., pages 1–64, 1901.

[16] P. Giordano. *The ring of Fermat reals*. Advances in Mathematics, 225 (4):2050–2075, 2010

[17] P. Giordano. *Infinitesimals without logic*. Russian Journal of Mathematical Physics, 17(2):159–191, 2010.

[18] Hardy, G. H., *Orders of Infinity, The "Infinitärcalcül" of Paul Du Bois-Reymond*. Cambridge University Press, 1910

[19] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Translated from the text of Heiberg, with an introduction and Commentary by T. L. Heath, Volume II, Cambridge at the University Press, 1908.

[20] Hewitt, E. *Rings of real-valued continuous functions. I*. Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 45–99.

[21] Katz, Karin Usadi and Katz, Mikhail G., *Stevin numbers and reality*. Found. Sci. 17 (2012), no. 2, 109–123.

[22] Katz, Mikhail G., Sherry, David, *Leibniz's infinitesimals: their fictionality, their modern implementations, and their foes from Berkeley to Russell and beyond*. Erkenntnis 78 (2013), no. 3, 57–625.

[23] Lothar Q. J., Sebastian Krapp, *Constructions of the real numbers—A set theoretical approach*, BE Mathematical Extended Essay, Oxford University, 2014.

[24] Nelson, E.: *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis. Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), no. 6, 1165–1198.*

[25] Patrick Reeder, *Infinitesimals for Metaphysics: Consequences for the Ontologies of Space and Time*, Dissertation, The Ohio State University. 2012

[26] A. Robinson. *Non-standard analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.

[27] Stevin, S. *L'Arithmetique*. (1585) In Girard, A. (Ed.), Les Oeuvres Mathematiques de Simon Stevin (Leyde, 1634), part I, p. 1–101.

[28] Weil, A.: *Book Review: The mathematical career of Pierre de Fermat*. Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), no. 6, 1138–1149

Ομιλία 4

On the other hand, I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics. R. Feynman, 1964, MIT

Μιχάλης Ανούσης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
mano@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Γραμμική Άλγεβρα I & II

4.1 Εισαγωγή

Η Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας είναι ένας σύγχρονος διεπιστημονικός κλάδος που μελετάται από Μαθηματικούς, της Πληροφορικής και των επιστημών του μηχανικού.

Στην ομιλία αυτή θα παρουσιάσουμε δύο παραδείγματα από την Κβαντική Θεωρία Πληροφορίας. Θα χρειαστούμε την έννοια του τανυστικού γινομένου.

Έστω E_1, E_2 δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω σε ένα σώμα F. Αν $x \in E_1$ και $y \in E_2$ το $x \otimes y$ λέγεται απλός τανυστής. Το τανυστικό γινόμενο των E_1 και E_2 είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τους απλούς τανυστές ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$(\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$$

για $x_1, x_2 \in E_1$, $y_1, y_2 \in E_2$ και $\lambda \in F$.

Το τανυστικό γινόμενο των E_1 και E_2 συμβολίζεται

$$E_1 \otimes E_2.$$

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert με $\dim H_1 < \infty$, $\dim H_2 < \infty$ το τανυστικό τους γινόμενο εφοδιασμένο με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle$$

για $x_1, x_2 \in H_1$, $y_1, y_2 \in H_2$ είναι χώρος Hilbert.

Αν H είναι ένας χώρος Hilbert μια φραγμένη γραμμική απεικόνση $T : H \to H$ λέγεται τελεστής. Συμβολίζουμε $\mathcal{B}(H)$ την άλγεβρα των τελεστών επί του H και I_H τον ταυτοτικό τελεστή επί του H.

Αν $A \in \mathcal{B}(H_1)$ και $B \in \mathcal{B}(H_2)$ η απεικόνιση

$$A \otimes B : H_1 \otimes H_2 \to H_1 \otimes H_2$$

που ορίζεται ως εξής

$$(A \otimes B)\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big) = \sum_i Ax_i \otimes By_i$$

είναι τελεστής επί του $H_1 \otimes H_2$.

4.2 Τηλεμεταφορά

Θεωρούμε τα ακόλουθα αξιώματα:

Αξιωμα 4.2.1. *Ένα απομονωμένο φυσικό σύστημα αντιστοιχεί σε ένα χώρο Hilbert H που λέγεται χώρος καταστάσεων. Κάθε μοναδιαίο διάνυσμα στον χώρο H αντιπροσωπεύει μια κατάσταση του συστήματος.*

Αξιωμα 4.2.2. *Μια κβαντική μέτρηση είναι μια συλλογή τελεστών $\{M_i\}_{i\in S}$ με $M_i : H \to H$ και S το σύνολο των αποτελεσμάτων. Αν το σύστημα είναι στην κατάσταση ψ και κάνουμε την μέτρηση, η πιθανότητα να βρούμε το αποτέλεσμα i είναι $\|M_i\psi\|^2$. Μετά την μέτρηση το σύστημα μεταβαίνει στην κατάσταση*

$$\frac{M_i\psi}{\|M_i\psi\|}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$1 = \sum_i \|M_i\psi\|^2 = \sum_i \langle M_i\psi, M_i\psi\rangle = \sum_i \langle M_i^* M_i\psi, \psi\rangle = \Big\langle \Big(\sum_i M_i^* M_i\Big)\psi, \psi \Big\rangle.$$

Άρα

$$\Big\langle \Big(\sum_i M_i^* M_i\Big)\psi, \psi \Big\rangle = \langle \psi, \psi\rangle \Leftrightarrow \sum_i M_i^* M_i = I.$$

Θεωρούμε δύο παρατηρητές την Alice και τον Bob.

Το εργαστήριο της Alice αντιστοιχεί σε ένα χώρο Hilbert H_A και η Alice έχει μία κβαντική μέτρηση $\{X_k\}$.

Το εργαστήριο του Bob αντιστοιχεί σε ένα χώρο Hilbert H_B και ο Bob έχει μία κβαντική μέτρηση $\{Y_m\}$.

Θεωρούμε το κοινό εργαστήριο της Alice και του Bob $H_A \otimes H_B$ και μια κατάσταση $\psi \in H_A \otimes H_B$, $\|\psi\| = 1$.

- Αν η Alice κάνει την μέτρηση $\{X_k\}$ στο κοινό εργαστήριο η πιθανότητα $p(A = k)$ να λάβει k είναι

  $$p(A = k) = \|(X_k \otimes I_{H_B})\psi\|^2$$

  και το σύστημα θα μεταβεί στην κατάσταση

  $$\frac{(X_k \otimes I_{H_B})\psi}{\|(X_k \otimes I_{H_B})\psi\|}.$$

- Αν ο Bob κάνει την μέτρηση $\{Y_m\}$ στο κοινό εργαστήριο η πιθανότητα $p(B = m)$ να λάβει m είναι

  $$p(B = m) = \|(I_{H_A} \otimes Y_m)\psi\|^2$$

  και το σύστημα θα μεταβεί στην κατάσταση

  $$\frac{(I_{H_A} \otimes Y_m)\psi}{\|(I_{H_A} \otimes Y_m)\psi\|}.$$

- Αν η Alice κάνει την μέτρηση $\{X_k\}$ στο κοινό εργαστήριο και ο Bob ταυτόχρονα κάνει την μέτρηση $\{Y_m\}$ στο κοινό εργαστήριο η από κοινού πιθανότητα (joint probability) $p(A = k, B = m)$ η Alice να λάβει k και ο Bob να λάβει m είναι

  $$p(A = k, B = m) = \|(X_k \otimes Y_m)\psi\|^2.$$

- Η δεσμευμένη πιθανότητα ο Bob να λάβει m δεδομένου ότι η Alice έλαβε k είναι

  $$p(B = m \mid A = k) = \frac{p(A = k, B = m)}{p(A = k)} = \frac{\|(X_k \otimes Y_m)\psi\|^2}{\|(X_k \otimes I_{H_B})\psi\|^2}.$$

- Η δεσμευμένη πιθανότητα η Alice να λάβει k δεδομένου ότι ο Bob έλαβε m είναι

$$p(A = k \mid B = m) = \frac{p(A = k, B = m)}{p(B = m)} = \frac{\|(X_k \otimes Y_m)\psi\|^2}{\|(I_{H_A} \otimes Y_m)\psi\|^2}.$$

Θα δούμε τώρα πως σχετίζονται η πιθανότητα $p(A = k)$ η Alice να λάβει k και η δεσμευμένη πιθανότητα η Alice να λάβει k δεδομένου ότι ο Bob έλαβε m για διάφορες καταστάσεις $\psi \in H_A \otimes H_B$.

Ορισμος 4.2.3. Μια κατάσταση $\psi \in H_A \otimes H_B$ λέγεται separable αν είναι της μορφής $\psi = \gamma \otimes \phi$ για $\gamma \in H_A, \phi \in H_B$.

Θα δούμε ότι μια separable κατάσταση συμπεριφέρεται καλά σε ένα κοινό εργαστήριο.

Πράγματι αν η $\psi \in H_A \otimes H_B$ είναι της μορφής $\psi = \gamma \otimes \phi$ για $\gamma \in H_A, \phi \in H_B$ έχουμε:

- η πιθανότητα $p(A = k)$ η Alice να λάβει k είναι

$$\begin{aligned} p(A = k) &= \|(X_k \otimes I_{H_B})\psi\|^2 = \|(X_k \otimes I_{H_B})(\gamma \otimes \phi)\|^2 \\ &= \|X_k\gamma\|^2\|\phi\|^2 = \|X_k\gamma\|^2, \end{aligned}$$

- η πιθανότητα $p(B = m)$ ο Bob να λάβει m είναι

$$\begin{aligned} p(B = m) &= \|(I_{H_A} \otimes Y_m)\psi\|^2 = \|(I_{H_A} \otimes Y_m)(\gamma \otimes \phi)\|^2 \\ &= \|\gamma\|^2\|Y_m\phi\|^2 = \|Y_m\phi\|^2, \end{aligned}$$

- η από κοινού πιθανότητα $p(A = k, B = m)$ η Alice να λάβει k και ο Bob να λάβει m είναι

$$\begin{aligned} p(A = k, B = m) &= \|(X_k \otimes Y_m)\psi\|^2 = \|(X_k \otimes Y_m)(\gamma \otimes \phi)\|^2 \\ &= \|X_k\gamma\|^2\|Y_m\phi\|^2, \end{aligned}$$

- Η δεσμευμένη πιθανότητα η Alice να λάβει k δεδομένου ότι ο Bob έλαβε m είναι

$$\begin{aligned} p(A = k \mid B = m) = \frac{p(A = k, B = m)}{p(B = m)} &= \frac{\|(X_k \otimes Y_m)\psi\|^2}{\|(I_{H_A} \otimes Y_m)\psi\|^2} \\ &= \|X_k\gamma\|^2 = p(A = k). \end{aligned}$$

Άρα όταν οι μετρήσεις γίνονται σε μια separable κατάσταση, η πιθανότητα $p(A = k)$ η Alice να λάβει k είναι ίση με την δεσμευμένη πιθανότητα $p(A = k \mid B = m)$ η Alice να λάβει k δεδομένου ότι ο Bob έλαβε m. Θα δούμε τώρα μια διαφορετική συμπεριφορά όταν η κατάσταση είναι entangled (διεμπλεκόμενη).

- Θεωρούμε τους χώρους Hilbert $H_A = H_B = \mathbb{C}^2$.
- Θεωρούμε την κατάσταση $\psi = \sqrt{2}^{-1}(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1) \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, όπου (e_0, e_1) η κανονική βάση του $\mathbb{C}^2$. Η κατάσταση αυτή δεν είναι separable. Λέγεται Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) κατάσταση.
- Θεωρούμε τους διαγώνιους τελεστές επί του $\mathbb{C}^2$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$E_0^* E_0 + E_1^* E_1 = E_0^2 + E_1^2 = I$$

και το ζεύγος (E_0, E_1) είναι μια μέτρηση στον H.

Η πιθανότητα η Alice να παρατηρήσει 0 στο κοινό εργαστήριο είναι

$$\begin{aligned} p(A = 0) &= \|(E_0 \otimes I)\psi\|^2 = \left\|(E_0 \otimes I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|e_0 \otimes e_0\|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Η πιθανότητα ο Bob να παρατηρήσει 0 στο κοινό εργαστήριο είναι

$$\begin{aligned} p(B = 0) &= \|(I \otimes E_0)\psi\|^2 = \left\|(I \otimes E_0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|e_0 \otimes e_0\|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η Alice πραγματοποιεί μια μέτρηση μετά τη μέτρηση του Bob.

Η δεσμευμένη πιθανότητα $p(A = 0 \mid B = 0)$ η Alice να λάβει 0 δεδομένου ότι ο Bob έλαβε 0 είναι

$$\begin{aligned} p(\mathrm{A} = 0 \mid \mathrm{B} = 0) &= \frac{p(A = 0, B = 0)}{p(B = 0)} \\ &= \frac{\|(\mathrm{E}_0 \otimes E_0)(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\|^2}{\|(I \otimes E_0)(\frac{1}{\sqrt{2}})(e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1)\|^2} = 1. \end{aligned}$$

Άρα η πιθανότητα $p(A = 0)$ η Alice να λάβει 0 είναι 1/2 ενώ η δεσμευμένη πιθανότητα $p(A = 0 \mid B = 0)$ η Alice να λάβει 0 δεδομένου ότι ο Bob έλαβε 0 είναι 1.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι, αν ο Bob μετρήσει 0, τότε στη συνέχεια και η Alice πρέπει να μετρήσει 0 σχεδόν βέβαια. Αυτό μας δείχνει ότι τα αποτελέσματα των μετρήσεων στα διεμπλεκόμενα συστήματα συμπεριφέρονται, κατά κάποιον τρόπο, ως δεσμευμένα ενδεχόμενα.

Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται και ως «quantum teleportation».

4.3 Παίγνια

Θεωρούμε ένα παίγνιο με δύο παίκτες, την Alice και τον Bob, και έναν διαιτητή R.

Τα I_A, I_B είναι πεπερασμένα σύνολα εισόδου (ερωτήσεις) και τα O_A, O_B πεπερασμένα σύνολα εξόδου (απαντήσεις) για τους Alice και Bob αντίστοιχα.

Ο κανόνας του παιγνίου είναι μια συνάρτηση:

$$\lambda : I_A \times I_B \times O_A \times O_B \to \{0, 1\}$$

και είναι γνωστός στους παίκτες και στον διαιτητή.

Το παίγνιο ξεκινά και ο R δίνει στην Alice ένα στοιχείο a του I_A και στον Bob ένα στοιχείο b του I_B. Η Alice και ο Bob δεν γνωρίζουν τι δόθηκε στον άλλον.

Η Alice απαντά με $x \in O_A$ και ο Bob με $y \in O_B$ ανεξάρτητα. Κερδίζουν εάν $\lambda(a, b, x, y) = 1$ και χάνουν εάν $\lambda(a, b, x, y) = 0$.

Η Alice και ο Bob μπορούν να συνεργάζονται και να αποφασίζουν μία στρατηγική πριν αρχίσει το παίγνιο. Όταν αρχίσει, δεν επιτρέπεται να επικοινωνούν

Ορισμος 4.3.1. Μια ντετερμινιστική στρατηγική είναι ένα ζεύγος (f_A, g_B)

$$f_A : I_A \to O_A \qquad g_B : I_B \to O_B$$

ώστε $\lambda(a, b, f_A(a), g_B(b)) = 1$ για κάθε $a \in I_A$ και $b \in I_B$.

Αν η Alice και ο Bob γνωριζουν μία ντετερμινιστική στρατηγική μπορούν να κερδίζουν πάντα. Αποφασίζουν πριν αρχίσει το παίγνιο, ότι αν η Alice λάβει a θα απαντήσει $f_A(a)$ και αν ο Bob λάβει b θα απαντήσει $g_b(b)$. Με αυτόν τον τρόπο πάντα θα έχουμε $\lambda(a, b, f_A(a), g_B(b)) = 1$, δηλαδή θα κερδίζουν πάντα παρά το ότι δεν επικοινωνούν κατά την διάρκεια του παιγνίου.

Θα δούμε τώρα ένα παίγνιο, τον χρωματισμό γραφημάτων, και θα παρουσιάσουμε κάποιες στρατηγικές που μπορεί να εφαρμόσουν οι παίκτες.

Ορισμος 4.3.2. Ένα γράφημα G είναι ένα ζεύγος (V, E) όπου V είναι ένα σύνολο (κορυφές) και E είναι ένα σύνολο από δισύνολα (ακμές) του V.

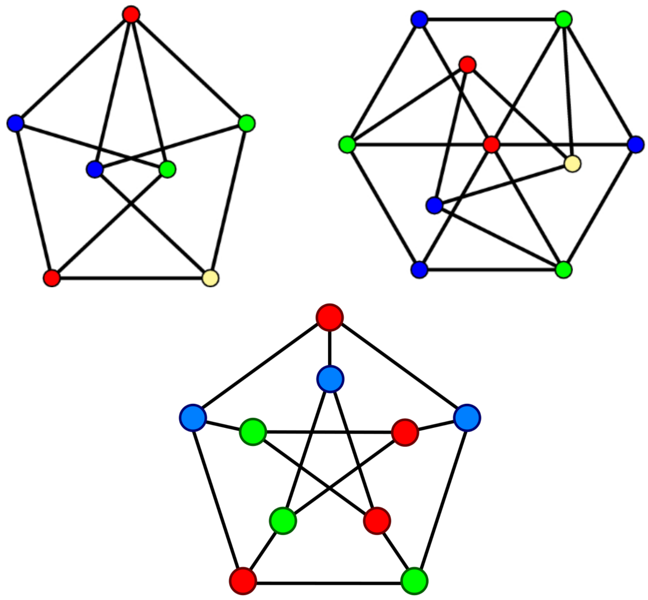
Αν $u, w \in V$, συμβολίζουμε $u \sim w$ αν $\{u, w\} \in E$, δηλαδή αν οι u και w ενώνονται με μία ακμή. Λέμε ότι οι u και w είναι γειτονικές.

Ορισμος 4.3.3. Ο χρωματισμός ενός γραφήματος είναι η απόδοση ενός χρώματος σε κάθε κορυφή με τρόπο ώστε δύο γειτονικές κορυφές να μην έχουν το ίδιο χρώμα. Ένας k-χρωματισμός είναι ένας χρωματισμός με k διαφορετικά χρώματα.

Ορισμος 4.3.4. Ο χρωματικός αριθμός του G είναι

$$\chi(G) = \min\{k : G \text{ έχει έναν } k\text{-χρωματισμό}\}.$$

Στα παρακάτω γραφήματα βλέπουμε παραδείγματα χρωματισμού γραφημάτων.



Θα περιγράψουμε τώρα το παίγνιο του χρωματισμού γραφημάτων. Δίνεται ένα γράφημα και η ιδέα είναι ότι η Alice και ο Bob προσπαθούν να «πείσουν» τον R ότι έχουν ένα χρωματισμό του γραφήματος.

Παραδειγμα 4.3.5. Θεωρούμε ένα γράφημα με πεπερασμένο πλήθος κορυφών, $G = (V, E)$.

Τα σύνολα εισόδου της Alice και του Bob ταυτίζονται και είναι ίσα με V. Έχουμε δηλαδή $I_A = I_B = V$. Τα σύνολα εξόδου της Alice και του Bob ταυτίζονται και είναι ίσα με ένα πεπερασμένο σύνολο χρωμάτων C. Έχουμε δηλαδή $O_A = O_B = C$.

Το παίγνιο είναι το ακόλουθο: Ο R δίνει μια κορυφή του γραφήματος a στην Alice και μία κορυφή b στον Bob. Ο Bob δεν γνωρίζει ποιά κορυφή έδωσε ο R στην Alice και η Alice δεν γνωρίζει ποιά κορυφή έδωσε ο R στον Bob. Η Alice και ο Bob πρέπει να απαντήσουν, δίνοντας ένα χρώμα ο καθένας από το σύνολο χρωμάτων C. Έστω x η απάντηση της Alice και y η απάντηση του Bob. Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις:

- Οι κορυφές a και b είναι γειτονικές.

  Η Alice και ο Bob κερδίζουν εάν $x \neq y$.

- Οι κορυφές a και b δεν είναι γειτονικές.
  Η Alice και ο Bob κερδίζουν ό,τι απάντηση και να δώσουν.
- Οι a και b ταυτίζονται, $a = b$.
  Η Alice και ο Bob κερδίζουν εάν $x = y$.

Ο κανόνας λ του παιγνίου είναι ο ακόλουθος:

- Αν $a \sim b$,
  $\lambda(a, b, x, y) = 1$ όταν $x \neq y$
  $\lambda(a, b, x, y) = 0$ όταν $x = y$.
- Αν $a \nsim b$ και $a \neq b$
  $\lambda(a, b, x, y) = 1$, για κάθε x, y.
- $\lambda(a, a, x, y) = 1$ όταν $x = y$
  $\lambda(a, a, x, y) = 0$ όταν $x \neq y$.

Αν $|C| \geq \chi(G)$ υπάρχουν περισσότερα χρώματα από τον χρωματικό αριθμό και η Alice και ο Bob μπορούν να βρούν ένα χρωματισμό με το πολύ $|C|$ χρώματα. Άρα έχουμε μια συνάρτηση $f = g : V \to C$ ώστε για a, $b \in V$ να έχουμε:

$$\lambda(a, b, f(a), f(b)) = 1.$$

Το ζεύγος (f, f) είναι μία ντετερμινιστική στρατηγική και άρα η Alice και ο Bob εφαρμόζοντας αυτή την στρατηγική μπορούν να κερδίζουν πάντα.

Θεωρούμε τώρα ότι ο R επιλέγει τις κορυφές που θα δώσει στην Alice και στον Bob σύμφωνα με μια συνάρτηση πιθανότητας π. Δηλαδή $\pi : I_A \times I_B \to \mathbb{R}$ με $\pi(a, b) \geq 0$ και

$$\sum_{(a,b) \in I_A \times I_B} \pi(a, b) = 1.$$

Ορισμος 4.3.6. Μια πιθανοτική στρατηγική είναι μία δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p(x, y \mid a, b)$, όπου $p(x, y \mid a, b)$ είναι η πιθανότητα η Alice και ο Bob να απαντήσουν x και y όταν λάβουν a και b αντίστοιχα.

Έχουμε $p(x, y \mid a, b) \geq 0$ και για κάθε a, b

$$\sum_{(x,y) \in O_A \times O_B} p(x, y \mid a, b) = 1$$

Ορισμος 4.3.7. $p(x, y \mid a, b)$ είναι μία τέλεια στρατηγική (perfect strategy) αν

$$\lambda(a, b, x, y) = 0 \Rightarrow p(x, y \mid a, b) = 0.$$

Δηλαδή, μια τέλεια στρατηγική είναι μια στρατηγική με την οποία η Alice και ο Bob δεν παίζουν ποτέ μια κίνηση που χάνει.

4.4 Correlations

Υποθέτουμε ότι $I_A = I_B$ και $O_A = O_B$ με $|I_A| = n$ και $|O_A| = k$. Για κάθε $a \in I_A$, θεωρούμε μία συνάρτηση πιθανότητας $p^1(;\mid a)$ στον O_A, δηλαδή $p^1(x \mid a) \geq 0$ για κάθε $x \in O_A$ και $\sum_{x \in O_A} p^1(x \mid a) = 1$ και για κάθε $b \in I_B$, θεωρούμε μία συνάρτηση πιθανότητας $p^2(;\mid b)$ στον O_B, δηλαδή $p^2(y \mid b) \geq 0$ και $\sum_{y \in O_B} p^2(y \mid b) = 1$.

Το σύνολο των πιθανοτικών στρατηγικών p που είναι στην κυρτή θήκη των p της μορφής

$$p(x, y \mid a, b) = p^1(x \mid a)p^2(y \mid b)$$

λέγεται το σύνολο των κλασικών πυκνοτήτων (classical correlations ή local correlations) και συμβολίζεται $C_{\text{loc}}(n, k)$.

Κάθε τέτοια p αντιστοιχεί σε μια n^2k^2-άδα πραγματικών αριθμών (ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{n^2k^2}$) και άρα το $C_{\text{loc}}(n, k)$ περιέχεται στο $\mathbb{R}^{n^2k^2}$.

Θα δούμε τώρα μια άλλη κατηγορία πυκνοτήτων, τις κβαντικές πυκνότητες.

Στις κλασικές πυκνότητες η πιθανότητα ενός αποτελέσματος περιγράφεται από ένα διάνυσμα πιθανότητας με k συντεταγμένες.

Στις κβαντικές πυκνότητες η πιθανότητα ενός αποτελέσματος περιγράφεται με την χρήση μιας k-άδας θετικών τελεστών με άθροισμα τον ταυτοτικό τελεστή.

Θεωρούμε ένα χώρο Hilbert H_A με $\dim H_A < \infty$. Για κάθε $a \in I_A$ θεωρούμε μία οικογένεια $\{E_{a,x}\}_{x \in O_A}$ ώστε

- $E_{a,x} \in \mathcal{B}(H_A)$, $\forall x \in O_A$
- $E_{a,x} \geq 0$, $\forall x \in O_A$
- $\sum_{x \in O_A} E_{a,x} = I_{H_A}$.

Θεωρούμε επίσης ένα χώρο Hilbert H_B με $\dim H_B < \infty$ και για κάθε $b \in I_B$ θεωρούμε μία οικογένεια $\{F_{b,y}\}_{y \in O_B}$ ώστε

- $F_{b,y} \in \mathcal{B}(H_B)$, $\forall y \in O_B$,
- $F_{b,y} \geq 0$, $\forall y \in O_B$,
- $\sum_{y \in O_B} F_{b,y} = I_{H_B}$.

Η στρατηγική είναι η ακόλουθη: θεωρούμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\psi \in H_A \otimes H_B$, και θέτουμε

$$p(x, y \mid a, b) = \left\langle \psi, (E_{a,x} \otimes F_{b,y})\psi \right\rangle.$$

Το σύνολο των πυκνοτήτων αυτής της μορφής λέγεται σύνολο των κβαντικών πυκνοτήτων και συμβολίζεται με $C_q(n,k)$.

Κάθε τέτοια p αντιστοιχεί σε μια n^2k^2-άδα πραγματικών αριθμών (ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{n^2k^2}$) και άρα το $C_q(n,k)$ περιέχεται στο $\mathbb{R}^{n^2k^2}$.

Παρατηρηση 4.4.1. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$C_{loc}(n,k) \subseteq C_q(n,k).$$

4.5 Κβαντικοί χρωματικοί αριθμοί

Αν $t \in \{\mathrm{loc}, \mathrm{q}\}$ θα λέμε ότι το παίγνιο $G = \{I_A, I_B, O_A, O_B, \lambda\}$ έχει μία τέλεια t-στρατηγική αν υπάρχει $p \in C_t(n,k)$ ώστε

$$\lambda(a,b,x,y) = 0 \Rightarrow p(x,y \mid a,b) = 0.$$

Υπάρχουν παίγνια με τέλειες q-στρατηγικές, που δεν έχουν τέλειες loc-στρατηγικές.

Για $t \in \{\mathrm{loc}, \mathrm{q}\}$ θα συμβολίζουμε

$$\chi_t(G) = \min\{c \in \mathbb{N} : \exists\, p \in C_t(n,c), p \ \text{ τέλεια}\}.$$

Επειδή $C_{loc} \subseteq C_q$, έχουμε $\chi_{loc}(G) \geq \chi_q(G)$.

Θεωρημα 4.5.1. *Το παίγνιο $G = \{I_A, I_B, O_A, O_B, \lambda\}$ έχει μία τέλεια loc-στρατηγική αν και μόνο αν έχει μία ντετερμινιστική στρατηγική.*

Θεωρημα 4.5.2. $\chi_{loc}(G) = \chi(G)$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Οι κορυφές του γραφήματος Hadamard Ω_N είναι οι N-άδες με στοιχεία ± 1 και $u \sim w \Leftrightarrow \langle u, w\rangle = 0$.

Θεωρημα 4.5.3 (Frankl-Rodl, 1987). *Για μεγάλα n, $\chi(\Omega_{2^n}) > 2^n$.*

Θεωρημα 4.5.4 (Broussard-Cleve-Tapp, 1999). $\chi_q(\Omega_{2^n}) \leq 2^n$.

Πορισμα 4.5.5. *Για μεγάλα n, $\chi(\Omega_{2^n}) \neq \chi_q(\Omega_{2^n})$.*

Μπορούμε λοιπόν χρησιμοποιώντας τις κβαντικές πυκνότητες, να «πείσουμε» τον R ότι έχουμε έναν χρωματισμό του γραφήματος Hadamard με λιγότερα χρώματα από τον χρωματικό αριθμό του γραφήματος!

Αναφορές

[1] G. Aubrun and S. J. Szarek, *Alice and Bob meet Banach. The interface of asymptotic geometric analysis and quantum information theory*, Mathematical Surveys and Monographs, 223. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. xxi+414 pp.

[2] C. Palazuelos and T. Vidick, *Survey on nonlocal games and operator space theory*, J. Math. Phys. **57** (2016), no. 1, 015220, 41 pp.

[3] V. Paulsen, *Entanglement and Non-Locality*, (notes by S. J. Harris and S. K. Pandey) in Course Notes https://www.math.uwaterloo.ca/~vpaulsen/

[4] D. Petz, *Quantum information theory and quantum statistics*, Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. x+214 pp.

[5] J. Watrous, *The Theory of Quantum Information*, Cambridge University press, 2018, https://cs.uwaterloo.ca/~watrous/TQI/

Ομιλία 5

Η κατασκευή του συνόλου των φυσικών αριθμών

Χαράλαμπος Κορνάρος

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kornaros@aegean.gr

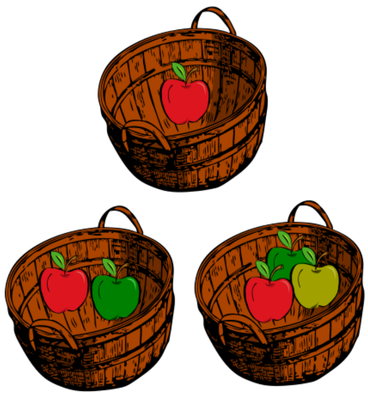
Προαπαιτούμενα: —

5.1 Εισαγωγή

Η κατασκευή του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ από τον Peano, ορισμός του John von Neumann, το αξίωμα της καλής θεμελίωσης ή της κανονικότητας (ZF9), το αξίωμα του επαγωγικού συνόλου, ορισμός του επαγωγικού συνόλου, ορισμός ενός φυσικού αριθμού, το σύνολο των φυσικών αριθμών, δουλεύοντας με την επαγωγή.

Τι είναι ένας αριθμός;

Ένας αριθμός είναι μια μαθηματική οντότητα που διέπεται από κάποιες συγκεκριμένες και χρήσιμες αλγεβρικές ιδιότητες. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τους πιο στοιχειώδεις αριθμούς, τους *φυσικούς*. Ο πιο απλός τρόπος για την κατανόηση της έννοιας είναι να δώσουμε κάποια παραδείγματα. Λέμε ότι έχουμε τρία (3) καλάθια με μήλα. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι έχουμε *απαριθμήσει* τα καλάθια μας χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, τα τρία δάκτυλα του δεξιού χεριού μας. Εδώ η έννοια της απαρίθμησης είναι η απλούστερη δυνατή. Δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία έχουμε διατάξει τα καλάθια, το χρώμα τους, ή το μέγεθός τους. Με άλλα λόγια τα θεωρούμε όλα ίδια, σα να είχαμε τρεις ακριβώς όμοιους κύβους ή τρία όμοια δάκτυλα ή τρία όμοια ξυλάκια ντόμινο. Κάθε γρούπ από τρία όμοια αντικείμενα αναπαριστά ιδεατά τον αριθμό 3. Φυσικά μπορούμε να ζητήσουμε να τακτοποιήσουμε τα καλάθια, να τα βάλουμε σε μια σειρά, το ένα δίπλα από το άλλο. Η τακτοποίηση γίνεται με χρήση κάποιου κριτηρίου. Ας δούμε την παρακάτω εικόνα. Αν μας ζητούσαν να



Σχήμα 5.1: Οι αριθμοί χρησιμοποιούνται για να απαριθμούμε και να τακτοποιούμε.

τακτοποιήσουμε τα καλάθια τότε θα έπρεπε να επιλέξουμε κάποιο λογικό κριτήριο τακτοποίησης, όπως για παράδειγμα, το πόσα μήλα περιέχουν. Οπότε το πάνω καλάθι θα ήταν το *πρώτο* (1ο). Το κάτω αριστερά το δεύτερο (2ο) και το τρίτο (3ο) το κάτω δεξιά.

Σχολια 5.1.1. Το σύμβολο της διάταξης $<$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δηλώσουμε την σειρά τους: 1ο $<$ 2ο $<$3ο. Όπως θα δούμε μελλοντικά οι γνωστοί μας φυσικοί αριθμοί κατασκευάζονται συνήθως με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε δυο διαφορετικοί αριθμοί να μπορούν να διαταχθούν (συγκριθούν) πολύ εύκολα π.χ. απλά κοιτάζοντας το πλήθος των αντικειμένων που περιέχουν! Με απλά λόγια, δυο διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί μπορεί να θεωρηθούν όχι ως καλάθια από όμοια αντικείμενα αλλά ως καλάθια από διαφορετικά αντικείμενα διαφορετικού μεγέθους. Τα αντικείμενα αυτά είναι ξανά κάποιοι φυσικοί αριθμοί! Το 3 για παράδειγμα είναι το καλάθι που περιέχει τρία αντικείμενα: τα 0,1 και 2. Είναι πιο δεξιά από το 2, διότι το 2 περιέχει λιγότερα στοιχεία, μόνο το 0 και το 1!

Η κατασκευή των φυσικών αριθμών με αυστηρό τρόπο έχει θεμελιώδη σημασία διότι πάνω σε αυτούς στηρίζεται η κατασκευή όλων των γνωστών συνόλων αριθμών όπως των ακεραίων $\mathbb{Z}$, των ρητών $\mathbb{Q}$ και των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Υπάρχουν φυσικά κάμποσες κατασκευές των φυσικών αριθμών, όλες με κάποια έννοια ισοδύναμες. Άρα δεν είναι απολυτα σωστό να μιλούμε για ένα μοναδικό σύνολο $\mathbb{N}$ αλλά για πολλά! Παρακάτω θα γνωρίσουμε την συνολοθεωρητική κατασκευή τους κατά Von Neumann. Μπορούμε να ορίσουμε τους φυσικούς αριθμούς και *Αξιωματικά* δηλαδή χωρίς την παρουσίαση κάποιας κατασκευής αλλά με παράθεση όλων των αξιωμάτων και όλων των στοιχειωδών συστατικών που διέπουν (ή θα έπρεπε να διέπουν) την οποιαδήποτε συλλογή αντικειμένων που ισχυρίζεται ότι είναι οι φυσικοί αριθμοί!

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1.2 (Λανθασμένος). Με 0 παριστάνουμε τον μικρότερο φυσικό αριθμό, με 1 παριστάνουμε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που δεν είναι μηδενικός. Με 2 τον αμέσως επόμενο του, με 3 τον αμέσως επόμενο αριθμό του 2 κοκ. Ορίζουμε λοιπόν

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

ΣΧΟΛΙΑ 5.1.3. Ο παραπάνω ορισμός *δεν* είναι ορθός και συνεπώς δεν είναι παραδεκτός. Τα ελαττώματα του ορισμού είναι ότι δεν δίνεται σαφή απάντηση στα ερωτήματα:

- Ποια είναι η σημασία των … στην κατασκευή του συνόλου των φυσικών αριθμών; Πως ορίζεται ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού και ποιες ιδιότητες έχει η συνάρτηση «επόμενος»; Πότε ένας φυσικός είναι μικρότερος από έναν άλλο;

- Ποιά είναι η μαθηματική 'φύση' των στοιχείων 0, 1,2,3…του $\mathbb{N}$; Είναι κάποια θεμελιώδη μαθηματικά αντικείμενα που δεχόμαστε αναντίρρητα την ύπαρξή τους ή μπορούν να κατασκευαστούν με την βοήθεια απλούστερων εννοιών;[1]

- Γιατί το 1000^{3000} θεωρείται ένας φυσικός αριθμός ενώ το 3.5 όχι;

- Γιατί κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}$ θεωρείται πεπερασμένο, ενώ το ίδιο το $\mathbb{N}$ θεωρείται άπειρο; Εξάλλου γιατί να υπάρχει ένα «άπειρο» σύνολο που περιέχει ακριβώς όλους τους φυσικούς αριθμούς;

Στα ερωτήματα αυτά πρέπει να δώσουμε σαφείς απαντήσεις. Αν απαντήσουμε στο δεύτερο ερώτημα, τότε προφανώς θα έχουμε απαντήσει και στα περισσότερα απο τα υπόλοιπα! Οι τελίτσες … στα μαθηματικά κρύβουν μια *επαγωγική κατασκευή* που δεν την έχουμε ορίσει ακόμη. Αυτή

[1] Ο Kronecker είχε πει σε μια ομιλία του το 1886 σε φυσιολάτρες του Βερολίνου ότι «Οι φυσικοί Αριθμοί κατασκευάστηκαν από τον Θεό. Οτιδήποτε άλλο από τον άνθρωπο.»

η κατασκευή πρέπει να είναι τόσο καλή ώστε να συμπεριλαμβάνει την έννοια του επόμενου, αλλά και των γνωστών μας πράξεων (για παράδειγμα το άθροισμα, το γινόμενο ή τη δύναμη μεταξύ των φυσικών αριθμών 1000 και 3000 και το αποτέλεσμα πρέπει να είναι ξανά ένας—πεπερασμένος—φυσικός αριθμός).

Σχολια 5.1.4. Οι απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα αποδείχθηκαν ότι δεν ήταν καθόλου εύκολες! Δόθηκαν τελικά διάφοροι ορισμοί (όλοι ισοδύναμοι) για το σύνολο $\mathbb{N}$ αφού όμως η μαθηματική επιστήμη είχε αρχίσει να στηρίζεται σε γερά θεμέλια της Θεωρίας Συνόλων και της Λογικής! Η πρώτη αυστηρή απάντηση δόθηκε αξιωματικά από τον Giuseppe Peano στηριζόμενος στην δουλειά ή επεκτείνοντας την δουλειά των Dedekind και Peirce. Δεν κατασκεύασε κάποια δομή $\mathbb{N}$, αλλά έδωσε τα αξιώματα που διέπουν την οποιαδήποτε δομή $\mathbb{N}$. Είναι μια από τις σημαντικότερες στιγμές της Ιστορίας των Μαθηματικών!

Πριν όμως αρχίσουμε να κατασκευάζουμε αυστηρά το σύνολο των φυσικών αριθμών από τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων ή έστω να αναφέρουμε τα αξιώματα Peano, θα δώσουμε κάποιες επιπλέον λογικοφανείς απαντήσεις οι οποίες είναι όλες προβληματικές (κρύβουν αυτοαναφορά, είναι κυκλικές) για να τονίσουμε ακριβώς την δυσκολία της εξεύρεσης ενός καλού ορισμού.

- $\mathbb{N} = \{x : \text{το } x \text{ γράφεται ως } 1 + 1 + \ldots + 1,$ $\text{για ένα πεπερασμένο πλήθος μονάδων}\}$
- $\mathbb{N} = \{x : x = 0, \text{ ή υπάρχει κάποιο στοιχείο } y \text{ του } \mathbb{N}$ $\text{έτσι ώστε } x = y + 1\}$
- Ένας φυσικός είναι ένας αριθμός που μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας μόνο τα ψηφία 0, 1, 2, ...9.

Ξεκινώντας την κατασκευή των φυσικών αριθμών

Στην Θεωρία Συνόλων οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι τίποτα παραπάνω από κάποια ιδιαίτερα σύνολα! Τα σύνολα είναι κάποια μαθηματικά αντικείμενα που κατασκευάζονται αυστηρά με την βοήθεια των αξιωμάτων της Θεωρίας Συνόλων.

Ορισμος 5.1.5 (Τα βασικά αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων).

Αξίωμα του κενού συνόλου: Υπάρχει ένα *σύνολο* που δεν περιέχει τίποτα(!) και το συμβολίζουμε με $\varnothing$.

Αξίωμα της ισότητας συνόλων: Δυο σύνολα θεωρούνται ίσα (ή διαφορετικά) αν και μόνον αν περιέχουν (ή δεν περιέχουν) τα *ίδια* ακριβώς στοιχεία!

Αξίωμα «Ζευγαρώματος»: Κάθε δυο σύνολα μπορούμε να τα ζευγαρώσουμε! Το αποτέλεσμα είναι ένα μεγαλύτερο σύνολο που περιέχει ως στοιχεία μόνο αυτά τα σύνολα. Η σειρά με την οποία τοποθετούμε τα σύνολα αυτά στο ζευγάρωμα δεν έχει καμμιά σημασία λόγω του παραπάνω αξιώματος της ισότητας συνόλων!

Αξίωμα της ένωσης: Αν A είναι ένα σύνολο τότε μπορούμε να πάρουμε όλα τα στοιχεία των στοιχείων του A και να κατασκευάσουμε με αυτά ένα νέο σύνολο. Το νέο αυτό σύνολο συμβολίζεται με $\cup A$ και λέγεται «η ένωση των στοιχείων του A».

Παραδειγματα 5.1.6.
- Το σύνολο χωρίς στοιχεία είναι ο φυσικός *μηδέν* $0 = \emptyset$.
- Από το 0 με το αξίωμα του ζευγαρώματος μπορούμε να κατασκευάσουμε το ζευγάρωμα του με τον εαυτό του που παριστάνεται απλά με το μονοσύνολα $1 = \{0\}$. Όμοια μπορούμε να κατασκευάσουμε τα μονοσύνολα $\{1\}, \{\{1\}\}, \ldots$
- Τα δισύνολα κατασκευάζονται με την βοήθεια του αξιώματος του ζευγαρώματος εφαρμοσμένο πάνω σε δυο διαφορετικά σύνολα! Σπουδαία δισύνολα: $2 = \{0, 1\}, \{0, \{1\}\}, \{0, \{\{1\}\}\} \ldots, \{1, 2\}, \ldots$
- Τρισύνολα $3 = \cup\{2, \{2\}\} = \{0, 1, 2\}, \{0, 1, \{1\}\}, \ldots$
- Τετρασύνολα $4 = \cup\{3, \{3\}\} = \{0, 1, 2, 3\}$ κοκ.
- Πεντασύνολα $5 = \cup\{4, \{4\}\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ κοκ.

Σχολιο 5.1.7. Είναι νομίζουμε σαφές ότι από όλα τα άπειρου πλήθος μονοσύνολα που μπορεί κάποιος να κατασκευάσει επιλέγουμε μόνο ένα (το $\{0\}$) που το ορίζουμε να είναι ο φυσικός αριθμός 1. Όμοια, από όλα τα άπειρου πλήθος δισύνολα που μπορεί κάποιος να κατασκευάσει, επιλέγουμε μόνο ένα, το $\{0, 1\} = \{0, \{0\}\} = \cup\{1, \{1\}\}$, που το ορίζουμε να είναι ο φυσικός αριθμός 2. Το 2 έχει μέσα του ακριβώς δυο φυσικούς αριθμούς. Όμοια, κατασκευάζουμε τους πιο περίπλοκους φυσικούς αριθμούς $3 = \cup\{2, \{2\}\}, 4 = \cup\{3, \{3\}\}$ κοκ. που περιέχουν όλο και περισσότερους φυσικούς αριθμούς. Γενικά, είναι εύκολο να ανακαλύψουμε το *μοτίβο* της κατασκευής του φυσικού που *έπεται* του φυσικού n. Ο επόμενος φυσικός $S(n)$ είναι πιο γεμάτος (κατά ένα) από τον φυσικό n, διότι περιέχει μέσα του το ίδιο το n: $S(n) = \cup\{n, \{n\}\}$. Θα αναφέρουμε περισσότερα για το σύμβολο S στα επόμενα.

Σχολια 5.1.8. Φυσικά μπορεί να αναρωτηθεί κάποιος γιατί τα υπόλοιπα σύνολα $\{1\}, \{\{1\}\}$, $\{0, \{1\}\}, \ldots$ δεν είναι ή δεν θα έπρεπε να είναι φυσικοί αριθμοί. Θα μπορούσαν βέβαια κάποια απ' αυτά να παριστάνουν κάποιους άλλους αριθμούς, αλλά όχι κάποιους φυσικούς αριθμούς. Η κατασκευή τους, όπως θα δούμε σε λίγο, απαγορεύει την διείσδυση κάποιων συνόλων διαφορετικών από το 0 ή εκείνων που κατασκευάζονται από το 0 με διαδοχικές εφαρμογές της συνολοσυνάρτησης $S(n) = \cup\{n, \{n\}\}$ πάνω του. Φυσικά δεν έχουμε ακόμα απαντήσει στο βασικό ερώτημα της ύπαρξης του απείρου συνόλου $\mathbb{N}$ που περιέχει ακριβώς όλους τους φυσικούς αριθμούς και κανένα από τους υπόλοιπους αριθμούς!

5.1.1 Ο Αξιωματικός ορισμός του $\mathbb{N}$ από τον Peano

Ο Giuseppe Peano (Ιταλός μαθηματικός του 20ου αιώνα, Γεννήθηκε το 1858 και πέθανε σε ηλικία 74 χρονών το 1932) έδωσε τον πρώτο ορθά θεμελιωμένο ορισμό της έννοιας του φυσικού αριθμού και του $\mathbb{N}$. Ο ορισμός αυτός είναι αξιωματικός, και στηρίζεται στην έννοια του επόμενου (του S) χωρίς όμως να δίνει ιδέες για την κατασκευή του S ή του $\mathbb{N}$ πέρα από τις *επιθυμητές* ιδιότητές των. Τα βασικά αξιώματα του είναι

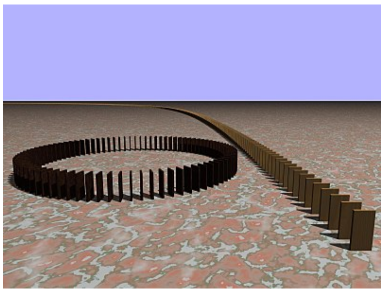
- Το 0 είναι ένας φυσικός αριθμός.
- Αν το n είναι ένας φυσικός αριθμός, συμβολικά $n \in \mathbb{N}$, τότε και $S(n)$ είναι όμοια ένας μοναδικός φυσικός αριθμός (ουσιαστικά, αυτό το αξίωμα ισχυρίζεται ότι η S είναι μια συνάρτηση $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$)
- Η S ως συνάρτηση είναι 1-1.
- Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n έτσι ώστε $S(n) = 0$. Με απλά λόγια, το 0 δεν μπορεί να θεωρηθεί ο επόμενος κάποιου άλλου φυσικού αριθμού.

Σχολια 5.1.9.

- Ο Peano δεν αναγνώριζε το 0 ως τον μικρότερο φυσικό αριθμό αλλά το 1. Εδώ κάνουμε μια μικρή παρατυπία θεωρώντας ότι ο μικρότερος φυσικός αριθμός είναι το 0. Αυτό βέβαια έχει ως συνέπεια τα παραπάνω αξιώματα να μην είναι ακριβώς τα ίδια με εκείνα που είχε σκεφτεί ο Peano αλλά αυτό δεν επηρεάζει το γενικό πνεύμα των αξιωμάτων του. Επίσης το επόμενο $S(n)$ το είχε συμβολίσει χρησιμοποιώντας το σύμβολο + της πρόσθεσης ως εξής: $S(n) = n + 1$. Όμως εδώ χρησιμοποιούμε αποκλειστικά το σύμβολο S και όχι του +, το οποίο θα ορίσουμε αργότερα αναδρομικά με χρήση του S και του 0.
- Σύμφωνα λοιπόν με την αξιωματική κατασκευή του Peano όλα τα παρακάτω αντικείμενα $0, 1 = S(0), 2 = S(1), 3 = S(2), \ldots$ είναι φυσικοί αριθμοί και κανένας άλλος. Μπορούμε να τους φανταστούμε ως

ξυλάκια του ντόμινο το ένα πίσω από το άλλο σε ίσες αποστάσεις, που το καθένα έχει απαριθμηθεί με μια ταμπέλα 0, 1,2 .... Το 0 είναι το πρώτο ντόμινο που τοποθετούμε στην σειρά. Όλα τα ντόμινο της σειράς, εκτός από το πρώτο, το 0, έχουν μια ταμπέλα που ξεκινάει με S. Το 1=S(0), για παράδειγμα, παριστάνει εκείνο το ντόμινο που βρίσκεται μεταξύ του 0, και του 2=S(1)=SS(0).

- Οι φυσικοί αριθμοί δεν μπορεί να τοποθετηθούν κατά σειρά και σε ίσες αποστάσεις πάνω στην περιφέρεια ενός (κλειστού) κύκλου με την βοήθεια της ταμπέλας τους, διότι τότε θα ήταν πεπερασμένου πλήθους. Με άλλα λόγια κάποιος απ' αυτούς θα είχε μπροστά του (δηλαδή θα είχε επόμενο) κάποιον παλαιότερο φυσικό αριθμό (με μικρότερη ταμπέλα). Ουσιαστικά αυτό θα σήμαινε ότι η συνάρτηση S είναι κυκλική (έχει κάποιο loop). Ο Peano κατάφερε να αποφύγει την περίπτωση αυτή προσθέτοντας ένα σημαντικό αξίωμα, το αξίωμα του επαγωγικού συνόλου! Κοντολογίς, οι φυσικοί αριθμοί κατά Peano είναι μια άπειρη μη κλειστή αλυσίδα με ένα αρχικό στοιχείο όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα στα δεξιά.



Όπως προαναφέραμε, ο Peano, δεν έδωσε κάποια ιδέα για το ποια είναι η συνάρτηση S. Χρησιμοποιώντας όμως το αξίωμα της κανονικότητας της Θεωρίας Συνόλων μπορούμε να δείξουμε ότι μια κατάλληλη επιλογή για την S είναι η $S(n) = \cup\{n, \{n\}\}$.

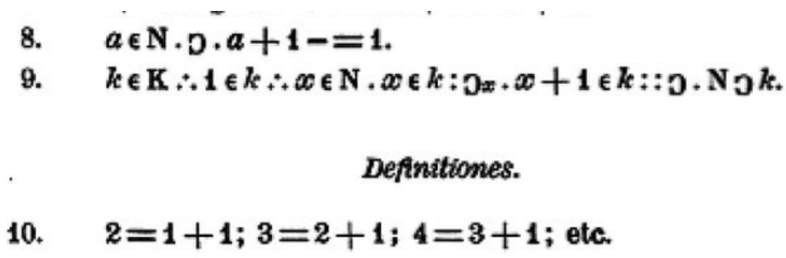
Ορισμος 5.1.10 (Το αξίωμα της καλής θεμελίωσης ή της κανονικότητας (ZF9)). Κάθε μή κενό σύνολο x περιέχει ένα ∈-ελαχιστικό στοιχείο:

$$\forall x \neq \emptyset \; \exists y \; (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$$

Οπότε, αν ισχυριστούμε ότι υπάρχουν δυο διαφορετικά σύνολα x, y με την ιδιότητα $S(x) = S(y)$, τότε $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$ και άρα $x \in y \in x$. Όμως τότε, το $x' = \{x, y\}$ δεν έχει ∈-ελαχιστικό στοιχείο! Ακόμα, αν τύχει $S(x) = \emptyset$, τότε θα καταλήγαμε ότι το x ανήκει στο κενό σύνολο, άτοπο! Συνεπώς η S είναι 1-1 και πληροί τα αξιώματα του Peano.

5.1.2 Το αξίωμα του επαγωγικού συνόλου

Το βασικό χαρακτηριστικό του συνόλου $\mathbb{N}$ όλων των φυσικών αριθμών βρίσκεται στο αξίωμα με τον αριθμό 9 από το περίφημο βιβλίο Arithmetices Principia που συνέγραψε ο Peano (δείτε Σχήμα 5.2)[2].



8. $a \in N . \supset . a+1 -= 1.$

9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x+1 \in k :: \supset . N \supset k.$

Definitiones.

10. $2=1+1;\ 3=2+1;\ 4=3+1;$ etc.

Σχήμα 5.2: Arithmetices Principia

Ας εκφράσουμε το συμβολισμό του Peano σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα. :

Ορισμος 5.1.11 (Η βασική ιδιότητα του $\mathbb{N}$). Εάν k είναι ένα σύνολο έτσι ώστε:

- $0 \in k$
- $(\forall x \in \mathbb{N})(x \in k \to S(x) \in k)$

τότε $\mathbb{N} \subseteq k$

Θέτοντας $k = \mathbb{N}$ στον παραπάνω ορισμό ότι, αν $x \in \mathbb{N}$, τότε αναγκαστικά και ο επόμενός του $S(x)$ είναι στοιχείο του $\mathbb{N}$. Επίσης διαπιστώνουμε ότι αν υποθέσουμε ότι το k είναι ένα τυχαίο σύνολο για το οποίο ισχύουν:

- $0 \in k$
- $(\forall x \in k)(x \in k \to S(x) \in k)$

τότε θεωρώντας το σύνολο $k' = k \cap \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε με χρήση της βασικής ιδιότητας του $\mathbb{N}$ ότι: $\mathbb{N} \subseteq k' = k \cap \mathbb{N}$ δηλαδή ότι το k περιέχει μέσα του το σύνολο $\mathbb{N}$ όλων των φυσικών αριθμών!

Ορισμος 5.1.12 (Ορισμός του επαγωγικού συνόλου). Ένα σύνολο k λέγεται ($S-$) *επαγωγικό* εάν $\emptyset \in k$ και είναι κλειστό ως προς την πράξη S: για κάθε στοιχείο $x \in k$ έχουμε ότι $S(x) \in k$.

[2]Η πραγματεία με τον λατινικό τίτλο Treatise Arithmetices principia, nova methodo exposita γράφτηκε από τον Peano το 1889. Είναι γραμμένη εξ' ολοκλήρου στα Λατινικά διότι πίστευε στην διαχρονική σπουδαιότητά της. Ο τίτλος μεταφράζεται ως «Οι αρχές της Αριθμητικής παρουσιασμένες με μια νέα Μέθοδο» και αποτελεί το σπέρμα, το ξεκίνημα της Μαθηματικής Λογικής και της Θεωρίας Συνόλων. Περιλαμβάνει τα αξιώματα των Φυσικών Αριθμών που σήμερα καλούνται με το όνομά του, καθώς και τους γνωστούς συμβολισμούς για τις γνωστές συνολοθεωρητικές πράξεις $\in, \subset, \cup, \cap$ και συνολοδιαφοράς $\setminus$.

Σύμφωνα λοιπόν με τον σπουδαίο ορισμό του Peano, οι φυσικοί αριθμοί είναι το μικρότερο S-επαγωγικό σύνολο. Με άλλα λόγια, κάθε επαγωγικό σύνολο (αν βέβαια τέτοιο υπάρχει) θα πρέπει να περιέχει και το σύνολο $\mathbb{N}$. Το 0 ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο. Τα 1,2 και γενικά όλοι οι φυσικοί αριθμοί είναι στοιχεία κάθε επαγωγικού συνόλου! Την ύπαρξη του $\mathbb{N}$ ο Peano, όπως προαναφέραμε, την δέχεται αξιωματικά! Φυσικοί αριθμοί είναι απλά όλα τα στοιχεία του $\mathbb{N}$!

Βασικά προβλήματα. α) Δεν έχουμε δώσει ένα αυστηρό (μη αξιωματικό) ορισμό του πότε ένα σύνολο n είναι (δηλαδή θεωρείται ως) ένας φυσικός και πότε δεν είναι. Χρησιμοποιώντας την αξιωματική κατασκευή του Peano διαπιστώνουμε όμως ένας φυσικός αριθμός έχει την σημαντικότατη ιδιότητα να είναι στοιχείο όχι μόνο του $\mathbb{N}$ αλλά και κάθε άλλου S-επαγωγικού συνόλου.
β) Δεν έχουμε ακόμα απαντήσει με ακρίβεια πότε ο φυσικός n θεωρείται μικρότερος από τον φυσικό m. Μια ανελλιπής απάντηση θα ήταν ως εξής: Το 0 είναι ο μικρότερος απ' όλους τους υπόλοιπους αριθμούς. Ο n είναι μικρότερος του m αν στην κατασκευή του m χρησιμοποιήσαμε την S περισσότερες φορές από όσες για την κατασκευή του n. Η έκφραση Η έκφραση «περισσότερες φορές» είναι φυσικά μαθηματικά ανακριβής.
γ) Πως μπορούμε τελικά να κατασκευάσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$;
δ) Η κατασκευή του $\mathbb{N}$ εξαρτάται από την επιλογή S; Με άλλα λόγια, δυο διαφορετικά S (που πληρούν τα αξιώματα του Peano) μπορεί να δώσουν δυο εντελώς διαφορετικά σύνολα $\mathbb{N}$; Αν βέβαια συνέβαινε κάτι τέτοιο, τότε πράγματι θα βρισκόμασταν σε χάος...

Για να απαντήσουμε στο γ), θα πρέπει πρώτα δυστυχώς να δεχτούμε ότι *υπάρχει* έστω και ένα επαγωγικό σύνολο! (Αυτό σημαίνει ότι ο Kronecker είχε κάποιο δίκιο...) Αυτό το αξίωμα είναι το ZF7, δηλαδή το 7ο κατά σειρά αξιωματικό σχήμα στη συλλογή αξιωμάτων της Θεωρίας Συνόλων κατά Zermelo-Fraenkel.

Ορισμος 5.1.13 (Αξίωμα του απείρου ZF7). Υπάρχει ένα (τουλάχιστον) επαγωγικό σύνολο!

Η S στο παραπάνω αξίωμα είναι η συνολοθεωρητική συνάρτηση $S(n) = \cup\{n, \{n\}\}$ και το 0 είναι το κενό σύνολο. Οπότε όταν μιλάμε στο εξής για επαγωγικά σύνολα χωρίς να αναφέρουμε την S, θα εννοούμε πάντα την παραπάνω S. Η χρήση αυτής της S για την κατασκευή του συνόλου $\mathbb{N}$ οφείλεται στον περίφημο μαθηματικό ή καλύτερα πολυεπιστήμονα John von Neuman (1903–1957) Ουγγρικής καταγωγής.

Το παραπάνω αξίωμα μας δίνει την δυνατότητα να κατασκευάσουμε άπειρα το πλήθος διαφορετικά επαγωγικά σύνολα! Χωρίς να δώσουμε πολλές λεπτομέρειες μπορούμε να αναφέρουμε ότι αν k είναι ένα επαγωγικό σύνολο, τότε όμοια είναι και το σύνολο $k \cup \{n, S(n), S(S(n)), \ldots\}$, όπου $n \notin k$. Τέτοιο n υπάρχει πάντα, διότι τα συνολοθεωρητικά αξιώματα μας εξασφαλίζουν ότι *δεν* υπάρχει σύνολο k που περιέχει κάθε άλλο σύνολο n.

Ερχόμαστε τώρα στην απάντηση του ερωτήματος α)

Ορισμος 5.1.14 (Συνολοθεωρητικός ορισμός ενός φυσικού αριθμού). Ένα σύνολο n λέγεται ότι είναι ένας *φυσικός αριθμός* αν και μόνο αν ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο k.

Άρα τα σύνολα $0, 1, 2 \ldots$ είναι όλοι φυσικοί αριθμοί όπως ακριβώς απαιτείται από τα αξιώματα του Peano! Ακόμα μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι αν n είναι φυσικός αριθμός τότε και ο $S(n)$ είναι ομοίως, ή με άλλα λόγια και αυτός ανήκει σε κάθε επαγωγικό σύνολο! Ο παραπάνω ορισμός μας προσφέρει επίσης και την δυνατότητα να συγκρίνουμε (διατάσσουμε) εύκολα δυο φυσικούς αριθμούς όπως θα δούμε παρακάτω.

Παρόλο που δώσαμε τον ορισμό ενός φυσικού αριθμού με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, όμως δεν μπορούμε να απαντήσουμε στο γ) ως

Ορισμος 5.1.15. Το σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζεται ως $\mathbb{N} = \{n :$ το n είναι ένας φυσικός αριθμός$\}$

Τέτοιοι ορισμοί *δεν* επιτρέπονται στα μαθηματικά διότι οδηγούμαστε σε παράδοξα! Με όμοιο τρόπο το $V = \{n : n = n\}$ δεν είναι σύνολο διότι περιέχει ως στοιχεία του όλα τα σύνολα! Δεν είναι πάντα ένα σύνολο μια *οποιαδήποτε* συλλογή μαθηματικών αντικειμένων (δηλαδή κάποιων συνόλων) n που έχουν απλώς κάποια ιδιότητα $\phi(n)$!

Ορισμος 5.1.16 (Αξιωματικό σχήμα κατασκευής υποσυνόλων ZF5). Ας υποθέσουμε ότι η $\phi(z, w_1, \ldots, w_k, x)$ είναι ένας τύπος της γλώσσας L της Θεωρίας Συνόλων που οι *ελεύθερες* μεταβλητές του ϕ είναι όλες ή κάποιες από τις $z, w_1, \ldots, w_k, x$. Αν θεωρήσουμε ότι οι $x, w_1, \ldots, w_k$ παριστάνουν κάποια πραγματικά σύνολα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο σύνολο y (υποσύνολο του x) που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία z του x που *ικανοποιούν* τον τύπο $\phi(z, w_1, \ldots, w_k, x)$.

Σχολια 5.1.17. Συμβολικά το αξιωματικό σχήμα γράφεται ως: αν το y είναι ένα σύμβολο μεταβλητής που δεν εμφανίζεται στον ϕ ούτε είναι το x τότε:

$$\forall x \, \forall w_1 \ldots \forall w_k \, \exists y \, \forall z \, [z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z, w_1, \ldots, w_k, x))].$$

Το νέο σύνολο συμβολίζεται συνολοθεωρητικά και σε μορφή αγκίστρων ως

$$y = \{z \in x : \phi(z, w_1, \ldots, w_k, x)\}$$

Το παραπάνω αξίωμα μας δίνει την δυνατότητα να κατασκευάσουμε επιτέλους το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Ορισμος 5.1.18 (Ο ορθός συνολοθεωρητικός ορισμός του συνόλου $\mathbb{N}$). $\mathbb{N} = \{n \in k : \text{το } n \text{ είναι ένας φυσικός αριθμός}\}$, όπου k είναι οποιοδήποτε επαγωγικό σύνολο.

Αυτός ο ορισμός του $\mathbb{N}$ ανταποκρίνεται τέλεια στην αντίληψη του Peano, ότι δηλαδή το $\mathbb{N}$ είναι εκείνο το επαγωγικό σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου k. Πράγματι μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεωρημα 5.1.1 (Βασικές ιδιότητες του $\mathbb{N}$). *α) Το $\mathbb{N}$ είναι ένα επαγωγικό σύνολο και υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου.*
β) Είναι το μοναδικό σύνολο με τις παραπάνω ιδιότητες και ανεξάρτητο από την επιλογή του (συγκεκριμένου) k που χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό του.

Δεν θα δώσουμε εδώ κάποια απόδειξη, απλά να σχολιάσουμε ότι αν έχουμε δείξει το α) τότε προφανώς προκύπτει το β) δηλαδή ότι το $\mathbb{N}$ είναι μοναδικό και ανεξάρτητο του συγκεκριμένου k που χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό του.

5.1.3 Δουλεύοντας με την επαγωγή

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τύπο $\phi(x)$ της γλώσσας L που περιγράφει μια ιδιότητα του φυσικού αριθμού x. Τότε οι δυο παρακάτω συνθήκες μας εξασφαλίζουν ότι η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για *κάθε* $x \in \mathbb{N}$.

- η $\phi(x)$ ισχύει όταν $x = 0$.
- Εαν υποθέσουμε ότι n είναι ένας τυχαίος φυσικός που έχει την ιδιότητα $\phi(n)$, τότε είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι ισχύει και η $\phi(x)$ για $x = S(n)$.

Για την απόδειξη του παραπάνω επαγωγικού σχήματος θεωρούμε το υποσύνολο του $\mathbb{N}$ με ορισμό $\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} : \phi(n)\}$ και αποδεικνύουμε ότι είναι επαγωγικό και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.1 ίσο με το $\mathbb{N}$!

Παραδειγματα 5.1.19 (Εφαρμογές της μαθηματικής επαγωγής). α) Είναι εύκολο να δείξουμε με χρήση της μαθηματικής επαγωγής ότι κάθε φυσικός αριθμός n είναι ίσος με το 0 ή με $S(m)$ για κάποιο μοναδικό φυσικό m που λέγεται *ο προηγούμενος του n*. β) Η συνάρτηση S του επόμενου δεν μπορεί να έχει ένα πεπερασμένο loop. Άν υπήρχε π.χ. ένα S 2-loop δηλαδή αν υπήρχαν δυο διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί έτσι ώστε $S(x) = y$ και $S(y) = x$ τότε θα έπρεπε $S(S(y)) = y$ που είναι άτοπο. Πράγματι, ορίζοντας ως $\phi(n) : S(S(n))) \neq n$ διαπιστώνουμε εύκολα με επαγωγή ότι η σχέση αυτή ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.[3] γ) Για κάθε δυο φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει: $m \in n \leftrightarrow m \subset n$. Για την απόδειξη κάνουμε τα παραπάνω δυο βήματα της επαγωγής στους τύπους $\phi_1(n) : m \in n \to m \subset n$ και $\phi_2(n) : m \subset n \to m \in n$ αντίστοιχα. Η διάταξη $<$ ορίζεται να είναι η σχέση $\in$ και άρα *ταυτίζεται* με την έννοια του γνησίου υποσυνόλου $\subset$ στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Άρα έχει την μεταβατική ιδιότητα διότι η σχέση $\subset$ είναι προφανώς μεταβατική. Το σπουδαίο είναι ότι αποδεικνύεται με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ότι επιπλέον η διάταξη είναι *ολική*:

Για κάθε δυο φυσικούς αριθμούς m, n ισχύει ένα μόνο από τα παρακάτω $m < n$, $m = n$, $n < m$.

Ο παρακάτω ορισμός δίνει λοιπόν μια εύκολη απάντηση στο ερώτημα β).

Ορισμος 5.1.20 (Συνολοθεωρητικός ορισμός της διάταξης $<$ στο σύνολο $\mathbb{N}$).

$$n < m \leftrightarrow n \in m (\leftrightarrow n \subset m).$$

Αν έχουμε $n < m$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο n είναι παλαιότερος, δηλαδή έχει κατασκευαστεί νωρίτερα, από τον m. Αυτή η ιδιότητα μας βοηθάει να κατανοήσουμε την απειρία του συνόλου των φυσικών αριθμών, μια ιδιότητα που ήδη την προαναφέραμε. Η διαδοχική χρήση του S παράγει όλο και νέα αντικείμενα! Αν είχαμε ότι $S(n) = m$ για κάποιο m, τότε το m είναι αναγκαστικά ένας νέος φυσικός αριθμός αφού είναι μεγαλύτερος από τον n (το $S(n) = m$ συνεπάγεται ότι το n είναι στοιχείο του m και άρα μικρότερος του m) και μεγαλύτερος απ' όλους τους μικρότερους από τον n! Όμως κάθε φυσικός αριθμός n θεωρείται πεπερασμένος (αυτό περιλαμβάνει και την παραδοχή ότι το 1000^3000 είναι ένας πεπερασμένος αριθμός, αφού μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ένας φυσικός αριθμός!).

Πόρισμα: Το 3.5 δέν μπορεί να είναι ένα φυσικός αριθμός! Πράγματι, αν ήταν τότε θα προέκυπτε η διάταξη $3 < 3.5 < 4 = 3 \cup \{3\}$. Συνεπώς το 3.5 θα ήταν το 3 ή στοιχείο του 3, δηλαδή κάποιο από τα 0, 1, 2. Όμως αφού $3<3.5$, έχουμε ότι το 3.5 δεν είναι ίσο με το 3 (αφού αν ήταν θα καταλήγαμε στο γεγονός ότι $3 \in 3$, και μπορεί να αποδειχθεί με τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων ότι είναι άτοπο). Με όμοιο τρόπο δεν μπορεί να είναι κανένα από τα 0, 1, ή 2. Συνεπώς δεν είναι όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί φυσικοί αριθμοί! Γενικά, μεταξύ του φυσικού n και του επόμενού του $S(n)$ δεν υπάρχει κάποιος άλλος φυσικός αριθμός. Όπως θα δούμε αργότερα,

[3] Άρα το σύνολο $\{0, 1, 2, 3 \ldots,\} \cup \{x, y\}$ με $S(0) = 1, S(1) = 2, \ldots S(x) = y$ και $S(y) = x$ δεν μπορεί να είναι οι φυσικοί $\mathbb{N}$.

όταν ορίσουμε την πράξη της πρόσθεσης, ισχύει $n + 1 = S(n)$ και άρα κάθε δυο διαδοχικοί φυσικοί απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση 1.

Η κατασκευή του $\mathbb{N}$ μέσω της S καθώς και η επαγωγή, μας δίνει την δυνατότητα να κάνουμε αριθμητική ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς, ή με άλλα λόγια, να ορίσουμε με αυστηρό τρόπο όλες τις γνωστές αριθμητικές πράξεις και να προχωρήσουμε στην απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων τους! Χωρίς όμως την επαγωγή δεν θα μπορούσαμε να ορίσουμε αναδρομικά καμία πράξη!

Σχολιο 5.1.21. Πριν προχωρήσουμε στο τελευταίο κομμάτι της ομιλίας θα δώσουμε μια συνοπτική απάντηση στο ερώτημα δ). Είναι αλήθεια ότι η κατασκευή του συνόλου των φυσικών αριθμών εξαρτάται δραματικά από το ποιο S θα επιλέξουμε αρχικά. Για παράδειγμα ο Zermelo επέλεξε ως S την συνάρτηση με ορισμό $S(n) = \{n\}$. Συνεπώς οι φυσικοί αριθμοί κατά τον Zermelo είναι πάντα μόνο μονοσύνολα όπως για παράδειγμα, τα 0, $1 = \{0\}, 2 = \{1\}, 3 = \{2\}, \ldots$. Με την πρώτη ματιά φαίνεται ότι τελικά προκύπτουν δυο εντελώς διαφορετικά σύνολα φυσικών αριθμών! Όμως μπορούμε να αποδείξουμε ότι οποιεσδήποτε δυο δομές (κατασκευές) $\mathbb{N}_1 = \{0_1, 1_1, 2_1, \ldots\}$ και $\mathbb{N}_2 = \{0_2, 1_2, 2_2, \ldots\}$ φυσικών αριθμών με μηδέν τα 0_1 και 0_2 και συναρτήσεις επόμενου S_1 και S_2 αντίστοιχα, που ικανοποιούν όλα τα αξιώματα Peano, είναι *ισόμορφες*, δηλαδή υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $f_0 : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ η οποία είναι αλγεβρικός ισομορφισμός δηλαδή σέβεται όλες τις αριθμητικές πράξεις $S, +, \cdot$ ή σχέσεις $<, \leq$, κοκ που μπορούμε αναδρομικά να ορίσουμε με χρήση των 0 και S. Αυτό το αποτέλεσμα ήταν ήδη γνωστό και στον Dedekind. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι αν $0_1, 1_1, \ldots n, \ldots$ είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός του πρώτου μοντέλου $\mathbb{N}_1$ με κάποιες ιδιότητες, τότε ο $0_2, 1_2, \ldots f_0(n), \ldots$ είναι ο αντίστοιχος φυσικός του δευτέρου μοντέλου $\mathbb{N}_2$ με ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες και συνεπώς δεν έχει μεγάλη σημασία πια από τις δυο δομές είναι ο καλύτερος *εκπρόσωπος* του συνόλου $\mathbb{N}$. Η έννοια του «σεβασμού» σημαίνει ότι η χρήση της f_0 δεν αλλοιώνει τις πράξεις ή τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του $\mathbb{N}_1$ ή του $\mathbb{N}_2$. Για παράδειγμα, η f_0 σέβεται τα μηδέν και τις S: $f_0(0_1) = 0_2$, $f_0(S_1(n)) = S_2(f_0(n))$, σέβεται τις προσθέσεις $f_0(n +_1 m) = f_0(n) +_2 f_0(m)$ καθώς και τις διατάξεις: $n \leq_1 m \leftrightarrow f_0(n) \leq_2 f_0(m)$.

Ο σκοπός μας στα επόμενα είναι να ορίσουμε με ένα αναδρομικό τρόπο όλες τις γνωστές μας αλγεβρικές πράξεις και σχέσεις μεταξύ δυο φυσικών αριθμών καθώς και τις ιδιότητες τους. Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της πρόσθεσης. Ως $\mathbb{N}$ θα εννοούμε μια οποιαδήποτε δομή που ικανοποιεί τα αξιώματα Peano, όπως τον συνολοθεωρητικό ορισμό που δώσαμε στον Ορισμό 5.1.18. Για τον σκοπό αυτό θα χρειαστούμε ένα γενικό και σημαντικό απότελεσμα της κατασκευής μιας οποιαδήποτε συνάρτησης από απλούστερες με *αναδρομικό τρόπο*:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1.2 (Αναδρομικοί ορισμοί). *Έστω A, X είναι δύο τυχαία σύνολα, $h : A \to X$ και $g : A \times X \to X$ δυο συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : A \times \mathbb{N} \to X$ έτσι ώστε για τυχαίο $a \in A$ και φυσικό αριθμό n να ισχύει:*

- $f(a, 0) = h(a)$
- $f(a, S(n)) = g(a, f(a, n))$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.1.22. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ορίσουμε το *άθροισμα* $f_+ = +$ και τον *πολλαπλασιασμό* $f_\cdot = \cdot$ στους φυσικούς αριθμούς. Θέτουμε $A = X = \mathbb{N}$ και ορίζουμε αρχικά $h_+(a) = a$ και $g_+(a, x) = S(x)$ και κατασκευάζουμε με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος την πράξη της πρόσθεσης $+$. Στην συνέχεια ορίζουμε $h_\cdot(a) = 0$ και $g_\cdot(a, x) = a + x = f_+(a, x)$. Μέσω αυτών των δυο νέων συναρτήσεων και του παραπάνω θεωρήματος κατασκευάζεται και ο γνωστός μας πολλαπλασιασμός $\cdot$. Να σχολιάσουμε εδώ ότι ο συμβολισμός f_+ που χρησιμοποιούμε για τη πρόσθεση $+$, απαιτεί όλα τα ορίσματα να βρίσκονται στα δεξιά του οπότε, για παράδειγμα, αντί για $a + x$ γράφουμε πιο αυστηρά $f_+(a, x)$. Όμοια παρατήρηση ισχύει και για τα δυο (ισοδύναμα) σύμβολα του πολλαπλασιασμού $\cdot$ και $f_\cdot$. Με χρήση του παραπάνω παραπάνω αναδρομικού ορισμού της πράξης της πρόσθεσης f_+ προκύπτει εύκολα και η ταύτιση του $S(n)$ με το $n + 1$. Πράγματι, έχουμε $n + 1 = n + S(0) = f_+(n, S(0)) = g_+(n, f_+(n, 0)) = S(f_+(n, 0)) = S(h_+(n)) = S(n)$.

Λόγω έλλειψης χώρου δεν θα δώσουμε λεπτομέρειες γιατί η πρόσθεση $+$ ή πολλαπλασιασμός $\cdot$ που ορίσαμε παραπάνω ταυτίζεται με τις γνωστές μας πράξεις της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού που μάθαμε από το Δημοτικό. Θα αρκεσθούμε να δώσουμε ένα απλό παράδειγμα: Έστω ότι μας ζητούσαν να βρούμε πόσο κάνει 3 επί 2 χρησιμοποιώντας μόνο τις προσθέσεις. Τότε θα λέγαμε απλά: $3 \cdot 2 = 3 \cdot (1 + 1) = 3 + 3$ που μας κάνει 6. Μπορούμε να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τους αναδρομικούς ορισμούς των πράξεων $+$ και $\cdot$ που δώσαμε παραπάνω:

$3 \cdot 2 = f_\cdot(3, 2) = f_\cdot(3, S(1)) = g_\cdot(3, f_\cdot(3, 1))) = 3 + f_\cdot(3, 1) = 3 + f_\cdot(3, S(0)) = 3 + g_\cdot(3, f_\cdot(3, 0)) = 3 + (3 + f_\cdot(3, 0)) = 3 + (3 + 0) = 3 + 3$. Θα βρούμε τώρα αναλυτικά πόσο κάνει $3 + 3$ με βάση τον αναδρομικό ορισμό της πρόσθεσης: $3 + S(2) = f_+(3, S(2)) = g_+(3, f_+(3, 2)) = S(f_+(3, 2)) = f_+(3, 2) + 1 = f_+(3, S(1)) + 1 = (g_+(3, f_+(3, 1)) + 1 = (f_+(3, 1) + 1) + 1$. Όμως $f_+(3, 1) = g_+(3, f_+(3, 0)) = g_+(3, 3) = S(3) = 4$. Αντικαθιστώντας παραπάνω βρίσκουμε τελικά $(4 + 1) + 1 = 5 + 1 = 6$

Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής.

Για ευκολία στους συλλογισμούς σταθεροποιούμε ένα $a \in A$ και θέτουμε $x_0 = h(a)$ και $G(x)$ αντί $g(a, x)$. Ζητάμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα μιας *πολύ καλής συνάρτησης* $f : \mathbb{N} \to X$ που ικανοποιεί τους περιορισμούς α) $f(0) = x_0$ και β) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $f(S(n)) = G(f(n))$

Ορισμος 5.1.23 (Ορισμός της m-καλής συνάρτησης, $m \in \mathbb{N}$.). Μια συνάρτηση $f_m : m \to X$ λέγεται *m-καλή* αν και μόνο αν $m = 0$ ή διαφορετικά ικανοποιεί τα α) και β) για όλα τα $n < m$ με $S(n) < m$.

Παραδείγματα m-καλών συναρτήσεων: $f_1 : 1 \to X$ με ορισμό $f_1(0) = x_0 \in X$. Η $f_2 : 2 \to X$ με ορισμό $f_2(0) = x_0, f_2(1) = G(x_0) \in X$, κοκ. Αυτές είναι $m = 1$ και $m = 2$ καλές συναρτήσεις αντίστοιχα.

Θεωρημα 5.1.3. *Προτάσεις στις καλές συναρτήσεις (χωρίς απόδειξη).*

- *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια n-καλή συνάρτηση.*
- *Αν f_n και f_m είναι δυο καλές συναρτήσεις και $x < Min(n, m)$ τότε αναγκαστικά $f_n(x) = f_m(x)$.*

Ορισμος 5.1.24 (Μια πολύ καλή συνάρτηση!). Η σχέση $f = \cup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ορίζει μια πολύ καλή συνάρτηση.

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $f : \mathbb{N} \to X$ είναι μοναδική και έτσι να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος της αναδρομής.

Είναι ανάγκη να αναφέρουμε ότι με παρόμοιο αναδρομικό ορισμό μπορούμε να ορίσουμε και την εκθετική συνάρτηση (δυνάμεις) καθώς και όλες τις γνωστές μας αναδρομικά ορίσιμες πράξεις ή ακολουθίες (παραγοντικό, ακολουθία Fibonacci κοκ). Επίσης, η χρήση της μαθηματικής επαγωγής είναι απαραίτητη για να αποδείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες των πράξεων αυτών, όπως για παράδειγμα, του ουδέτερου στοιχείου $n + 0 = 0 + n = n$ και της αντιμεταθετικότητας της πρόσθεσης: $m + n = n + m$ για τυχαίους φυσικούς αριθμούς m, n.

Πριν κλείσουμε να αναφέρουμε ότι για τυχαία δομή $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών η σχέση της διάταξης $<$ μπορεί να ορισθεί χωρίς φυσικά την χρήση του $\in$, αλλά με την βοήθεια της πράξης της πρόσθεσης που ήδη έχουμε ορίσει αναδρομικά (η σχέση $\in$ είναι κατάλληλη για τον ορισμό του $<$ στο συνολοθεωρητικό μοντέλο του $\mathbb{N}$ κατά Von Neumann που δώσαμε παραπάνω, αλλά είναι ίσως άχρηστη σε άλλα μοντέλα του $\mathbb{N}$ όπως π.χ. στου Zermelo. Πράγματι, το $2 = \{\{0\}\}$ *δεν* περιέχει το 0, άρα η έννοια του $\in$ σε αυτήν την δομή δεν ταυτίζεται με την έννοια $<$ του μικρότερου $0<2$!).

Ορισμος 5.1.25 (Γενικευμένος ορισμός της διάταξης). Για κάθε δυο τυχαίους φυσικούς αριθμούς ορίζουμε $n < m$ αν και μόνο αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός x έτσι ώστε $n + S(x) = m$. Όμοια ορίζουμε $n \leq m$ αν και μόνο αν $n = m$ ή διαφορετικά $n < m$.

Για παράδειγμα, έχουμε $0 < 2$ σε κάθε δομή των φυσικών αριθμών: $0 + S(1) = S(1) = 2$. Είναι γενικά πολύ εύκολο να δείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες της διάταξης για τις παραπάνω σχέσεις όπως για παράδειγμα:

Αν $n < m$ και x είναι ένας τρίτος τυχαίος φυσικός αριθμός τότε $n + x < m + x$ και $S(n) < S(m)$.

Σχολιο 5.1.26. Η πιο εντυπωσιακή ιδιότητα για την σχέση $\leq$ είναι ότι είναι *καλή διάταξη*. Με άλλα λόγια αυτό σημαίνει ότι *κάθε* μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ έχει πάντοτε ένα ελάχιστο στοιχείο (δηλαδή μικρότερο από όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του A). Αυτό δεν συμβαίνει με τα άλλα γνωστά σύνολα αριθμών, όπως για παράδειγμα το $\mathbb{Z}$. Για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής θα μπορούσαμε να κάνουμε μια απόδειξη στα πλαίσια των αξιωμάτων Peano, χωρίς κάποια αναφορά σε κάποια συγκεκριμένη δομή. Όμως μπορούμε να την αποδείξουμε και διαφορετικά, χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη δομή των φυσικών, την δομή Von Neumann. Σε αυτή την δομή, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η (γενικευμένη) τομή $\cap A$, δηλ. όλα τα κοινά στοιχεία των στοιχείων του A, είναι ένας φυσικός αριθμός και μάλιστα το ελάχιστο στοιχείο του A. Άρα λόγω της ισομορφίας των διαφορετικών δομών των φυσικών, η ίδια ιδιότητα ισχύει γενικά σε οποιαδήποτε άλλη δομή των φυσικών αριθμών!

Ομιλία 6

Σύγχρονα Μαθηματικά στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Αντώνης Τσολομύτης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

6.1 Εισαγωγή

Σε συνεργασία με τον Νίκο Ροκοπάνο και τη Στέλλα Σακελλάρη προσπαθήσαμε να κάνουμε προσιτά στους σύγχρονους Μαθηματικούς τα Στοιχεία του Ευκλείδη. Το έργο έχει ολοκληρωθεί και είναι διαθέσιμο από τη διεύθυνση: https://myria.math.aegean.gr/elements

Διαβάζοντας τα Στοιχεία τόσο από το αρχαίο κείμενο όσο και από τις αποδόσεις του (στα Ελληνικά του 1950 από τον Ευάγγελο Σταμάτη, στα Αγγλικά του Sir Thomas Heath αλλά και στη πιο πρόσφατη έκδοση του ΚΕΕΠΕΚ) κάναμε διάφορες διαπιστώσεις.

- Τα κείμενα αυτά ενώ είναι χρήσιμα, εν τούτοις απευθύνονται περισσότερο στον Ιστορικό των Μαθηματικών και λιγότερο στον Μαθηματικό που θέλει να μάθει τα μαθηματικά που περιέχει το κείμενο του Ευκλείδη.

- Το κείμενο αντιμετωπίζεται συχνά με μια μουσειακή προσέγγιση και όχι ως ζωντανό και χρήσιμο στο σήμερα.

- Η πληθώρα σχολίων και παρεμβάσεων ανά τους αιώνες που συνοδεύουν το κείμενο απωθούν τον αναγνώστη που δεν είναι Ιστορικός.

- Συχνά υπάρχουν λάθη στις σύγχρονες μαθηματικές αποδόσεις. Και ποιο κείμενο δεν έχει λάθη; Για αυτό με την ολοκλήρωση του έργου αυτό θα παραμείνει online δεχόμενο κάθε διόρθωση που θα υποδειχθεί και προέκυψε από δικό μας σφάλμα.

Αλλά το σημαντικότερο εύρημα είναι ότι το κείμενο περιέχει ένα μεγάλο πλούτο ιδεών που χρησιμοποιούνται σήμερα στα σύγχρονα Μαθηματικά και που αυτά δεν έχουν αναδειχθεί επαρκώς ώστε να είναι κοινό κτήμα της σημερινής Μαθηματικής μας παιδείας.

Εδώ έχουμε ακούσει διάφορες ενστάσεις. Για παράδειγμα, «η σκέψη του Ευκλείδη είναι γεωμετρική και δεν είναι αλγεβρική» ή «το ερμηνεύεις έτσι γιατί ξέρεις τα σημερινά μαθηματικά».

Τα περισσότερα τέτοια σχόλια ενώ είναι κατά κάποιο τρόπο(!) σωστά έχουν λάθος κατεύθυνση. Αυτό που είναι ενδιαφέρον εδώ, δεν είναι αν ο Ευκλείδης για παράδειγμα ήξερε τον ορισμό του ορίου αλλά αν ο Weierstrass (ή κατά άλλους ο Bolzano και ο Cauchy) είχαν διαβάσει την Πρόταση 1 του 10ου Βιβλίου. Δεν είναι το θέμα αν ο Ευκλείδης ήξερε Επαγωγή αλλά αν ο Pascal ήταν ενήμερος για την Πρόταση 8 του 9ου Βιβλίου· ούτε αν ο Ευκλείδης ήξερε τις τομές Dedekind αλλά αν ο Dedekind ήξερε τον Ορισμό 5 του 5ου Βιβλίου.

Το ότι η σκέψη του Ευκλείδη είναι γεωμετρική και όχι αλγεβρική δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ένα είδους μειονέκτημα. Η Γεωμετρία ήταν η γλώσσα της εποχής για τα Μαθηματικά. Ούτε πρέπει να διαχωρίζουμε τις ιδέες ανάλογα αν η έκφρασή τους είναι αλγεβρική ή αναλυτική. Η ιδέα του ορίου με τον σημερινό ε-ορισμό περιγράφεται με ακρίβεια στην Πρόταση 1 του Βιβλίου 10. Περιγράφεται γεωμετρικά, δηλαδή στην οικεία στον Ευκλείδη γλώσσα. Η αναλυτική της περιγραφή με αλγεβρικά σύμβολα δεν την κάνει μια νέα ιδέα, αλλά μια «μετάφραση» από τη γεωμετρική γλώσσα.

Κλείνουμε την εισαγωγή αυτή με ένα σχόλιο για κάποια στερεότυπα όπως αυτό που σχετίζεται με το άπειρο. Δεν είχαν—λέγεται—οι αρχαίοι καλή σχέση με το άπειρο και το απέφευγαν. Αυτό απέχει έτη φωτός από την αλήθεια. Ο χειρισμός του απείρου από τον Ευκλείδη είναι ακριβώς ο ίδιος με τον σημερινό, και το χρησιμοποιεί με υποδειγματικό και άψογο τρόπο. Προφανώς όσοι σχολιάζουν έτσι για το άπειρο και τους αρχαίους αναφέρονται στον χειρισμό του από τον Νεύτωνα και τον Λάιμπνιτζ, χειρισμός ο οποίος ήταν παντελώς αθεμελίωτος και δεν χρησιμοποιείται σήμερα. Σήμερα χρησιμοποιούμε την έννοια αυτή ακριβώς όπως ο Ευκλείδης.

6.2 Ο ορισμός της μονάδας

Εντύπωση προκαλεί ο ορισμός της μονάδας, αφού ο Ευκλείδης, ως Πλατωνικός, μιλάει αφηρημένα και θεωρητικά στρώνοντας τον δρόμο για την Άλγεβρα:

Ορισμος 6.2.1. Μια μονάδα είναι εκείνο, εξ' αιτίας του οποίου, καθένα από υπαρκτά πράγματα δύναται να ονομάζεται «ένα».

Προσέξτε τη λέξη «Μια» στον ορισμό. Ο Heath συμφωνεί με την παραπάνω απόδοση του αρχαίου κειμένου:

«*An* unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one».

Εδώ θα κάνουμε μια παράκαμψη από τον Ευκλείδη για να γνωρίσουμε ένα άλλον πολύ σημαντικό Μαθηματικό της αρχαιότητας που έχει μάλλον παραμεληθεί: τον Θυμαρίδα τον Πάριο.

Ο ορισμός του Ευκλείδη δεν ήταν ο μόνος ορισμός της μονάδας που κυκλοφορούσε εκείνη την εποχή. Ο Θυμαρίδας (94η–107η Ολυμπιάδα), σπουδαίος Μαθηματικός, καθηγητής στην Ακαδημία των Αθηνών, χρησιμοποιούσε έναν άλλον ορισμό για το 1 ο οποίος εκπλήσσει. Παρατηρήστε εδώ ότι «μόριο» ονομάζεται κάθε κλάσμα φυσικών αριθμών με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή:

Ορισμος 6.2.2 (Θυμαρίδας ο Πάριος). (η αριθμητική μονάδα) είναι η οριακή ποσότητα των μορίων.

(Ιάμβλιχος, Σχόλια προς Νικόμαχο.)

Ναι λέει «οριακή»! Στα αρχαία «περαίνουσα»· λέξη που χρησιμοποιείται και σήμερα στην ελληνική ονομασία του supremum. Το supremum στα ελληνικά λέγεται «άνω πέρας». Ξεκάθαρα εδώ ο Θυμαρίδας δίνει τον ορισμό του 1 ως supremum των κλασμάτων ν/μ με $\nu < \mu$. Ήξερε ο Θυμαρίδας το supremum; Εμείς ρωτάμε: δεν το ήξερε; Καταλάβαινε ή όχι την έννοια; Αυτό είναι το σημαντικό και όχι το αν ανέπτυξε εξελιγμένο λογισμό με αυτήν.

Ο Θυμαρίδας είχε αλγεβρική κατεύθυνση και ήταν διάσημος για την επίλυση συστημάτων πολλών γραμμικών εξισώσεων ειδικής μορφής όπως η μέθοδός του ονομαζόμενη «Έφοδος Θυμαρίδειου Επανθήματος» (Έφοδος = μέθοδος):

Θεωρημα 6.2.3 (Θυμαρίδας ο Πάριος). *Αν*

$$\begin{cases} x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = s \\ x + x_1 = s_1 \\ x + x_2 = s_2 \\ \vdots \\ x + x_{n-1} = s_{n-1} \end{cases}$$

τότε

$$x = \frac{(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}) - s}{n-2}.$$

6.3 ΕΚΠ

Συχνά εμφανίζονται τεχνικές που δεν διδάσκονται σήμερα όπως η ακόλουθη που θα έπρεπε να διδάσκεται στο γυμνάσιο.

Ακολουθώντας το σχολικό βιβλίο του γυμνασίου για να βρούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 42 και 45 καταφεύγουμε σε ανάλυση πρώτων. Γράφουμε

$$\begin{array}{rr|l} 42 & 45 & 2 \\ 21 & 45 & 3 \\ 7 & 15 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\text{ΕΚΠ} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 630.$$

Ο Ευκλείδης όμως το κάνει αλλιώς. Απλοποιεί το κλάσμα 42/45 μέχρι να γίνει ανάγωγο:

$$\frac{42}{45} = \frac{14}{15}$$

και αποδεικνύει ότι οποιοδήποτε από τα χιαστί γινόμενα είναι το ΕΚΠ. Δηλαδή

$$\text{ΕΚΠ} = 42 \cdot 15 = 45 \cdot 14 = 630.$$

Αυτό είναι μακράν προτιμότερο γιατί είναι η ηλικία που ο μαθητής πρέπει να μάθει απλοποίηση κλασμάτων. Η ανάλυση σε πρώτους μπορεί να περιμένει.

6.4 Οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος

Μια και αναφερθήκαμε στο θέμα του απείρου ας δούμε πώς αποδεικνύει την απειρεία των πρώτων ο Ευκλείδης. Ανοίγοντας ένα οποιοδήποτε σημερινό βιβλίο Άλγεβρας θα βρείτε ακριβώς τον ίδιο χειρισμό:

Βιβλίο 9, Πρόταση 20 *Οι πρώτοι αριθμοί είναι περισσότεροι από οποιοδήποτε πλήθος πρώτων αριθμών.*

Απόδειξη: Έστω ότι δίνονται οι πρώτοι αριθμοί α, β, γ· ισχυρίζομαι ότι υπάρχουν περισσότεροι πρώτοι αριθμοί.

Διότι ας θεωρήσουμε τον ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και γ. Ας είναι αυτός ο δ και σε αυτόν ας προσθέσουμε τη μονάδα.

Ο $\delta + 1$ είτε είναι πρώτος είτε δεν είναι.

Αν είναι πρώτος τότε έχουμε βρει τους α, β, γ και $\delta + 1$ που είναι περισσότεροι από τους α, β, γ.

Έστω τώρα ότι ο $\delta + 1$ δεν είναι πρώτος· άρα διαιρείται από κάποιον πρώτο αριθμό, έστω τον η.

Ισχυρίζομαι ότι ο η δεν είναι κανένας εκ των α, β, γ.

Διότι αν ο η είναι ένας από τους α, β, γ, επειδή αυτοί διαιρούν τον δ και ο η τον διαιρεί. Αλλά διαιρεί και τον $\delta + 1$· θα διαιρεί συνεπώς και τη διαφορά τους, δηλαδή τη μονάδα· άτοπο.

Έτσι ο η δεν είναι κανένας εκ των α, β, γ. Αλλά από την υπόθεση ο η είναι πρώτος, άρα βρέθηκαν οι πρώτοι α, β, γ, η που είναι περισσότεροι από τους α, β, γ. □

6.5 Ταυτότητες

Πράγματι η περιγραφή των ταυτοτήτων είναι γεωμετρική. Εν τούτοις θέλουμε να δώσουμε την πληροφορία για το ποιες αποδεικνύει.

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ (Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 4).
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ (Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 5).
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ (Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 7).
- Πολική ταυτότητα: $\alpha\beta = \frac{1}{4}\big((\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2\big)$ (Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 8).
- Κανόνας παραλληλογράμμου: $2\alpha^2 + 2\beta^2 = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2$ (Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 9).
- Επίλυση δευτεροβάθμιας $x^2 + \alpha x + \gamma = 0$ (Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 6).

6.6 Αξίωμα συνέχειας του Ευδόξου (Αρχιμήδεια ιδιότητα)

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.6.1 (Βιβλίο 5, Ορισμός 4). Λέμε ότι δύο μεγέθη «έχουν λόγο» όταν καθένα από αυτά έχει πολλαπλάσιο μεγαλύτερο του άλλου.

(T.L. Heath: Magnitudes are said to have a ratio to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another)

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα αυτό στην Απόδειξη της Πρότασης 8 του Βιβλίου 5, δείχνει την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς: αν $\alpha > \beta$ δυο μεγέθη υπάρχει κλάσμα φυσικών ώστε $\alpha > \nu/\mu > \beta$.

6.7 Πραγματικοί Αριθμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.7.1 (Ισότητας (Βιβλίο 5, Ορισμός 5)). δυο λόγοι μεγεθών α/β και γ/δ λέγονται ίσοι όταν κάθε κλάσμα ακεραίων, όπως συγκρίνεται με το α/β, με τον ίδιο τρόπο συγκρίνεται και με το γ/δ.

δηλαδή, για οποιουσδήποτε αριθμούς μ, ν ισχύει μία από τις επόμενες τρεις περιπτώσεις

$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε } \alpha/\beta > \nu/\mu \text{ και } \gamma/\delta > \nu/\mu \\ \text{είτε } \alpha/\beta = \nu/\mu \text{ και } \gamma/\delta = \nu/\mu \\ \text{είτε } \alpha/\beta < \nu/\mu \text{ και } \gamma/\delta < \nu/\mu. \end{array}\right\}$$

Στο αρχαίο κείμενο χρησιμοποιούνται, με ισοδύναμο τρόπο, πολλαπλάσια:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε } \mu\alpha > \nu\beta \text{ και } \mu\gamma > \nu\delta \\ \text{είτε } \mu\alpha = \nu\beta \text{ και } \mu\gamma = \nu\delta \\ \text{είτε } \mu\alpha < \nu\beta \text{ και } \mu\gamma < \nu\delta. \end{array}\right\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.7.2 (Διάταξης (Βιβλίο 5, Ορισμός 7)). Ένας λόγος μεγεθών λέγεται μεγαλύτερος ενός άλλου όταν υπάρχει λόγος φυσικών αριθμών μικρότερος του πρώτου και μεγαλύτερος ή ίσος του δεύτερου.

Στο πρωτότυπο το λέει με πολλαπλάσια αντί για λόγους όπως κάνει και στον ορισμό της ισότητας.

Δηλαδή, αντί να γράψει $\gamma/\delta < \alpha/\beta$ αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν, μ με $\gamma/\delta < \nu/\mu < \alpha/\beta$ γράφει «αν $\nu\beta < \mu\alpha$ και $\mu\gamma < \nu\delta$». Στη συνέχεια ακολουθούν Προτάσεις στις οποίες αποδεικνύονται όλες οι βασικές ιδιότητες των πράξεων με συντελεστές φυσικούς αριθμούς:

- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού
- Κοινός παράγοντας για την πρόσθεση και την αφαίρεση

- Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού
- κλπ

Παρατηρήστε ότι για τον Ευκλείδη δεν υπάρχει λόγος να ορίσει τους πραγματικούς (δηλαδή να κάνει και το αντίστροφο και να ορίσει ως πραγματικό αριθμό κάθε αρχικό τμήμα ρητών) γιατί αναπαριστούν ευθύγραμμα τμήματα. Αυτό είναι ουσιαστικά η μόνη διαφορά με τις τομές Dedekind.

Το Βιβλίο 5 κλείνει με την ανισότητα αριθμητικού γεωμετρικού μέσου.

6.8 Επαγωγή και Πλήρης Επαγωγή

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.8.1 (Βιβλίο 9, Πρόταση 8). *Έστω ότι δίνονται οσοιδήποτε (φυσικοί) αριθμοί ξεκινώντας με τη μονάδα, οι 1, α, β, γ, δ, ε, ζ, κλπ οι οποίοι βρίσκονται σε συνεχή αναλογία, δηλαδή*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \cdots$$

Τότε ανά δύο από τον β είναι τετράγωνοι και ανά τρεις από τον γ είναι κύβοι.

Απόδειξη:

- ο β είναι τετράγωνος γιατί $\beta = \alpha^2$ (η επαγωγή ξεκίνησε).
- επειδή ο β είναι τετράγωνος και $\beta/\gamma = \gamma/\delta$ είναι και ο δ τετράγωνος (έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη Πρόταση (VIII, 22)).
- Συνεχίζουμε ομοίως: ο δ είναι τετράγωνος και $\delta/\varepsilon = \varepsilon/\zeta$ άρα ο ζ είναι τετράγωνος.
- Άρα *όσοι* αριθμοί και να δοθούν σε συνεχή αναλογία ικανοποιείται το συμπέρασμα. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.8.2 (Πλήρης Επαγωγή, Βιβλίο 9, Πρόταση 9). *Αν δοθούν οσοιδήποτε αριθμοί σε συνεχή αναλογία ξεκινώντας από τη μονάδα,*

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \cdots$$

και ο πρώτος μετά τη μονάδα είναι τετράγωνος (δηλαδή ο α είναι τετράγωνος), τότε όλοι είναι τετράγωνοι. Ενώ αν ο πρώτος μετά τη μονάδα είναι κύβος τότε όλοι είναι κύβοι.

Απόδειξη:

- ο β είναι τετράγωνος (προηγούμενη πρόταση) (η επαγωγή ξεκίνησε).
- α τετράγωνος και $\alpha/\beta = \beta/\gamma$ άρα ο γ είναι τετράγωνος ($\alpha \to \gamma$).
- β είναι τετράγωνος και $\beta/\gamma = \gamma/\delta$ άρα ο δ είναι τετράγωνος ($\beta \to \delta$).
- γ είναι τετράγωνος και $\gamma/\delta = \delta/\varepsilon$ άρα ο ε είναι τετράγωνος ($\gamma \to \varepsilon$).
- κλπ άρα *όσοι* και να δοθούν είναι τετράγωνοι. □

6.9 Ανθυφαίρεση

Ανθυφαίρεση είναι η εξής διαδικασία: Ξεκινάμε με δύο αριθμούς x, y και έστω ότι $x > y$. Αφαιρούμε από το x τόσες (ακέραιες) φορές το y όσες «χωράει» σε αυτό και καταγράφουμε το υπόλοιπο $\nu_1 < y$. Τώρα αφαιρούμε από το y το ν_1 όσες φορές είναι αυτό εφικτό και καταγράφουμε το υπόλοιπο $\nu_2 < \nu_1$. Συνεχίζουμε αφαιρώντας από το ν_1 τόσες φορές το ν_2 όσες είναι εφικτό και καταγράφουμε το υπόλοιπο $\nu_3 < \nu_2$ κοκ. Η διαδικασία αυτή είτε τερματίζεται είτε όχι (για παράδειγμα αν $x = \sqrt{2}$ και $y = \sqrt{3}$). Σε κάθε περίπτωση αυτή η διαδικασία που παράγει τα υπόλοιπα $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ ονομάζεται ανθυφαίρεση.

Το θέμα της ανθυφαίρεσης είναι τεράστιο και συνεχίζει να ερευνάται. Ο λεγόμενος «αλγόριθμος του Ευκλείδη» για τη διαίρεση που μαθαίνουμε στην Άλγεβρα δεν είναι παρά το πρώτο βήμα αυτής της ενδιαφέρουσας διαδικασίας. Επιφυλασσόμαστε να γράψουμε περισσότερα για αυτό το θέμα στο μέλλον.

6.10 Ορισμός Ορίου και Σειράς

Πρόταση 6.10.1 (Βιβλίο 10, Πρόταση 1). *Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών $\alpha > \gamma$, αν από το α αφαιρέσω το μισό του ή περισσότερο, και από το υπόλοιπο αφαιρέσω το δικό του μισό ή περισσότερο, και αυτό επαναληφθεί συνεχώς θα λάβουμε μέγεθος μικρότερου του γ.*

Δηλαδή

$$\alpha - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\alpha < \gamma.$$

Πρόταση 6.10.2 (Εμβαδόν κύκλου, Βιβλίο 12, Πρόταση 2). *Το πηλίκο των εμβαδών δυο κύκλων ισούται με το τετράγωνο των πηλίκων των διαμέτρων τους.*

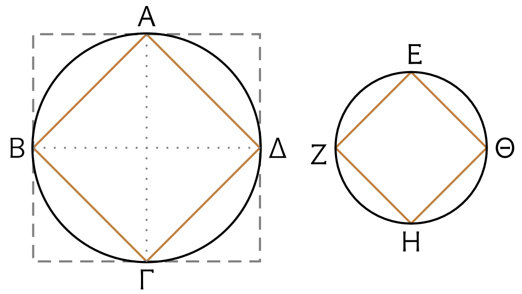
Δηλαδή αν K_δ ο κύκλος διαμέτρου δ τότε $|K_\delta|/|K_2| = (\delta/2)^2$ άρα $|K_\delta| = (\delta/2)^2|K_2|$.

Αργότερα, ο Αρχιμήδης στο «κύκλου μέτρησις» εκτιμά το $|K_2|$ να είναι ανάμεσα στο 3,14 και στο 3,15. Οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε $|K_\delta| = \pi(\delta/2)^2$.

Χρησιμοποιεί την προηγούμενη πρόταση (ε-επιχείρημα) και ολοκλήρωμα, αυτό που σήμερα ονομάζουμε Riemann (και τότε λεγόταν μέθοδος εξάντλησης του Ευδόξου).

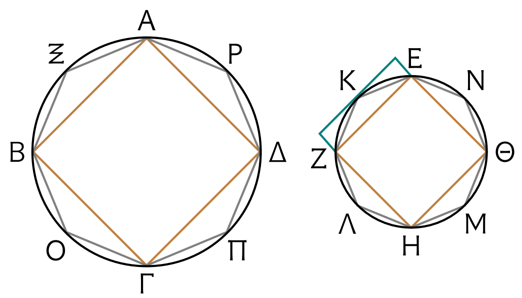
Απόδειξη:

- Εγγράφουμε τετράγωνο σε καθένα από τους δύο κύκλους.



- Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι περισσότερο από το μισό του κύκλου. Το αφαιρούμε από τον κύκλο.

- Σε κάθε κυκλικό τομέα που μένει από την αφαίρεση σχηματίζουμε τρίγωνο με βάση τη χορδή του και κορυφή το κέντρο του κυκλικού του τόξου.



- το εμβαδόν του τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το μισό εμβαδόν του κυκλικού τομέα.

Αφαιρούμε όλα αυτά τα τρίγωνα και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Συνεχίζουμε μέχρι το εναπομείνον εμβαδό του κύκλου να γίνει οσοδήποτε μικρό.

Αν ενώσουμε όλα τα κομμάτια που αφαιρέθηκαν αυτά σχηματίζουν κανονικό πολύγωνο και στους δύο κύκλους και άρα όμοια μεταξύ τους.

Το πηλίκο των εμβαδών των πολυγώνων αυτών είναι ίσο με το τετράγωνο του πηλίκου των διαμέτρων των κύκλων, άρα και οι οριακές τιμές, δηλαδή ο λόγος των εμβαδών των κύκλων. □

6.11 Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Δυστυχώς στο γυμνάσιο δεν διδασκόμαστε την πανέμορφη απόδειξη του Ευκλείδη αλλά μια άλλη με όμοια τρίγωνα. Υποθέτουμε ότι αυτό γίνεται επειδή η απόδειξη με τα όμοια τρίγωνα είναι γρήγορη, αλλά δεν καταλαβαίνει κανείς τι συμβαίνει ειδικά στην ηλικία που αυτό διδάσκεται.

Ο Loomis, E. S. (1968) στο «The Pythagorean Proposition», Washington DC: National Counsil of Teachers of Mathematics (που μπορείτε να το βρείτε και εδώ: https://pythagoras.samos.aegean.gr) και στο οποίο έχει συγκεντρώσει περί τις 357 διαφορετικές αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος, γράφει για το θέμα:

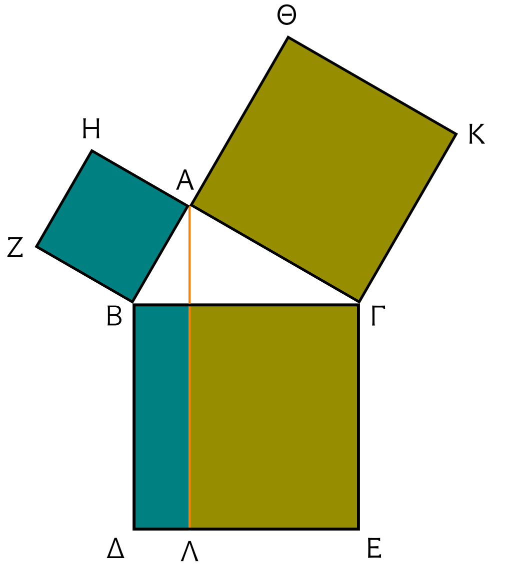
δεσμός

«Λογικά, καλύτερη απόδειξη από αυτή του Ευκλείδη δεν γίνεται να βρεθεί», ενώ λίγο παρακάτω μέμφεται τα βιβλία που δεν την παρουσιάζουν: «Υποθέτω ότι ο συγγραφέας επιθυμεί να δείξει την πρωτοτυπία της σκέψης του και την ανεξαρτησία του... Δείχνει όμως κάτι άλλο. Η παράλειψη της απόδειξης του Ευκλείδη είναι σαν το έργο του Άμλετ να έχει αφήσει τον Άμλετ εκτός». (σελίδα 119–120)

ενώ ο T.L. Heath στη μετάφραση των Στοιχείων στα αγγλικά σχολιάζει:

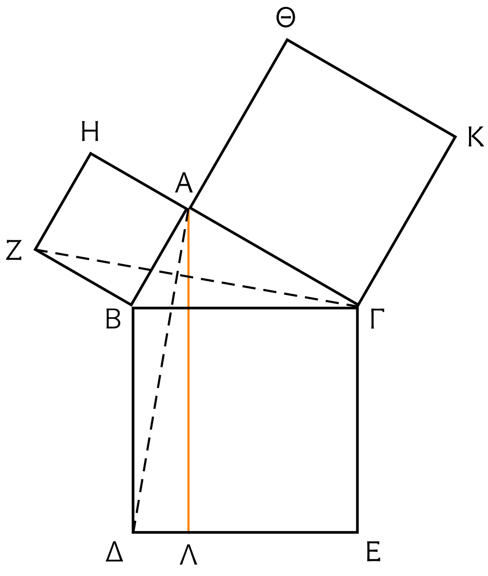
«...the construction and proof is so extraordinary ingenious, a veritable *tour de force* which compels admiration» δηλαδή η κατασκευή και η απόδειξη είναι τόσο ασυνήθιστα ευφυής, μια πραγματική επίδειξη ισχύος, που εξαναγκάζει σε θαυμασμό. (Βιβλία 1–2, σελίδα 354)

Για την απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος ο Ευκλείδης φέρνει από την κορυφή της ορθής γωνίας κάθετη στη υποτείνουσα, η επέκταση της οποίας χωρίζει το τετράγωνο της υποτείνουσας σε δύο ορθογώνια. Αποδεικνύει ότι τα ομόχρωμα εμβαδά στο παρακάτω σχήμα είναι ίσα.



Για να γίνει αυτό

- φέρνει τις ΑΔ και ΖΓ,



- παρατηρεί ότι τα Γ, Α, Η είναι συνευθειακά γιατί η συνολική γωνία στο Α είναι ίση με 2 ορθές,
- άρα το ύψος του τριγώνου ΖΒΓ είναι ίσο με το ΖΗ και του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσο με το ΔΛ.
- Έτσι το εμβαδόν του τριγώνου ΖΒΓ είναι το μισό του εμβαδού του τετραγώνου ΒΗ γιατί έχουν ίδια βάση (την ΒΖ) και ίδιο ύψος (το

ΖΗ). Ομοίως το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ είναι το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΒΛ.

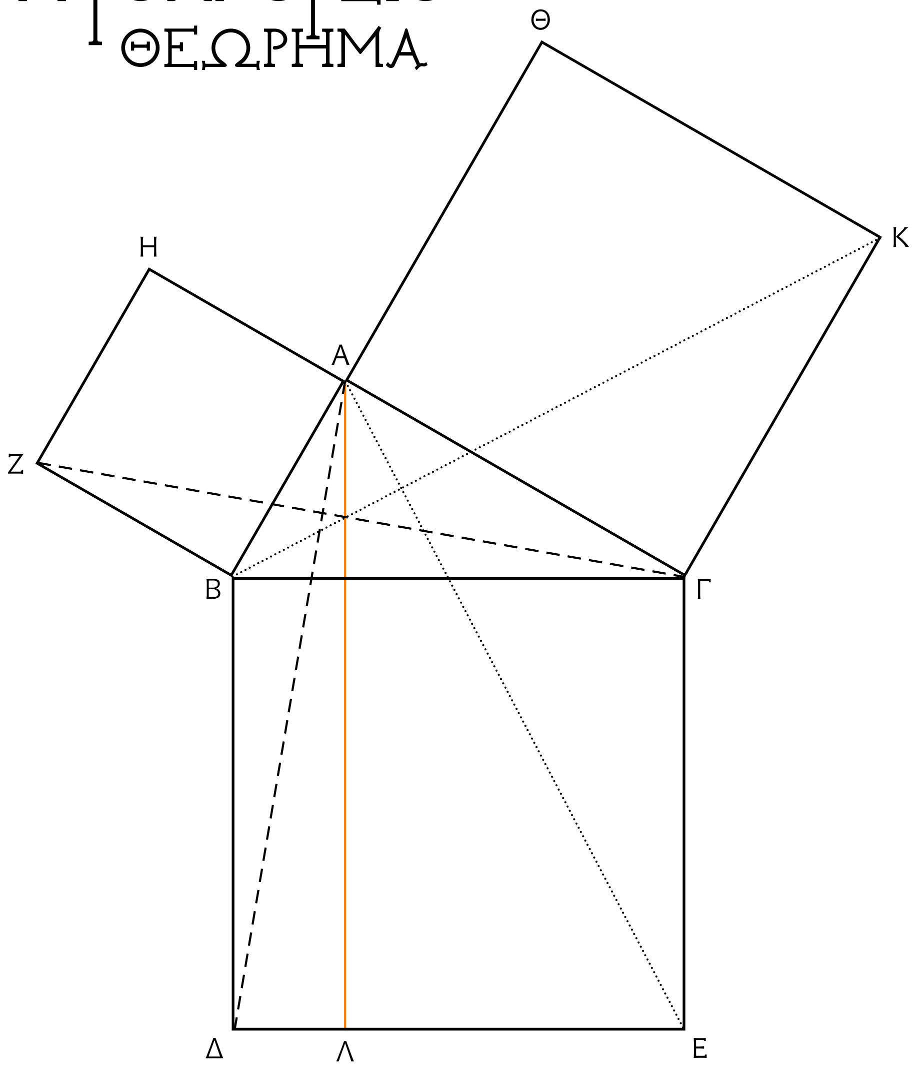
- Αλλά τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα γιατί έχουν τη γωνία στο Β ίση και τις πλευρές της ίσες (ΖΒ = ΑΒ, ΒΓ = ΒΔ).
- Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και τα εμβαδά του τετραγώνου ΒΗ και του ορθογωνίου ΒΛ.
- Ομοίως και το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΘ είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΛ,

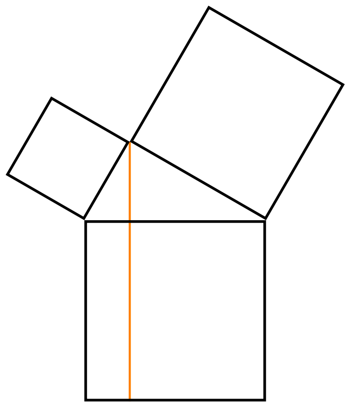
ολοκληρώνοντας την απόδειξη

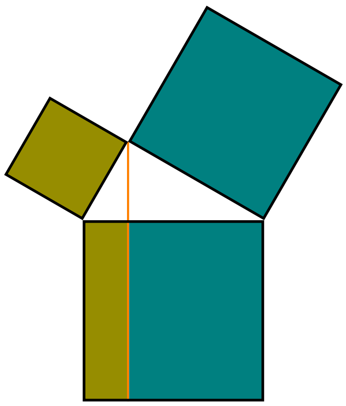
Φόρος Τιμής στον Ευκλείδη

Homage to Euclid

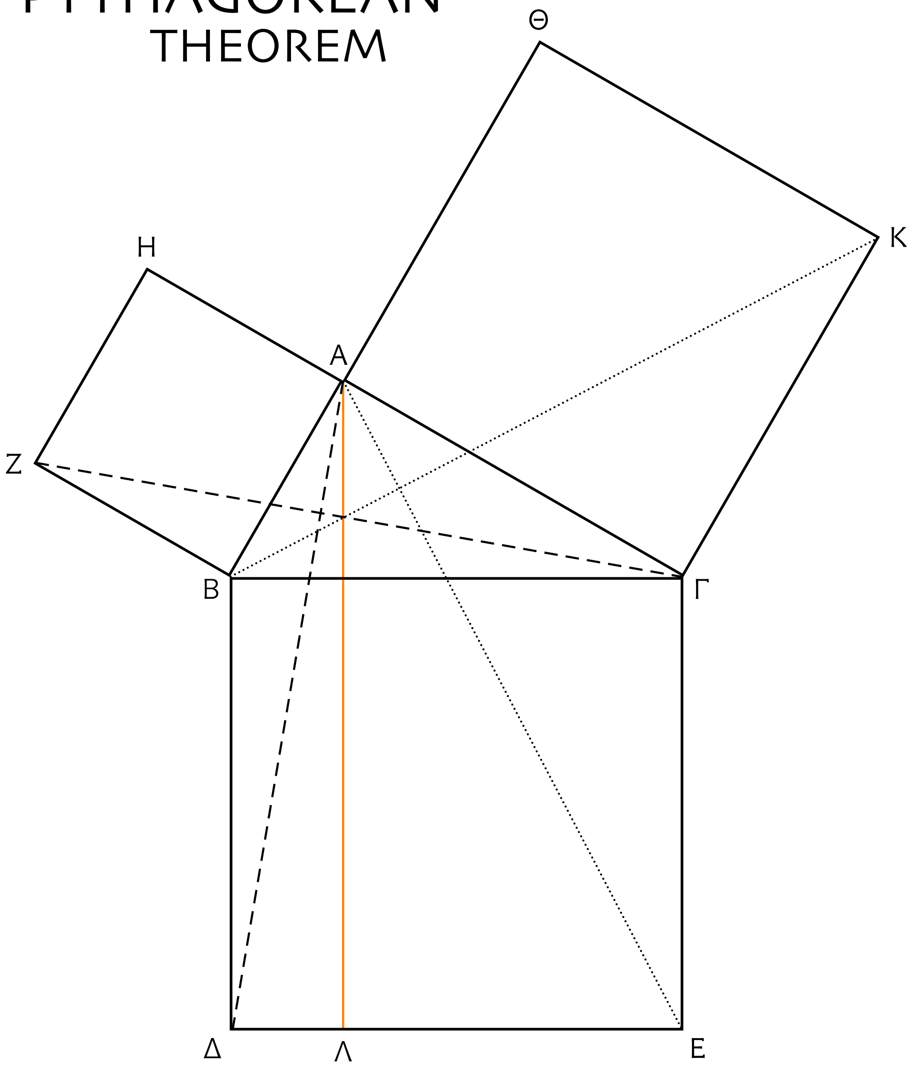
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

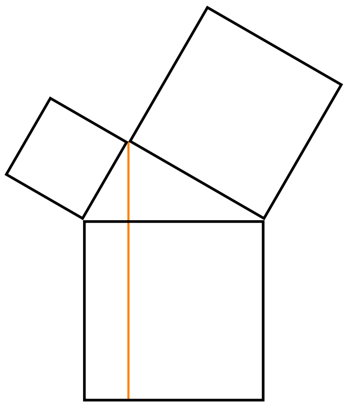


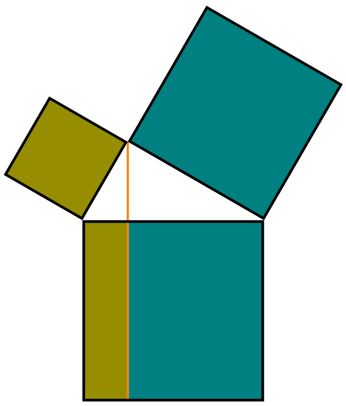




THE PYTHAGOREAN THEOREM







ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ

ΕΝΝΟΙΕΣ

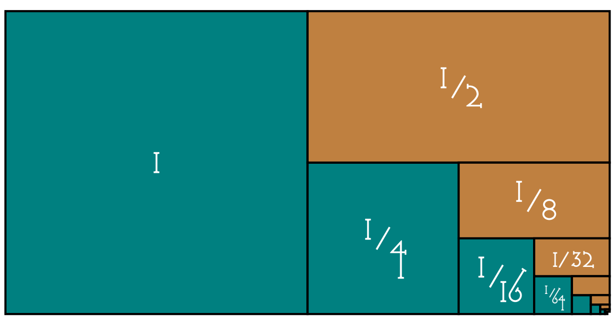
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ

ΕΨΙΛΟΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ

ΣΕΙΡΕΣ

ΣΥΓΚΛΙΣΗ

ΑΠΕΙΡΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ



FUNDAMENTAL

ANALYTIC

NOTIONS

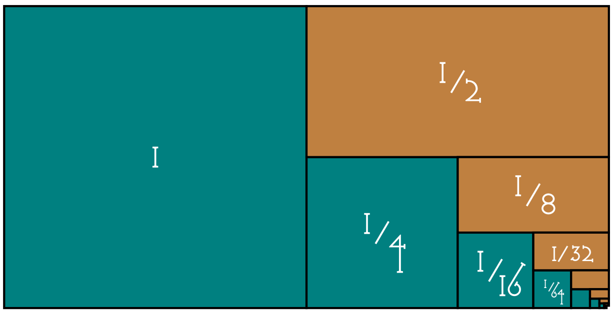
THE NOTION OF LIMIT

EPSILON ARGUMENT

SERIES

CONVERGENCE

INFINITE PROCESSES



http://myria.math.aegean.gr/psag/