Προπτυχιακό Σεμινάριο
Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης
Α. Τσολομύτης (Editors)

2024

Καρλόβασι, Σάμος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας

Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης
Α. Τσολομύτης (Editors)

2024

Καρλόβασι, Σάμος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΙΓΑΙΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βιβλιογραφικά δεδομένα:

Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης και Γεωμετρίας / Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης, Α. Τσολομύτης (Editors). —

ISSN: 2945-2473 01 04

Έκδοση 1.0 ¶ 5 4 3 2 1

vi. 114 σελ. 31 σχ. 12 φωτ. 29,7 cm

1. Μαθηματική Ανάλυση
2. Γεωμετρία

I. Ν. Δαφνής

II. Κ. Τσαπρούνης

III. Α. Τσολομύτης

LCC: QA 299.6—433 2019 | DEWEY: 515.15—DC 23

Το πρόγραμμα και οι σελίδες του σεμιναρίου βρίσκονται στη διεύθυνση http://myria.math.aegean.gr/psag/

Στοιχειοθετήθηκε με το XƎLaTeX.

Πρόλογος

Το Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης & Γεωμετρίας έχει σκοπό να αναπτύξει το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά ανάμεσα στους φοιτητές και τις φοιτήτριες και να προκαλέσει τη συζήτηση για αυτά, παρουσιάζοντας θέματα που σχετίζονται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο με την περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης και της Γεωμετρίας, είτε από την ιστορική της είτε από τη σύγχρονη περίοδό της.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι συνήθως ελάχιστες και μπορούν να παρακολουθήσουν και πρωτοετείς φοιτητές.

Ο τόμος αυτός περιέχει τις διαλέξεις που έγιναν το ακαδημαϊκό έτος 2023–2024 οι οποίες παρουσιάζονται με τη χρονολογική σειρά που δόθηκαν.

Όπου χρειάστηκε δεσμός προς διεύθυνση του διαδικτύου τοποθετήθηκε στο περιθώριο η λέξη «δεσμός» η οποία είναι ενεργή για κλικ όταν το αρχείο διαβάζεται σε οθόνη και δίπλα δίνεται ο ίδιος δεσμός με QR-code στην περίπτωση που το αρχείο διαβάζεται τυπωμένο. Το QR-code μπορεί να σκαναριστεί με οποιοδήποτε QR-code scanner από κινητό ή tablet με σύνδεση στο διαδίκτυο.

Ν. Δαφνής, Κ. Τσαπρούνης, Α. Τσολομύτης,

Σάμος 2024

Περιεχόμενα

Ομιλία 1

Ημισυνεχείς συναρτήσεις

Αντώνης Τσολομύτης

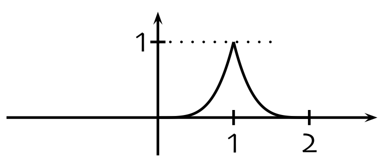
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
atsol@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων, ομοιόμορφη σύγκλιση, βασικές τοπολογικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$, αριθμήσιμα σύνολα

1.1 Εισαγωγή

Στην Ανάλυση μαθαίνουμε ότι αν οι $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ (με I διάστημα με πεπερασμένα ή άπειρα άκρα) είναι συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : I \mapsto \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής. Αν όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, αλλά απλώς ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή συγκλίνει κατά σημείο) τότε η f δεν είναι απαραίτητα συνεχής. Για παράδειγμα, θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & x \in [0,1] \\ (2-x)^n & x \in [1,2] \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$



Τότε

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

η οποία βεβαίως είναι ασυνεχής στο $x = 1$ ενώ όλες οι f_n είναι συνεχής σε κάθε σημείο.

Τέτοιες συναρτήσεις, σαν την f, που είναι όρια συνεχών συναρτήσεων λέγονται Baire-1 συναρτήσεις και δεν θα μας απασχολήσουν σε αυτό το άρθρο. Εδώ θα προσθέσουμε μία ακόμα υπόθεση στην ακολουθία f_n, συγκεκριμένα να είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα, δηλαδή είτε να ισχύει $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είτε το ανάποδο. Θα ορίσουμε δυο νέες κλάσεις συναρτήσεων, τις *άνω ημισυνεχείς* και τις *κάτω ημισυνεχείς*, και θα δούμε ότι αυτές είναι τα όρια μονότονων ακολουθιών συνεχών συναρτήσεων.

1.2 Ορισμός της ημισυνέχειας

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί της *ημισυνέχειας*. Ένας από αυτούς είναι ο εξής:

Ορισμος 1.2.1. Μια $f : I \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται *κάτω* ημισυνεχής στο $x \in I$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in I$ με $|x - y| < \delta$ συνεπάγεται $f(x) - f(y) < \epsilon$. Λέγεται κάτω ημισυνεχής αν είναι κάτω ημισυνεχής σε κάθε $x \in I$.

Μια $f : I \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται *άνω* ημισυνεχής στο $x \in I$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in I$ με $|x-y| < \delta$ συνεπάγεται $f(y) - f(x) < \epsilon$. Λέγεται άνω ημισυνεχής αν είναι άνω ημισυνεχής σε κάθε $x \in I$.

Φανερά η f είναι και κάτω και άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν είναι συνεχής, αφού βεβαίως ισχύουν οι $f(x) - f(y) < \epsilon$ και $f(y) - f(x) < \epsilon$ αν και μόνο αν $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Επίσης για f κάτω ημισυνεχή το σύνολο

$$A_t = \{x \in I : f(x) > t\}$$

είναι ανοικτό για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $f(x) > t$ θεωρούμε $\epsilon > 0$ ώστε $f(x) - \epsilon > t$ και τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in I$ με $|x - y| < \delta$ να ισχύει $f(x) - f(y) < \epsilon$ οπότε $f(y) > f(x) - \epsilon > t$, άρα $y \in A_t$. Συνεπώς $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A_t$. Έτσι πράγματι, το A_t είναι ανοικτό.

Επειδή τώρα $A_t = f^{-1}(t, +\infty)$ συμπεραίνουμε ότι μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση αντιστρέφει τα διαστήματα της μορφής $(t, +\infty)$ σε ανοικτά. Αυτό ισχύει και αντίστροφα: θεωρούμε ένα $x \in I$ και ένα $\epsilon > 0$. Φανερά $x \in A_{f(x)-\epsilon}$ διότι προφανώς $f(x) > f(x) - \epsilon$. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A_{f(x)-\epsilon}$. Έτσι αν $|x - y| < \delta$ τότε $y \in A_{f(x)-\epsilon}$, δηλαδή $f(y) > f(x) - \epsilon$. Άρα $f(x) - f(y) < \epsilon$ και η f είναι κάτω ημισυνεχής στο x.

Ομοίως μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση αντιστρέφει τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, t)$ σε ανοικτά (οπότε αν η f είναι και άνω και κάτω ημισυνεχής, επειδή

$$f^{-1}(a,b) = f^{-1}(a,+\infty) \cap f^{-1}(-\infty,b)$$

ανοικτό, αυτός είναι ένας άλλος τρόπος να δει κανείς ότι η f είναι συνεχής).

1.3 Supremum και infimum ημισυνεχών συναρτήσεων

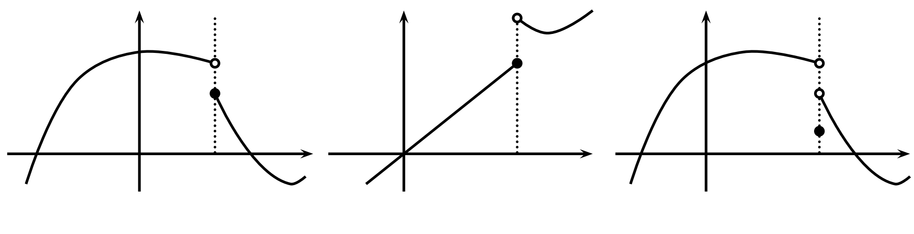
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια οικογένεια $(f_j)_{j\in J}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα I (με πεπερασμένα ή άπειρα άκρα) κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων (για ένα σύνολο δεικτών J) για τις οποίες ισχύει $\sup_{j\in J} f_j(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους I. Τότε και η συνάρτηση $f(x) = \sup_{j\in J} f_j(x)$ είναι κάτω ημισυνεχής, διότι $f(x) > t$ αν και μόνο αν υπάρχει $j \in J$ ώστε $f_j(x) > t$. Συνεπώς ισχύει

$$f^{-1}(t,+\infty) = \bigcup_{j\in J} f_j^{-1}(t,+\infty),$$

άρα το $f^{-1}(t,+\infty)$ είναι ανοικτό.

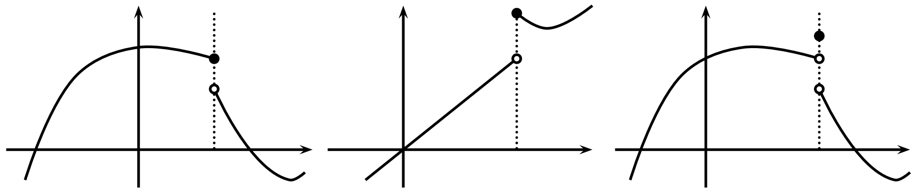
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι αν οι f_j είναι όλες άνω ημισυνεχείς με $\inf_{j\in J} f_j(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους I, τότε και η $f(x) = \inf_{j\in J} f_j(x)$ είναι άνω ημισυνεχής.

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι η άνω και η κάτω ημισυνέχεια δεν έχουν σχέση με τις έννοιες «αριστερά» ή «δεξιά συνεχής». Για παράδειγμα οι συναρτήσεις στο Σχήμα 1.1 είναι όλες κάτω ημισυνεχείς.



Σχήμα 1.1: Τρεις κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις.

Παρατηρούμε ότι στο σημείο ασυνέχειας η τιμή της συνάρτησης είναι χαμηλότερη ή ίση με τα πλευρικά όρια στο σημείο. Ανάποδα είναι τα πράγματα για τις άνω ημισυνεχείς (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Τρεις άνω ημισυνεχείς συναρτήσεις.

1.4 Το θεώρημα του Baire

Το ακόλουθο είναι το κεντρικό θεώρημα της παρουσίασης αυτής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.1. *Έστω ότι η $f : I \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I (με πεπερασμένα ή άπειρα άκρα).*

Η f είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων f_n ώστε $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$ καθώς $n \to +\infty$.

Η f είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων f_n ώστε $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$ καθώς $n \to +\infty$.

Αν λοιπόν η f είναι κάτω ημισυνεχής είναι όριο αύξουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων, δηλαδή η f_n συγκλίνει στην f «από κάτω», ενώ αν f είναι άνω ημισυνεχής είναι όριο φθίνουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων, δηλαδή η f_n συγκλίνει στην f «από πάνω»· και αυτό αποτελεί έναν εύκολο μνημονικό κανόνα!

Απόδειξη: Θα κάνουμε την απόδειξη μόνο για τις κάτω ημισυνεχείς, αφού η απόδειξη για τις άνω ημισυνεχείς είναι εντελώς ανάλογη.

Το αντίστροφο είναι εύκολο, αφού $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ και οι f_n είναι συνεχείς.

Για το ευθύ τώρα, αφού η f είναι φραγμένη είναι και κάτω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) > M$ οπότε $f(x) - M > 0$ για κάθε $x \in I$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε $f > 0$ (αλλιώς αντικαθιστούμε την f με την $f - M$).

Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ θέτουμε

$$A_q = f^{-1}(q, +\infty) = \{x \in I : f(x) > q\}.$$

Αφού η f είναι κάτω ημισυνεχής, το A_q είναι ανοικτό σύνολο.

Ισχυρισμός: $f(x) = \sup\{q\chi_{A_q}(x) : q > 0 \ \&\ q \in \mathbb{Q}\}$, όπου $\chi_{A_q}(x) = 1$ αν $x \in A_q$ και $\chi_{A_q}(x) = 0$ αν $x \notin A_q$.

[Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} : q >$

0} και για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$\chi_{(q,+\infty)}\big(f(x)\big) = 1 \Leftrightarrow f(x) > q \Leftrightarrow x \in f^{-1}(q,+\infty) \Leftrightarrow \chi_{f^{-1}(q,+\infty)}(x) = 1.$$

Οπότε, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $f(x) > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{q \in \mathbb{Q}^+ : q < f(x)\} \\ &= \sup_{q\in\mathbb{Q}^+} q\chi_{(q,+\infty)}\big(f(x)\big) \\ &= \sup_{q\in\mathbb{Q}^+} q\chi_{f^{-1}(q,+\infty)}(x) \end{aligned} \qquad]$$

Το A_q τώρα είδαμε ότι είναι ανοικτό, άρα γράφεται ως αριθμήσιμη ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων ([ΑΤΦ], Πρόταση 2.3.11). Ας είναι λοιπόν

$$A_q = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(q)}, b_n^{(q)}\right)$$

όπου τα διαστήματα αυτά είναι ανά δύο ξένα.

Θα βρούμε τώρα συνεχείς συναρτήσεις h_n με $h_n(x) \le h_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $h_n(x) \to \chi_{A_q}(x)$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x \in I$. Παρατηρούμε ότι αρκεί να το πετύχουμε αυτό για καθένα από τα παραπάνω διαστήματα (αντί για το A_q) με τέτοιο τρόπο που οι h_n να είναι όλες ίσες με το μηδέν έξω από το διάστημα αυτό, γιατί μετά απλώς θα προσθέσουμε όλες αυτές τις συναρτήσεις για όλα τα διαστήματα (δεν τίθεται θέμα σύγκλισης της άθροισης γιατί σε κάθε διάστημα μία είναι ίσως διάφορη του μηδενός ενώ όλες οι άλλες είναι μηδέν).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $A_q = \left(a_1^{(q)}, b_1^{(q)}\right) = (-1,1)$. Θέτουμε

$$h_n^{(q)}(x) = \begin{cases} \big(1-|x|\big)^{1/n} & -1 < x < 1 \\ 0 & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Επειδή $0 \le 1-|x| \le 1$ ισχύει $h_n^{(q)}(x) \le h_{n+1}^{(q)}(x)$, η $h_n^{(q)}$ είναι συνεχής, και $h_n^{(q)}(x) \to \chi_{(-1,1)}(x) = \chi_{A_q}(x)$.

(Γενικά, στο διάστημα (a,b) ορίζουμε

$$h_n^{(q)}(x) = \begin{cases} \left(1-\left|\frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}\right|\right)^{1/n} & a < x < b \\ 0 & x \notin (a,b). \end{cases}$$

Αν $\psi = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$, τότε $\psi : [a,b] \mapsto [-1,1]$, $h_n \le h_{n+1}$ και $h_n \to \chi_{(a,b)}$ καθώς $n \to \infty$.)

Έτσι λοιπόν, αφού $h_n^{(q)} \leq h_{n+1}^{(q)} \to \chi_{A_q}$ συμπεραίνουμε ότι $qh_n^{(q)} \leq q\chi_{A_q}$. Άρα

$$f(x) = \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty)} q\chi_{A_q}(x) = \sup\left\{qh_n^{(q)}(x) \,:\, q \in \mathbb{Q},\ q > 0\right\}.$$

Αλλά τώρα η $qh_n^{(q)}(x)$ είναι συνεχής! Όμως έχουμε μια διπλή ακολουθία, και ως προς $n \in \mathbb{N}$ και ως προς $q \in \mathbb{Q} \cap (0,+\infty)$. Πρόκειται όμως για αριθμήσιμο πλήθος, άρα επαναριθμούμε τη διπλή ακολουθία σε μια νέα ακολουθία F_n με $n \in \mathbb{N}$, συνεχών συναρτήσεων για την οποία ισχύει $f(x) = \sup\{F_n(x) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ για κάθε $x \in I$. Αλλά τώρα χάσαμε την ιδιότητα να ισχύει $F_n \leq F_{n+1}$. Κάνουμε τώρα μια τελική διόρθωση θέτοντας $f_n(x) = \max\{F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)\}$. Φανερά τώρα οι f_n είναι συνεχείς και ισχύει $f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \leq f$. Μένει να δείξουμε ότι $f_n \to f$ καθώς $n \to \infty$.

Έστω ότι $\epsilon > 0$ και $x \in I$. Ισχύει $\sup_n F_n(x) = f(x) > f(x) - \epsilon$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0}(x) > f(x) + \epsilon$. Αλλά τώρα $f_n(x) \geq F_{n_0}(x)$ για κάθε $n \geq n_0$, αφού $F_{n_0} \in \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$.

Άρα για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $f_n(x) > f(x) - \epsilon$, οπότε $f_n(x) \to f(x)$ καθώς $n \to \infty$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Αναφορές

[ΑΤΦ] Μ. Ανούσης, Α. Τσολομύτης, Β. Φελουζής, *Πραγματική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2014.

Ομιλία 2

Οι Υπερπραγματικοί Αριθμοί και η μη τυπική Ανάλυση

Χαράλαμπος Κορνάρος

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kornaros@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Απειροστικός Λογισμός Ι & ΙΙ.

2.1 Για την ιστορία

Οι *υπερπραγματικοί* είναι μια επέκταση του συστήματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Το σύστημα αυτό έχει αρκετά πλεονεκτήματα όπως θα δούμε σε σχέση με το $\mathbb{R}$. Η *μη τυπική ανάλυση* αναφέρεται στη χρήση απειροελάχιστων ποσοτήτων (infinitesimals) στην ανάλυση αντί των συνηθισμένων έψιλον – δέλτα αποδείξεων σε συνδυασμό με την χρήση της απόστασης μεταξύ δυο αριθμών που βρίσκονται «πολύ κοντά» ο ένας με τον άλλο. Η χρήση των ε, δ ξεκίνησε ιστορικά στα 1870 από τον Weierstrass στην προσπάθειά του να ορίσει την έννοια του *ορίου* και να αναπτύξει την μαθηματική ανάλυση (διαφορικό Λογισμό) με έναν αυστήρο τρόπο απαλλαγμένο από ασάφειες.

Αξίζει να δούμε την ιστορική πορεία του Λογισμού πριν από αυτόν. Ξεκίνησε τον 17ο αιώνα από τον Άγγλο μαθηματικό Νεύτωνα (Newton). Ο Νεύτωνας, σπουδαίος φυσικός, πατέρας της Κλασικής Μηχανικής, είχε ιδιαίτερο ταλέντο και διορατικότητα στα μαθηματικά. Το ενδιαφέρον του όμως επικεντρωνόταν στην μελέτη των κινήσεων, της οπτικής και γενικότερα των φυσικών φαινομένων. Από αυτόν πήρε ιδέες ο γνωστός Γερμανός μαθηματικός Leibniz και πρώτος δημοσίευσε έργο για τον Λογισμό και ανέπτυξε σε βάθος τις έννοιές του. Και οι δυο χρησιμοποιούσαν τα απειροστά χωρίς όμως να υπάρχει ένα αξιωματικό σύστημα για αυτά.

Σήμερα, η μέθοδος και ο συμβολισμός που έχει επικρατήσει είναι του Leibniz. Ο Γερμανός μαθηματικός, για παράδειγμα, συμβόλιζε την παράγωγο ως dy/dx ενώ ο Νεύτωνας έβαζε συνήθως μια τελεία πάνω από την εκάστοτε μεταβλητή.

Δυστυχώς, η ανάπτυξη του Λογισμού από τότε έως την εποχή του Weierstrass, στηρίχθηκε στην διαισθητική (!) σημασία των απειροστών $dx, dy, \ldots$. Είναι κάποιες μικρές ποσότητες, αλλά πόσο μικρές; Πώς γνωρίζουμε ότι υπάρχουν, ποιές ιδιότητες έχουν και ποιές δεν έχουν, κοκ; Πέρασαν άλλα 100 περίπου χρόνια έως το 1960 που ο εβραίος Αβραάμ Robinson επανέφερε στο προσκήνιο τα απειροστά με την πρέπουσα μαθηματική σαφήνεια. Αποσαφήνισε τον τρόπο που αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην Ανάλυση με το περίφημο βιβλίο του Non-standard Analysis (μη τυπική Ανάλυση, εκδόθηκε το 1966). Η εργασία του στηρίχθηκε σε μεθόδους και εργαλεία της μαθηματικής Λογικής και της θεωρίας Μοντέλων. (Ενδιαφέρθηκε και για την ιστορία και την φιλοσοφία των μαθηματικών, έλεγε χαρακτηριστικά ότι θα ήθελε να μπει μέσα στο κεφάλι του Leibniz). Η προσφορά του σίγουρα είναι μια απο τις μεγαλύτερες μαθηματικές επιτυχίες του 20ου αιώνα.

Από τότε, τα απειροστά επανήλθαν σε χρήση με εντυπωσιακές εφαρμογές και έξω από τα μαθηματικά όπως στην οικονομία και στη φυσική. Ας αναφέρουμε εδώ ότι ο Νεύτωνας χρησιμοποιούσε ορολογία για τα απειροστά που ταιριάζει σε περιβάλλον Φυσικής. Για παράδειγμα, τις μεταβλητές ποσότητες x, y τις έλεγε ρευστά, ενώ τους παραγώγους των $\dot{x}$, $\dot{y}$ τις έλεγε ροές των x, y!

Σχήμα 2.1: Abraham Robinson (1970)

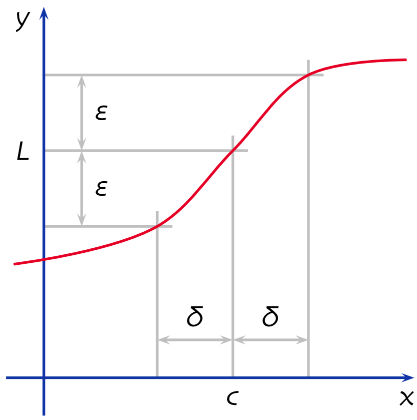
Σχήμα 2.2: Gottfried Wilhelm Leibniz

2.2 Εισαγωγή στην έννοια των απειροστών

Εδώ θα ξεκινήσουμε από την βασική έννοια του *ορίου*, ώστε να διακρίνουμε την έννοια του απειροστού που κρύβεται πίσω από τον ορισμό του.

Ορισμος 2.2.1. Έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με $I \subseteq \mathbb{R}$ και c ένα σημείο συσσώρευσης του I. Ορίζουμε $\lim_{x\to c} f(x) = L$ αν και μόνο αν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(0 < |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$$



Η διπλανή εικόνα αναλύει τον παραπάνω ορισμό. Έστω ε ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός, ο οποιοσδήποτε. Η τιμή $f(x)$ της συνάρτησης f είναι ίση με L ή ε-κοντά στο L (δηλαδή είναι περίπου L με κάποιο μικρό σφάλμα $\pm\varepsilon$), αρκεί βέβαια το x να είναι δ-κοντά στο c (δηλαδή το x θα πρέπει να ικανοποιεί την $0 < |x - c| < \delta$ για κάποιο κατάλληλο δ που εξαρτάται προφανώς από το δοθέν ε). Για παράδειγμα, όπως βλέπουμε και από το σχήμα που ακολουθεί, αν $x = c + \delta/2$, τότε το $f(x)$ είναι περίπου L, διότι η απόσταση $f(x) - L$ είναι πολύ μικρή, μικρότερη από ε.

Η χρήση των απολύτων τιμών στον ορισμό καθώς και η ανάγκη εξεύρεσης του δ, για ένα οποιοδήποτε θετικό ε (οποιουδήποτε μεγέθους, μικρού ή μεγάλου) καθιστούν την κατανόηση του ορισμού καθώς και της αυστηρής απόδειξης ότι πράγματι το L είναι το όριο που ψάχνουμε (όταν μας δώσουν το c και την συνάρτηση f) αρκετά δύσκολη υπόθεση.

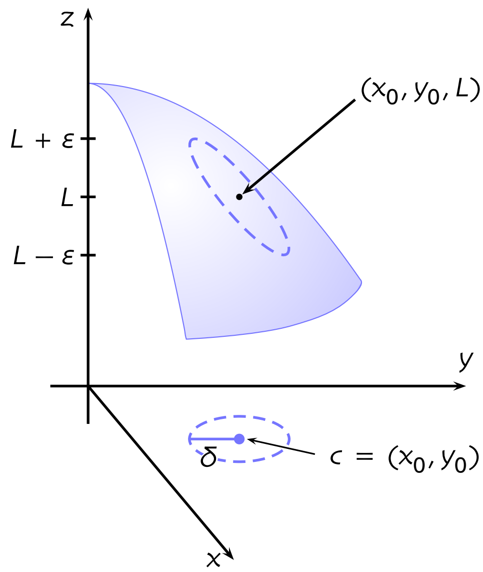
Φυσικά ο ορισμός του ορίου, στις δυο διαστάσεις είναι ακόμα πιο περίπλοκος:

Ορισμος 2.2.2. Έστω ότι η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με $I \subseteq \mathbb{R}^2$ και $c = (x_0, y_0)$ ένα σημείο συσσώρευσης του I. Ορίζουμε $\lim_{(x,y)\to c} f(x, y) = L$ αν και μόνο αν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in I)$$
$$\left(0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \to |f(x, y) - L| < \varepsilon\right)$$

Εδώ με I παριστάνουμε το διδιάστατο πεδίο ορισμού της f. Η περιπλοκότητα έχει αυξηθεί διότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την τετραγωνική ρίζα για να εκφράσουμε ότι το σημείο (x, y) είναι δ-κοντά στο σημείο c:

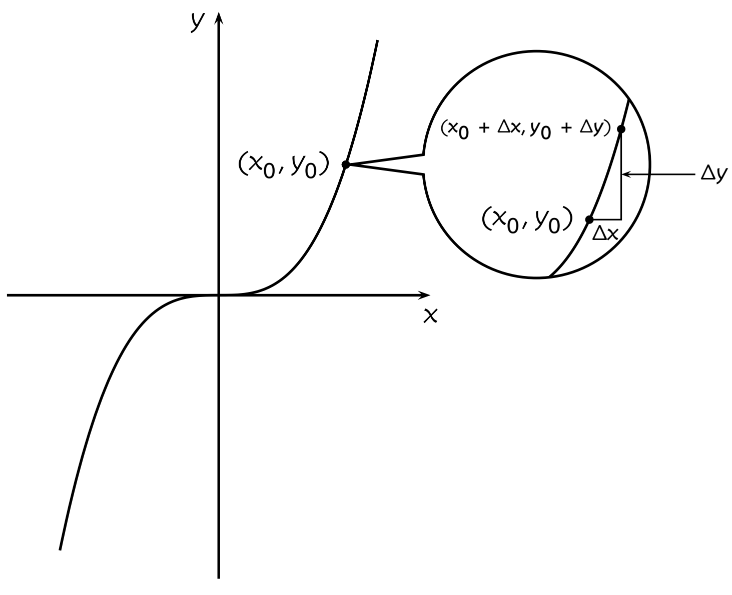
$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Μπορείτε να φανταστείτε πόσο περίπλοκος μπορεί να γίνει ο ορισμός του ορίου μιας συνάρτησης σε περισσότερες από δύο διαστάσεις!



Αυτό που ουσιαστικά κρύβουν οι παραπάνω ορισμοί με απλά λόγια θα μπορούσε να εκφραστεί απλά ως: Αν το τρέχον σημείο x ή αντίστοιχα το (x, y), πλησιάσει «πολύ κοντά» στο σταθερό σημείο c, τότε η τιμή της f πλησιάζει «αρκετά καλά» στο (δηλαδή είναι ίση περίπου με) L, για κάποιο μοναδικό αριθμό L.

Άμεση σχέση με το όριο έχει η *κλίση* μιας καμπύλης $y = f(x)$.:

- Η *μέση κλίση* στο σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ είναι ο λόγος $\Delta y/\Delta x$.
- Η *κλίση* της f στο σημείο x_0 ορίζεται να είναι το όριο της μέσης κλίσης, δηλαδή $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x$.



Όπως βλέπουμε και στο σχήμα, φανταζόμαστε την f να αποτελείται μικροσκοπικά από «πολύ μικρά» ευθύγραμμα τμήματα. Κάθε τέτοιο τμήμα σχηματίζει ένα ορθογώνιο τρίγωνο με ύψος Δy (έχουμε $\Delta y > 0$ αν η καμπύλη είναι σε τούτο το κομμάτι ανηφορική, και $\Delta y \leq 0$ διαφορετικά) και πλάτος Δx. Οπότε η μέση κλίση της f είναι απλούστατα ο λόγος $\Delta y/\Delta x$.

Οπότε, αν γινόνταν να μας επιτραπεί η έκφραση «πολύ κοντά», τότε απλά θα ορίζαμε (χωρίς την χρήση οριακών διαδικασιών)

Ορισμος 2.2.3. Η κλίση στο σημείο $(x_0, y_0 = f(x_0))$ είναι ο *μοναδικός* πραγματικός που βρίσκεται **πολύ κοντά** στο λόγο $\Delta y/\Delta x$.

Η χρήση τέτοιων εκφράσεων, όπως των παραπάνω, πολύ καλά, πολύ κοντά, πολύ ικανοποιητικά κοκ. δεν είναι καθόλου «εξωπραγματική», αρκεί να αποδεχθούμε ότι υπάρχουν τα απειροστά! Τα απειροστά είναι κάποιες ποσότητες που ενώ θεωρούνται απείρως μικρές, παρ' όλα αυτά δεν είναι ίσες με μηδέν. Δεν έχουμε την δυνατότητα να τις «μετρήσουμε» με κάποιο τρόπο (μηχανικό, ηλεκτρονικό), αφού όλες οι «μετρήσεις» μας θα δείχνουν ότι έχουν τιμή μηδέν (πράγμα που δεν συμβαίνει. Ουσιαστικά, είναι μη μετρήσιμες ποσότητες έξω από την αντίληψή μας)!

Ας δούμε ένα παράδειγμα για να γίνουμε περισσότερο κατανοητοί.

Παράδειγμα: *Η εύρεση της κλίση της $y = x^3$.*

Έχουμε:

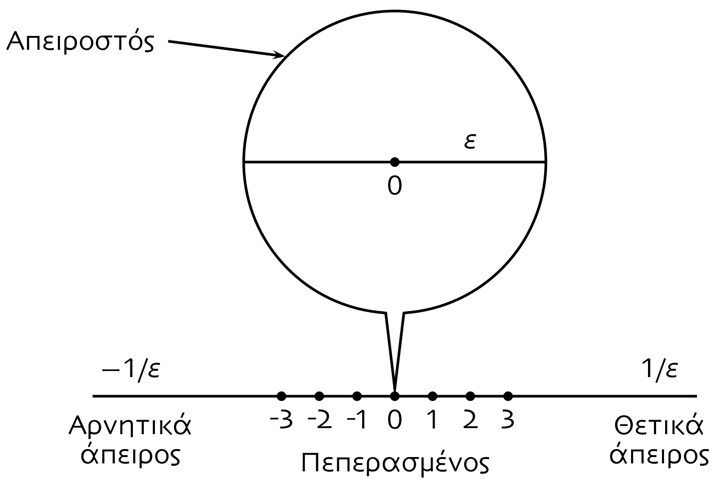
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x}.$$

Οπότε, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$. Τα $(\Delta x)^2, 3x_0\Delta x, 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ είναι προφανώς απειροστά δηλ. απείρως μικρές ποσότητες διότι και το Δx δεχόμαστε ότι είναι ένα απειροστό! Άρα, διαπιστώνουμε ότι η ποσότητα $3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ βρίσκεται πάντα «πολύ κοντά» στο $3x_0^2$ ανεξάρτητα από το Δx που επιλέξαμε. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κλίση είναι, σύμφωνα με τον παραπάνω «περίεργο» ορισμό, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

2.3 Η γραμμή των υπερπραγματικών αριθμών $^*\mathbb{R}$

Ορισμος 2.3.1. Ένα απειροστό (infinitesimal) ε είναι μια άπειρα μικρή ποσότητα: $(\forall a \in \mathbb{R}, a > 0)(-a < \varepsilon < a)$. Τα απειροστά θα τα συμβολίζουμε με μικρά γράμματα $\varepsilon, \delta, dx, dy, \Delta x, \Delta y \ldots$.

Η χρήση των απειροστών θα μας βοηθήσει να δώσουμε πιο κατανοητούς ορισμούς σε βασικές έννοιες των μαθηματικών. Φυσικά, αν το ε είναι μια θετική απείρως μικρή ποσότητα (ένα απειροστό, infinitesimal), τότε το $1/\varepsilon$ είναι μια θετική άπειρη μεγάλη ποσότητα (positive infinite), τόσο μεγάλη που είναι αδύνατον να μετρηθεί ! (μεγαλύτερη από οποιοδήποτε μεγάλο θετικό αριθμό). Συνεπώς μπορούμε να την τοποθετήσουμε (ας μας επιτραπεί η έκφραση) κάπου τέρμα δεξιά στον άξονα των υπερπραγματικών αριθμών. Το ίδιο συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε ένα αρνητικό απειροστό ε. Το $1/\varepsilon$ είναι μια αρνητική άπειρη ποσότητα (negative infinite) που βρίσκεται τέλος αριστερά του άξονα των υπερπραγματικών. Φυσικά όλοι οι γνωστοί μας πραγματικοί αριθμοί, δεν θεωρούνται άπειρα μικροί (εκτός φυσικά το μηδέν 0) και δεν θεωρούνται άπειρα μεγάλοι! Για παράδειγμα, το $1000000^{100000000000}$ θεωρείται ένας πεπερασμένος και μετρήσιμος (finite) πραγματικός αριθμός και άρα πολύ, πολύ, πολύ, μικρότερος από μια οποιαδήποτε θετική άπειρη ποσότητα. Η εικόνα της ευθείας των υπερπραγματικών αριθμών $^*\mathbb{R}$ είναι η παρακάτω:



Τους άπειρους(infinite) υπερπραγματικούς αριθμούς θα τους συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα $H, K \ldots$

Ορισμος 2.3.2. Οι υπερπραγματικοί $^*\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα που επεκτείνει το $\mathbb{R}$ και αποτελείται από πεπερασμένους αριθμούς (finite) και από άπειρους (infinite) αριθμούς.

Το $^*\mathbb{R}$ ικανοποιεί τρεις βασικές αρχές

- Αρχή της επέκτασης
- Αρχή της μεταφοράς
- Αρχή του κανονικού (ή πραγματικού) μέρους

Η ύπαρξή τους εξασφαλίζεται από την δουλειά του Robinson χρησιμοποιώντας εργαλεία της Μαθηματικής Λογικής και Θεωρίας Μοντέλων.

Ας δούμε όμως μία-μία τις παραπάνω βασικές αρχές.

2.4 Η αρχή της επέκτασης

- Το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $^*\mathbb{R}$. Η διάταξη $^*<$ (που συνήθως την συμβολίζουμε απλά ξανά ως $<$) στο $^*\mathbb{R}$ είναι επέκταση της κανονικής διάταξης στο $\mathbb{R}$
- Υπάρχουν μη μηδενικά απειροστά.
- Κάθε πραγματική συνάρτηση f, μερική ή ολική, με μια ή περισσότερες μεταβλητές επεκτείνεται σε μια αντίστοιχη συνάρτηση $^*f$, με το ίδιο πλήθος μεταβλητών και ονομάζεται η φυσική επέκταση της f.

Σχόλιο: Συνήθως ξεχνάμε το $*$ από την f. Για παράδειγμα, γράφουμε $+$ αντί $^*\!+$. Έτσι, αντί $\Delta x \,^*\!\!+ 3$ γράφουμε $\Delta x + 3$).

Από αυτήν την αρχή μπορούμε να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα. Αν, για παράδειγμα το Δx είναι ένα θετικό απειροστό, τότε και οι ποσότητες $3\Delta x$, $-1/\Delta x$, $-\Delta x^2$ είναι μη πραγματικοί αριθμοί και ανήκουν στους υπερπραγματικούς. Η πρώτη ποσότητα παραμένει ένα απειροστό: Αφού $(\forall a \in \mathbb{R}, a > 0)(-a < \Delta x < a)$, προκύπτει εύκολα $(\forall a \in \mathbb{R}, a > 0)(-a/3 < \Delta x < a/3)$ δηλ. $(\forall a \in \mathbb{R}, a > 0)(-a < 3\Delta x < a)$. Εύκολα επίσης βλέπουμε ότι το $3\Delta x$ είναι μεγαλύτερο από το Δx (και άρα διαφορετικό απ᾽ αυτό). Το $-\Delta x^2$ είναι ένα αρνητικό απειροστό, ενώ το $-1/\Delta x$ είναι αρνητικό άπειρο, αφού μπορούμε να δείξουμε ότι $(\forall a \in \mathbb{R}, a > 0) - 1/\Delta x < -a$. Το $3 + \Delta x$ δεν είναι φυσικά ένα (θετικό) απειροστό. Είναι ένας υπερπραγματικός που «οι οποιεσδήποτε πραγματικές μετρήσεις» δείχνουν να είναι το 3 (αφού η απόσταση $(3 + \Delta x) - 3$ θεωρείται μηδενική για τους πραγατικούς αριθμούς). Πρόκειται όμως για ένα υπερπραγματικό που δεν άπειρος αλλά πεπερασμένος ή να το πούμε ακριβέστερα: είναι ένας *φραγμένος* υπερπραγματικός (βρίσκεται δηλαδή ενδιάμεσα δυο πραγματικών αριθμών, για παράδειγμα του 2 και του 3.5).

Η χρήση του αστερίσκου * επεκτείνεται και σε σύμβολα σχέσεων και σε σύμβολα συνόλων. Για παράδειγμα, το σύνολο $^*\mathbb{N}$ δεν είναι οι γνωστοί μας φυσικοί, αλλά οι υπερφυσικοί. (Οι υπερφυσικοί αριθμοί αποδεικνύεται εύκολα ότι αποτελούνται από τους γνωστούς μας φυσικούς αριθμούς αλλά και από κάποιους *άπειρους* υπερφυσικούς που είναι πολύ, πολύ μεγαλύτεροι από κάθε φυσικό. Παρακάτω θα δούμε κάποιους τέτοιους!) Το σύνολο $^*\mathbb{Q}$ (οι υπερρητοί αριθμοί) δεν είναι μόνο οι γνωστοί μας ρητοί, αλλά και κάποιοι άλλοι. Και τα δυο αυτά σύνολα είναι φυσικά γνήσια υποσύνολα του συνόλου $^*\mathbb{R}$. Το κλειστό συνολο $^*[0,1]$ περιέχει όχι μόνο τους πραγματισκούς αριθμούς του διαστήματος $[0,1]$ αλλά και πολλούς άλλους (όπως π.χ τους $\Delta x, 1 - \Delta x$ κοκ. όπου Δx είναι ένα οποιοδήποτε θετικό απειροστό). Όλες οι παραπάνω επεκτάσεις ορίζουν νέα μαθηματικά αντικείμενα (νέες συναρτήσεις, σχέσεις, σύνολα) στους υπερπραγματικούς, τα οποία έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που έχουν και τα αρχικά μας αντικείμενα! Αυτό ακριβώς μας βεβαιώνει η παρακάτω σημαντικότατη αρχή.

2.5 Η αρχή της μεταφοράς

Κάθε ορισμός ή αληθινή πρόταση «πρώτης τάξεως» που αναφέρεται στους πραγματικούς και περιέχει μια ή παραπάνω πραγματικές συναρτήσεις (ή σχέσεις ή σύνολα) **ισχύει** και στους υπερπραγματικούς αριθμούς και για τις φυσικές **επεκτάσεις** αυτών των συναρτήσεων (σχέσεων ή συνόλων) και αντίστροφα.

Ορισμος 2.5.1. Μια καλοσχηματισμένη δήλωση φ λέγεται πρώτης τάξεως αν περιέχει σύμβολα

(α) συναρτήσεων με πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών

(β) σχέσεων πεπερασμένου πλήθους μεταβλητών

(γ) λογικά σύμβολα όπως

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$$

πεπερασμένου πλήθους και τέλος

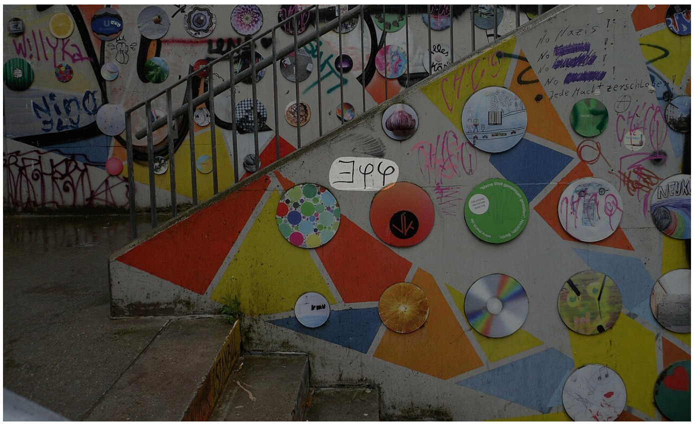
(δ) ποσοδείκτες της μορφής $(\forall x \in \mathbb{R})$, $(\forall x \in A)$, $(\exists x \in \mathbb{R})$, $(\exists x \in A)$ πεπερασμένου πλήθους όπου το A είναι κάποιο δεδομένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Δεν θα αναφέρουμε εδώ το πότε μια δήλωση (μια αράδα πεπερασμένου μήκους από σύμβολα της γλώσσας) είναι καλοσχηματισμένη και πότε όχι. Για να έχουμε μια καλοσχηματισμένη δήλωση θα πρέπει τα σύμβολά της να έχουν μπεί με κάποιο σωστό τρόπο ώστε να έχει λογικό «νόημα». Οι δηλώσεις (λέγονται και τύποι) στην Λογική είναι πρώτης τάξης ή ανώτερης τάξης. Στην πρώτη τάξη θα συναντήσουμε ποδοδείκτες $\forall x$, $\exists y$ κοκ, που οι μεταβλητές τους (οι x, y κοκ) είναι στοιχεία ενός συνόλου (του πεδίου τιμών των μεταβλητών αυτών). Αυτό μπορεί να είναι το σύνολο των Φυσικών Αριθμών, των Πραγματικών ή οποιοδήποτε άλλο σύνολο. Στις δηλώσεις δεύτερης τάξης έχουμε ακόμα μεγαλύτερη ελευθερία. Στους ποσοδείκτες μπορούμε τώρα να συναντήσουμε όχι μόνο μεταβλητές που διατρέχουν ένα σύνολο A, αλλά μεταβλητές που παριστάσουν σχέσεις (δηλ. κάποια σύνολα).

Παραδειγμα 2.5.2. Ας πούμε ότι το κατηγόρημα $\mathrm{Cube}(x)$ σημαίνει ότι το x είναι ένας κύβος, ενώ το $\mathrm{Tet}(x)$ ότι είναι ένα τετράεδρο στον χώρο. Η δήλωση $\exists x \mathrm{Cube}(x)$ είναι πρώτης τάξης (υπάρχει ένα x που είναι ένας κύβος). Η δήλωση όμως $\exists P \forall x (Px \leftrightarrow \mathrm{Cube}(x))$ ή η δήλωση $\exists P \forall x (Px \leftrightarrow$

$(\mathrm{Cube}(x) \vee \mathrm{Tet}(x)))$ (που με απλά ελληνικά δηλώνουν αντίστοιχα : υπάρχει ένα σύνολο P που αποτελείται από όλους τους κύβους, και υπάρχει ένα σύνολο P από όλους τους κύβους και τα τετράεδρα) είναι δεύτερης τάξης λόγω της παρουσίας του ποσοδείκτη $\exists P$, όπου με το κεφαλαίο P παριστάνουμε ένα σύνολο (που έχει κάποια ιδιότητα). Στο Βερολίνο θα συναντήσετε και σε γκράφιτι την απλούστερη πρόταση δευτέρου βαθμού! (Αντιγραφή από https://en.wikipedia.org/wiki/Second-order_logic).

δεσμός



Σχήμα 2.3: Τι μπορεί να σημαίνει;

Παραδείγματα όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς ώστε να συμπεράνουμε κάποιες ιδιότητες των υπερπραγματικών:

- Το άθροισμα δυο υπερπραγματικών x, y είναι υπερπραγματικός.
- Αντιμεταθετικότητα του αθροίσματος: $x + y = y + x$.
- Ο γνωστός νόμος της διάταξης: αν $0 < x < y$ τότε $0 < 1/y < 1/x$.
- Απαγορεύεται να διαιρέσουμε με το μηδέν ή με άλλα λόγια, δεν ορίζεται η πράξη $x/0$.
- Ισχύουν οι γνωστές μας αλγεβρικές ταυτότητες και στους υπερπραγματικούς. Για παράδειγμα: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
- Ισχύουν όλες οι γνωστές μας τριγωνομετρικές ταυτότητες, για παράδειγμα, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Ισχύουν οι γνωστοί μας νόμοι στους λογάριθμους, όπως για παράδειγμα, εαν $x > 0$ και $y > 0$, τότε $\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y$.
- Ισχύουν όλες οι γνωστές προτάσεις και θεωρήματα που ήδη γνωρίζουμε για τους πραγματικούς. Παράδειγμα: Κάθε υπερακέραιος έχει έναν τουλάχιστον (υπερ)πρώτο διαιρέτη.

- Αν Π είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, τότε το $^*\Pi$ είναι πεπερασμένο και ίσο με το Π. Όμως αν το Π είναι άπειρο τότε το $^*\Pi$ δεν ταυτίζεται με το Π, διότι περιέχει τουλάχιστον ένα (γνήσιο) υπερπραγματικό αριθμό! Για παράδειγμα, το $^*\{1, 2, 3, \dots N\}$, για N κάποιο φυσικό αριθμό, ταυτίζεται με το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots N\}$, ενώ το $^*\mathbb{N}$ δεν ταυτίζεται με το $\mathbb{N}$, διότι υπάρχουν υπερφυσικοί αριθμοί γνήσια μεγαλύτεροι από κάθε φυσικό αριθμό.

Πριν συνεχίσουμε με την τελευταία αρχή, ας δούμε κάποιες επιπλέον στοιχειώδεις ιδιότητες.

2.6 Βασικές προτάσεις

Στα παρακάτω με ε, δ παριστάνουμε δυο απειροστά, με b, c δυο πεπερασμένους (φραγμένους) υπερπραγματικούς που δεν είναι απειροστά και με H, K δυο άπειρους υπερπραγματικούς.

- Αν το ε είναι (πράγματι) ένας πραγματικός αριθμός, τότε είναι αναγκαστικά το 0.
- κάθε πραγματικός είναι ουσιαστικά, με βάση τον ορισμό, ένας πεπερασμένος (φραγμένος) υπερπραγματικός.
- το $-\varepsilon$ είναι ένα απειροστό, το $-H$ ένας άπειρος και το $-b$ ένας πεπερασμένος αριθμός αλλά όχι απειροστός!
- Εάν $\varepsilon \neq 0$, τότε το $1/\varepsilon$ είναι άπειρος.
- το $1/b$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό.
- το $1/H$ είναι ένα απειροστό.

2.7 Αριθμητικές πράξεις

- Αθροίσματα: το $\varepsilon + \delta$ είναι απειροστό, το $b + \varepsilon$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό, $b + c$ είναι πεπερασμένο ή απειροστό και τα $H + \varepsilon$ και $H + b$ είναι άπειρα.
- Γινόμενα: Τα $\delta\varepsilon$ και $b\varepsilon$ είναι απειροστά. Το bc είναι πεπερασμένο αλλά όχι απειροστό. Τα Hb και HK είναι άπειρα.
- Πηλίκα: τα $\varepsilon/b, \varepsilon/H$ και b/H είναι απειροστά. Το b/c είναι πεπερασμένο αλλά οχι απειροστό. Για $\varepsilon \neq 0$ όλα τα παρακάτω είναι άπειρα: $b/\varepsilon, H/\varepsilon$ και H/b.

Δυστυχώς υπάρχουν και απροσδιόριστες μορφές όπως οι ε/δ, Η/Κ, $H\varepsilon$. Εδώ χρειάζονται ίσως περισσότερες πληροφορίες για τους υπερπραγματικούς μας, για να μπορέσουμε να εξάγουμε σε κάθε περίπτωση την κατηγορία που ανήκει το αποτέλεσμα. Μπορεί, ας πούμε, το πηλίκο ε/δ να μην μπορεί να θεωρηθεί κάποιος υπερπραγματικός, ενώ σε κάποια άλλη περίπτωση να είναι ένας υπερπραγματικός! Παράδειγμα: 0/0 δεν ορίζεται όμως, προφανώς, το $0/\delta$ είναι το 0.

- n-οστές Ρίζες: Για ε, b και Η θετικά έχουμε: Τα $\sqrt[n]{\varepsilon}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{H}$ είναι αντίστοιχα απειροστά, πεπερασμένα (αλλά όχι απειροστά) και άπειρα.

2.8 Η αρχή του κανονικού μέρους

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8.1. Δυο υπερπραγματικοι k, l είναι άπειρα κοντά (συμβολισμός $k \simeq l$) αν και μόνο αν το $k - l$ είναι ένα απειροστό.

Η σχέση $\simeq$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας (το τελευταίο αποδεικνύεται εύκολα). Για παράδειγμα, το 3 είναι άπειρα κοντά στα $3 + \Delta x$ και $3 + 3\Delta x$.

Η αρχή μας βεβαιώνει ότι:

> *Κάθε πεπερασμένος υπερπραγματικός αριθμός b είναι άπειρα κοντά σε ένα και* μοναδικό *πραγματικό αριθμό που ονομάζεται το κανονικό του μέρος (standard part) και συμβολίζεται με* $\mathrm{st}(b)$.

Η αρχή με απλά λόγια λέει ότι: Πολύ, πολύ, πολύ κοντά σε κάθε πεπερασμενο υπερπραγματικό b, θα βρούμε ένα και μοναδικό πραγματικό αριθμό $\mathrm{st}(b)$. Φυσικά το $\mathrm{st}(b)$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο το b. Αν το $\mathrm{st}(b) = 0$, αυτό συνεπάγεται ότι το b είναι το 0 ή ένα απειροστό. Ας θυμηθούμε εδώ και τον ορισμό 3 (της κλίσης) που δώσαμε παραπάνω. Αν τύχει η κλίση $\Delta y/\Delta x$ να είναι ένας ***πεπερασμένος*** υπερπραγματικός, τότε υπάρχει *μοναδικός* πραγματικός αριθμός που βρίσκεται άπειρα κοντά στον λόγο αυτό. (Ο πραγματικός αυτός είναι ανεξάρτητος από τα Δx και Δy στην περίπτωση που η συνάρτηση y είναι *διαφορίσιμη* στο σημείο x.) Συνεπώς, η ύπαρξη της κλίσης με βάση τον ορισμό που δώσαμε χρησιμοποιώντας τους υπερπραγματικούς, στηρίζεται ακριβώς σε τούτη την σπουδαία αρχή!

Για a, b πεπερασμένοι υπερπραγματικοί ισχύουν τα εξής:

(i) $\mathrm{st}(-a) = -\mathrm{st}(a)$	(v) $\mathrm{st}(b) \neq 0 \to \mathrm{st}(a/b) = \mathrm{st}(a)/\mathrm{st}(b)$
(ii) $\mathrm{st}(a+b) = \mathrm{st}(a) + \mathrm{st}(b)$	(vi) $\mathrm{st}(a^n) = \left(\mathrm{st}(a)\right)^n$
(iii) $\mathrm{st}(a-b) = \mathrm{st}(a) - \mathrm{st}(b)$	(vii) $a \geq 0 \to \mathrm{st}(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{\mathrm{st}(a)}$
(iv) $\mathrm{st}(ab) = \mathrm{st}(a)\mathrm{st}(b)$	(viii) $a \leq b \to \mathrm{st}(a) \leq \mathrm{st}(b)$

Ως παράδειγμα: $\mathrm{st}((3 + \Delta x)(-\Delta x^2)(1 - \Delta x)) = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

Για το παρακάτω θεώρημα δείτε τα θεωρήματα 5.6.1 και 5.8.1 στο [1].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8.2. *Η αρχή του κανονικού μέρους είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της πληρότητας του* $\mathbb{R}$.

2.9 Κάποιες εφαρμογές

Για τα παρακάτω υποθέτουμε ότι η πραγματική συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και συνεπώς η φυσική επέκτασή της ${}^*f$ στο ${}^*\mathbb{R}$ ορίζεται στο νέο σύνολο ${}^*A$.

- Έστω $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια πραγματική ακολουθία, $L \in \mathbb{R}$ και έστω $({}^*s_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ η επέκτασή της στους υπερφυσικούς. (Με ${}^*s_N$ συμβολίζουμε την τιμή της ακολουθίας ${}^*s_n$ για $n = N$.) Τότε:

  $$\lim_{n\to+\infty} s_n = L$$

  αν και μόνο αν για κάθε άπειρο υπερφυσικό N έχουμε

  $$\mathrm{st}({}^*s_N) = L.$$

  Με άλλα λόγια, η εύρεση του ορίου μιας ακολουθίας έχει σχέση με την εύρεση του κανονικού μέρους μιας κατάλληλης τιμής της υπερακολουθίας ${}^*s_n$.

- Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση. Τότε $\lim_{x\to c} f(x) = L$ αν και μόνο αν

  $$(\forall x \in {}^*A)(x \neq c \text{ και } x \simeq c \to {}^*f(x) \simeq L).$$

- Έστω ότι η $f : A = (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση και ${}^*f$ η φυσική επέκτασή της. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

  – η f είναι συνεχής στο $c \in A$
  – Για κάθε $x \in {}^*A$ με $x \simeq c$ ισχύει ${}^*f(x) \simeq f(c)$.

  Σχόλιο: Όπως βλέπουμε, η έννοια της συνέχειας έχει απλοποιηθεί και χρησιμοποιούμε την σχέση ισοδυναμίας $\simeq$ στην θέση των οριακών διαδικασιών: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

  Ακόμα:

  – η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν
  – Για κάθε $x \in {}^*A$ και $c \in {}^*A$ με $x \simeq c$ ισχύει ${}^*f(x) \simeq {}^*f(c)$.

2.10 Εφαρμογές (συνέχεια)

2.10.1 Παραγώγιση

Θεωρημα 2.10.1. *Έστω $L \in \mathbb{R}$ και $x \in A$. Έχουμε $f'(x) = L$ αν και μόνο αν για κάθε μη μηδενικό απειροστό Δx ισχύει*

$$\frac{{}^*f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \simeq L$$

Σχόλια: (α) Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x. Το διαφορικό της f δηλ. η ποσότητα $df = f'(x)\Delta x$ είναι ένα απειροστό (για κάθε απειροστό Δx). Η διαφορά ${}^*f(x+\Delta x) - f(x)$ συμβολίζεται με Δf. Αφού η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει, τότε προκύπτει $df \simeq \Delta f$. Αν θέσουμε dx αντί Δx παίρνουμε, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα,

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

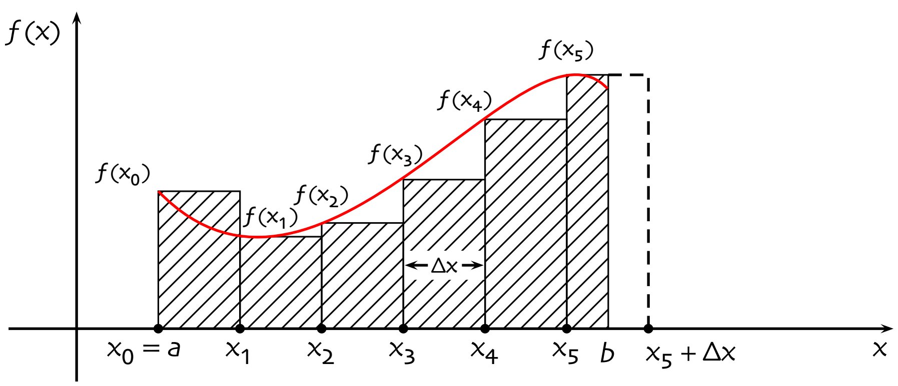
(β) Οι νόμοι παραγώγισης προκύπτουν εύκολα με χρήση του παραπάνω θεωρήματος.

2.10.2 Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμος 2.10.2. Έστω η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και Δx ένας θετικός αριθμός. Τότε το άθροισμα Riemann είναι το

$$f(a)\Delta x + f(a + \Delta x)\Delta x + f(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots$$
$$\cdots + f(a + (n-1)\Delta x)\Delta x + f(a + n\Delta x)(b - (a + n\Delta x))$$

όπου n είναι ο μέγιστος ακέραιος έτσι ώστε $a + n\Delta x \leq b$.



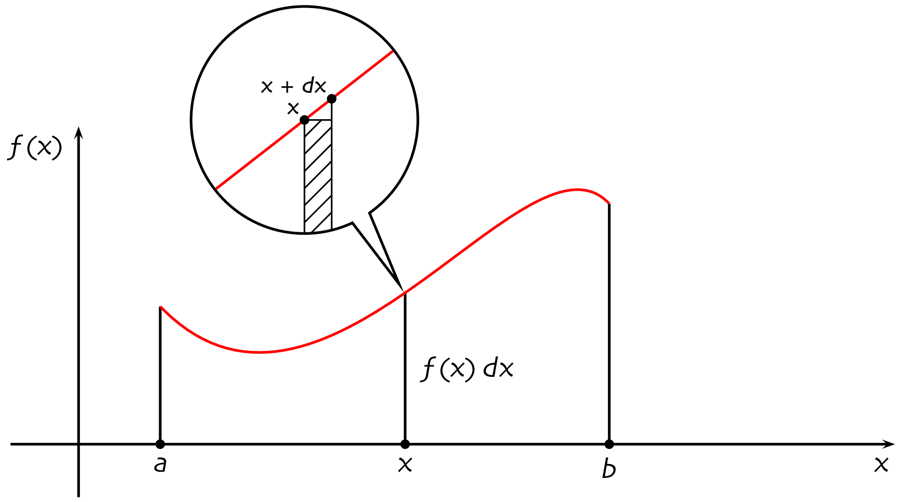
Το παραπάνω άθροισμα το συμβολίζουμε με $\sum_a^b f(x)\Delta x$.

Ας φανταστούμε τώρα ότι το Δx είναι ένα απειροστό. Ουσιαστικά τεμαχίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε άπειρα το πλήθος κομμάτια απειροστού πλάτους Δx: $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_H = a + H\Delta x, b$ (το τελευταίο x_H είναι $\leq b$ και το $x_H + \Delta x > b$) και με βάση αυτόν τον διαμερισμό υπολογίζουμε το άθροισμα Riemann. Το H είναι ο μέγιστος θετικός άπειρος υπερακέραιος έτσι ώστε $a + H\Delta x \leq b$. Η τελευταία φέτα μπορεί να έχει πλάτος μικρότερο από Δx, αλλά αυτό δεν μας πειράζει! Το άθροισμα που προκύπτει $\sum_a^b {}^*f(x)\Delta x$ είναι το «μέσο» εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται «κάτω» από την καμπύλη $f(x)$. Επειδή οι φέτες έχουν απειροστό πλάτος Δx και εμβαδόν ${}^*f(x)\Delta x$, το μέσο εμβαδόν είναι πολύ πολύ κοντά στο πραγματικό εμβαδόν. Αυτό εξάλλου μας βεβαιώνει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10.3. *Έστω οτι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο I που περιέχει το διάστημα $[a, b]$ $(a < b)$ και Δx ένα απειροστό. Τότε*

(α) *το άπειρο άθροισμα $\sum_a^b {}^*f(x)\Delta x$ είναι ένας πεπερασμένος υπερπραγματικός και το st του είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του Δx.*

(β) *Αυτό το $st\left(\sum_a^b {}^*f(x)\Delta x\right)$ είναι ίσο με $\int_b^a f(x)dx$ (!)*



Τελικά προκύπτει ότι τρομερό «δίδαγμα»: όποιος ξέρει να αθροίζει (να βρίσκει αθροίσματα) ξέρει και να ολοκληρώνει! Πράγματι:

$$\sum_a^b {}^*f(x)\Delta x = {}^*f(a)\Delta x + {}^*f(a + \Delta x)\Delta x + {}^*f(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots$$
$$\cdots + {}^*f(a + (H-1)\Delta x)\Delta x + {}^*f(a + H\Delta x) \cdot \Big(b - (a + H\Delta x)\Big).$$
$$= \Delta x \left(\sum_{n=0}^{H-1} {}^*f(a + n\Delta x)\right) + {}^*f(a + H\Delta x) \cdot \Big(b - (a + H\Delta x)\Big).$$

Ας δώσουμε για πληρότητα και ένα απλό παράδειγμα: Εύρεση του $\int_0^b x^2 dx$. Έχουμε για $a = 0$ και $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} \Delta x \left(\sum_{n=0}^{H-1} {}^*f(n\Delta x) \right) &= \Delta x \left(\sum_{n=0}^{H-1} (n\Delta x)^2 \right) = (\Delta x)^3 \sum_{n=0}^{H-1} n^2 \\ &= (\Delta x)^3 \frac{H(H-1)(2H-1)}{6} \\ &= \frac{(\Delta x H)(H\Delta x - \Delta x)(2H\Delta x - \Delta x)}{6} \end{aligned}$$

Εύρεση του H: $H\Delta x \le b < (H+1)\Delta x$. Άρα το $H\Delta x$ είναι άπειρα κοντά στο b, το $H\Delta x - \Delta x$ είναι ξανά άπειρα κοντά στο b και τέλος το $2H\Delta x - \Delta x$ είναι άπειρα κοντά στο $2b$. Συνεπώς το παραπάνω κλάσμα είναι άπειρα κοντά στο γινόμενο: $2b^3/6 = b^3/3 \in \mathbb{R}$. Ο τελευταίος προσθετέος ${}^*f(a + H\Delta x) \cdot (b - (a + H\Delta x))$ στην περίπτωσή μας είναι ο

$$(H\Delta x)^2 (b - H\Delta x) \simeq b^2 \Delta x \simeq 0.$$

Συνεπώς

$$\mathrm{st}\left(\int_0^b x^2 \, dx \right) = \frac{b^3}{3} + 0 = \frac{b^3}{3}.$$

Αυτό είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα!

Ας τελειώσουμε την ομιλία μας με μια ακόμα εφαρμογή από την Θεωρία Αριθμών. Θα δείξουμε ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο, και άρα μπορούμε να βρούμε οσοδήποτε μεγάλο πρώτο φυσικό αριθμό.

Είναι γνωστό ότι για κάθε $M \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N που διαιρείται από όλους τους αριθμούς $1, 2, \ldots, M$. Οπότε από την αρχή της μεταφοράς, για κάθε υπερφυσικό αριθμό $M \in {}^*\mathbb{N}$, θα βρούμε ένα υπερφυσικό $N \in {}^*\mathbb{N}$ που διαιρείται από όλους τους αριθμούς (φυσικούς και υπερφυσικούς) $1, 2, \ldots, M$. Οπότε ο N είναι τόσο τεράστιος που διαιρείται από κάθε θετικό φυσικό αριθμό! Έστω ακόμα με Π ας συμβολίσουμε το σύνολο όλων των πρώτων (φυσικών) αριθμών και με ${}^*\Pi$ την επέκτασή του. Έστω $q \in {}^*\Pi$ είναι ένας (υπερ)πρώτος που διαιρεί τον $N + 1$. Αν υποθέσουμε ότι ο q είναι ένας κανονικός φυσικός, τότε θα διαιρούσε φυσικά το N. Αφού όμως διαιρεί και το $N + 1$, έπεται ότι διαιρεί και την διαφορά τους, το 1. Άτοπο! Άρα ο (υπερ)πρώτος q είναι πράγματι ένας γνήσιος υπερφυσικός αριθμός. Αν το σύνολο Π ήταν *πεπερασμένο*, τότε το ${}^*\Pi$ θα ταυτιζόταν με το Π. Όμως το q είναι ένα στοιχείο του ${}^*\Pi$ που δεν είναι ένας (πεπερασμένος) φυσικός αριθμός. Άτοπο! Άρα το Π είναι άπειρο, δηλαδή υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων φυσικών!

Αναφορές

[1] Goldblatt R., (1998). Lectures on the Hyperreals. New York: Springer.

[2] H Jerome Keisler, (2010). Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach (second Edition). Dover Books on Mathematics. (Υπάρχει και ελεύθερη έκδοση online. Ο Keisler έκανε προσπάθεια να περάσει η χρήση των απειροστών στην μαθηματική εκπαίδευση. Υπάρχει συνοδευτικό βιβλίο για τους διδάσκοντες με τίτλο Foundations of Infinitesimal Calculus που περιέχει σε βάθος το εισαγωγικό υλικό).

Ομιλία 3

Ο τύπος του Stirling Μια ιστορία Απειροστικού Λογισμού

Νίκος Δαφνής

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
nikdafnis@aegean.gr

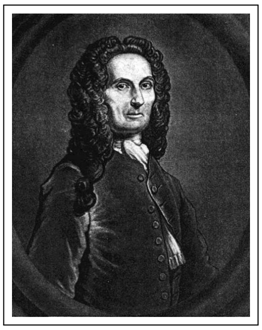
Προαπαιτούμενα: Απειροστικός Λογισμός Ι & ΙΙ

3.1 Εισαγωγή

Τη δεκαετία του 1720 ο Γάλλος μαθηματικός Abraham de Moivre (1667-1754) δούλευε πάνω στην προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κανονική κατανομή, που στην ουσία είναι μια ειδική περίπτωση του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Για το σκοπό αυτό, ο de Moivre χρειάστηκε να εκτιμήσει τους διωνυμικούς συντελεστές $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ και απέδειξε τον τύπο

$$n! \approx C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

όπου $C \approx 2,168$ ήταν μία σταθερά την οποία ο de Moivre μπορούσε να εκφράσει ακριβώς μόνο σε μορφή μιας άπειρης σειράς. Το 1729 ο Σκοτσέζος μαθηματικός James Stirling (1692-1770) σε μία επιστολή του προς τον de Moivre, προσδιορίζει ακριβώς την τιμή αυτής της σταθεράς: $C = \sqrt{2\pi}$.


Abraham de Moivre


James Stirling

Έτσι το 1733 όταν ο de Moivre δημοσιεύει τις σημειώσεις του *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $(a+b)^n$ *in Seriem expansi* συμπεριλαμβάνει τον προσεγγιστικό τύπο για το παραγοντικό με την ακριβή τιμή αυτής της σταθεράς, αναγνωρίζοντας παράλληλα την συνεισφορά του Stirling.

Σήμερα, ο τύπος αναφέρεται στη βιβλιογραφία με το όνομα του Stirling και εδώ θα τον αποδείξουμε στη μορφή

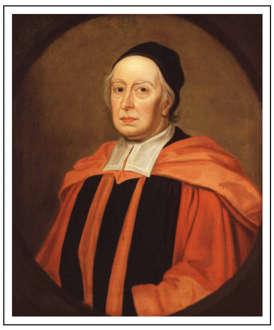
$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}} \tag{3.1}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &\log\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)} \\ &\qquad < \log(n!) < \log\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{12n} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η απόδειξη που θα δώσουμε είναι από το βιβλίο του J. V. Uspensky [3] και σχετίζεται με το γινόμενο του Wallis για το π καθώς και με τον αθροιστικό τύπο του Euler για συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

3.2 Το γινόμενο του Wallis


Jonh Wallis

Ο Jonh Wallis ήταν Άγγλος κληρικός και μαθηματικός που έζησε τον 17°αιώνα (1616-1703). Ήταν σύγχρονος του Newton και συνέβαλε στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, βασιζόμενος στο έργο των J. Kepler, B.F. Cavalieri και E. Torricelli. Σε εκείνον αποδίδεται η εισαγωγή του συμβόλου ∞ για το άπειρο και του $1/\infty$ για τα απειροστά. Ο Jonh Wallis ήταν ένας από τους κορυφαίους μαθηματικούς και διανοούμενους της πρώιμης αναγέννησης.

Από το 1643 έως το 1689 υπήρξε ο επικεφαλής κρυπτογράφος του κοινοβουλίου και αργότερα της βασιλικής αυλής. Το 1656 δημοσίευσε το βιβλίο *Arithmetica Infinitorum*, το οποίο άσκησε μεγάλη επιρροή στον Isaac Newton. Σε αυτό εμφανίζεται ο παρακάτω προσεγγιστικός τύπος για τον υπολογισμό της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου.

Πρόταση 3.2.1 (Γινόμενο του Wallis).

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1}\right) =: \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1} \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της σχέσης (3.3), θα χρησιμοποιήσουμε ένα στοιχειώδη αναδρομικό τύπο για το ολοκλήρωμα $I_n := \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$, για $n \geq 0$. Κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

και άρα

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{3.4}$$

Υπολογίζουμε τα $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = 1$ και από τον αναδρομικό τύπο (3.4) βρίσκουμε ότι για $n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}\,I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{2n-4} = \cdots \\ &= \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{2n-2k-1}{2n-2k}\,I_{2n-2(k+1)} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,I_0 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2(n-k)-1}{2(n-k)}, \qquad n \geq 1 \tag{3.5}$$

και

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\,I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\,I_{2n-3} = \cdots \\ &= \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2n+1-2k-1}{2n+1-2k}\,I_{2n+1-2(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\,\frac{2}{3}\,I_1 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$I_{2n+1} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2(n-k)}{2(n-k)+1}, \qquad n \geq 1. \tag{3.6}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι $0 \le \sin x \le 1$, για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και άρα για κάθε $n \ge 1$ έχουμε ότι $0 < I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$. Διαιρώντας λοιπόν με το I_{2n} παίρνουμε

$$\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$$

και άρα $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1$, καθώς $n \to \infty$. Όμως από τις (3.5) και (3.6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} &= \frac{2}{\pi}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2(n-k)\,2(n-k)}{\big(2(n-k)-1\big)\big(2(n-k)+1\big)}\\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\cdot\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$. □

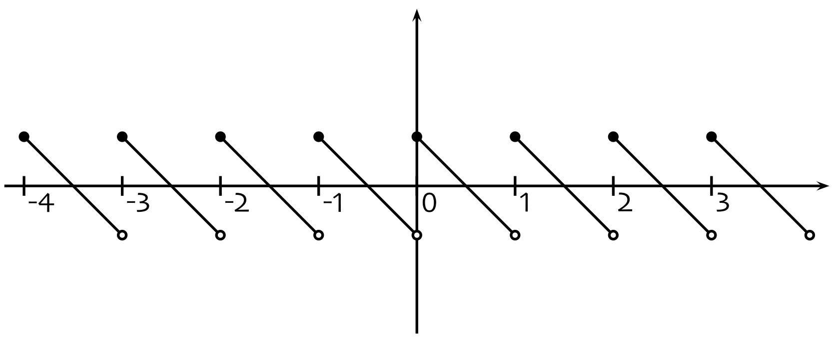
3.3 Ο αθροιστικός τύπος του Euler

Leonard Euler

Για κάθε πραγματικό αριθμό x συμβολίζουμε με $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$ το ακέραιο μέρος του και άρα ο αριθμός $x - [x] \in [0, 1)$ είναι το κλασματικό του μέρος. Ορίζουμε την συνάρτηση $\rho : \mathbb{R} \to [-1/2, 1/2]$ με τύπο 1/2 μείον το κλασματικό μέρος του x, δηλαδή

$$\rho(x) = [x] - x + \frac{1}{2}.$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι, η ρ είναι περιοδική με περίοδο 1 και ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ με $\rho'(x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



Πρόταση 3.3.1 (Τύπος του Euler). *Για κάθε συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\sum_{n>a}^{n\le b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(x)f'(x)\,dx. \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Έστω κ ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από a και l ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από β. Άρα έχουμε ότι

$$\sum_{n>a}^{n\le b} f(n) = f(\kappa) + f(\kappa+1) + \cdots + f(l-1) + f(l).$$

Παρατηρήστε ότι $\rho'(x) = -1$ για κάθε $x \in (a, b] \setminus \{k, k+1, \ldots, l-1, l\}$. Ουσιαστικά είναι η ασυνέχεια της $\rho(x)$ που δίνει το παραπάνω αποτέλεσμα, αφού αν είχαμε ότι $\rho'(x) = -1$ για κάθε $x \in (a, b]$, τότε μετά από μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες θα παίρναμε ότι το δεξιό μέλος της σχέσης (3.7) θα ήταν ίσο με 0.

Για την απόδειξη του τύπου, σπάμε το τελευταίο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην (3.7)

$$\int_a^b \rho(x)f'(x)\,dx =$$
$$\int_a^\kappa \rho(x)f'(x)\,dx + \sum_{j=\kappa}^{l-1}\int_j^{j+1} \rho(x)f'(x)\,dx + \int_l^b \rho(x)f'(x)\,dx \tag{3.8}$$

και υπολογίζουμε ξεχωριστά το κάθε κομμάτι. Έτσι για κάθε $j = k, \ldots, l-1$, είναι

$$\begin{aligned}\int_j^{j+1} \rho(x)f'(x)\,dx &= \Big[\rho(x)f(x)\Big]_{x=j}^{j+1} - \int_j^{j+1} \rho'(x)f(x)\,dx \\ &= \Big[\Big(j - x + \tfrac{1}{2}\Big)f(x)\Big]_{x=j}^{j+1} + \int_j^{j+1} f(x)\,dx \\ &= -\frac{f(j) + f(j+1)}{2} + \int_j^{j+1} f(x)\,dx\end{aligned}$$

και άρα

$$\sum_{j=\kappa}^{l-1}\int_j^{j+1} \rho(x)f'(x)\,dx = -\frac{f(\kappa) + f(l)}{2} - \sum_{n=\kappa+1}^{l-1} f(n) + \int_\kappa^l f(x)\,dx. \tag{3.9}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\int_a^\kappa \rho(x)f'(x)\,dx &= \Big[\big(\kappa - 1 - x + \tfrac{1}{2}\big)f(x)\Big]_{x=a}^{\kappa} + \int_a^\kappa f(x)\,dx \\ &= -\frac{f(\kappa)}{2} - \rho(a)f(a) + \int_a^\kappa f(x)\,dx\end{aligned} \tag{3.10}$$

και

$$
\begin{aligned}
\int_l^b \rho(x) f'(x)\,dx &= \Big[\big(l - x + \tfrac{1}{2}\big) f(x)\Big]_{x=l}^{b} + \int_l^b f(x)\,dx \\
&= \rho(b) f(b) - \frac{f(l)}{2} + \int_l^b f(x)\,dx. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Το αποτέλεσμα τώρα είναι άμεσο από την σχέση (3.8) σε συνδυασμό με τις (3.9), (3.10) και (3.11). □

3.4 Απόδειξη του τύπου του Stirling

Χρησιμοποιούμε τον αθροιστικό τύπο του Euler για την λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log x$ και $a = \frac{1}{2}$, $b = n \in \mathbb{N}$. Έτσι έχουμε ότι

- $\displaystyle\sum_{j>\frac{1}{2}}^{j\le n} \log j = \sum_{j=1}^{n} \log j = \log n!$
- $\displaystyle\int_{1/2}^{n} \log x\,dx = n\log n - n + \frac{1}{2}\big(1 + \log 2\big)$
- $\displaystyle\rho(n)\log n = \frac{1}{2}\log n$
- $\rho\big(\frac{1}{2}\big)\log\big(\frac{1}{2}\big) = 0$
- $\displaystyle\int_{1/2}^{n} \frac{\rho(x)}{x}\,dx = \int_{1/2}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx - \int_{n}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx$

Επομένως, ο αθροιστικός τύπος του Euler παίρνει την μορφή

$$
\log n! = C + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \int_n^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx, \qquad (3.12)
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\big(1 + \log 2\big) - \int_{1/2}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\big(1 + \log 2\big) - \int_{1/2}^{1} \frac{\rho(x)}{x}\,dx - \int_{1}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\big(1 + \log 2\big) + \frac{1}{2}\big(1 - \log 2\big) - \int_{1}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx
\end{aligned}
$$

και άρα

$$
C = 1 - \int_1^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\,dx. \qquad (3.13)
$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα

$$J_n = \int_n^\infty \frac{\rho(x)}{x}\,dx = \sum_{k=n}^\infty \int_k^{k+1} \frac{\rho(x)}{x}\,dx$$

υπάρχουν για κάθε $n \geq 1$ και θα τα εκτιμήσουμε. Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάνουμε αρχικά την αλλαγή μεταβλητής $x = u + k$ και από την περιοδικότητα της συνάρτησης $\rho(x)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} \frac{\rho(x)}{x}\,dx &= \int_0^1 \frac{\rho(u+k)}{u+k}\,du = \int_0^1 \frac{\rho(u)}{u+k}\,du = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-u}{u+k}\,du \\
&= \int_0^{1/2} \frac{\frac{1}{2}-u}{u+k}\,du + \int_{1/2}^1 \frac{\frac{1}{2}-u}{u+k}\,du \\
&= \int_0^{1/2} \frac{\frac{1}{2}-u}{u+k}\,du - \int_0^{1/2} \frac{\frac{1}{2}-1+t}{k+1-t}\,dt \quad \big(t = 1-u\big) \\
&= \int_0^{1/2} \left(\frac{\frac{1}{2}-u}{u+k} - \frac{\frac{1}{2}-u}{k+1-u} \right) du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{(1-2u)^2}{(k+u)(k+1-u)}\,du.
\end{aligned}$$

Επομένως, εναλλάσοντας την σειρά ολοκλήρωση και άθροισης (Θεώρημα Beppo-Levi) πάρουμε ότι

$$J_n = \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{(1-2x)^2}{(k+x)(k+1-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} (1-2x)^2 F_n(x)\,dx$$

όπου

$$F_n(x) = \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{(k+x)(k+1-x)}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Για να εκτιμήσουμε τις $F_n(x)$ παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $g_k(x) = (k+x)(k+1-x) = k(k+1) + x - x^2$, για $k \geq n$ που βρίσκονται στον παρονομαστή, είναι όλες γνησίως αύξουσες στο $(0, 1/2)$ και άρα $g_k(0) < g_k(x) < g_k(1/2)$, για κάθε $0 < x < 1/2$, δηλαδή

$$k(k+1) < (k+x)(k+1-x) < \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right).$$

Οπότε,

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)} < F_n(x) < \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n},$$

όπου οι ισότητες προκύπτουν αμεσα αν γράψουμε τις τηλεσκοπικές σειρές ως

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\left(k+\frac{3}{2}\right)} \right) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}.$$

Άρα

$$\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2n+1} \int_0^{1/2} (1-2x)^2\, dx < J_n < \frac{1}{2n} \int_0^{1/2} (1-2x)^2\, dx = \frac{1}{12n}. \tag{3.14}$$

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι

$$C + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$
$$< \log n! < C + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{12n} \tag{3.15}$$

ή ισοδύναμα ότι

$$e^C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)}} < n! < e^C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}} \tag{3.16}$$

όπου λόγω της (3.14) για $n = 1$, έχουμε ότι

$$C = 1 - J_1 \in \left(\frac{11}{12}, \frac{17}{18}\right).$$

Ο ακριβής υπολογισμός τις σταθεράς C, σχετίζεται με το γινόμενο του Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1} \right)$$

Γράφοντας

$$\frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1} = \frac{\left(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\right)^2}{\left(1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)\right)^2} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

και άρα

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}. \tag{3.17}$$

Όμως,

- $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = 2^n n!$
- $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

και έτσι η (3.17) γίνεται

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\big(n!\big)^2}{\big(2n\big)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$$

και παίρνοντας λογαρίθμους καταλήγουμε στον τύπο

$$\log\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\left(2n\log 2 + 2\log n! - \log(2n)! - \frac{1}{2}\log\left(n+\frac{1}{2}\right)\right). \tag{3.18}$$

Όμως από τον τύπο (3.15) για το $\log n!$ παίρνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(C - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{8\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\leq \log\sqrt{\pi} \leq$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(C - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{n}{n+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{8n}\right)$$

που σημαίνει ότι

$$\log\sqrt{\pi} = C - \frac{1}{2}\log 2.$$

Δηλαδή,

$$C = \log\sqrt{2\pi} \tag{3.19}$$

και άρα από την (3.16) παίρνουμε τον τύπο προσέγγισης του Stirling

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12\left(n+\frac{1}{2}\right)}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

3.5 Απλός Τυχαίος περίπατος

Ο τύπος προσέγγισης του Stirling στη μορφή (3.1) που αποδείξαμε και το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, μας δίνουν ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

που το συμβολίζουμε ως

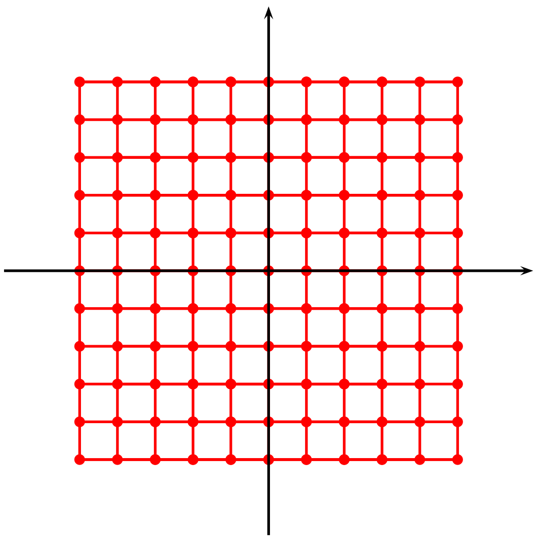
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{3.20}$$

Κλείνουμε αυτό το άρθρο με μια εφαρμογή του τύπου του Stirling στις πιθανότητες, στην οποία χρησιμοποιείται καίρια η τάξη μεγέθους που δίνει ο τύπος (3.20) για το παραγοντικό.

Αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα $2n$ φορές, $n \in \mathbb{N}$ και συμβολίσουμε με p_n την πιθανότητα να έρθουν ακριβώς n κορώνες, τότε, από την (3.20) θα έχουμε ότι

$$p_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \tag{3.21}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε έναν κανονικό τυχαίο περίπατο στο d-διάστατο lattice $\mathbb{Z}^d$, για διαστάσεις $d \geq 1$ που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή, σε κάθε βήμα έχει την ίδια πιθανότητα $p = 1/2d$ να πάει από το σημείο που βρίσκεται σε καθένα από τα $2d$ όμορα (όχι τα διαγώνια) σημεία.



Το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει είναι να προσδιορίσουμε την πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος να επιστρέφει απείρως συχνά εκεί από όπου ξεκίνησε, δηλαδή στην αρχή των αξόνων. Στην ουσία του προβλήματος βρίσκεται μία φυσική αρχή την οποία ανακάλυψε ο Georg Pólya. Η λύση του προβλήματος είναι το διάσημο Θεώρημα του Pólya για τον τυχαίο περίπατο (Pólya's random walk theorem) [2]

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5.1 (Pólya). *Αν q_d είναι η πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}^d$ να επιστρέφει απείρως συχνά πίσω στην αρχή, τότε*

$$q_d = \begin{cases} 1 & \text{αν } d = 1 \text{ ή } d = 2 \\ 0 & \text{αν } d \geq 3 \end{cases}. \tag{3.22}$$

Εμείς θα δούμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Pólya στη μία διάσταση ($d = 1$), δηλαδή ότι $q_1 = 1$ ενώ για τις υπόλοιπες περιπτώσεις παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [1, Παράδειμα 8.6].

Στη μία διάσταση ο απλός τυχαίος περίπατος σε κάθε βήμα πηγαίνει είτε αριστερά είτε δεξιά με ίδια πιθανότητα 1/2. Επομένως, για να επιστρέψει πίσω στην αρχή, θα πρέπει αναγκαστικά να έχει κάνει ζυγό αριθμό βημάτων και μάλιστα, όσα βήματα θα έχει κάνει προς τα αριστερά, τόσα θα πρέπει να έχει κάνει και προς τα δεξιά.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν A_n, $n \in \mathbb{N}$, να είναι το ενδεχόμενο ο τυχαίος περίπατος να επιστρέφει στην αρχή μετά από $2n$ βήματα. Τότε η πιθανότητα του A_n είναι ακριβώς p_n από την σχεση (3.21), αφού μπορούμε να φανταστούμε ότι σε κάθε βήμα ο τυχαίος περίπατος ρίχνει ένα αμερόληπτο νόμισμα προκειμένου να αποφασίσει αν θα πάει αριστερά ή δεξιά. Έτσι λοιπόν από την (3.21) παίρνουμε ότι

$$P(A_n) = p_n \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \tag{3.23}$$

όπου $c > o$ είναι μια απόλυτη σταθερά που δεν εξαρτάται από το n.

Το q_1 που ζητάμε, είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ο τυχαίος περίπατος να επιστρέφει απείρως συχνά στην αρχή, Θέλουμε δηλαδή την πιθανότητα του ενδεχομένου για κάθε $k \in \mathbb{N}$ όπου ο τυχαίος περίπατος μπορεί να βρίσκεται στην αρχή μετά από $2k$ βήματα, να υπάρχει ένα $n \geq k$ ώστε να επιστρέφει πάλι πίσω μετά από $2(n-k)$ βήματα (και άρα συνολικά μετά από $2n$ βήματα). Επομένως,

$$q_1 = P\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \tag{3.24}$$

Όμως,

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right). \tag{3.25}$$

Όμως, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, λόγω της ανεξαρτησίας των A_n^c, έχουμε ότι

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) = \prod_{n=k}^{\infty} P\left(A_n^c\right) = \prod_{n=k}^{\infty}\left(1 - P(A_n)\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n)\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την στοιχειώδη ανισότητα $1 - x \leq e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, από την εκτίμηση (3.23) για την πιθανότητα $P(A_n)$, μέσω του τύπου του Stirling, παίρνουμε ότι

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \leq \exp\left(-c\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0,$$

αφού η σειρά $\sum_{n=k}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ αποκλίνει για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έτσι τελικά, από τις (3.24) και (3.25) έχουμε ότι $q_1 = 1$ και άρα το Θεώρημα του Pólya στη μία διάσταση έχει αποδειχθεί.

Η φυσική αυτή αρχή που ανακάλυψε ο Pólya έχει ποικίλες συνέπειες ακόμα και στην καθημερινή μας ζωή. Μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα από αυτές αναφέρεται ως το «πρόβλημα του μεθυσμένου ναύτη»:

Ας υποθέσουμε ότι ένας μεθυσμένος ναύτης βγαίνει από ένα (γωνιακό) μπαρ της Νέας Υόρκης (ή μιας οποιασδήποτε άλλης καλά ρυμοτομημένης μεγαλούπολης). Θα είναι τότε αρκετά ασφαλές να θεωρήσουμε ότι ο ναύτης θα εκτελέσει ένα 2-διάστατο απλό τυχαίο περίπατο στους δρόμους της πόλης. Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα του Pólya, είναι καταδικασμένος να επιστρέφει επ' άπειρον στο ίδιο μπαρ (αν φυσικά στο ενδιάμεσο δεν μπει σε κάποιο άλλο).

Αναφορές

[1] Patrick Billingsley. *Probability and Measure*, 3d edition, 1995, John Wiley & Sons, Inc.

[2] Georg Pólya. *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz*, Mathematische Annalen 84 (1921), 149–160.

[3] J.V. Uspensky. *Introduction to Mathematical Probability*. McGraw-Hill Book Company, Inc, 1937.

Ομιλία 4

Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer

Κωνσταντίνος Τσαπρούνης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
ktsap@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων, Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, χώροι με νόρμα

Ο Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), γνωστός στους οικείους και ως «Bertus», ήταν Ολλανδός μαθηματικός και φιλόσοφος. Εργάστηκε, ανάμεσα σε άλλα, στον τομέα της τοπολογίας, παίζοντας καθοριστικό ρόλο στην ανάδυση του κλάδου της αλγεβρικής τοπολογίας, ενώ υπήρξε πρωτεργάτης του ρεύματος του ιντουισιονισμού στη φιλοσοφία των μαθηματικών.

Ένα εκ των πιο δημοφιλών μαθηματικών αποτελεσμάτων του είναι το λεγόμενο Θεώρημα Σταθερού Σημείου, που φέρει πλέον το όνομά του, το οποίο και θα παρουσιάσουμε συνοπτικά.

4.1 Εισαγωγικά

Τα λεγόμενα θεωρήματα σταθερού σημείου αποτελούν μια κατηγορία θεωρημάτων τα οποία εμφανίζονται σε διάφορα πεδία των μαθηματικών και είναι εξαιρετικά χρήσιμα εργαλεία. Το γενικό πλαίσιό τους είναι η μελέτη των συνθηκών υπό τις οποίες μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο A, έχει σταθερό σημείο, δηλαδή, ένα σημείο (στοιχείο) $x \in A$ ώστε $f(x) = x$. Από το συνδυασμό της δομής του συνόλου A (για παράδειγμα, τοπολογική, αλγεβρική) με τις ιδιότητες που ικανοποιεί η συνάρτηση f (για παράδειγμα, συνέχεια, μονοτονία) προκύπτουν διάφορα θεωρήματα σταθερού σημείου, όπως, για παράδειγμα, των Knaster-Tarski, του Banach, των Bourbaki-Witt, του Schauder και άλλα.

Ενδεικτικά, θα δώσουμε τις διατυπώσεις τριών εξ αυτών των θεωρημάτων (αν και όχι πάντα στην πλήρη γενικότητά τους).

Θεωρημα 4.1.1 (Knaster-Tarski). *Έστω σύνολο A και έστω συνάρτηση f στο δυναμοσύνολο του A, δηλαδή της μορφής $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$. Αν η f είναι $\subseteq$-αύξουσα (δηλαδή, για κάθε $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, αν $X \subseteq Y$ τότε και $f(X) \subseteq f(Y)$), τότε η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $X \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $f(X) = X$.*

Το προηγούμενο θεώρημα, που στη γενική μορφή του ισχύει για μονοτονικές συναρτήσεις σε πλήρη δικτυωτά,[1] βρίσκει διάφορες εφαρμογές, αναμέσα στις οποίες και κάποιες στη θεωρητική πληροφορική.

Προς την επόμενη διατύπωση, υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συστολή αν υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Θεωρημα 4.1.2 (Banach). *Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συστολή, τότε η f έχει (μοναδικό) σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει (μοναδικό) $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = x$.*

Είναι αξιοσημείωτο ότι η εύρεση του (μοναδικού) σταθερού σημείου που εγγυάται το προηγούμενο θεώρημα είναι εντελώς κατασκευαστική, μέσω ενός αναδρομικού ορισμού: Ξεκινάμε από οποιοδήποτε στοιχείο $x_0 \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε, αναδρομικά, την ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε, για κάθε $n \geq 1$, να έχουμε $x_n = f(x_{n-1})$. Τότε, δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι συστολή, αποδεικνύεται ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και, μάλιστα, το όριό της είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο. Δηλαδή, αν $x = \lim x_n$, τότε έχουμε ότι $f(x) = x$.

Το θεώρημα του Banach βρίσκει ενδιαφέρουσα εφαρμογή στην απόδειξη του θεωρήματος Picard-Lindelöf, σχετικά με την ύπαρξη λύσεων διαφορικών εξισώσεων (δείτε και το σχετικό άρθρο «Αναδρομική Διαδικασία Picard», από τον Κ. Γκίκα, σε αυτό το τεύχος).

Τέλος, δίνουμε και το θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder, το οποίο αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος του Brouwer, όπως θα δούμε παρακάτω.

Θεωρημα 4.1.3 (Schauder). *Έστω X χώρος Banach και έστω $A \subseteq X$ μη κενό,*

[1] Για τους σχετικούς ορισμούς, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του T. Forster «*Logic, Induction and Sets*», Cambridge University Press (2003).

κυρτό και συμπαγές. Αν $f : A \longrightarrow A$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = x$.

4.2 Το θεώρημα του Brouwer

Πριν δώσουμε τη διατύπωση του θεωρήματος, υπενθυμίζουμε ότι, στον οικείο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ (όπου $n \geq 1$), κλειστή μπάλα λέγεται ένα σύνολο της μορφής:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\right\},$$

όπου το $a \in \mathbb{R}^n$ είναι το κέντρο της μπάλας και το $r > 0$ είναι η ακτίνα της μπάλας. Διαισθητικά, αυτό είναι το σύνολο όλων των σημείων του χώρου $\mathbb{R}^n$ τα οποία απέχουν το πολύ απόσταση r από το κεντρικό σημείο a.[2] Δεδομένων των a και r, η αντίστοιχη κλειστή μπάλα συνήθως συμβολίζεται με $B(a, r)$.

Το θεώρημα του Brouwer λέει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση από κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό της έχει σταθερό σημείο. Πιο αναλυτικά:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.1 (Brouwer). *Έστω B κλειστή μπάλα του χώρου $\mathbb{R}^n$, όπου $n \geq 1$. Αν $f : B \longrightarrow B$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε η f έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in B$ ώστε $f(x) = x$.*

Από την παραπάνω διατύπωση, γίνεται ήδη εμφανές το γιατί το θεώρημα του Schauder αποτελεί γενίκευση αυτού του Brouwer, μιας που, για παράδειγμα, το θεώρημα του Schauder ισχύει σε οποιοδήποτε χώρο Banach (ακόμα και άπειρης διάστασης). Το θεώρημα του Brouwer έχει ποικίλες χρήσεις και εφαρμογές στα μαθηματικά, ενίοτε αξιοσημείωτες, όπως η χρήση του σε αποδείξεις ύπαρξης ισορροπίας κατά Nash στη Θεωρία Παιγνίων.

Η αρχική απόδειξη του θεωρήματος έγινε, χονδρικά την ίδια περίοδο (γύρω στα 1910), από τους Brouwer και Hadamard ανεξάρτητα. Έκτοτε, έχουν προκύψει διάφορες εναλλακτικές αποδείξεις, κάποιες εκ των οποίων αναδεικνύουν ενδιαφέρουσες συνδέσεις με έννοιες και εργαλεία από άλλα μαθηματικά πεδία. Σε κάθε περίπτωση, η απόδειξη της γενικής περίπτωσης του θεωρήματος ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτού του κειμένου.

Εδώ, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη της (κάπως ταπεινής) ειδικής περίπτωσης $n = 1$, η οποία έχει άμεση σύνδεση με το γνωστό Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής, καθώς και ξεκάθαρη γεωμετρική εποπτεία. Παρατηρήστε ότι για $n = 1$, οι κλειστές μπάλες του $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς τα κλειστά διαστήματα της πραγματι-

[2] Εδώ, η έννοια της απόστασης αναφέρεται στην οικεία Ευκλείδεια απόσταση του χώρου $\mathbb{R}^n$, η οποία επάγεται από την Ευκλείδεια νόρμα. Πιο συγκεκριμένα, αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα σημείο του χώρου, τότε $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

κής ευθείας, δηλαδή τα διαστήματα της μορφής $[a, b]$, όπου $a < b$. Θα δείξουμε λοιπόν το εξής:

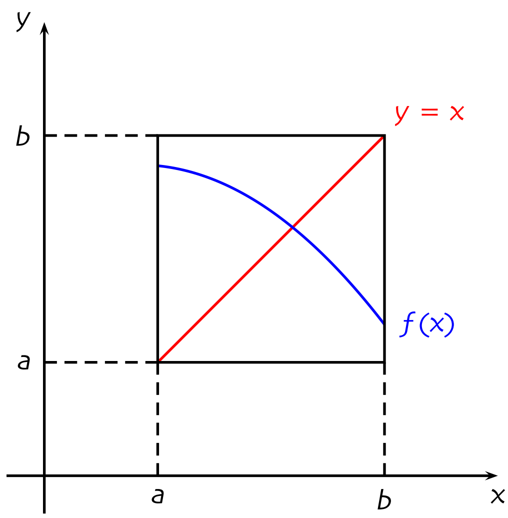
ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2.2. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) = x$.*

Απόδειξη. Προφανώς, αν είτε $f(a) = a$ ή $f(b) = b$, τότε έχουμε άμεσα σταθερό σημείο για την f, που είναι το ζητούμενο. Στα επόμενα, υποθέτουμε ότι $f(a) > a$ και $f(b) < b$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής. Για κάθε $x \in [a, b]$, θέτουμε $g(x) = f(x) - x$. Δεδομένης της συνέχειας της f, έχουμε ότι η συνάρτηση g είναι και αυτή συνεχής. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $g(a) > 0$ και $g(b) < 0$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, έπεται ότι υπάρχει $x \in (a, b)$ ώστε $g(x) = 0$ ή, ισοδύναμα, ώστε $f(x) = x$.

Σε κάθε περίπτωση, έχουμε ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) = x$. □

Στο παρακάτω σχήμα δίνουμε ένα παράδειγμα στο οποίο παρουσιάζεται η διαισθητική ιδέα του θεωρήματος. Πιο συγκεκριμένα, όπως εγγυάται το θεώρημα, το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης της μορφής $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ τέμνει αναγκαστικά την ευθεία $y = x$ στο εν λόγω διάστημα $[a, b]$. Φυσικά, η ιδέα αυτή είναι αντίστοιχη με εκείνη που διαισθητικά εξηγεί το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.



4.3 Ένα προσωπικό σχόλιο—στον ενικό

Αντί επιλόγου, θα ήθελα να κάνω ιδιαίτερη μνεία στον Αριστείδη Αραγεώργη, ο οποίος υπήρξε Επίκουρος Καθηγητής στον Τομέα Ανθρωπιστικών, Κοινωνικών Επιστημών και Δικαίου (ΑΚΕΔ) της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, μέχρι τον αδόκητο θάνατό του, το καλοκαίρι του 2018.

Ο Άρις, εκτός από εξαιρετικός ακαδημαϊκός στον τομέα της φιλοσοφίας των μαθηματικών και των επιστημών, υπήρξε φωτισμένος δάσκαλος, απολαυστικός συνομιλητής, πηγή έμπνευσης, φίλος και υποστηρικτής.

Ανάμεσα σε άλλα, ο Άρις διατηρούσε μια στήλη στο φιλοσοφικό περιοδικό Cogito με τον τίτλο «Παραδοξολογίες & Παιχνίδια». Αυτά τα κείμενα του Άρι συλλέχθηκαν και δημοσιεύθηκαν, εκ νέου, συγκεντρωμένα σε έναν τόμο για να τιμήσουν τη μνήμη του, από τις εκδόσεις Νεφέλη το 2019. Ένα εξ αυτών, με τίτλο «Δολοφόνοι χωρίς πληροφορίες, συναρτήσεις με σταθερά σημεία», περιγράφει μια (μυθιστορηματική) φιλοσοφική διαμάχη μεταξύ του Bentham και του Kant, στην οποία εμπλέκονται, τελικά, ο Brouwer και το θεώρημά του. Αυτό το ανάγνωσμα υπήρξε η έμπνευση για να παρουσιάσω το εν λόγω θεώρημα στο Προπτυχιακό Σεμινάριο Ανάλυσης και Γεωμετρίας.

Κλείνοντας, θα ήθελα να προτρέψω τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη να ανατρέξει στον τόμο με τα κείμενα του Άρι, καθώς και να αφιερώσω την ομιλία μου αυτή και το παρόν κείμενο στη μνήμη του.

Ομιλία 5

Η εφαπτόμενη δέσμη

Χαράλαμπος Τσιχλιάς

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
tsichlias@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

5.1 Βασικές έννοιες τοπολογίας και διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων.

Τοπολογία σε ένα σύνολο M είναι μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του M ώστε:

- Το σύνολο M και το κενό σύνολο $\emptyset$ ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{T}$.
- Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.
- Η τομή πεπερασμένου πλήθους συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Τα σύνολα της $\mathcal{T}$ θα τα λέμε ανοιχτά σύνολα του M. Ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μια τοπολογία λέγεται τοπολογικός χώρος.

Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται συνεκτικός αν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του.

Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ που αποτελείται από σύνολα της $\mathcal{T}$ λέγεται βάση του τοπολογικού χώρου M, αν κάθε σύνολο $A \in \mathcal{T}$ μπορεί να γραφεί ως ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$.

Λημμα 5.1.1. *Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ υποσυνόλων ενός συνόλου S είναι βάση για μια τοπολογία $\mathcal{T}$ στο S αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:*

(i) $S = \bigcup_{X \in \mathcal{B}} X$ *και*

(ii) *για κάθε* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *και για κάθε* $P \in B_1 \cap B_2$ *υπάρχει* $B_P \in \mathcal{B}$ *ώστε* $P \in B_P \subseteq B_1 \cap B_2$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας τοπολογίας $\mathcal{T}$ του S. Το σύνολο S ανήκει στην τοπολογία $\mathcal{T}$ οπότε το S μπορεί να γραφεί ως ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$ έτσι έχουμε $S = \cup_{i \in I} B_i \subseteq \cup_{X \in \mathcal{B}} X \subseteq S$ (αφού $X \subseteq S$) άρα $S = \cup_{X \in \mathcal{B}} X$.

Θεωρούμε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και $P \in B_1 \cap B_2$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ έχουμε ότι τα B_1, B_2 είναι ανοιχτά και άρα και το $B_1 \cap B_2$ είναι ανοιχτό οπότε (αφού $\mathcal{B}$ βάση) θα είναι $B_1 \cap B_2 = \cup_{j \in J} A_j$ με $A_j \in \mathcal{B}$ οπότε για κάποιο $j \in J$ είναι $P \in A_j (\subseteq B_1 \cap B_2)$ αυτό το A_j είναι το ζητούμενο B_P.

($\Leftarrow$) Έστω ότι ισχύουν οι (i) και (ii). Θεωρούμε $\mathcal{T}$ την οικογένεια που περιέχει όλες τις ενώσεις οικογενειών συνόλων της $\mathcal{B}$ τότε

- Τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ είναι υποσύνολα του S, το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι η ένωση της κενής οικογένειας άρα $\emptyset \in \mathcal{T}$, επίσης από (i) έχουμε ότι $S \in \mathcal{T}$.

- Η ένωση συνόλων της $\mathcal{T}$ είναι ένωση συνόλων της $\mathcal{B}$ οπότε ανήκει στην $\mathcal{T}$.

- Έστω ότι $U, V \in \mathcal{T}$ τότε $U = \cup_{i \in I} B_i$ και $V = \cup_{j \in J} A_j$ με $B_i, A_j \in \mathcal{B}$ οπότε είναι
$$U \cap V = \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap A_j).$$
Οπότε για κάθε $P \in U \cap V$ υπάρχουν $\mu_P, \nu_P \in J$ ώστε $P \in B_{\mu_P} \cap A_{\nu_P}$ και άρα από (ii) υπάρχει $B_P \in \mathcal{B}$ ώστε $P \in B_P \subseteq B_{\mu_P} \cap A_{\nu_P}$ και συνεπώς
$$\begin{aligned} U \cap V &= \bigcup_{P \in U \cap V} \{P\} \subseteq \bigcup_{P \in U \cap V} B_P \subseteq \bigcup_{P \in U \cap V} (B_{\mu_P} \cap A_{\nu_P}) \\ &\subseteq \bigcup_{i, j \in J} (B_i \cap A_j) = U \cap V \end{aligned}$$
οπότε είναι $U \cap V = \cup_{P \in U \cap V} B_P \in \mathcal{T}$. Άρα η τομή δύο συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$ και κατά συνέπεια η περασμένη τομή συνόλων της $\mathcal{T}$ ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Έτσι προκύπτει ότι η $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο S και η $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$. □

- Μια βάση $\mathcal{B}$ ενός τοπολογικού χώρου M λέγεται αριθμήσιμη βάση όταν έχει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.

- Με τον όρο περιοχή ενός σημείου $P \in M$ εννοούμε ένα ανοιχτό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου M το οποίο περιέχει το P.

- Ένας τοπολογικός χώρος M λέγεται Hausdorff αν για κάθε ζεύγος διακεκριμένων σημείων του M υπάρχουν περιοχές των σημείων ξένες μεταξύ τους.

- Μια απεικόνιση $f : M \to N$ μεταξύ των τοπολογικών χώρων M και N λέγεται συνεχής όταν για κάθε ανοιχτό V του N το $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό του M.

- Μια απεικόνιση $f : M \to N$ μεταξύ των τοπολογικών χώρων M και N λέγεται ομοιομορφισμός όταν είναι «1-1», «επί», συνεχής και η αντίστροφη $f^{-1} : N \to M$ συνεχής.

- Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη συνήθη τοπολογία η οποία προκύπτει ως εξής, ένα μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό όταν για κάθε $Q \in A$ υπάρχει μπάλα $B_r(Q) = \{P \in \mathbb{R}^n : \|P - Q\| < r\}$ με $B_r(Q) \subseteq A$.

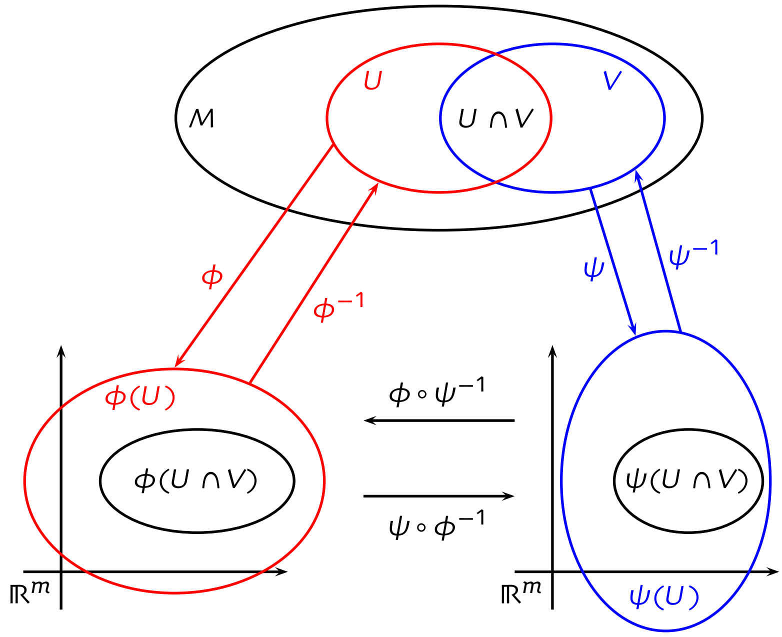
- Έστω ότι το S είναι υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου M, ονομάζουμε σχετική τοπολογία στο S από τον M την τοπολογία που περιέχει τις τομές των ανοικτών του τοπολογικού χώρου M με το S. Το σύνολο S εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία από τον M λέγεται τοπολογικός υπόχωρος του M.

- Υποθέτουμε ότι M είναι ένας Hausdorff με αριθμήσιμη βάση τοπολογικός χώρος. Αν U ανοικτό υποσύνολο του M και $\phi : U \to \phi U \subseteq \mathbb{R}^m$ ομοιομορφισμός τότε το ζεύγος (U, ϕ) λέγεται $m-$διάστατος χάρτης (ή απλά χάρτης) στον M, το σύνολο U πεδίο ορισμού του χάρτη και η ϕ απεικόνιση του χάρτη (U, ϕ) (στα U και $\phi(U)$ έχουμε θεωρήσει τις σχετικές τοπολογίες από τους M και $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα).

- Δύο χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) στον M λέγονται συμβιβαστοί όταν: $U \cap V = \emptyset$ ή $U \cap V \neq \emptyset$ και οι απεικονίσεις

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m \to \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m,$$
$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m \to \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

  είναι C^∞-διαφορίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.



Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι ο τοπολογικός χώρος M είναι επιπλέον και συνεκτικός.

Μια οικογένεια m-διάστατων χαρτών $\Phi = \{(U_a, \phi_a)\}_{a\in I}$ λέγεται m-διάστατος άτλας (ή απλά άτλας) όταν $\cup_{a\in I} U_a = M$ και οι χάρτες (U_a, ϕ_a), (U_b, ϕ_b) είναι συμβιβαστοί για κάθε a, $b \in I$. Θα λέμε ότι ένας άτλας $\Phi = \{(U_a, \phi_a)\}_{a\in I}$ και ένας χάρτης (U, ϕ) είναι συμβιβαστοί όταν ο χάρτης (U, ϕ) είναι συμβιβαστός με κάθε χάρτη του άτλαντα Φ. Αν σε ένα άτλαντα Φ επισυνάψουμε όλους τους συμβατούς με τον άτλαντα Φ χάρτες τότε προκύπτει ένας νέος άτλαντας τον οποίο ονομάζουμε m-διάστατο μέγιστο άτλα (ή απλά μέγιστο άτλα).

Ο τοπολογικός χώρος M εφοδιασμένος με έναν m-διάστατο μέγιστο άτλαντα λέγεται διαφορίσιμη πολλαπλότητα (ή απλά πολλαπλότητα) διάστασης m. Θα γράφουμε M^m για να δηλώσουμε και την διάσταση της πολλαπλότητας M, επίσης λέγοντας ότι το ζεύγος (U, ϕ) είναι χάρτης μιας πολλαπλότητας εννοούμε ότι ο (U, ϕ) ανήκει στον μέγιστο άτλαντα της πολλαπλότητας.

Παρατηρηση 5.1.2. Αν (U, ϕ) είναι χάρτης της πολλαπλότητας M, V ανοικτό και $\emptyset \neq V \subseteq U$ τότε το ζεύγος $(V, \phi|_V)$ είναι χάρτης της M ο οποίος ανήκει στον μέγιστο άτλαντα που ανήκει και ο (U, ϕ).

5.2 Παραδείγματα

Η ανοικτή υποπολλαπλότητα: Κάθε μη κενό ανοικτό (συνεκτικό) υποσύνολο U μιας πολλαπλότητας M είναι πολλαπλότητα διάστασης ίσης με τη διάσταση της M και ονομάζεται ανοικτή υποπολλαπλότητα της M.

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$: Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία είναι Hausdorff και με αριθμήσιμη βάση τοπολογίας τοπολογικός χώρος, η ταυτοτική απεικόνιση $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμός και η συλλογή $\{(\mathbb{R}^n, I)\}$ είναι άτλας. Επισυνάπτοντας στον άτλαντα $\{(\mathbb{R}^n, I)\}$ όλους τους συμβατούς χάρτες προκύπτει μέγιστος άτλας και έτσι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ γίνεται πολλαπλότητα διάστασης n.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$: Το $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία είναι Hausdorff και με αριθμήσιμη βάση τοπολογίας τοπολογικός χώρος, η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\phi(t) = t^3$ είναι ομοιομορφισμός και η συλλογή $\{(\mathbb{R}, \phi)\}$ είναι άτλας. Επισυνάπτοντας στον άτλαντα $\{(\mathbb{R}, \phi)\}$ όλους τους συμβατούς χάρτες προκύπτει μέγιστος άτλας και το $\mathbb{R}$ γίνεται πολλαπλότητα διάστασης 1.

Η δύο πολλαπλότητες που προκύπτουν από τους άτλαντες $\{(\mathbb{R}, I)\}$ και $\{(\mathbb{R}, \phi)\}$ είναι διαφορετικές διότι οι χάρτες δεν είναι συμβιβαστοί (η σύνθεση $I \circ \phi^{-1}(t) = \sqrt[3]{t}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο 0).

Η σφαίρα: Η σφαίρα $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ εφοδιασμένη με την σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^3$ είναι Hausdorff και με αριθμήσιμη βάση τοπολογίας τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε τα σύνολα:

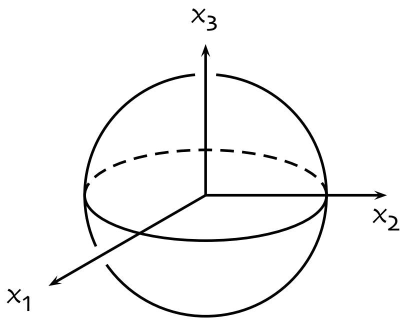
$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 > 0\},\\
U_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 < 0\},\\
U_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_2 > 0\},\\
U_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_2 < 0\},\\
U_5 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_3 > 0\},\\
U_6 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_3 < 0\},
\end{aligned}$$

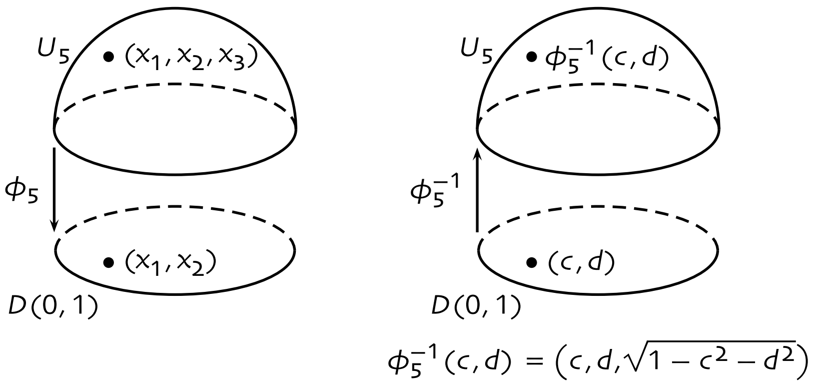
και τις απεικονίσεις:

$$\begin{aligned}
\phi_1 : U_1 \to \phi_1(U_1) &= D(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, & \phi_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, x_3),\\
\phi_2 : U_2 \to \phi_2(U_2) &= D(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, & \phi_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_2, x_3),\\
\phi_3 : U_3 \to \phi_3(U_3) &= D(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, & \phi_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_3),\\
\phi_4 : U_4 \to \phi_4(U_4) &= D(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, & \phi_4(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_3),\\
\phi_5 : U_5 \to \phi_5(U_5) &= D(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, & \phi_5(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2),\\
\phi_6 : U_6 \to \phi_6(U_6) &= D(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2, & \phi_6(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2),
\end{aligned}$$

όπου $D(0,1)$ ο ανοιχτός δίσκος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 1. Είναι:

$$\begin{aligned}
\phi_1^{-1}(c,d) &= (\sqrt{1-c^2-d^2}, c, d),\\
\phi_2^{-1}(c,d) &= (-\sqrt{1-c^2-d^2}, c, d),\\
\phi_3^{-1}(c,d) &= (c, \sqrt{1-c^2-d^2}, d),\\
\phi_4^{-1}(c,d) &= (c, -\sqrt{1-c^2-d^2}, d),\\
\phi_5^{-1}(c,d) &= (c, d, \sqrt{1-c^2-d^2}),\\
\phi_6^{-1}(c,d) &= (c, d, -\sqrt{1-c^2-d^2})
\end{aligned}$$





Τα ζεύγη (U_i, ϕ_i), $i = 1, 2, \dots, 6$ είναι 2-διάστατοι χάρτες. Οι χάρτες (U_i, ϕ_i), $i = 1, 2, \dots, 6$ είναι συμβιβαστοί χάρτες. Για παράδειγμα η σύνθεση:

$$\phi_1 \circ \phi_3{}^{-1} : \phi_3(U_1 \cap U_3) = \{(c,d) \in D(0,1) : c > 0\} \to \mathbb{R}^2,$$

με

$$(\phi_1 \circ \phi_3{}^{-1})(c,d) = \phi_1\left(c, \sqrt{1-c^2-d^2}, d\right) = \left(\sqrt{1-c^2-d^2}, d\right)$$

είναι C^∞-διαφορίσιμη απεικόνιση. (Όμοια οι υπόλοιπες συνθέσεις).

Η συλλογή $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1,2,\ldots,6}$ είναι άτλας και επισυνάπτοντας σε αυτόν όλους τους συμβατούς χάρτες προκύπτει ένας 2-διάστατος μέγιστος άτλας και έτσι η σφαίρα S γίνεται πολλαπλότητα διάστασης 2.

Λημμα 5.2.1. *Κάθε πολλαπλότητα M έχει μια αριθμήσιμη βάση τοπολογίας αποτελούμενη από πεδία ορισμού χαρτών της M.*

Απόδειξη.

Έστω ότι ο $\Phi = \{(U_a, \phi_a)\}|_{a\in A}$ είναι ο μέγιστος άτλαντας της M και $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ μια αριθμήσιμη βάση τοπολογίας της M.

Κάθε U_a θα γράφεται ως ένωση συνόλων της βάσης $\mathcal{B}$, οπότε για κάθε $P \in U_a$ υπάρχει σύνολο $B_{P,a} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$P \in B_{P,a} \subseteq U_a.$$

Η οικογένεια $\mathcal{C} = \{B_{P,a}\}_{a\in A}$ (στην οικογένεια $\mathcal{C} = \{B_{P,a}\}_{a\in A}$ για κάθε P και a έχουμε επιλέξει μόνο ένα σύνολο $B_{P,a}$) είναι αριθμήσιμη ως υποσύνολο της $\mathcal{B}$.

Τα ζεύγη $(B_{P,a}, \phi_a|_{B_{P,a}})$, $a \in A$ είναι χάρτες που ανήκουν στον μέγιστο άτλαντα Φ (σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.1.2).

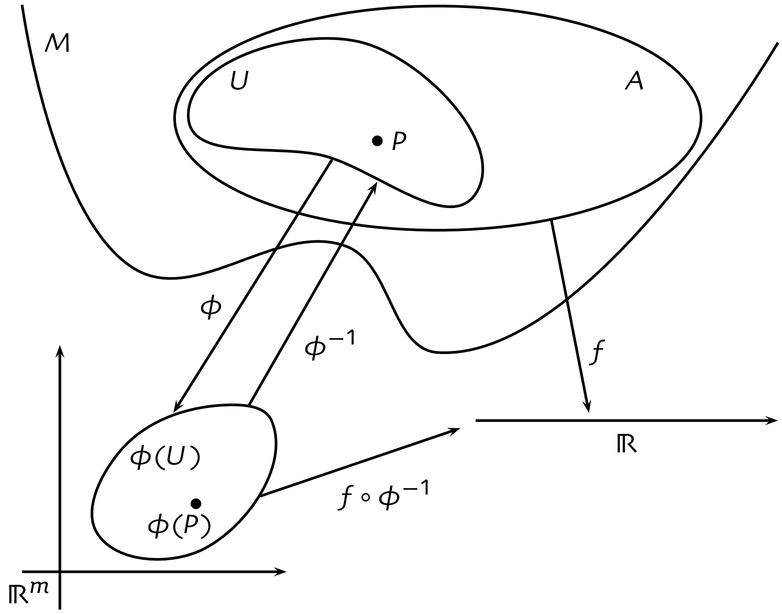
Επίσης για κάθε ανοιχτό $U \subseteq M$ και για κάθε $P \in U$ υπάρχει U_a με

$$P \in U_a \subseteq U.$$

(πράγματι, υπάρχει χάρτης $(V, \psi) \in \Phi$ με $P \in V$ οπότε παίρνουμε τον χάρτη $(U_a, \phi_a) = (V \cap U, \psi|_{V\cap U})$).

Οπότε $P \in B_{P,a} \subseteq U$ και άρα $U = \cup_{P\in U} B_{P,a}$. Άρα η $\mathcal{C}$ είναι βάση της τοπολογίας. □

Έστω ότι το A είναι ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο της πολλαπλότητας M και $f : A \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση. Η f λέγεται διαφορίσιμη στο A αν για κάθε $P \in A$ υπάρχει χάρτης (U, ϕ) της M με $p \in U \subseteq A$ και η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ είναι C^∞-διαφορίσιμη στο $\phi(U)$.



Έστω ότι το P είναι ένα σημείο της πολλαπλότητας M. Συμβολίζουμε με $C(P)$ το σύνολο των διαφορίσιμων απεικονίσεων που είναι ορισμένες σε περιοχές του σημείου P και με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο $C(P)$ ως εξής: $f \sim g$ αν υπάρχει περιοχή U του P στην οποία οι f και g να ταυτίζονται.

Συμβολίζουμε με $D(p)$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας και την κλάση της f τη συμβολίζουμε πάλι με f.

Μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στο $D(P)$ εκτελώντας αυτές τις πράξεις στους αντιπροσώπους κάθε κλάσης.

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας M στο σημείο $P \in M$ είναι μια απεικόνιση $v_P : D(P) \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

(i) $v_P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 v_P(f_1) + \lambda_2 v_P(f_2)$ (γραμμική δράση),

(ii) $v_P(f_1 f_2) = v_P(f_1) f_2(P) + f_1(P) v_P(f_2)$, (κανόνας του Leibniz)

για κάθε $f_1, f_2 \in D(P)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο P ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος της M στο P και συμβολίζεται $T_P M$. Ο εφαπτόμενος χώρος έχει κατά φυσικό τρόπο δομή πραγματικού διανυσματικού χώρου με πράξεις:

$$
\begin{aligned}
(v_P + w_P)(f) &= v_P(f) + w_P(f), \\
(\lambda v_P)(f) &= \lambda v_P(f), \quad f \in D(P), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad v_P, w_P \in T_P M.
\end{aligned}
$$

Έστω ότι ο (U, ϕ) είναι χάρτης της πολλαπλότητας M^m και

$$\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad \pi_i((x_1, \dots, x_m)) = x_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

οι κανονικές προβολές. Οι απεικονίσεις $\pi_i \circ \phi : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο U και ονομάζονται συναρτήσεις συντεταγμένων του χάρτη (U, ϕ). Χωρίς να υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα γράφουμε $x_i = \pi_i \circ \phi$.

Έστω ότι ο (U, ϕ) είναι ένας χάρτης της πολλαπλότητας M^m και $P \in U$. Ορίζουμε ως βασικά εφαπτόμενα διανύσματα του χάρτη (U, ϕ) στο P τα εφαπτόμενα διανύσματα $\partial/\partial x_i|_P, i = 1, \dots, m$ στο P από τις σχέσεις:

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P (f) = D_i(f \circ \phi^{-1}) \Big|_{\phi(P)}, \quad f \in D(P),$$

όπου D_i η συνήθης μερική παράγωγος συναρτήσεων του $\mathbb{R}^m$.

Αποδεικνύεται ότι τα βασικά εφαπτόμενα διανύσματα $\{\partial/\partial x_i\,|_P\}_{i=1,2,\dots,m}$ ορίζουν βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_P M$.

Κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $v_P \in T_P M$ αναλύεται ως

$$v_P = \sum_{i=1}^{m} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P,$$

όπου $v_i = v_P(x_i)$.

5.3 Η εφαπτόμενη δέσμη

Έστω ότι η M είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης m. Ονομάζουμε εφαπτόμενη δέσμη της πολλαπλότητας M το σύνολο $TM = \cup_{P \in M} T_P M$.

Παρατηρηση 5.3.1. Ισχύουν οι προτάσεις:

- $P \neq Q \Leftrightarrow T_P M \cap T_Q M = \emptyset$.
- αν $v_P = w_Q$ τότε $P = Q$.

Θα ονομάζουμε φυσική προβολή την απεικόνιση $\pi : TM \to M$ με $\pi(v_P) = P$ για κάθε $v_P \in T_P M$.

Έστω ότι ο (U, ϕ) είναι χάρτης της M με συντεταγμένες $x_i = \pi_i \circ \phi : U \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $TU = \cup_{P \in U} T_P M$. Σε ένα σημείο $P \in U$ μια βάση του $T_P M$ είναι τα βασικά εφαπτόμενα διανύσματα $\{\partial/\partial x_i\,|_P\}_{i=1,2,\dots,m}$ και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $v_P \in T_P M$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$v_P = \sum_{i=1}^{m} c_i(v_P) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P,$$

όπου $c_i(v_P) = v_P(x_i) \in \mathbb{R}$.

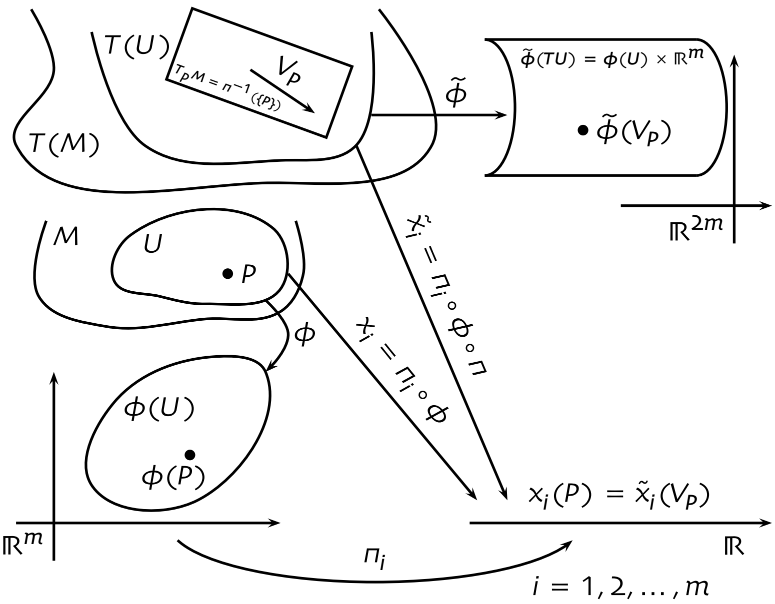
Έστω ότι $\tilde{x}_i = x_i \circ \pi = \pi_i \circ \phi \circ \pi : TU \to \mathbb{R}$. Είναι

$$(\tilde{x}_1(v_P), \tilde{x}_2(v_P), \dots, \tilde{x}_m(v_P)) = \phi(P).$$

Ορίζουμε την απεικόνιση: $\tilde{\phi} : TU \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ με:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(v_P) &= (x_1(P), x_2(P), \dots, x_m(P), c_1(v_P), c_2(v_P), \dots, c_m(v_P)) \\
&= (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m, c_1, c_2, \dots, c_m)(v_P) \\
&= (\phi(P), c(v_P))
\end{aligned}$$

για κάθε $v_P \in TU$.



Η $\tilde{\phi}$ είναι «1-1». Πράγματι: αν $\tilde{\phi}(v_P) = \tilde{\phi}(w_Q)$, δηλαδή

$$(\phi(P), c_1(v_P), c_2(v_P), \dots, c_m(v_P)) = (\phi(Q), c_1(w_Q), c_2(w_Q), \dots, c_m(w_Q)),$$

τότε $\phi(P) = \phi(Q)$ και $c_i(v_P) = c_i(w_Q)$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$. Συνεπώς $v_P = w_Q$.

Η $\tilde{\phi} : TU \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ είναι «επί». Πράγματι, αν $(Q, a_1, a_2, \dots, a_m) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ τότε

$$\tilde{\phi}(v_{\phi^{-1}(Q)}) = (Q, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

όπου

$$v_{\phi^{-1}(Q)} = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\phi^{-1}(Q)}.$$

Άρα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση $\tilde{\phi}^{-1} : \phi(U) \times \mathbb{R}^m \to TU$.

Ορίζουμε μια οικογένεια $\boldsymbol{T}$ υποσυνόλων του TU ως εξής: Το $A \subseteq TU$ ανήκει στην $\boldsymbol{T}$ όταν το $\tilde{\phi}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$ (όπου το $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$ έχει την σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^{2m}$).

Πρόταση 5.3.2. *Η $\boldsymbol{T}$ είναι τοπολογία.*

Απόδειξη:

- $\emptyset \in \boldsymbol{T}$, αφού $\tilde{\phi}(\emptyset) = \emptyset$, $TU \in \boldsymbol{T}$, αφού $\phi(TU) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$.
- Αν $A_i \in \boldsymbol{T}$, $i \in I$ τότε $\phi\big(\cup_{i\in I} A_i\big) = \cup_{i\in I}\phi(A_i)$ ανοικτό του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$, άρα $\cup_{i\in I} A_i \in \boldsymbol{T}$.
- Αν $A_i \in \boldsymbol{T}$, $i = 1, 2, \dots, n$ τότε επειδή η ϕ είναι «1-1» ισχύει
$$\phi\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \phi(A_i)$$
το οποίο είναι ανοικτό του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Άρα $\cap_{i=1}^{m} A_i \in \boldsymbol{T}$.

Οπότε η $\boldsymbol{T}$ είναι τοπολογία στο TU. □

Παρατηρηση 5.3.3. Ισχύουν οι προτάσεις:

- Η απεικόνιση $\tilde{\phi} : TU \to \phi(U) \times \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμός.
- Αν V ανοικτό υποσύνολο του U τότε το $\phi(V) \times \mathbb{R}^m$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$. Οπότε η σχετική τοπολογία στο σύνολο TV ως υποσύνολο του TU είναι ίδια με την τοπολογία που εισάγεται στο TV από την «1-1» και «επί» απεικόνιση $\tilde{\phi}\,|_{TV}: TV \to \phi(V) \times \mathbb{R}^m$.

Έστω ότι $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών υποσυνόλων του TU_a όπου U_a πεδίο ορισμού του χάρτη (U_a, ϕ_a) της M

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \big\{A : A \text{ ανοικτό του } TU_a, \text{ όπου } U_a \text{ πεδίο ορισμού χάρτη της } M\big\}.$$

Λημμα 5.3.4. *Ισχύουν οι προτάσεις*:

(i) $TM = \bigcup\limits_{A\in\boldsymbol{\mathcal{B}}} A$.

(ii) *Έστω ότι τα U, V είναι τα πεδία ορισμού δυο χαρτών της M, A ανοικτό του TU και B ανοικτό του TV. Τότε $A \cap B$ ανοικτό του $T(U \cap V)$.*

Απόδειξη: (i) Έστω ότι ο $\{(U_a, \phi_a)\}\,|_{a\in I}$ είναι ο μέγιστος άτλαντας της M. Τότε είναι
$$TM = \cup_{a\in I} TU_a \subseteq \cup_{A\in\boldsymbol{\mathcal{B}}} A \subseteq TM.$$
Άρα $TM = \cup_{A\in\boldsymbol{\mathcal{B}}} A$.

(ii) Το $T(U \cap V)$ είναι τοπολογικός υπόχωρος του TU (με την σχετική τοπολογία) άρα το $A \cap T(U \cap V)$ είναι ανοικτό του $T(U \cap V)$. Όμοια το $B \cap T(U \cap V)$ είναι ανοικτό του $T(U \cap V)$.

Είναι $A \cap B \subseteq TU \cap TV = T(U \cap V)$, οπότε

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A \cap B) \bigcap T(U \cap V) \\ &= (A \cap T(U \cap V)) \bigcap (B \cap T(U \cap V)) \end{aligned}$$

ανοικτό του $T(U \bigcap V)$ ως τομή ανοικτών. □

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}$ πληροί τις υποθέσεις του Λήμματος 5.1.1 (με $B_P = B_1 \cap B_2$). Άρα η $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας τοπολογίας στην TM.

Θα θεωρούμε την εφαπτόμενη δέσμη TM ως τοπολογικό χώρο με την τοπολογία αυτή.

Πρόταση 5.3.5. *Ο τοπολογικός χώρος TM έχει αριθμήσιμη βάση τοπολογίας.*

Απόδειξη: Από το Λήμμα 5.2.1 μπορούμε να θεωρήσουμε άτλαντα

$$\left\{(U_i, \phi_i)\right\}\Big|_{i \in I}$$

της M με I αριθμήσιμο σύνολο και η οικογένεια $\left\{U_i\right\}\big|_{i \in I}$ να είναι βάση της τοπολογίας της M.

Ο TU_i είναι ομοιομορφικός με τον $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m$ ο οποίος έχει αριθμήσιμη βάση τοπολογίας (ως τοπολογικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2m}$) άρα TU_i έχει μια αριθμήσιμη βάση τοπολογίας, έστω την $\left\{B_{i,j}\right\}\big|_{j \in J}$.

Η οικογένεια $\left\{B_{i,j}\right\}\big|_{(i,j) \in I \times J}$ είναι βάση της τοπολογίας της TM και είναι αριθμήσιμη. □

Πρόταση 5.3.6. *Ο τοπολογικός χώρος TM είναι Hausdorff.*

Απόδειξη: Έστω ότι $v_P, w_Q \in TM$ με $v_P \neq w_Q$.

1η Περίπτωση Αν $P \neq Q$ τότε αφού η M είναι τοπολογικός χώρος Hausdorff υπάρχουν ανοιχτά σύνολα A, B ώστε $P \in A$, $Q \in B$ και $A \cap B = \emptyset$. Θεωρούμε τους χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) της M με $P \in U$ και $Q \in V$. Τότε ορίζονται οι χάρτες $(U' = U \cap A, \phi|_{U'})$ και $(V' = V \cap B, \psi|_{V'})$. Για τα ανοιχτά σύνολα TU', TV' του τοπολογικού χώρου TM έχουμε $v_P \in TU'$, $w_Q \in TV'$ και $TU' \bigcap TV' = \emptyset$.

2η Περίπτωση Έστω ότι ισχύει $P = Q$. Τότε υπάρχει χάρτης (U, ϕ) με $P \in U$,

$x_i = \pi_i \circ \phi$, $v_P = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_P$, $w_Q = \sum\limits_{i=1}^{m} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_Q$ και $(v_1, v_2, \dots, v_m) \neq (w_1, w_2, \dots, w_m)$.

Ο $\mathbb{R}^m$ είναι Hausdorff οπότε υπάρχουν ανοιχτά $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ ώστε $(v_1, v_2, \dots, v_m) \in A$, $(w_1, w_2, \dots, w_m) \in B$ και $A \cap B = \emptyset$.

Έχουμε ότι $v_P \in \tilde{\phi}^{-1}(\phi(U) \times A)$, $w_Q \in \tilde{\phi}^{-1}(\phi(V) \times B)$ και τα

$$\tilde{\phi}^{-1}(\phi(U) \times A), \qquad \tilde{\phi}^{-1}(\phi(V) \times B)$$

είναι ανοικτά του TU (αφού η $\tilde{\phi}$ είναι ομοιομορφισμός) άρα είναι και ανοικτά του TM. Επίσης είναι $\tilde{\phi}^{-1}(\phi(U) \times A) \cap \tilde{\phi}^{-1}(\phi(V) \times B) = \emptyset$.

Άρα ο τοπολογικός χώρος TM είναι Hausdorff. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3.7. *Ο τοπολογικός χώρος TM γίνεται διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης $2m$.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο $\{(U_a, \phi_a)\}\ |_{a\in A}$ είναι άτλας της M. Θεωρούμε την οικογένεια $\boldsymbol{A} = \{(TU_a, \tilde{\phi}_a)\}_{a\in A}$. Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\boldsymbol{A}$ είναι άτλας στην TM.

Έχουμε ήδη δει ότι τα $\tilde{\phi}_a : TU_a \to \phi_a(U_a) \times \mathbb{R}^m$ είναι ομοιομορφισμοί, οπότε τα $(TU_a, \tilde{\phi}_a)$ είναι χάρτες.

Θα δείξουμε ότι οι χάρτες $(TU_a, \tilde{\phi}_a)$, $(TU_b, \tilde{\phi}_b)$ είναι συμβιβαστοί για κάθε $a, b \in A$.

Έστω ότι $(c, d) \in \tilde{\phi}_b(TU_a \bigcap TU_b)$ με

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \text{ και } d = (d_1, d_2, \dots, d_m).$$

Τότε είναι $\tilde{\phi}_b{}^{-1}(c, d) = v_P$ όπου: $P = \phi_b^{-1}(c)$ και $v_P = \sum_{i=1}^{m} d_i \dfrac{\partial}{\partial x_i^b}\Big|_P$ με

$$x_i^b = \pi_i \circ \phi_b \text{ και } x_i^a = \pi_i \circ \phi_a \tag{5.1}$$

Επίσης υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i^b}\Big|_P &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i^b}\Big|_P (x_j^a) \frac{\partial}{\partial x_j^a}\Big|_P \\
&= \sum_{j=1}^{m} D_i(x_j^a \circ \phi_b{}^{-1})\phi_b(P) \frac{\partial}{\partial x_j^a}\Big|_P \\
&= \sum_{j=1}^{m} D_i(\pi_j \circ \phi_a \circ \phi_b{}^{-1})(c) \frac{\partial}{\partial x_j^a}\Big|_P .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Μέσω των (5.1) και (5.2) έχουμε

$$v_P = \sum_{i=1}^{m} d_i \left(\sum_{j=1}^{m} D_i(\pi_j \circ \phi_a \circ \phi_b{}^{-1})(c) \frac{\partial}{\partial x_j^a}\Big|_P \right),$$

έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_a \circ \tilde{\phi}_b(c,d) &= \tilde{\phi}_a(\tilde{\phi}_b{}^{-1}(c,d)) = \tilde{\phi}_a(v_p)\\ &= \Big(\phi_a(\phi_b^{-1}(c)), \sum_{i=1}^{m} d_i D_i(\pi_1 \circ \phi_a \circ \phi_b^{-1})(c),\\ &\qquad \sum_{i=1}^{m} d_i D_i(\pi_2 \circ \phi_a \circ \phi_b{}^{-1})(c), \dots, \sum_{i=1}^{m} d_i D_i(\pi_m \circ \phi_a \circ \phi_b{}^{-1})(c)\Big).\end{aligned}$$

Επειδή όλες οι συνιστώσες στον παραπάνω τύπο είναι C^∞-διαφορίσιμες συναρτήσεις των μεταβλητών c, d έπεται ότι η $\tilde{\phi}_a \circ \tilde{\phi}_b$ είναι C^∞-διαφορίσιμη. Όμοια και η $\tilde{\phi}_b \circ \tilde{\phi}_a$ είναι C^∞-διαφορίσιμη. Οπότε η συλλογή

$$\mathcal{A} = \{(TU_a, \tilde{\phi}_a)\}_{a \in A}$$

είναι άτλας της TM. Επισυνάπτοντας στην $\mathcal{A}$ όλους τους συμβιβαστούς χάρτες έχουμε έναν μέγιστο άτλαντα στην TM και έτσι η TM γίνεται διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης $2m$. □

Αναφορές

[ΘΚ] Θέμης Κουφογιώργος, *Σημειώσεις διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1992.

[LT] Loring W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Second Edition, Springer, 2011.

Ομιλία 6

Αναδρομική Διαδικασία Picard

Κωνσταντίνος Γκίκας

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
kgkikas@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: Απειροστικός Λογισμός Ι, Σειρές πραγματικών αριθμών, Ολοκλήρωμα.

6.1 Εισαγωγή

Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Σε αυτό το άρθρο θα μελετήσουμε το κάτωθι πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} \phi'(t) &= f(\phi(t)) \ \text{ για } \ t > 0 \\ \phi(0) &= \phi_0, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

όπου $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα θα δείξουμε ότι το εν λόγω πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα (6.1) έχει μια συνεχής λύση $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\int_0^t \phi'(s)\, ds = \int_0^t f(\phi(s))\, ds$$

αν και μόνο αν

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_0^t f(\phi(s))\, ds. \tag{6.2}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι αν υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την (6.2) τότε αυτή η συνάρτηση είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (6.1). Άρα αρκεί να βρούμε μια λύση της (6.2) για κάθε $t > 0$.

Θα αποδείξουμε την ύπαρξη αυτής της λύσης, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία Picard. Ειδικότερα, θα θεωρήσουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ώστε

$$\phi_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \phi_1(t) = \phi_0 \quad \text{και} \quad \phi_{n+1}(t) = \phi_0 + \int_0^t f(\phi_n(s))\, ds$$

για κάθε $n \geq 2$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $\phi_n \rightrightarrows \phi$ (ομοιόμορφα) στο $[0, b]$ για κάθε $b > 0$. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση για να δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής και ικανοποιεί την (6.2) για κάθε $t > 0$. Τέλος, χρησιμοποιώντας τη Lipschitz συνέχεια της f θα δείξουμε την μοναδικότητα.

6.2 Προκαταρκτικά

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε την βασική θεωρία που χρησιμοποιούμε στην επαναληπτική μέθοδο του Picard.

Ορισμος 6.2.1. Έστω ότι η $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων με πεδίο ορισμού $[a, b]$ και $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(i) Θα λέμε ότι η ϕ_n συγκλίνει στη ϕ κατά σημείο, και θα γράφουμε $\phi_n \to \phi$, στο $[a, b]$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

(ii) Θα λέμε ότι η ϕ_n συγκλίνει στην ϕ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, και θα γράφουμε $\phi_n \rightrightarrows \phi$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} |\phi_n(t) - \phi(t)| = 0.$$

Παρατηρηση 6.2.2. Από τον ορισμό, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι από την ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται η κατά σημείο σύγκλιση. Το αντίστροφο δεν είναι αληθές εν γένει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ με τύπο $\phi_n(t) = e^{-n|t|}$ συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ στη συνάρτηση

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t = 0 \\ 0, & \text{αν } t \neq 0. \end{cases}$$

Όμως

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|e^{-n|t|}-\phi(t)\right| \geq \left|e^{-nn^{-2}}-\phi(n^{-2})\right| = e^{-n^{-1}} \to 1.$$

Πρόταση 6.2.3. *Έστω ότι η $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$ και $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $\phi_n \rightrightarrows \phi$ στο $[a,b]$, τότε η ϕ είναι συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup_{t\in[a,b]}\left|\phi_n(t)-\phi(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0.$$

Αφού ϕ_{n_0} συνεχής στο $t_0 \in [a,b]$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t-t_0| < \delta$ και $t \in [a,b]$, τότε

$$\left|\phi_{n_0}(t)-\phi_{n_0}(t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Οπότε από τις δύο τελευταίες ανισότητες και την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|\phi(t)-\phi(t_0)\right| &= \left|\phi(t)-\phi_{n_0}(t)+\phi_{n_0}(t)-\phi_{n_0}(t_0)+\phi_{n_0}(t_0)-\phi(t_0)\right| \\ &\leq \left|\phi(t)-\phi_{n_0}(t)\right| + \left|\phi_{n_0}(t)-\phi_{n_0}(t_0)\right| + \left|\phi_{n_0}(t_0)-\phi(t_0)\right| \\ &\leq 2\sup_{t\in[a,b]}\left|\phi_{n_0}(t)-\phi(t)\right| + \left|\phi_{n_0}(t_0)-\phi(t_0)\right| < \varepsilon. \qquad \square\end{aligned}$$

Πρόταση 6.2.4. *Έστω ότι η $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ώστε $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ και $\sup_{t\in[a,b]}|\Phi_n(t)| \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{k=1}^{n} \Phi_k \rightrightarrows \Phi$ στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Επειδή $\sup_{t\in[a,b]}|\Phi_n(t)| \leq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t)$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $t \in [a,b]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\Phi(t) := \sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Από τις ιδιότητες των μερικών αθροισμάτων μιας σειράς έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\Phi(t)-\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(t)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k(t)-\sum_{k=1}^{n}\phi_k(t)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\phi_k(t)\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|\phi_k(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,\end{aligned}$$

άρα

$$\sup_{t\in[a,b]}\left|\Phi(t)-\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(t)\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k.$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k = 0$, από τη παραπάνω ανισότητα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών για να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[a,b]}|\Phi(t)-\sum_{k=1}^{n}\Phi_k(t)| = 0. \qquad \square$$

6.3 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα του άρθρου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3.1. *Έστω ότι $\phi_0\in\mathbb{R}$ και η $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ είναι μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο* $[0,\infty)$ *και ικανοποιεί το πρόβλημα* (6.1).

Απόδειξη: ***Ύπαρξη.*** Θεωρούμε την ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο $[0,\infty)$ η οποία ικανοποιεί τις

$$\phi_n:[0,\infty)\to\mathbb{R},\quad \phi_1(t)=\phi_0\quad\text{και}\quad \phi_{n+1}(t)=\phi_0+\int_0^t f(\phi_n(s))\,ds,$$

για κάθε $n\geq 2$. Αφού η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση, υπάρχει $L>0$ ώστε

$$|f(t)-f(s)|\leq L|t-s|\quad\forall t,s\in\mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει

$$\left|\phi_{n+1}(t)-\phi_n(t)\right|\leq\left|f(\phi_0)\right|L^{n-1}\frac{s^n}{n!}. \tag{6.4}$$

Για $n=1$ έχουμε

$$|\phi_2(t)-\phi_1(t)|=\left|\int_0^t f(\phi_1(s))\,ds\right|=t|f(\phi_0)|.$$

Έστω ότι ισχύει για $n=k$ αν ισχύει για $n=k+1$, τότε θα ισχύει για κάθε

$n \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
|\phi_{k+2}(t) - \phi_{k+1}(t)| &= \left| \int_0^t f(\phi_{k+1}(s)) - f(\phi_k(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^t |f(\phi_{k+1}(s)) - f(\phi_k(s))|\, ds \\
&\leq \int_0^t L|\phi_{k+1}(s) - \phi_k(s)|\, ds \qquad \text{(από την (6.3))} \\
&\leq L^k \int_0^t \frac{s^k}{k!}\, ds = L^k\, |f(\phi_0)|\, \frac{s^k}{k!}. \\
&\qquad \text{(από (6.4) για } n = k\text{)}
\end{aligned}$$

Τώρα, έστω ότι $b > 0$. Τότε για την ακολουθία $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ με

$$a_k = |f(\phi_0)|\, L^{k-1}\, \frac{b^k}{k!},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= |f(\phi_0)|\, L^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Lb)^k}{k!} = |f(\phi_0)|\, L^{-1}\left(-1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Lb)^k}{k!} \right) \\
&= |f(\phi_0)|\, L^{-1}\left(e^{Lb} - 1\right).
\end{aligned}$$

Από την (6.4) και την τελευταία ισότητα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 6.2.4 για $a_k = |f(\phi_0)|\, L^{k-1}\, b^k/k!$, $\Phi_k(t) = \phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)$ και $a = 0$ για να δείξουμε ότι ακολουθία

$$\phi_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \phi_{k+1}(t) - \phi_k(t) + \phi_0$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $\phi : [0, b] \to \mathbb{R}$. Επειδή το $b > 0$ είναι τυχόν, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της ϕ είναι το $[0, \infty)$ και $\phi_n \rightrightarrows \phi$ στο $[0, b]$ για κάθε $b > 0$. Επιπλέον, από την Πρόταση 6.2.3 έπεται ότι η ϕ είναι συνεχής στο $[0, \infty)$. Τέλος για κάθε $t > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t f(\phi_n(s)) - f(\phi(s))\, ds \right| &\leq \int_0^t |f(\phi_n(s)) - f(\phi(s))|\, ds \\
&\leq \int_0^t L|\phi_n(s) - \phi(s)|\, ds \qquad \text{(από (6.3))} \\
&\leq L \int_0^t \sup_{x \in [0,t]} |\phi_n(x) - \phi(x)|\, ds \\
&= Lt \sup_{x \in [0,t]} |\phi_n(x) - \phi(x)|.
\end{aligned}$$

Οπότε, επειδή $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,t]}|\phi_n(x)-\phi(x)|=0$, από τη παραπάνω ανισότητα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών για να συμπεράνουμε ότι

$$\int_0^t f(\phi_n(s))\,ds \to \int_0^t f(\phi(s))\,ds \quad \forall t>0.$$

Άρα

$$\phi(t)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi_0+\lim_{n\to\infty}\int_0^t f(\phi_n(s))\,ds=\phi_0+\int_0^t f(\phi(s))\,ds,$$

για κάθε $t>0$, δηλαδή η ϕ ικανοποιεί την (6.2), το οποίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι είναι λύση του προβλήματος (6.1), αφού είναι συνεχής στο $[0,\infty)$,

Μοναδικότητα. Έστω ϕ, ψ δυο λύσεις του προβλήματος (6.1). Τότε, από (6.2), έχουμε ότι

$$\phi(t)=\phi_0+\int_0^t f(\phi(s))\,ds \quad \text{και} \quad \psi(t)=\phi_0+\int_0^t f(\psi(s))\,ds,$$

για κάθε $t>0$. Άρα,

$$\begin{aligned}|\phi(t)-\psi(t)| &\le \left|\int_0^t f(\phi(s))\,ds-\int_0^t f(\psi(s))\,ds\right| \\ &\le L\int_0^t \big|\phi(s)-\psi(s)\big|\,ds. \qquad \text{(από (6.3))}\end{aligned}$$

Θέτουμε $\zeta(t)=\int_0^t\big|\phi(s)-\psi(s)\big|\,ds$. Τότε $\zeta'(t)=|\phi(t)-\psi(t)|$ και η τελευταία ανισότητα γίνεται

$$\zeta'(t)-L\zeta(t)\le 0 \quad \forall t>0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με e^{-Lt}, παίρνουμε $\left(e^{-Lt}\zeta(t)\right)'\le 0$, οπότε $\int_0^t\left(e^{-Ls}\zeta(s)\right)'ds\le 0$. Άρα

$$e^{-Lt}\zeta(t)-\zeta(0)\le 0 \text{ ισοδύναμα } \zeta(t)\le e^{Lt}\zeta(0)=0,$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^t|\phi(s)-\psi(s)|\,ds=0.$$

Συνεπώς $|\phi(s)-\psi(s)|=0$ για κάθε $s\in[0,t]$, αφού οι ϕ, ψ είναι συνεχείς στο $[0,\infty)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, αφού η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $t>0$. □

Ομιλία 7

Εκλεκτικές συγγένειες: Μαθηματικά και μουσική στο έργο του Ι. Ξενάκη

Αλέξανδρος Δασκαλάκης

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
alexdask@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

7.1 Εισαγωγή

Από τον 18^{ο} αιώνα, την εποχή του ύστερου μπαρόκ, μια μουσική σύνθεση όφειλε να συλλαμβάνει και να εκφράζει τα συναισθήματα της ανθρώπινης ψυχής, να είναι σαφής και διακριτή, οργανωμένη γύρω από μια ιδέα· ήταν το θέατρο των συναισθημάτων. Με το πέρασμα των χρόνων, επικράτησε μια διαφορετική αντίληψη για την μουσική σύνθεση· η δομή γίνεται πιο περίπλοκη, μοιάζει με έναν λαβύρινθο τους διαδρόμους του οποίου καλούμαστε να ακολουθήσουμε. Το έργο αποτελεί ένα σώμα, έναν οργανισμό, στον οποίο περιφερόμαστε επ᾽ άπειρον, όπως σε μια κυκλική σονάτα. Με άλλα λόγια, η μουσική πρωτοπορία αποτύπωσε, παράλληλα με την μοντέρνα επιστήμη, την μοίρα του μοντέρνου υποκειμένου· από το καρτεσιανό υποστασιοποιημένο υποκείμενο, κέντρο του κόσμου, περνάμε σε μια απισχνασμένη λειτουργία, σύστοιχο ενός συστήματος. Στο πλαίσιο αυτού του παραδείγματος, τα μαθηματικά έχουν πλέον έναν αναβαθμισμένο ρόλο. Η μουσική του Ξενάκη εκμεταλλεύεται στο έπακρο αυτή τη συνθήκη με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν τη λειτουργία φυσικών συστημάτων. Στην προσπάθεια να αναλύσουμε τη μουσική αυτή θα κινηθούμε ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Τέχνη. Ποιο είναι αυτό το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της μουσικής, το οποίο επιτρέπει στα μαθηματικά να ευδοκιμήσουν; Με ποιον τρόπο ο συνθέτης αντιλαμβάνεται την οργάνωση του ηχητικού περιβάλλοντος που παράγεται μέσα από τη χρήση «στοχαστικών» μοντέλων που αντλεί από τα μαθηματικά;

Ο Ξενάκης είναι ένας από τους συνθέτες που το έργο τους συνοδεύεται από σημαντικές θεωρητικές σκέψεις γύρω από τη μουσική. Ωστόσο η αφετηρία του ήταν διαφορετική: έχοντας σπουδάσει μηχανικός, συνδύασε τη μουσική με την επιστημονική σκέψη. Αυτή η προσέγγιση επέτρεψε στον Ξενάκη να απελευθερωθεί από τους περιορισμούς που επέβαλαν οι τεχνικές της σειραϊκής μουσικής και άνοιξε το δρόμο για την εξερεύνηση νέων ηχοχρωμάτων με βάση τα κριτήρια που δημιούργησε η δική του προσέγγιση στη μουσική.[1] Έτσι, από τα πρώτα του έργα, δανείστηκε μαθηματικούς συλλογισμούς από τον υπολογισμό των πιθανοτήτων για να εξηγήσει τις στατιστικές κατανομές ορισμένων διαστάσεων του ήχου.

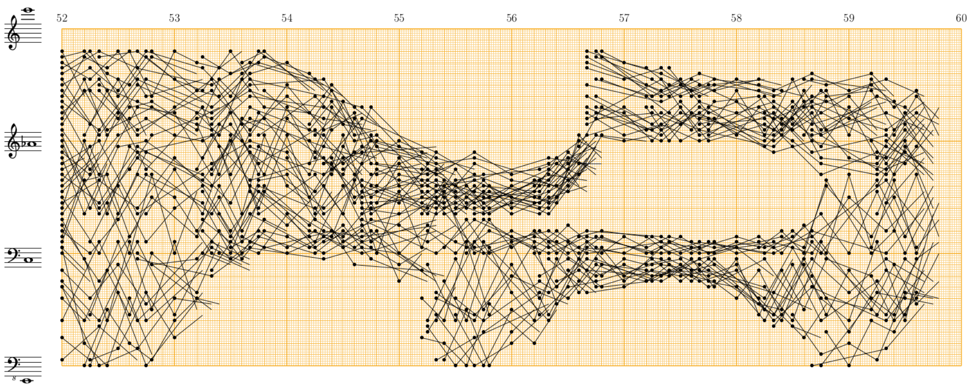
Αντιμέτωπος με τον πλούτο του κόσμου των ήχων που βρισκόταν μπροστά του, ο Ξενάκης έγραψε μια σειρά από κείμενα στα οποία πρότεινε μια τυποποίηση των συνθετικών του αρχών.[2] Αλλά τα κείμενα αυτά έλαβαν ανάμεικτες κριτικές: ορισμένοι επέκριναν την υπερβολικά επιστημονική του προσέγγιση, ενώ άλλοι αναγνώρισαν τη μεγάλη του πρωτοτυπία. Είναι αλήθεια ότι οι λίγες αναφορές στη μουσική του και ο αφηρημένος χαρακτήρας των μαθηματικών εκφράσεων που χρησιμοποιεί δεν καθιστούν εύκολα κατανοητά αυτά τα θεωρητικά κείμενα, τα περισσότερα από τα οποία γράφτηκαν στην αρχή της καριέρας του, και υποστηρίζουν την ιδέα μιας συμμαχίας μεταξύ επιστήμης και τέχνης στην οποία βασίζεται η προσέγγισή του. Τα τελευταία χρόνια της ζωής του, ο Ξενάκης απο-

[1] Ο όρος «σειραϊκή μουσική» αναφέρεται στη μέθοδο που χρησιμοποίησε η σύγχρονη μουσική σύνθεση, σύμφωνα με την οποία η λειτουργία των μουσικών παραγόντων (τονικό ύψος, ρυθμός, δυναμική και ηχόχρωμα) καθορίζεται με βάση αριθμητικές σχέσεις, αναλογίες ή άλλους μαθηματικούς υπολογισμούς, τους οποίους εφαρμόζει ο συνθέτης καθ' όλη τη διάρκεια του μουσικού έργου. Ο όρος προέρχεται από τη λέξη «σειρά» (δωδεκαφωνία) και υποδηλώνει τον προκαθορισμό, όχι μόνο του τονικού ύψους των μουσικών φθόγγων, αλλά και του ρυθμού, της δυναμικής και του ηχοχρώματος. Πρωτεργάτης αυτής της μεθόδου, στις αρχές του 20ου αιώνα, υπήρξε ο Γερμανός συνθέτης Άρνολντ Σένμπεργκ (Arnold Schoenberg). Στην Γαλλία, οι σημαντικότεροι εκπρόσωποι αυτού του ρεύματος ήταν οι Ολιβιέ Μεσιάν (Olivier Messiaen), Πιερ Μπουλέζ (P. Boulez) κά. Παράλληλα, ως αντίδραση στον «υπερβολικό ορθολογισμό» (sic) της σειραϊκής μουσικής, εμφανίζεται το κίνημα του «αλεατορισμού», στο οποίο τα στοιχεία του τυχαίου και του αυτοσχεδιασμού παίζουν βασικό ρόλο. Ο Ξενάκης, θα ασκήσει κριτική και στα δυο αυτά ρεύματα σε όλη τη διάρκεια της σταδιοδρομίας του. Δείτε το [2].

[2] Στα ελληνικά κυκλοφόρησε μια επιλογή από αυτά τα κείμενα [3].

σύρθηκε πίσω από το έργο του, αφιερωμένο στη σύνθεση, αναφέροντας μόνο παρεμπιπτόντως κάποιες από τις ιδιαιτερότητες των κλιμάκων που χρησιμοποιούσε, και αφήνοντας πίσω του αυτά τα κείμενα που σηματοδοτούσαν κάθε νέο του έργο με μια θεωρητική πρόοδο. Και όμως, παρά τη σιωπή αυτή και το γεγονός ότι οι ανησυχίες του εξελίχθηκαν, εξακολούθησε να συνδέεται με αυτές.

Θα εξετάσουμε ορισμένα από αυτά τα κείμενα, όχι για να συζητήσουμε τα θεωρητικά τους θεμέλια—αυτό δεν είναι το καθήκον μας—αλλά για να κατανοήσουμε το πεδίο εφαρμογής και το νόημά τους, με βάση τα μουσικά παραδείγματα που τα απεικονίζουν. Στόχος μας είναι να σκιαγραφήσουμε έναν προβληματισμό σχετικά με τη φύση της σχέσης μεταξύ της μουσικής του και των θεωρητικών αρχών στις οποίες βασίζεται.



Παράδειγμα 1: Γραφική αναπαράσταση των μέτρων 52–60 του έργου Πιθοπρακτά (1955–56).

7.2 Το σύμπαν των πιθανοτήτων

Ενώ συνθέτες της πρωτοπορίας, όπως ο Μπουλέζ ή ο Στοκχάουζεν, ανέπτυξαν τις συνθετικές τους μεθόδους με βάση τις σειραϊκές τεχνικές, ο Ξενάκης ακολούθησε διαφορετικά κριτήρια από αυτά που απορρέουν από οποιαδήποτε μουσική παράδοση. Προσεγγίζοντας σφαιρικά τα μουσικά φαινόμενα, άνοιξε έναν νέο ηχητικό κόσμο που περιελάμβανε υφές συγκρίσιμες με τα φυσικά φαινόμενα που διέπονται από τον νόμο των μεγάλων αριθμών. Παρά την κριτική που άσκησε στη σειραϊκή μουσική, ο Ξενάκης δεν την απέρριψε ευθέως. Στο μεσαίο τμήμα του έργου Μεταστάσεις (1954), του πρώτου μεγάλου έργου του, πειραματίστηκε με σειραϊκές διαδικασίες. Δεν μπόρεσε όμως να προσαρμοστεί στις σειραϊκές αρχές. Τις θεωρούσε υπερβολικά περιοριστικές. Αυτό στο οποίο αντιδρούσε ο Ξενάκης ήταν ο περιορισμός που ενυπάρχει στη σειραϊκή πρακτική. Ως απάντηση σε αυτούς τους περιορισμούς, ανέπτυξε την ιδέα της απροσδιοριστίας ως αρχή για την οργάνωση των ηχητικών χαρακτηριστικών. Κάνοντας τους ήχους πλήρως ανεξάρτητους, ο Ξενάκης μπορούσε να τους υποβάλει στους νόμους της τύχης και να δημιουργήσει ηχοχρώματα πρωτόγνωρα για τα αυτιά μας. Για να το πετύχει αυτό, θα κατέφευγε σε άλλα μέσα. Ο συνθέτης εμπνεύστηκε από τη θεωρία των πιθανοτήτων. Η ύπαρξη διαφορετικών νόμων πιθανοτήτων που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τύπους απρόβλεπτων φαινομένων ήταν μια αποκάλυψη για τον Ξενάκη, ο οποίος ενσωμάτωσε στη μουσική του εκείνους που θα μπορούσαν να διέπουν τα χαρακτηριστικά των ήχων. Σε αντίθεση με τις σειραϊκές αρχές, η θεωρία των πιθανοτήτων παρέχει τα κατάλληλα μέσα για την αντιμετώπιση οποιουδήποτε αριθμού ήχων. Ο Ξενάκης μπόρεσε να τα οργανώσει σύμφωνα με μια δεδομένη μέση τιμή ή πυκνότητα. Τα διαστήματα του τονικού ύψους, οι διάρκειες, οι δυναμικές κλπ μπορούν να προσδιοριστούν ή να αξιολογηθούν σε σχέση με μια θεωρητική κατανομή. Στη συνέχεια, επεξεργάστηκε δύο τύπους στοχαστικής μουσικής: την ελεύθερη στοχαστική μουσική, που εφαρμόστηκε στα έργα του 1955–57, και τη μαρκοβιανή στοχαστική μουσική, που εφαρμόστηκε στα έργα των δύο επόμενων ετών, 1958–59.

Σε ένα άρθρο που δημοσιεύτηκε το 1956, «Warscheinlichkeitstheorie und Musik (Θεωρία των πιθανοτήτων και μουσική)», ο Ξενάκης, μιλάει για πρώτη φορά για τη μουσική του, χρησιμοποιώντας το γραφικό παράδειγμα των μέτρων 52 έως 60 των Πιθοπρακτών (για ορχήστρα εγχόρδων, δύο τρομπόνια και κρουστά), για να καταδείξει μια πιθανή σύνδεση μεταξύ μουσικής και μαθηματικών. Πρόκειται για ένα σύννεφο από «pizzicati[3]-glissandi»[4] (δείτε παράδειγμα 1). Έτσι, αποκαλύπτει δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα της μουσικής του εκείνη την εποχή: τη χρήση του ομοιόμορφα συνεχούς glissando, με το οποίο συνδέει μια ταχύτητα, και το γεγονός ότι σκέφτεται τους ήχους ως ενσωματωμένους σε φαινόμενα «μάζας»· αποκαλύπτει επίσης το στήριγμα πάνω στο οποίο αντιλαμβάνεται τη μουσική του: το καρτεσιανό επίπεδο. Αυτό το παράδειγμα αφορά μόνο τα σαράντα έξι έγχορδα όργανα και κάθε μια από τις γραμμές αντιπροσωπεύει ένα glissando του οποίου η προέλευση σημειώνεται από ένα σημείο. Το πλέγμα που επικαλύπτεται στο γράφημα υποδεικνύει αφενός τα μέτρα και αφετέρου τα τονικά ύψη (από το χαμηλό Μι του κοντραμπάσου έως το υψηλό Μι του βιολιού, επτά οκτάβες πιο πάνω). Οι ταχύτητες, μας

[3]pizzicato: Ο όρος σημαίνει «τσιμπητά» και αναφέρεται κυρίως στα έρχοδα όργανα που παίζονται με δοξάρι. Ο εκτελεστής τσιμπάει τις χορδές με τα δάχτυλα, χωρίς να χρησιμοποιεί το δοξάρι του.

[4]glissando: Ο όρος σημαίνει «γλιστρώντας» και δηλώνει το παίξιμο διαδοχικών φθόγγων με ένα γλίστρημα του δαχτύλου.

λέει ο συγγραφέας, έχουν υπολογιστεί σύμφωνα με την κατανομή Gauss.

Σε αυτό το πέρασμα, κάθε glissando ενεργοποιείται από ένα pizzicato. Το τέλος ενός glissando δεν συνδέεται απαραίτητα με την αρχή του επόμενου. Ο Ξενάκης σπάει τις γραμμές προκειμένου να τις μετακινήσει σε διαφορετικά τονικά ύψη. Με τον τρόπο αυτό, φροντίζει να υποδεικνύει τη χορδή στην οποία παίζεται το glissando και φροντίζει ώστε το επόμενο glissando να ξεκινά από την ίδια θέση όταν ο παίκτης εκτελεί αλλαγή χορδής. Το συνολικό σχήμα αυτού του σύννεφου εξαρτάται από μια σταθερή πυκνότητα και από τα τονικά ύψη των οργάνων. Στην αρχή, τα glissandi γεμίζουν τον χώρο εντός των ορίων των οργάνων. Στη συνέχεια ο Ξενάκης διαμορφώνει τον ήχο φιλτράροντας τις περιοχές των οργάνων ενώ πυκνώνει άλλες. Ως γλύπτης, τροποποιεί τις ηχητικές ιδιότητες της υφής του κάθε ήχου. Αλλά για να πραγματοποιήσει αυτή την ηχητική μεταμόρφωση, ο Ξενάκης έκανε και κάποιους υπολογισμούς. Οι αρχές στις οποίες βασίζεται αυτό το πέρασμα περιγράφονται ως εξής:

> Κάθε μια από τις γραμμές αντιπροσωπεύει μια ταχύτητα που λαμβάνεται από τον πίνακα πιθανοτήτων που υπολογίζεται με τον τύπο:
>
> $$f(v) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-v^2/\alpha^2}.$$
>
> Συνολικά 1148 ταχύτητες, κατανεμημένες σε 58 διαφορετικές τιμές σύμφωνα με το νόμο του Gauss, έχουν υπολογιστεί και ανιχνευθεί για το συγκεκριμένο πέρασμα (μέτρα 52–60, με διάρκεια 18,5 sec). Η κατανομή είναι γκαουσιανή, η μακροσκοπική διαμόρφωση είναι μια πλαστική διαμόρφωση του ηχητικού υλικού.[5]

Δεκαπέντε χρόνια μετά την ολοκλήρωση των Πιθοπρακτών, ο Ξενάκης χρησιμοποίησε αποσπάσματα από τα glissandi των μέτρων 52–59 στην Άρουρα (1971). Όπως συμβαίνει συχνά στα πρώτα έργα του Ξενάκη, σε κάθε όργανο αποδίδεται ένα μετρικό μοτίβο που προκύπτει από τη διαίρεση της βασικής διάρκειας σε 3, 4 ή 5 μονάδες. Ο Ξενάκης υπερθέτει αυτές τις ρυθμικές τιμές για να δημιουργήσει μια αίσθηση συνέχειας.

Στον απόηχο του έργου Πιθοπρακτά, ο Ξενάκης ανέπτυξε την ιδέα της ολικής απροσδιοριστίας. «Ποιοι είναι οι ελάχιστοι λογικοί περιορισμοί που είναι απαραίτητοι για την κατασκευή μιας μουσικής διαδικασίας;» ([2], 16). Η τύχη μπορεί να λειτουργήσει ως αισθητικός νόμος, ως κανονική φιλοσοφία ([2], 25). Ένα έργο που συντίθεται κατ' αυτόν τον τρόπο γίνεται θραύσμα μιας στοχαστικής κατανομής ηχητικών γεγονότων. Με την απροσδιοριστία των σχέσεών τους και την απουσία δυναμικής εξέλι-

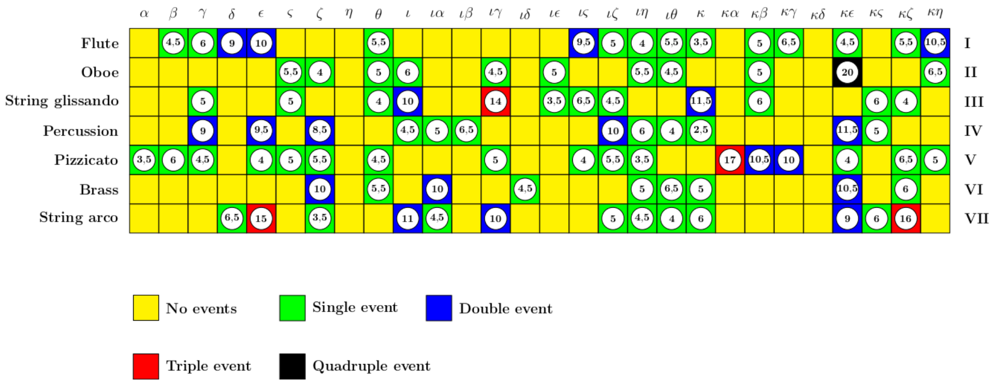
[5] [2], 15.

Παράδειγμα 2: Πιθοπρακτά: Απόσπασμα από την παρτιτούρα

ξης, οι Αχορρίψεις (1956–57) ανοίγουν μια νέα κατηγορία που αργότερα ο Ξενάκης ονόμασε «εκτός χρόνου». Το έργο βασίζεται στην κατανομή των ηχητικών γεγονότων που θεωρούνται ανεξάρτητα από τον χρόνο. Στα μέτρα 52–59 των Πιθοπρακτών, η χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων εφαρμόζεται σε μία μόνο παράμετρο: την ταχύτητα των glissandi. Στις Αχορρίψεις, ο Ξενάκης επεκτείνει την εφαρμογή της και σε άλλες παραμέτρους. Εκτός από τις ταχύτητες, τις πυκνότητες, τα διαστήματα των διαρκειών και το τονικό ύψος, ολόκληρη η δομή του έργου βασίζεται στους νόμους των πιθανοτήτων. Για να πραγματοποιήσει τις Αχορρίψεις, ο Ξενάκης υπολόγισε την πιθανότητα εμφάνισης των ηχητικών γεγονότων χρησιμοποιώντας την κατανομή Poisson

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

με μέση πυκνότητα γεγονότων ανά μονάδα $\lambda = 0{,}6$. Η κατανομή αυτών των γεγονότων αναπαρίσταται από έναν πίνακα όπου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε ένα «ηχόχρωμα» και κάθε στήλη σε μια μονάδα χρόνου. Η Μαρκοβιανή στοχαστική μουσική αντλεί την έμπνευσή της από τη θεωρία των αλυσίδων Μαρκόφ, σύμφωνα με τις οποίες η πιθανότητα κάθε γεγονότος εξαρτάται μόνο από την κατάσταση του προηγούμενου γεγονότος.



Παράδειγμα 3: Αχορρίψεις (1956–57)

Παρόλο που καταλαμβάνει σημαντικό μέρος των θεωρητικών γραπτών του Ξενάκη, σχεδόν το ένα τρίτο της πρώτης έκδοσης της Formalized Music ([2], 57–131), μόνο τρία έργα αναφέρονται ρητά σε αυτήν: Analogique A, Analogique B και Συρμός. Το Analogique A είναι γραμμένο για εννέα έγχορδα όργανα: τρία βιολιά, τρία τσέλα και τρία κοντραμπάσα. Η σύνθεσή του έγινε το 1958, το έτος που ακολούθησε την ολοκλήρωση των Αχορρίψεων. Στο Analogique A, ο Ξενάκης ξεκίνησε από την υπόθεση ότι κάθε ήχος είναι μια ενσωμάτωση κόκκων (grains) ([2], 43) για να ορίσει ένα σύνολο οκτώ διαφοροποιημένων οθονών που ονόμασε (A) έως (H). Αυτό που ο Ξενάκης ονομάζει οθόνες είναι μικρά σύννεφα κόκκων, διάρκειας μισού μέτρου, που χαρακτηρίζονται από τις μέσες πυκνότητες και εντάσεις των ήχων που κατανέμονται σε επιλεγμένα τονικά ύψη. Οι οθόνες που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο είναι εκτός χρόνου. Η διάρκεια δεν είναι πλέον μια μεταβλητή που συνδέεται με μια κατανομή πιθανοτήτων. Οι τεχνικές παιξίματος arco, sul ponticello, frappé col legno χρησιμοποιούνται για την τροποποίηση της ηχοχρωματικής ποιότητας του ήχου.

7.3 Προς μια Μεταμουσική

Ο όρος «μεταμουσική», που επινοήθηκε από τον Ιάννη Ξενάκη, είναι η ιδέα μιας μουσικής ανώτερης τάξης, η οποία θα περιέχει οποιαδήποτε υπάρχουσα μουσική οποιασδήποτε παράδοσης ως ειδική περίπτωση. Με άλλα λόγια, η μεταμουσική που διατύπωσε ο Ξενάκης είναι καθολική με την έννοια ότι περιλαμβάνει όλες τις μουσικές όλων των εποχών και όλων των τόπων του κόσμου. Προκειμένου να κατασκευάσει μια τέτοια μουσική, ο Ξενάκης προσπάθησε να βρει θεμελιώδεις δομές που θα του επέτρεπαν να συνθέσει κάτι που θα μπορούσε να συμπεριλάβει οποιαδήποτε μορφή έκφρασης. Τεχνικά, η μεταμουσική περιελάμβανε ένα σύνολο μεθοδολογιών που θα βοηθούσαν να τεθούν τα θεμέλια της μουσικής σύνθεσης. Το σύνολο αυτό θα μπορούσε να περιλαμβάνει σχεδόν κάθε βασική μουσική έννοια, όπως κλίμακα, αρμονία, ρυθμό κλπ, και θα αποτελούσε έτσι μια μεταγλώσσα, δηλαδή μια τεχνική (δεύτερης τάξης) γλώσσα που θα περιέγραφε τη φυσική (πρώτης τάξης) γλώσσα της μουσικής. Ο όρος εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο «Προς μια μεταμουσική» ([2], 180–200). Το δοκίμιο δεν προσφέρει ορισμό, ωστόσο μια σχετική τέτοια έννοια είναι αυτό που ο Ξενάκης θεωρητικά ονόμασε «γενική αρμονία» ([2], 182): μια θεωρία, ή ένα σύνολο από αυτές, που θα περιέλαβε τις υπάρχουσες θεωρίες της αρμονίας, των κλιμάκων κλπ.

> Η ΤΕΧΝΗ (και κυρίως η μουσική) έχει όντως μια θεμελιώδη λειτουργία που είναι να ενεργεί καταλυτικά ως προς τη μετουσίωση που μπορεί να προσφέρει με όλα τα μέσα έκφρασης. Βλέψη της πρέπει να είναι να παρασέρνει, μέσω καθηλώσεων-σημείων αναφοράς, προς την απόλυτη ανάταση, εντός της οποίας το άτομο γίνεται ένα––χάνοντας τη συνείδησή του—με μια αλήθεια άμεση, σπάνια, τεράστια και τέλεια. Αν ένα έργο τέχνης επιτύχει αυτό το εγχείρημα έστω και για μια στιγμή, επιτυγχάνει τον στόχο του. Αυτή η τεράστια αλήθεια δεν αποτελείται από αντικείμενα, συναισθήματα ή αισθήσεις· είναι πέρα από αυτά, όπως η 7η συμφωνία του Μπετόβεν είναι πέρα από τη μουσική. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η τέχνη μπορεί να οδηγήσει σε πεδία που η θρησκεία εξακολουθεί να καταλαμβάνει για ορισμένους ανθρώπους.[6]

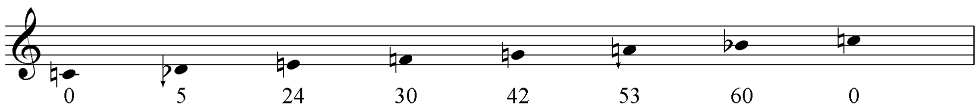
Μια τέτοια «μεταστοιχείωση του καθημερινού καλλιτεχνικού υλικού», είναι αυτό που ο Ξενάκης αποκαλεί «μετα-τέχνη» ([2], 1). Όπως συχνά, το όραμα του Ξενάκη είναι επίσης επικριτικό απέναντι στους σύγχρονους καλλιτέχνες του, οι οποίοι αδυνατούν να υπολογίσουν το καθολικό «υπόστρωμα» που μπορεί να επιτρέψει «μια τυποποίηση που θα ενοποιήσει το αρχαίο παρελθόν, το παρόν και το μέλλον», υπερβαίνοντας τις «τοπικότητες του χρόνου και του χώρου», φτάνοντας σε «πλανητική κλίμακα» ([2], 182).

Στο «Προς μια μεταμουσική», ο Ξενάκης προσφέρει δύο πιθανές περιπτώσεις μιας τέτοιας μεταμουσικής: την ιδέα του για μια στοχαστική μουσική από τη μια πλευρά και τη θεωρία του κόσκινου (sieve theory) από την άλλη. Όσον αφορά την πρώτη, είναι εύκολο να δει κανείς, τουλάχιστον θεωρητικά, ότι η σύνθεση με ηχητικά νέφη, όπως συμβαίνει στη στοχαστική

[6] [2], 1

μουσική, θα μπορούσε στατιστικά να παράγει σειραϊκή μουσική ή οποιονδήποτε άλλο τρόπο φωνητικής καθοδήγησης ως μια εξαιρετικά σπάνια αλλά πιθανή περίπτωση. Οι ήχοι του στοχαστικά παραγόμενου νέφους θα έπρεπε απλώς να πέσουν τυχαία σε θέσεις που αντιστοιχούν στους κανόνες ή τις συνήθειες αυτής της μουσικής. Είναι σαφές ότι ο Ξενάκης δεν ενδιαφερόταν να δημιουργήσει, κατά τύχη, περιπτώσεις οποιασδήποτε υπάρχουσας μουσικής. Αντίθετα, τον ενδιέφερε να δημιουργήσει, με τη βοήθεια της στοχαστικής, μια μουσική που θα υπερέβαινε κάθε γνωστό μουσικό ύφος μέσω της αφαίρεσης της θεμελιώδους δομής της, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι η έννοια του νέφους των ηχητικών γεγονότων.

Από την άλλη πλευρά, με τη θεωρία του κόσκινου, ο Ξενάκης ισχυρίζεται ότι έχει βρει έναν καθολικό μηχανισμό για τη δημιουργία οποιασδήποτε μουσικής δομής διαστημάτων (τονικό ύψος, μέτρο, ένταση κλπ) με οποιοδήποτε βαθμό πολυπλοκότητας. Αντίστροφα, σύμφωνα με τον ίδιο, οποιαδήποτε δομή οποιασδήποτε μουσικής μπορεί να αναχθεί σε (συνδυασμό) κόσκινων. Επομένως, με κόσκινα, τουλάχιστον θεωρητικά, ο Ξενάκης θα μπορούσε να κατασκευάσει όλες τις μουσικές του κόσμου, ινδικές ράγκες, ινδονησιακά γκαμελάν, βυζαντινή ψαλμωδία, δυτική συγκερασμένη μουσική κλπ. Για παράδειγμα, προσφέρει τον ακόλουθο μαθηματικό τύπο για «μια από τις μικτές βυζαντινές κλίμακες, ένα διαζευκτικό σύστημα που αποτελείται από ένα χρωματικό τετράχορδο και ένα διατονικό τετράχορδο [...], που χωρίζονται από έναν μείζονα [...] σημειωμένο σε αριστοξένια τμήματα» ([2], 197):



$$8_0 \ast (9_0 + 9_6) + 9_6 \ast (8_2 + 8_4) + 8_5 \ast (9_5 + 9_8) + (8_6 \ast 9_3)$$

Κάθε ζεύγος αριθμών αντιπροσωπεύει μια κλάση υπολοίπων MI όπου M είναι το υπόλοιπο (modulo) και I είναι το υπόλειμμα, τα σύμβολα $\ast$ και $+$ αναφέρονται στην τομή και την ένωση των κλάσεων υπολοίπων αντίστοιχα. Και πάλι, ο Ξενάκης δεν ενδιαφερόταν, με τα κόσκινα, να αναπαράγει υπάρχοντα στυλ μουσικής αλλά να συνθέσει μια μορφή γενικευμένης αρμονίας: πυκνές, ακανόνιστες συστάδες ορχήστρας ή σε κλίμακες που δεν παράγουν μια οκτάβα και οι οποίες παίζονται εκτός φάσης, για να αναφέρουμε μόνο δυο παραδείγματα.

Για τον Ξενάκη, η στοχαστική μουσική από τη μια πλευρά και τα κόσκινα από την άλλη, με την αξιωματοποίηση και την τυποποίησή τους, προσφέρονται για εκτέλεση από υπολογιστή. Αυτό είναι ενδεχομένως το βαθύτερο νόημα της μεταμουσικής, κατ᾽ αναλογία με τα μεταμαθηματικά, που είναι ένας όρος που επινοήθηκε γύρω στο 1920 από τον μαθηματικό David Hilbert. Ο όρος «Μεταμαθηματικά» δηλώνει την εξαγωγή συμπερασμάτων για το σύνολο των μαθηματικών από ένα σύνολο αξιωμάτων (προφανή γεγονότα που θεωρούνται δεδομένα) με τη βοήθεια τυπικών κανόνων. Με άλλα λόγια, ο Χίλμπερτ διατύπωσε μια τυπική διαδικασία στην οποία θα μπορούσαν να συμφωνήσουν όλοι οι μαθηματικοί του κόσμου, με την έννοια της ρήσης του Λάιμπνιτς «Ας υπολογίσουμε!». Σήμερα θα λέγαμε ότι ο Χίλμπερτ προσπάθησε να κάνει τα μαθηματικά υπολογίσιμα και, με αυτόν τον τρόπο, καθολικά. Η ιδέα είναι ότι αν η μαθηματική αλήθεια μπορεί να υπολογιστεί από μια μηχανή, τότε δεν υπάρχει πλέον ανάγκη για συζήτηση μεταξύ των μαθηματικών για μαθηματικά ζητήματα. Κατ᾽ αναλογία, η μεταμουσική σημαίνει να γίνει η μουσική υπολογίσιμη και άρα καθολική, οδηγώντας σε μια διέξοδο από τις «αναρίθμητες δυνατότητες σε μια κατάσταση χάους, [την] αφθονία των θεωριών, των [...] στυλ, των [...] "σχολών" [...]» ([2], 182).

Ο Ξενάκης δημιούργησε δύο μεταμουσικά προγράμματα για υπολογιστές. Το πρώτο ήταν για τον υπολογισμό μουσικής με χρήση Στοχαστικής Ανάλυσης (για τη σειρά κομματιών «ST» του 1962, που αργότερα επαναδιατυπώθηκε ως GENDYN για να συμπεριλάβει την σύνθεση ήχου, για το Gendy3, 1991 και το S.709, 1994). Το δεύτερο ήταν για τη δημιουργία κλιμάκων από οποιονδήποτε τύπο κόσκινου καθώς και για τη δημιουργία ενός τύπου κόσκινου για οποιαδήποτε δεδομένη κλίμακα ([2], 277–288). Δυστυχώς, σε αντίθεση με τον GENDYN, ο Ξενάκης δεν επέκτεινε το πρόγραμμα κόσκινο στην αλγοριθμική σύνθεση και την ηχητική σύνθεση. Αν το είχε κάνει, θα είχε δημιουργήσει ένα έργο αναφοράς στο πεδίο του «κοσκινισμένου» ήχου. Ωστόσο, στη συνθετική του πρακτική, ο Ξενάκης χρησιμοποίησε τα στοχαστικά μοντέλα και τα κόσκινα, ακόμη και το συνδυασμό των δύο, στρέφοντας το ένα προς το άλλο.

Ο Ξενάκης είχε μια τάση προς την αφαίρεση ως έκφραση της «παγιωμένης» και «υλοποιημένης» ανθρώπινης νοημοσύνης. Ανατρέχοντας στην ιστορία των μαθηματικών, μπορούμε να εντοπίσουμε μια παράλληλη συζήτηση που διεξαγόταν τον εικοστό αιώνα, μεταξύ του μαθηματικού πλατωνισμού και του φορμαλισμού. Η πρώτη στάση υποθέτει ότι οι μαθηματικές «αλήθειες» υπάρχουν, σε κάποια μορφή, ανεξάρτητα από την πιθανή ανεξάρτητα από την πιθανή ανακάλυψή τους από εμάς, ενώ η δεύτερη αναφέρεται στα μαθηματικά ως ένα συμβολικό παιχνίδι χωρίς νόημα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για τον Ξενάκη, ένας μουσικομαθηματικός πλατωνισμός ήταν μια αναγκαία υπόθεση εργασίας, αλλά όχι απαραίτητα ένα βαθιά ριζωμένο σύστημα πεποιθήσεων. Όπως και οι μαθηματικοί της εποχής του, προκειμένου να συνεχίσει κάποιος να εργάζεται με αφηρημένες ιδέες, τείνει να υποθέτει ότι έχει να κάνει με την αντικειμενική πραγματικότητα, όχι τόσο για να υπερασπιστεί την ύπαρξή της, αλλά για να μπορέσει απλώς να συνεχίσει.

7.4 Επίλογος

Στα γραπτά του Ξενάκη, η προσφυγή στα μαθηματικά, όπως και το σθένος με το οποίο υπερασπίστηκε την προσέγγισή του, δεν είναι αδιάφορη για το πλαίσιο στο οποίο γεννήθηκαν τα πρώτα του έργα. Σε μια εποχή που οι άνθρωποι έψαχναν μια διέξοδο από τον «σειραϊσμό», ο Ξενάκης μπλέκει τα glissandi και αναπτύσσει μάζες ήχου που συγκρίνει με μεγάλης κλίμακας στατιστικά φαινόμενα. Η προσέγγισή του αποτελούσε αντίβαρο στην ανάπτυξη των σειραϊκών τεχνικών, τις αρχές των οποίων επέκρινε. Τα μαθηματικά αντικατέστησαν την κληρονομιά μιας μουσικής παράδοσης, ανοίγοντας μια νέα οδό για τη μουσική σύνθεση.

Όμως, η εξέταση της παρτιτούρας του Ξενάκη είναι μερικές φορές προβληματική όταν οι παρατηρήσεις που αντλούμε από αυτήν συγκρίνονται με όσα αναφέρει ο συνθέτης στα θεωρητικά του κείμενα. Ομολογουμένως, άλλα παραδείγματα θα φανέρωναν μεγαλύτερη αυστηρότητα, αλλά αυτά συνοδεύονται από κείμενα που τα εξηγούν. Στις περιπτώσεις που παρουσιάσαμε, η μουσική ιδέα έχει ως αφετηρία ένα θεωρητικό πρόβλημα, αλλά δεν περιορίζεται σε αυτό. Μερικές φορές ο Ξενάκης παρεκκλίνει από την αρχή που είχε θέσει στον εαυτό του. Τεχνικό πρόβλημα ή θεωρητικό πρόβλημα; Λάθος ή διαίσθηση; Μόνο ένα πλαίσιο μας επιτρέπει να αξιολογήσουμε την αξία ή τη σημασία μιας θεωρητικής αρχής. Πρέπει να συμπεράνουμε ότι είναι ασυνάρτητη ή πρέπει να καταφύγουμε σε αισθητικές ελευθερίες; Το πρόβλημα συχνά φαίνεται να τίθεται λανθασμένα. Η μουσική του συνδέεται με την επιστήμη επειδή, στις γραφικές ή αριθμητικές της αναπαραστάσεις, μοιράζεται το πεδίο της έρευνάς της. Κατά συνέπεια, μια σειρά από μαθηματικές και άλλες θεωρίες μπορούν να προκύψουν από τον μουσικό προβληματισμό. Ωστόσο, η μουσική δεν αποτελεί το πεδίο εφαρμογής μιας επιστήμης. Αντίθετα, ο Ξενάκης επιχειρεί πρωτίστως να διευρύνει τις ηχητικές του δυνατότητες.

Επιπλέον, κάθε θεωρητική του πρόταση οδηγεί σε έναν προβληματισμό άλλου είδους, στον οποίο ο Ξενάκης θέτει φιλοσοφικά ερωτήματα. Αυτή είναι και η πρωτοτυπία της προσέγγισής του: περισσότερο από μια απλή αφετηρία, οι θεωρητικές αρχές στις οποίες στηρίζεται επιδιώκουν μια προσέγγιση, ένα άνοιγμα σε διάφορα πεδία της γνώσης, τα όρια των οποίων σπρώχνει προς τα μπρος. Η θεωρία συνοδεύει το έργο αντί να το καθορίζει. Οι λόγοι των αποκλίσεων μεταξύ μιας θεωρητικής πρότασης και της μουσικής εφαρμογής της είναι επομένως κάθε φορά διαφορετικοί· αλλά όποιες κι αν είναι οι αποκλίσεις και όποιες κι αν είναι οι αιτίες, ο δεσμός που τις ενώνει παραμένει ο ίδιος. Αυτή η σχέση είναι μια αναγκαιότητα, και ίσως αυτό να είναι το όλο νόημα του έργου του.

Αναφορές

[1] Xenakis, Iannis. 1956. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Musik*, Gravesaner Blätter 6, 28–34.

[2] Xenakis, Iannis, *Formalized Music*. *Thought and Mathematics in Composition*, New York: Pendragon Press, 1992.

[3] Ξενάκης, Ιάννης, *Κείμενα περί Μουσικής και Αρχιτεκτονικής*, Ψυχογιός, Αθήνα, 2013.

[4] Ξενάκη, Μάχη, Ιάννης Ξενάκης. *Ένας συγκλονιστικός πατέρας*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα, 2023.

[5] Σολωμός, Μάκης, Ιάννης Ξενάκης. *Το σύμπαν ενός ιδιότυπου δημιουργού*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα, 2008.

Ομιλία 8

Πυθαγόρεια Σχολή. Ανακάλυψη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου: Το τέλος ή η αρχή;

Δήμητρα Καλησπέρη

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
dkalisperi@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

Η ανακάλυψη των ασυμμέτρων μεγεθών αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες, αν όχι τη μεγαλύτερη, ανακάλυψη στα Ελληνικά Μαθηματικά και γενικότερα στην ιστορία των Μαθηματικών. Η ανακάλυψη αυτή έλαβε χώρα σε τρία στάδια, με πρώτο την ανακάλυψη ασυμμετρίας ενός συγκεκριμένου ζεύγους μεγεθών, διαμέτρου-πλευράς τετραγώνου, που πραγματοποιήθηκε από τους Πυθαγόρειους.

Ο Πυθαγόρας θεωρείται σήμερα πρωτίστως ως μαθηματικός και το όνομά του φέρνει στο νου το λεγόμενο «Πυθαγόρειο θεώρημα», ένα θεώρημα της γεωμετρίας που εφαρμόζεται στα ορθογώνια τρίγωνα. Στην πραγματικότητα ο Πυθαγόρας ήταν κάτι παραπάνω από μαθηματικός. Γεννήθηκε στη Σάμο και η ακμή του τοποθετείται στο 530 πΧ. Αφού ταξίδεψε για μεγάλο χρονικό διάστημα στην Αίγυπτο και στην Ανατολή εγκαταστάθηκε στην κάτω Ιταλία, στον Κρότωνα, όπου συγκέντρωσε ένα μεγάλο αριθμό μαθητών, οι οποίοι οργανώθηκαν και αποτέλεσαν ένα είδος φιλοσοφικής ομάδας εκπληκτικής εσωτερικής συνοχής, γνωστής ως Πυθαγόρεια Σχολή. Η καθημερινή ενασχόληση των Πυθαγορείων περιελάμβανε τα τέσσερα μαθήματα Αριθμητική, Γεωμετρία, Μουσική και Αστρονομία.

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι η τάξη του σύμπαντος μπορεί να εκφραστεί με αριθμητικές σχέσεις, όπου τα δομικά υλικά ήταν οι φυσικοί αριθμοί και οι δομικές τους σχέσεις μπορούσαν να εκφραστούν ως σχέσεις λόγων φυσικών αριθμών. Οι μαθηματικές ανακαλύψεις τούς οδήγησαν στη διατύπωση μεταφυσικής που ταύτιζε την πραγματικότητα με τον αριθμό. Μάλιστα, λέγεται ότι, πάνω από την είσοδο της Σχολής υπήρχε το ρητό «*Τα πάντα είναι αριθμός*», δημιουργώντας τελικά μια φιλοσοφία η οποία είχε μαθηματικά θεμέλια.

Το μεγαλύτερο επίτευγμα των Πυθαγορείων στα μαθηματικά είναι αναμφίβολα η ανακάλυψη της ασυμμετρίας διαμέτρου-πλευράς τετραγώνου και αποτελεί σημείο καμπής στην ιστορία των μαθηματικών. Για πρώτη φορά αποδείχθηκε μια πρόταση[1], η οποία φαινόταν ότι *αντιφάσκει* με τα κοινώς εγνωσμένα, με ολόκληρη την πρακτική του ανθρώπου (αφού στην πράξη όλα τα μεγέθη φαίνονται να είναι σύμμετρα). Παρά τη γενική παραδοχή για την απόδοση της ανακάλυψης στους Πυθαγόρειους, ωστόσο υπάρχει έντονη διαφωνία μεταξύ των μελετητών ως προς τη *μέθοδο* απόδειξης.

Η συνήθης θέση των μελετητών είναι ότι η ανακάλυψη αυτή οδήγησε σε μια τρομερή κρίση στη Σχολή διότι ήρθε σε αντίθεση με το βασικό της δόγμα που ήταν ότι «τα πάντα είναι αριθμός» και μάλιστα είχε σαν συνέπεια την ουσιαστική διάλυσή της. Ακολούθως θα παρουσιάσουμε μια ανακατασκευή απόδειξης ασυμμετρίας, η οποία παρουσιάζει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς όχι μόνο δεν έρχεται σε σύγκρουση με το φιλοσοφικό δόγμα των Πυθαγορείων, αλλά αποτελεί τη βάση για τη θεμελίωση της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας. Για την πλήρη τεκμηρίωσής ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη.

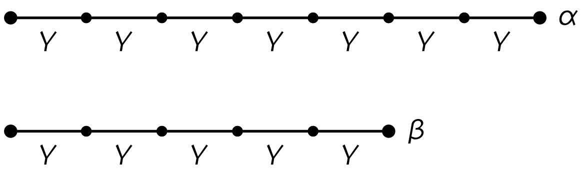
[1]Όταν αναφερόμαστε στο πρώτο στάδιο ανακάλυψης της ασυμμετρίας, κατ' ουσίαν αναφερόμαστε στην απόδειξη ασυμμετρίας, ανυπαρξίας κοινού μέτρου, ενός ζεύγους μεγεθών, του μήκους της διαμέτρου (διαγωνίου) προς το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου. Αυτό σημαίνει ότι, δεν υπάρχει τρόπος να εκφραστεί ο λόγος του μήκους της διαμέτρου προς το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου με φυσικούς αριθμούς.

8.1 Σύμμετρα-Ασύμμετρα μεγέθη

(Για τις προτάσεις από τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη μπορεί κανείς να ανατρέξει στην ηλεκτρονική έκδοση [Ε].)

> **«Στοιχεία», Ευκλείδη, Ορισμός 10.1**
> Σύμμετρα λέγονται δυο μεγέθη αν μετρούνται με το ίδιο μέτρο,
> και ασύμμετρα αν δεν υπάρχει κοινό μέτρο.

Σύμφωνα με τον Ορισμό 10.1, δύο μεγέθη α, β λέγονται *σύμμετρα*, αν υπάρχουν ένα μέγεθος γ και φυσικοί αριθμοί μ, ν ώστε $\alpha = \mu\gamma, \beta = \nu\gamma$. Οπότε, δύο ευθύγραμμα τμήματα α, β λέγονται σύμμετρα, αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα γ (το μέτρο) και φυσικοί αριθμοί μ, ν ώστε $\alpha = \mu\gamma, \beta = \nu\gamma$, με την έννοια ότι το α είναι το άθροισμα μ διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων ίσων με το γ και το β είναι το άθροισμα ν διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων ίσων με το γ.



Δυο μεγέθη α, β λέγονται *ασύμμετρα*, αν δεν είναι σύμμετρα, δηλαδή αν δεν υπάρχει κοινό μέτρο γ ώστε $\alpha = \mu\gamma, \beta = \nu\gamma$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς μ, ν.

8.2 Ανθυφαίρεση (Ευκλείδειος αλγόριθμος)

Η ανθυφαίρεση δύο αριθμών ορίζεται στο Έβδομο Βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, στις Προτάσεις 7.1–7.3 (γνωστές ως Ευκλείδειος αλγόριθμος για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών), ενώ η ανθυφαίρεση δύο μεγεθών ορίζεται στην Πρόταση 10.2, κατ᾽ αναλογία με την διαδικασία της ανθυφαίρεσης δυο αριθμών των «Στοιχείων».

Ανθυφαίρεση δυο αριθμών α, β με $\alpha > \beta$:

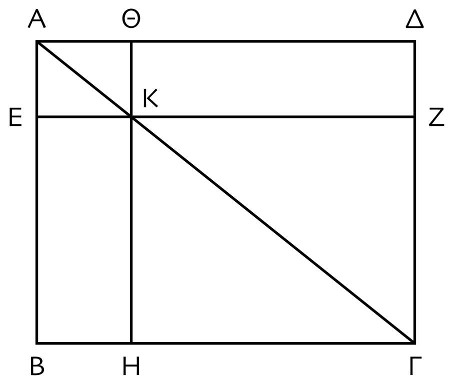
$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \kappa_1 * \beta + \gamma_1 \text{ και } \beta > \gamma_1,\\
\beta &= \kappa_2 * \gamma_1 + \gamma_2 \text{ και } \gamma_1 > \gamma_2,\\
\gamma_1 &= \kappa_3 * \gamma_2 + \gamma_3 \text{ και } \gamma_2 > \gamma_3,\\
&\vdots\\
\gamma_{\nu-2} &= \kappa_\nu * \gamma_{\nu-1} + \gamma_\nu \text{ και } \gamma_{\nu-1} > \gamma_\nu,\\
\gamma_{\nu-1} &= \kappa_{\nu+1} * \gamma_\nu\\
\text{Ανθ}(\alpha, \beta) &= [\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_{\nu+1}]
\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Η ακολουθία $\alpha > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_{\nu-1} > \gamma_\nu$, είναι η ακολουθία των ανθυφαιρετικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης των αριθμών α προς β.

Είναι σημαντικό να προσέξουμε ότι η διαδικασία της ανθυφαίρεσης δύο αριθμών θα τελειώσει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων, λόγω της αρχής του ελαχίστου. Η αρχή του ελαχίστου δεν ισχύει για μεγέθη, άρα η ανθυφαίρεση δύο μεγεθών μπορεί να είναι πεπερασμένη ή άπειρη.

8.3 Γνώμονας

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, αν από ένα τυχαίο σημείο της διαμέτρου ενός παραλληλογράμμου φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές του τότε το ένα από τα δύο παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται μαζί με τα δύο παραπληρώματα καλείται γνώμονας.



Γνώμονας, λοιπόν, είναι το ευθύγραμμο σχήμα το οποίο αποτελείται από τα δύο ίσα παραπληρώματα ΒΕΚΗ, ΔΖΚΘ και ένα παραλληλόγραμμο εκ των περί την διάμετρο, για παράδειγμα το ΓΖΚΗ.

8.4 Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων καθ᾽ υπερβολήν

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4.1. *Δοθέντων ευθυγράμμου τμήματος α και τετραγώνου με πλευρά μ, να κατασκευασθεί ευθύγραμμο τμήμα χ ώστε*

$$\chi * (\alpha + \chi) = \mu^2.$$

Η επίλυση της πρότασης, η οποία αποτελεί παραβολή χωρίων καθ᾽ υπερβολήν, αποδίδεται στους Πυθαγόρειους, ενώ περιλαμβάνεται στα «Στοιχεία» σε πιο γενικευμένη μορφή στο Έκτο Βιβλίο (Προτάσεις 6.29–30).

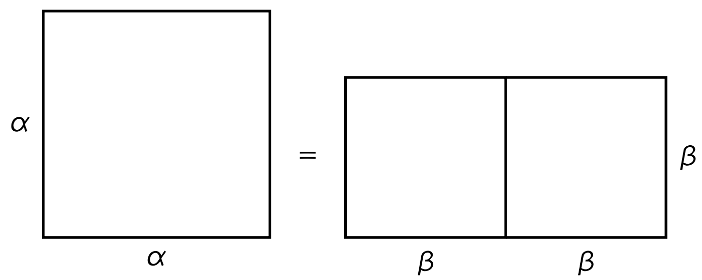
Για την επίλυση της Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων καθ' υπερβολήν ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [ΝΦ, σελ. 240–242].

8.5 Ανακατασκευή της Πυθαγόρειας απόδειξης της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου

Η απόδειξη ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευράς τετραγώνου $\alpha^2 = 2\beta^2$, που παρατίθεται, επιτυγχάνεται με βάση την αυτό-ομοιότητα της εξίσωσης που προκύπτει, σε κάθε βήμα της ανθυφαιρετικής διαδικασίας, από την ανθυφαιρετική αντικατάσταση εξίσωσης Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων καθ' υπερβολήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5.1. *Έστω $\alpha^2 = 2\beta^2$, όπου α είναι το μήκος της διαμέτρου τετραγώνου με πλευρά μήκους β. Τότε* $\text{Ανθ}(\alpha, \beta) = [1, 2, 2, 2, \ldots]$ *και άρα οι ευθείες α, β είναι ασύμμετρες.*

Απόδειξη. 1ο βήμα: Εφόσον $\alpha^2 = 2 * \beta^2$, σαφώς $\alpha > \beta$.

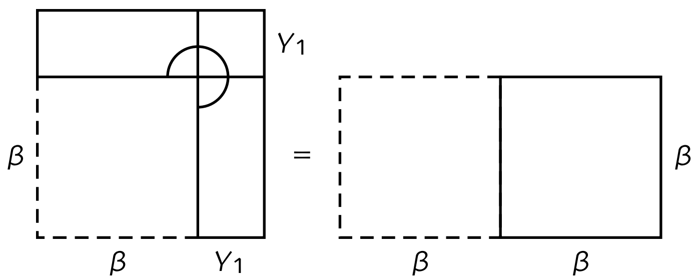


Κατασκευάζεται ευθεία γ_1, ώστε $\alpha = \beta + \gamma_1$. Είναι σαφές ότι η σχέση αυτή είναι ανθυφαιρετική, δηλαδή $\gamma_1 < \beta$, εφόσον αν είχαμε $\gamma_1 \geq \beta$,τότε $\alpha \geq 2\beta$, άρα $\alpha^2 \geq 4\beta^2$, που είναι άτοπο. Άρα,

$$\alpha = \beta + \gamma_1 \text{ με } \gamma_1 < \beta. \qquad \text{(1η Ανθυφαιρετική σχέση)}$$

2ο βήμα: Το επόμενο βήμα είναι ιδιαίτερα κρίσιμο. Πραγματοποιούμε την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\alpha = \beta + \gamma_1$ στην αρχική εξίσωση διαμέτρου προς πλευρά $\alpha^2 = 2\beta^2$, και έχουμε την εξίσωση $(\beta + \gamma_1)^2 = 2\beta^2$. Αυτήν την εξίσωση μπορούμε να την υπολογίσουμε από την βασική Πρόταση 2.4[2] των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

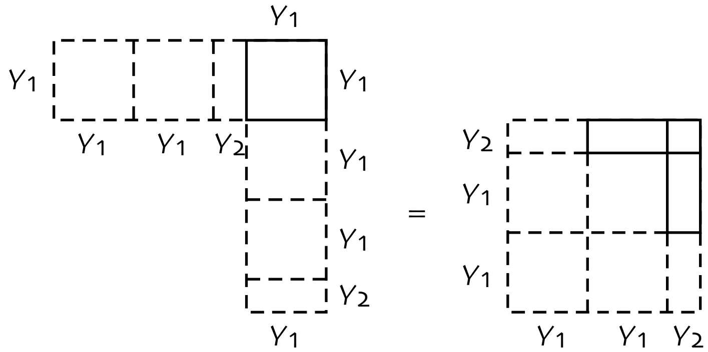
[2]«Στοιχεία», Ευκλείδη, Πρόταση 2.4: Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ σημείο αυτού. Το τετράγωνο με πλευρά ΑΒ $= \alpha + \beta$ είναι ίσο (κατά το εμβαδό) με το άθροισμα του τετραγώνου με πλευρά ΑΓ $= \alpha$, του τετραγώνου με πλευρά ΓΒ $= \beta$, και το διπλάσιο του



Αφαιρούμε το τετράγωνο β^2 και από τα δύο σκέλη, και έχουμε ότι ο Γνώμονας $\Gamma(\beta + \gamma_1, \beta)$ ισούται με το τετράγωνο πλευράς β ή $\Gamma(\beta + \gamma_1, \beta) = \gamma_1(2\beta + \gamma_1) = \beta^2$. Παρατηρούμε όμως τώρα κάτι αξιοσημείωτο: η εξίσωση στην οποία έχουμε καταλήξει είναι μια Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή

$$\gamma_1(2\beta + \gamma_1) = \beta^2. \qquad \text{(Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή)}$$

Είναι σαφές από την εξίσωση $\beta^2 = \gamma_1(2\beta + \gamma_1)$, ότι $\beta^2 > \gamma_1(2\beta)$, άρα $\beta > 2\gamma_1$. Κατασκευάζουμε ευθεία γ_2, ώστε $\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2$. Δεν γνωρίζουμε ακόμη ότι η σχέση αυτή είναι ανθυφαιρετική, ότι δηλαδή $\gamma_1 > \gamma_2$. Τώρα εφαρμόζουμε την (*ανθυφαιρετική όπως θα αποδειχθεί*) αντικατάσταση $\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2$ στην εξίσωση της παραβολής χωρίων $\beta^2 = \gamma_1(2\beta + \gamma_1)$, έχουμε ότι $2(2\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_1 + \gamma_1^2 = (2\gamma_1 + \gamma_2)^2$. Από τις Προτάσεις 2.1[3] και 2.8[4], έπεται ότι $4\gamma_1^2 + 2\gamma_2\gamma_1 + \gamma_1^2 = 4\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2$.



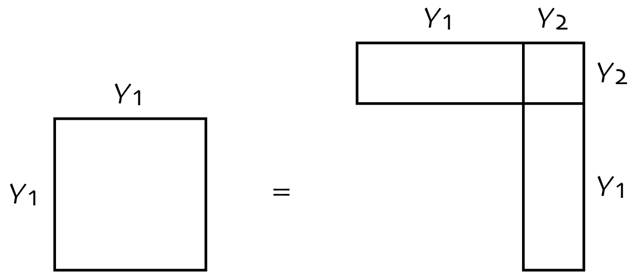
εμβαδού του ορθογωνίου με πλευρές $\text{ΑΓ} = \alpha$, $\text{ΓΒ} = \beta$.

Αν $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} + \text{ΓΒ}$, τότε $\text{ΑΒ} \cdot \text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} \cdot \text{ΑΓ} + \text{ΓΒ} \cdot \text{ΓΒ} + 2 \cdot \text{ΑΓ} \cdot \text{ΓΒ}$ ή $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \beta$.

[3]«Στοιχεία», Ευκλείδη, Πρόταση 2.1: Έστω δύο ευθύγραμμα τμήματα Α και ΒΓ και έστω σημεία Δ, Ε του ΒΓ. Τότε το ορθογώνιο με πλευρές Α και ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των τριών ορθογωνίων με πλευρές Α, ΒΔ, Α, ΔΕ και Α, ΕΓ αντίστοιχα.

[4]«Στοιχεία», Ευκλείδη, Πρόταση 2.8: Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Γ σημείο αυτού. Το άθροισμα τεσσάρων ορθογωνίων με πλευρές ίσες με τα ΑΒ, ΒΓ και ενός τετραγώνου με πλευρά ΑΓ ισούται με το τετράγωνο με πλευρά ΑΔ ίση με το προεκτεταμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ κατά ΒΔ = ΒΓ.

Αφαιρούμε το ορθογώνιο $4\gamma_1^2 + 2\gamma_2\gamma_1 = 2\gamma_1(2\gamma_1 + \gamma_2)$ και από τα δύο σκέλη, οπότε



$$\gamma_1^2 = \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1) = 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2.$$

(Πυθαγόρεια παραβολή χωρίων καθ' υπερβολή)

Από την ισότητα $\gamma_1^2 = 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2$, το τετράγωνο $\gamma_1^2 > 2\gamma_1\gamma_2$, άρα $\gamma_1 > 2\gamma_2 > \gamma_2$. Επομένως, η παραπάνω σχέση $\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 > \gamma_2$ είναι ανθυφαιρετική.

$$\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_2 < \gamma_1. \qquad \text{(2η Ανθυφαιρετική σχέση)}$$

Παρατηρούμε ότι, στο δεύτερο βήμα, αρχίσαμε από την εξίσωση Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων

$$\beta_2 = \Gamma(\beta + \gamma_1, \beta) = \gamma_1(2\beta + \gamma_1)$$

και εφαρμόζοντας την ανθυφαιρετική αντικατάσταση $\beta = 2\gamma_1 + \gamma_2$ η οποία προκύπτει εσωτερικά, από τη μορφή της εξίσωσης, καταλήγουμε στην εξίσωση Πυθαγόρειας παραβολής χωρίων

$$\gamma_1^2 = \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1) = \gamma_2(2\gamma_1 + \gamma_2)$$

η οποία έχει ακριβώς την αυτή μορφή και σχήμα με τη αρχική.
Υπ' αυτή την έννοια η παραβολή χωρίων $\beta^2 = \gamma_1(2\beta + \gamma_1)$ είναι αυτό-όμοια ως προς τη ανθυφαιρετική αντικατάσταση, δηλαδή, η ανθυφαίρεση διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου έχει τελικά την εξής μορφή:

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 * \beta + \gamma_1 \text{ με } \beta > \gamma_1, \\ \beta & = & 2 * \gamma_1 + \gamma_2 \text{ με } \gamma_1 > \gamma_2, \\ & \vdots & \\ \gamma_{2n-2} & = & 2 * \gamma_{2n-1} + \gamma_{2n} \text{ με } \gamma_{2n-1} > \gamma_{2n}, \\ \gamma_{2n-1} & = & 2 * \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1} \text{ με } \gamma_{2n} > \gamma_{2n+1}, \\ \gamma_{2n} & = & 2 * \gamma_{2n+1} + \gamma_{2n+2} \text{ με } \gamma_{2n+1} > \gamma_{2n+2}, \\ & \vdots & \\ \text{Ανθ}(\alpha, \beta) & = & [1, 2, 2, 2, \ldots] \end{array}\right\} \qquad (8.2)$$

□

8.6 Παρατηρήσεις

Τα πλεονεκτήματα που έχει η παραπάνω μέθοδος απόδειξης ασυμμετρίας, έναντι των άλλων, επιγραμματικά είναι τα εξής:

(i) Συνδέει την ασυμμετρία με το άπειρο. Η σύνδεση επιτυγχάνεται με την απόδειξη της Προτάσης 10.2[5] των «Στοιχείων», μέσω της διαδικασίας της ανθυφαίρεσης, όπου η ασυμμετρία των μεγεθών α, β προκύπτει από την άπειρη ανθυφαίρεσή τους.

(ii) Είναι ανθυφαιρετική, και προσιδιάζει με την γνώση που είχαν οι Πυθαγόρειοι για τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς (ή ρητές διαμέτρους). Οι πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί εφόσον αποτελούν τις ρητές πεπερασμένες ανθυφαιρετικές προσεγγίσεις της άπειρης ανθυφαίρεσης διαμέτρου προς πλευράς τετραγώνου, έπονται[6] της ανακάλυψης της ασυμμετρίας διαμέτρου πλευράς τετραγώνου.

(iii) Χρησιμοποιεί εργαλεία που περιλαμβάνονται στο Δεύτερο βιβλίο των «Στοιχείων», το οποίο στην αρχική του μορφή περιέχει τη γεωμετρική γνώση των Πυθαγορείων.

(iv) Ικανοποιεί το κριτήριο ασυμμετρίας που διαβάζουμε στον Πρόκλο[7], ότι η ασυμμετρία πρέπει να εμφανίζει μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία γνωμόνων.

Το πιο σημαντικό, ίσως, πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου απόδειξης είναι ότι, σε αντιδιαστολή με την επικρατούσα άποψη σχετικά με τις συνέπειες της ανακάλυψης της ασυμμετρίας, η ανακάλυψη αυτή, όχι μόνο δεν αποτελεί «αντιπαράδειγμα» και δεν οδηγεί σε κρίση θεμελίων της Σχολής, αλλά είναι απόλυτα συμβατή με τις θεμελιώδεις φιλοσοφικές αρχές. Στην παρακάτω παράγραφο, παρουσιάζεται συνοπτικά πώς οικοδομούνται οι αρχές της Πυθαγόρειας Φιλοσοφίας με το κορυφαίο επίτευγμα της Πυθαγόρειας Γεωμετρίας.

[5]«Στοιχεία», Ευκλείδη, Πρόταση 10.2 (ανθυφαιρετικό κριτήριο ασυμμετρίας μεγεθών): «Αν η ανθυφαίρεση δύο μεγεθών α, β, με $\alpha > \beta$, είναι άπειρη, τότε τα μεγέθη α, β είναι ασύμμετρα».

Η Πρόταση 10.2 έχει μια στοιχειώδη απόδειξη, διαφορετική από αυτή των «Στοιχείων», χωρίς να γίνεται χρήση της Ευδόξειας συνθήκης (Ορισμός 4 του Πέμπτου Βιβλίου), και τεκμηριώνεται ότι ήταν σαφώς γνωστή στους Πυθαγόρειους [ΝΦ, σελ.322–323].

[6]Επομένως, η μέθοδός με την οποία οι Πυθαγόρειοι αναζήτησαν αυτές τις προσεγγίσεις, μετά την απόδειξη της ασυμμετρίας διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, είναι συμβατή μόνο με την υπόθεση ότι οι Πυθαγόρειοι, σε αυτή τη χρονική στιγμή, ήταν ήδη γνώστες του πλήρους ανθυφαιρετικού αναπτύγματος της διαμέτρου προς την πλευρά τετραγώνου.

[7]Πρόκλος, εις Ευκλείδην 59,15–61,17.

8.7 Σύνδεση Πυθαγόρειας Φιλοσοφίας–Πυθαγόρειας Γεωμετρίας

Η Πυθαγόρεια Φιλοσοφία προκύπτει από την ενασχόληση των Πυθαγορείων με τα μαθηματικά, ιδιαίτερα δε από την απόδειξη της ασυμμετρίας. Η Πυθαγόρεια Φιλοσοφία έχει ως αρχές το «Άπειρον» και το «Πέρας», η μείξη των οποίων οδηγεί στο «Αρτιοπέριττον», Πυθαγόρειον Εν, που παράγει τους Πυθαγόρειους αριθμούς από τους οποίους κατασκευάζονται «πάντα τα όντα», «όλος ο ουρανός». Οι δύο αρχές, Άπειρον και Πέρας, αποτελούν τη μεταφορά σε φιλοσοφικό επίπεδο του άπειρου ανθυφαιρετικού αναπτύγματος, το οποίο «περαίνεται» μέσω της αυτό-ομοιότητας της παραβολής χωρίων καθ᾽ υπερβολή. Πιο συγκεκριμένα, το Πυθαγόρειο Άπειρο αντιστοιχεί στην άπειρη ανθυφαίρεση διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου, ενώ το Πυθαγόρειο Πέρας αντιστοιχεί στην «περάτωση» αυτής της άπειρης διαδικασίας που επιτυγχάνεται μέσω της διατήρησης του αυτού σχήματος σε κάθε στάδιο της ανθυφαίρεσης (η ανθυφαιρετική δυάδα μεγεθών που προκύπτει σε κάθε στάδιο ικανοποιεί την παραβολή χωρίων καθ᾽ υπερβολήν). Οι Πυθαγόρειοι, πράγματι, πρεσβεύουν ότι «τα πάντα είναι αριθμοί», αυτός όμως σε καμία περίπτωση δεν είναι ασύμβατο με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, τουναντίον αποτελεί βάση πάνω στην οποία θεμελιώνονται οι Πυθαγόρειοι αριθμοί και τελικά η φιλοσοφία τους.

Αναφορές

[ΔΑ] Δ. Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Εκδ. Νεφελη, 1985.

[ΝΦ] Σ. Νεγρεπόντης, Β. Φαρμάκη, *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, *Τόμος I*, Εκδ. Εκκρεμες, 2019.

[Ε] Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Σύγχρονη Μαθηματική Απόδοση Ν. Ροκοπάνος, Σ. Σακελλάρη, Α. Τσολομύτης. Ηλεκτρονική έκδοση: https://myria.math.aegean.gr/elements/ Θεωρός

[B] I.G. Basmakova, *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, μετάφραση Ι. Βανδουλάκης, Εκδ. Παπασωτηριου, 2014.

[G] A.C. Grayling, *Η Ιστορία της Φιλοσοφίας*, μετάφραση Π. Γεωργίου, Εκδ. Πατακη, 2019.

[vdW] B.L. van der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, μετάφραση Γ. Χριστιανίδης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

Ομιλία 9

Η υπόθεση του συνεχούς στην Ανάλυση

Θεμιστοκλής Μήτσης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

mitsis@uoc.gr

Προαπαιτούμενα: Ισοπληθικότητα, αριθμησιμότητα, υπεραριθμησιμότητα συνόλων.

Ένα από τα πρώτα αποτελέσματα που μαθαίνει κανείς στην Ανάλυση είναι ότι υπάρχουν πραγματικοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί. Στην πραγματικότητα, το $\mathbb{R}$ είναι «τρομακτικά μεγαλύτερο» από το $\mathbb{Q}$, καθώς το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο (αφού είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο τού $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$), ενώ το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Η πρώτη απόδειξη αυτού οφείλεται στον Cantor και, σε σύγχρονη γλώσσα, είναι η ακόλουθη:

Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. Τότε $[0,1] = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, για κάποια a_n. Τώρα, χωρίζουμε το $[0,1]$ σε τρία κλειστά υποδιαστήματα ίσου μήκους, και έστω I_1 το αριστερότερο εξ αυτών για το οποίο $a_1 \notin I_1$. Στη συνέχεια, χωρίζουμε το I_1 σε τρία κλειστά υποδιαστήματα ίσου μήκους, και έστω I_2 το αριστερότερο εξ αυτών για το οποίο $a_2 \notin I_2$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n (με $a_n \notin I_n$), το μήκος των οποίων, $1/3^n$, τείνει στο μηδέν. Λόγω τής πληρότητας των πραγματικών (αυτή είναι, εδώ, η κρίσιμη ιδιότητα), έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \{a\},$$

για κάποιο $a \in [0,1]$. Αλλά το a πρέπει να είναι κάποιο a_{n_0}, το οποίο είναι άτοπο, καθώς $a_{n_0} \notin I_{n_0}$ ενώ το a ανήκει σε όλα τα I_n. □

Όποιο υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ μπορούσε να σκεφτεί ο Cantor ήταν είτε αριθμήσιμο είτε ισοπληθικό με ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αυτό τον οδήγησε να διατυπώσει την **Υπόθεση τού Συνεχούς (Continuum Hypothesis–CH)**, δηλαδή την εικασία ότι κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Η **CH** αποδείχθηκε ένα (κυριολεκτικά!) αδύνατο πρόβλημα. Για πολλά χρόνια, οι μαθηματικοί δεν μπορούσαν ούτε να την αποδείξουν ούτε να βρουν ένα αντιπαράδειγμα. Μάλιστα, η **CH** ήταν το πρώτο από τα διάσημα 23 ανοιχτά (τότε) προβλήματα που διατύπωσε ο Hilbert το 1900, η προσπάθεια επίλυσης των οποίων διαμόρφωσε σε μεγάλο βαθμό τα σύγχρονα μαθηματικά. Τελικά, από τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων των Gödel (1938) και Cohen (1963) προέκυψε ότι ούτε η **CH** ούτε η άρνησή της μπορεί να αποδειχθεί στα πλαίσια τής συνηθισμένης θεωρίας συνόλων (Zermelo–Fraenkel), είτε δεχτεί κανείς το Αξίωμα τής Επιλογής είτε όχι. Αυτό θυμίζει το αίτημα των παραλλήλων στη γεωμερία, το οποίο δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί ούτε να καταρριφθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα τής Ευκλείδειας γεωμετρίας, οδηγώντας σε Ευκλείδειες και μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες. Ανάλογα, έχουμε μοντέλα τής θεωρίας συνόλων στα οποία ισχύει η **CH**, και μοντέλα στα οποία δεν ισχύει. Με άλλα λόγια, είναι απόλυτα «νόμιμο» να επιλέξει κανείς το μαθηματικό σύμπαν στο οποίο θέλει να ζει, και να δεχτεί ή να μην δεχτεί την **CH**. Ωστόσο, σε αντίθεση με την περίπτωση τού αιτήματος των παραλλήλων, όπου οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες (προς το παρόν) μοντελοποιούν καλύτερα τον μακρόκοσμο, δεν φαίνεται να υπάρχουν (προς το παρόν) φυσικές ενδείξεις που να «συνηγορούν» υπέρ ή κατά τής **CH**.

Παρότι η **CH** δεν μπορεί να αποδειχθεί, τίθεται με εντελώς φυσικό τρόπο το ερώτημα κατά πόσο «φυσιολογικές» κλάσεις υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$ την ικανοποιούν. Στα πλαίσια τής Ανάλυσης, τα (τοπολογικώς) φυσιολογικά σύνολα είναι τα σύνολα Borel, δηλαδή η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα διαστήματα. Όλα τα σύνολα Borel μπορούν, με συστηματικό τρόπο, να τοποθετηθούν σε μια ιεραρχία συνόλων αυξανόμενης πολυπλοκότητας ως εξής: Στο επίπεδο 0 βρίσκονται τα ανοιχτά διαστήματα. Στο επίπεδο 1 βρίσκονται όλες οι αριθμήσιμες ενώσεις συνόλων τού επιπέδου 0 (δηλαδή όλα τα ανοιχτά σύνολα) και τα συμπληρώματά τους (δηλαδή όλα τα κλειστά σύνολα). Στο επίπεδο 2 βρίσκονται οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (σύνολα F_σ) και τα συμπληρώματά τους (σύνολα G_δ). Στο επόμενο επίπεδο βρίσκονται οι αριθμήσιμες ενώσεις G_δ συνόλων (σύνολα $G_{\delta\sigma}$) και τα συμπληρώματά τους (σύνολα $F_{\sigma\delta}$). Μετά από υπεραριθμήσιμο πλήθος επιπέδων (μέχρι τον πρώτο υπεραριθμήσιμο διατακτικό αριθμό), παίρνουμε όλα τα σύνολα Borel. (Αν δεν γνωρίζετε τι είναι διατακτικός αριθμός μπορείτε να αγνοήσετε την προηγούμενη πρόταση και την υπόλοιπη παράγραφο). Συγκεκριμένα, έστω $\mathcal{S}_1$ η οικογένεια των ανοιχτών συνόλων. Προχωράμε με υπερπεπερασμένη επαγωγή. Αν για κάποιο $1 < \alpha < \omega_1$ έχουν οριστεί τα $\mathcal{S}_\beta$ για κάθε $\beta < \alpha$, θέτουμε $\mathcal{P}_\beta$ να είναι η οικογένεια των συμπληρωμάτων των συνόλων τής $\mathcal{S}_\beta$, και ορίζουμε $\mathcal{S}_\alpha$ να είναι η οικογένεια των συνόλων τής μορφής

$$\bigcup_i S_{\beta_i},$$

όπου $\beta_i < \alpha$ και $S_{\beta_i} \in \mathcal{P}_{\beta_i}$. Τα σύνολα Borel είναι ακριβώς η οικογένεια

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{S}_\alpha.$$

Παρατηρήστε ότι οι οικογένειες $\mathcal{S}_\alpha$ και $\mathcal{P}_\alpha$ απαρτίζουν τα σύνολα στο επίπεδο α τής ιεραρχίας.

Αποτελεί ένα βασικό αποτέλεσμα τής Περιγραφικής Συνολοθεωρίας (τής περιοχής των μαθηματικών που ξεκίνησε στις αρχές τού προηγούμενου αιώνα με αφορμή ερωτήματα που αφορούν στην πολυπλοκότητα των υποσυνόλων τού $\mathbb{R}$) ότι τα σύνολα Borel ικανοποιούν την **CH**, δηλαδή ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο Borel είναι ισοπληθικό με το σύνολο των πραγματικών. Εδώ, επειδή είμαστε ταπεινόφρονες, θα αρκεστούμε στην απόδειξη μόνο για το επίπεδο 1... Θα δείξουμε δηλαδή ότι τα ανοιχτά και τα κλειστά σύνολα ικανοποιούν την **CH**. Αυτό είναι προφανές για τα ανοιχτά σύνολα, αφού οποιοδήποτε διάστημα είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, και ένα ανοιχτό σύνολο αποτελείται από διαστήματα. Για τα κλειστά υπεραριθμήσιμα σύνολα δεν είναι καθόλου προφανές.

Στην απόδειξη θα χρειαστούμε μια σημαντική παρατήρηση: Το $[0,1]$ (άρα και το $\mathbb{R}$) είναι ισοπληθικό με το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή το σύνολο όλων των δυαδικών ακολουθιών. Πράγματι, η απεικόνιση που στέλνει μια δυαδική ακολουθία s στον αριθμό

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{2^n}$$

είναι επί τού $[0,1]$. Για να βρούμε μια 1-1 απεικόνιση από το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο $[0,1]$, χρησιμοποιούμε την κατασκευή τού συνόλου Cantor (Cantor scheme). Χωρίζουμε το $[0,1]$ σε τρία κλειστά υποδιαστήματα ίσου μήκους, πετάμε έξω το μεσαίο, και αυτά που μένουν τα ονομάζουμε I_0 και I_1 (από αριστερά προς τα δεξιά). Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο στα I_0 και I_1, δηλαδή τα τριχοτομούμε, πετάμε έξω τα δυο μεσαία και παίρνουμε τα I_{00}

και I_{01} από το I_0, και τα I_{10} και I_{11} από το I_1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, για κάθε $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ έχουμε μια φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων $(I_{s(1)s(2)\cdots s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε το σύνολο

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)s(2)\cdots s(n)}$$

είναι μονοσύνολο, και η απεικόνιση που στέλνει το s στο μοναδικό αυτό σημείο αυτής της τομής είναι 1-1 από το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι το

$$\bigcup_{s\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)s(2)\cdots s(n)}$$

είναι το σύνολο Cantor. □

Έτσι ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε υπεραριθμήσιμο κλειστό σύνολο, μπορούμε να βρούμε μια 1-1 απεικόνιση από το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο σύνολο αυτό. Θα χρειαστούμε έναν ορισμό: Ένα σύνολο λέγεται **τέλειο** αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία (πχ κλειστά διαστήματα, σύνολο Cantor). Δείχνουμε έπειτα το ακόλουθο αποτέλεσμα που οφείλεται στον Cantor: Κάθε μη κενό τέλειο σύνολο είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Εστω λοιπόν $P \subset \mathbb{R}$ ένα τέλειο σύνολο. Αρκεί να βρούμε μια 1-1 απεικόνιση από το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο P. Αφού το P είναι τέλειο, υπάρχουν δυο ξένα κλειστά διαστήματα I_0 και I_1 με μήκος μικρότερο από 1 το καθένα ώστε $I_0 \cap P \neq \emptyset$ και $I_1 \cap P \neq \emptyset$. Ανάλογα, μέσα στο I_0, υπάρχουν δυο κλειστά διαστήματα I_{00} και I_{01} με μήκος μικρότερο από 1/2 το καθένα, τα οποία τέμνουν το P. Ομοίως μέσα στο I_1, βρίσκουμε I_{10} και I_{11}. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, για κάθε $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_{s(1)s(2)\cdots s(n)}$, το μήκος των οποίων τείνει στο μηδέν, και η οποία συρρικνώνεται σε κάποιο σημείο τού P, αφού το P είναι κλειστό. Έτσι, η απεικόνιση που στέλνει το s στο μοναδικό στοιχείο του μονοσυνόλου

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s(1)s(2)\cdots s(n)}$$

είναι 1-1 από το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο P. (Δηλαδή το P περιέχει ένα αντίγραφο τού συνόλου Cantor) □

Η απόδειξη τής υπόθεσης τού συνεχούς για κλειστά σύνολα ολοκληρώνεται τώρα με το θεώρημα Cantor-Bendixson: Αν $F \subset \mathbb{R}$ είναι κλειστό, τότε $F = P \cup N$, όπου P τέλειο (ενδεχομένως κενό) και N το πολύ αριθμήσιμο. Για να το δούμε αυτό, ονομάζουμε ένα σημείο x **σημείο συμπύκνωσης** τού F αν κάθε περιοχή τού x περιέχει υπεραριθμήσιμα στοιχεία τού F. Παρατηρούμε ότι αν C είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης τού F, τότε το C^c είναι ανοιχτό, άρα το C κλειστό. Γράφουμε τώρα

$$F = (F \cap C) \cup (F \cap C^c).$$

Τότε το $F \cap C^c$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, γιατί αν $x \in F \cap C^c$ τότε υπάρχει ανοιχτό διάστημα I_x με ρητά άκρα και $x \in I_x$ ώστε το $F \cap I_x$ να είναι το πολύ αριθμήσιμο. Έτσι αν J_n είναι μια αρίθμηση των I_x, έχουμε

$$F \cap C^c \subset \bigcup_n (F \cap J_n).$$

Το $F \cap C$ είναι κλειστό και αν $x \in F \cap C$ και I τυχούσα περιοχή τού x, τότε το $F \cap I$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα το

$$(F \cap I) \setminus (F \cap C^c)$$

είναι άπειρο. Αλλά το σύνολο αυτό είναι το $F \cap C \cap I$. Δηλαδή το x είναι σημείο συσσώρευσης τού $F \cap C$. Έτσι, προκύπτει η ζητούμενη μορφή $F = P \cup N$, όπου το N είναι το $F \cap C^c$, και το P είναι το $F \cap C$. □

Μπορούμε να αποδείξουμε την υπόθεση τού συνεχούς για σύνολα πιο πολύπλοκα (τοπολογικώς) από τα σύνολα Borel; Η απάντηση είναι καταφατική για τα **αναλυτικά** σύνολα. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται αναλυτικό αν

$$A = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{s(1)s(2)\cdots s(n)},$$

όπου, για κάθε $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, η $F_{s(1)s(2)\cdots s(n)}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων (επιτρέπονται κενά και μη φραγμένα σύνολα), το μήκος των οποίων τείνει στο μηδέν. Παρατηρήστε την αναλογία με το Cantor scheme. Αποδεικνύεται ότι όλα τα σύνολα Borel είναι αναλυτικά, και ότι η συνεχής εικόνα ενός συνόλου Borel είναι αναλυτικό σύνολο. Υπάρχει μια ολόκληρη ιεραρχία συνόλων που ξεκινά από τα αναλυτικά σύνολα, αλλά αυτά είναι τα μοναδικά για τα οποία μπορούμε να αποδείξουμε την υπόθεση τού συνεχούς χρησιμοποιώντας τα συνηθισμένα αξιώματα τής συνολοθεωρίας. Για παράδειγμα, γενικά δεν μπορούμε να αποδείξουμε την υπόθεση τού συνεχούς ούτε καν για την οικογένεια των συμπληρωμάτων των αναλυτικών συνόλων.

Τι συμβαίνει με άλλες οικογένειες συνόλων οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν φυσιολογικές από τη σκοπιά τής Ανάλυσης; Συγκεκριμένα, τι συμβαίνει με τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα; Δεν μπορούμε να αποδείξουμε την υπόθεση τού συνεχούς για τα σύνολα μέτρου μηδέν! Αυτό προκύπτει από το ότι το σύνολο Cantor (το οποίο είναι μηδενικού μέτρου) είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Ωστόσο, η υπόθεση τού συνεχούς ισχύει για σύνολα θετικού μέτρου. Αυτό προκύπτει από το ότι αν το $E \subset \mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο Lebesgue μετρήσιμο με θετικό μέτρο, τότε το E έχει υπεραριθμήσιμο κλειστό υποσύνολο (και άρα είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$), γιατί (από την κανονικότητα τού μέτρου)

$$m(E) = \sup\{m(F) : F \subset E \text{ κλειστό}\}.$$

Αναφορές

[1] A. Dasgupta, *Set theory, with an introduction to real pointsets*, Birkhäuser, 2014.

Ομιλία 10

Αντιλήψεις για την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας: Ευκλείδης, G.F. Leibniz, D. Hilbert

Κωνσταντίνα Ζορμπαλά

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
tina.zormbala@aegean.gr

Προαπαιτούμενα: —

10.1 Εισαγωγή

Οι απαρχές της αξιωματικής θεμελίωσης των Μαθηματικών βρίσκονται στην Αρχαία Ελλάδα γύρω στον 4ο αιώνα πΧ. Τα «ΣΤΟΙΧΕΙΑ» του Ευκλείδη (γύρω στα 300 πΧ) είναι το πρώτο έργο, στο οποίο παρουσιάζονται όλες οι μαθηματικές γνώσεις της τότε εποχής με έναν αξιωματικό τρόπο. Τα αξιώματα της θεωρίας του είναι προφανείς δηλώσεις, που τα θεωρήματά της προκύπτουν με έναν λογικό τρόπο από τα αξιώματα ή από τα προηγούμενα θεωρήματα.

Στα τέλη του 19ου αιώνα παρουσιάστηκε από τον μαθηματικό David Hibert το πρώτο τελειοποιημένο αξιωματικό σύστημα της Γεωμετρίας από την εποχή του Ευκλείδη. Στο έργο του «Grundlagen der Geometrie» (1899) ο

Hilbert διαμόρφωσε ένα αξιωματικό σύστημα που έπρεπε να ικανοποιεί τις αρχές της συνέπειας, ανεξαρτησίας και πληρότητας, και το οποίο έδινε τη δυνατότητα για πολλαπλές ερμηνείες. Μεγάλο μέρος του έργου του είναι αφιερωμένο στην αξιωματική μέθοδο στα μαθηματικά.

Στην παρούσα ομιλία θα παρουσιάσουμε αυτές τις δύο ιστορικές στιγμές στην ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου για να δούμε τι σημαίνει αξιωματική θεμελίωση στον Ευκλείδη και τι σημαίνει αξιωματική θεμελίωση στον Hilbert. Αυτή η πορεία έχει πολλούς ενδιάμεσους σταθμούς. Εμείς θα επιλέξουμε έναν: μία θεμελίωση που παρουσίασε ο φιλόσοφος και μαθηματικός G.F. Leibniz τον 17ον αιώνα.

Πρώτα θα ξεκινήσουμε με τον Ευκλείδη το 300 π.Χ. Θα παρουσιάσουμε την αξιωματική θεμελίωση από το 1ο Βιβλίο των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ και κάποια χαρακτηριστικά της γεωμετρίας του Ευκλείδη. Θα δούμε ότι η θεμελίωση των γεωμετρικών εννοιών είναι επηρεασμένη από τις κυρίαρχες φιλοσοφικές θεωρίες του καιρού του.

Θα συνεχίσουμε με το μαθηματικό David Hibert και θα επικεντρωθούμε στο έργο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας» («Grundlagen der Geometrie») στα 1899. Θα δούμε ότι ο Hilbert στο έργο του προσπάθησε να συγκροτήσει ένα αξιωματικό σύστημα που η θεμελίωσή του να είναι ανεξάρτητη από την παρατήρηση και από την πραγματικότητα.

Θα τελειώσουμε με το έργο του G.F. Leibniz «geometrica characteristica» στα τέλη του 17ου αιώνα. Θα δούμε ότι με τον Leibniz αρχίζουν να διαμορφώνονται τα πρώτα βήματα στην πορεία για μια νέα αντίληψη για τη θεμελίωση των γεωμετρικών εννοιών, που απομακρύνεται όλο και περισσότερο από την εμπειρία και την παρατήρηση και γίνεται πιο αφηρημένη και τυποποιημένη.

10.2 Ο Ευκλείδης και το 1ο βιβλίο των Στοιχείων

Γύρω στα 300 πΧ στην Αλεξάνδρεια χρονολογείται ένα βιβλίο, τα στοιχεια. Αποτελείται από 13 βιβλία (κεφάλαια θα τα λέγαμε σήμερα) και συγγραφέας του θεωρείται ο Ευκλείδης.[1] Το έργο δεν διασώζεται, έχουμε μετέπειτα παρουσιάσεις του από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρινό αλλά και μεταφράσεις από αραβικές αντιγραφές του.[2] Τα στοιχεια περιλαμβάνουν όλη την τότε μαθηματική γνώση του καιρού: γνώση που είχε παραχθεί από τους Πυθαγόρειους, τον Εύδοξο, τον Θεαίτητο κα.

Το καινούργιο που φέρνει ο Ευκλείδης είναι η θεμελίωση των γεωμετρικών εννοιών με έναν αξιωματικό (ή αλλιώς παραγωγικό) τρόπο. Οι αρχές που τηρούνται είναι:

[1]Περισσότερα για τον Ευκλείδη βλέπε [Sia].

[2]Περισσότερα για τα στοιχεια του Ευκλείδη, βλέπε [Σια].

1ον) οι μαθηματικές ιδιότητες αποδεικνύονται μέσα από λογικούς συλλογισμούς, είναι τα λεγόμενα θεωρήματα, και

2ον) στην αρχή της μαθηματικής θεωρίας τίθενται ιδιότητες που είναι προφανείς και δεν αποδεικνύονται.

Αυτά τα τελευταία στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ ονομάζονται αιτήματα και κοινές έννοιες. Στην αρχή των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, ο Ευκλείδης πριν από τα αιτήματα και στις κοινές έννοιες, παραθέτει τους ορισμούς βασικών γεωμετρικών εννοιών, που τους αποκαλεί όρους.

Ήδη από τον 5ον αιώνα πΧ οι μαθηματικοί αποδεικνύουν τις μαθηματικές ιδιότητες βλέπε χαρακτηριστικό παράδειγμα τους μηνίσκους του Ιπποκράτη του Χίου. Την αποδεικτική διαδικασία ακολουθεί και ο Ευκλείδης εισάγοντας, με βάση τις μέχρι τώρα διασωζόμενες πηγές, την αξιωματική θεμελίωση.

Πενήντα χρόνια περίπου πριν τον Ευκλείδη συγκροτείται με συστηματικό τρόπο η πρώτη επιστημολογική θεωρία από τον φιλόσοφο Αριστοτέλη (384–322 πΧ). Αυτός που θεωρείται πατέρας της Λογικής γράφει με ποιο τρόπο μπορούμε να μάθουμε, να γνωρίσουμε: «μπορούμε να γνωρίσουμε και μέσω αποδείξεως. Ονομάζω απόδειξη τον επιστημονικό συλλογισμό.»[3] Για πρώτη φορά ορίζεται η έννοια της απόδειξης μέσω του επιστημονικού συλλογισμού και κατ' επέκταση ορίζεται η επιστήμη. Όλα πρέπει να αποδεικνύονται αλλά στην αρχή της θεωρίας ο Αριστοτέλης θέτει τις λεγόμενες «αρχαί». Είναι προτάσεις που λαμβάνονται χωρίς απόδειξη. Μερικές από αυτές σύμφωνα με τον Αριστοτέλη είναι η θέση, το αξίωμα, τα κοινά, τα ίδια.[4] Έτσι σύμφωνα με την επιστημολογική θεωρία του Αριστοτέλη υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες προτάσεων: αυτές που αποδεικνύονται και αυτές που είναι αναπόδεικτες.

Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω, αυτόν ακριβώς τον διαχωρισμό βλέπουμε στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ του Ευκλείδη. Στην αρχή του 1ου Βιβλίου παρουσιάζονται τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες, που είναι οι προτάσεις που δεν αποδεικνύονται, και ακολουθούν οι ιδιότητες, που όλες αποδεικνύονται.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μέρος από την αξιωματική θεμελίωση των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ—ορισμούς, αιτήματα, κοινές έννοιες.[5]

Όροι:

- Το σημείο δεν έχει μέρος.
- Η γραμμή έχει μήκος, αλλά όχι πλάτος.

[3]«*Εἰ μὲν οὖν καὶ ἕτερος ἔστι τοῦ ἐπίστασθαι τρόπος, ὕστερον ἐροῦμεν, φαμὲν δὲ καὶ δι' ἀποδείξεως εἰδέναι. ἀπόδειξιν δὲ λέγω συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν*» ([ΔΑ] Βιβλίο 1, Κεφάλαιο 2, 71b 16–18).

[4]Για περισσότερα, βλέπε [ΔΑ] 71b.

[5]Οι όροι, τα αιτήματα, οι κοινές έννοιες και οι προτάσεις βρίσκονται στο αρχαίο κείμενο και σε μετάφραση στο Σταμάτης, 1975. Σε κάποιες προτάσεις κάνουμε δική μας μετάφραση.

- Η επιφάνεια έχει μόνο μήκος και πλάτος.

Οι ορισμοί του σημείου, της γραμμής, της επιφάνειας είναι περιγραφικοί ορισμοί και ταυτόχρονα αφαιρετικοί. Γιατί δεν υπάρχει κάτι που είναι χωρίς μέρος, κάθε αντικείμενο στον φυσικό χώρο έχει και μήκος και πλάτος και ύψος, δηλαδή είναι τρισδιάστατο. Στον Ευκλείδη όμως η γραμμή είναι μόνο μήκος (δηλαδή σήμερα θα λέγαμε ότι είναι μιας διάστασης) και η επιφάνεια είναι δύο διαστάσεων. Με άλλα λόγια, στον Ευκλείδη οι ορισμοί είναι μεν περιγραφικοί αλλά παράγονται μέσα από μια αφαιρετική διαδικασία. Στην ουσία, ο Ευκλείδης περιγράφει τις έννοιες όχι ως πραγματικά αντικείμενα αλλά ως ιδέες των αντικειμένων.

Αυτό παραπέμπει στη φιλοσοφική θεωρία του Πλατωνισμού. Σύμφωνα με αυτήν υπάρχουν δύο κόσμοι: ο φυσικός κόσμος, ο κόσμος των αισθήσεων, που είναι εμπειρικός, απατηλός, πρόσκαιρος και ο κόσμος των ιδεών, ο ιδεατός κόσμος, που είναι αληθινός, αιώνιος, αμετάβλητος. Από τη μια υπάρχει το φυσικό σύμπαν και από την άλλη το μαθηματικό σύμπαν. Για τον Πλατωνισμό αυτά τα δύο σύμπαντα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δεν σημαίνει ότι δεν συσχετίζονται. Πάντως ο Πλατωνισμός ως φιλοσοφία δεν εξηγεί αυτήν τη συσχέτιση.[6]

Έτσι στον φυσικό κόσμο δεν υπάρχει κάτι που έχει μέρος μόνο (σημείο), δεν υπάρχει κάτι που έχει μόνο μήκος (γραμμή) και δεν υπάρχει κάτι που έχει μόνο μήκος και πλάτος (επιφάνεια). Στον ιδεατό, τον μαθηματικό κόσμο βρίσκεται το πραγματικό, εκεί υπάρχουν οι ιδέες των αντικειμένων. Σε αυτόν τον κόσμο, το σημείο δεν έχει μέρος, η γραμμή έχει μόνο μήκος και η επιφάνεια έχει μόνο μήκος και πλάτος. Ο Ιδεαλισμός του Πλάτωνα παρουσιάζεται με έναν αλληγορικό τρόπο στο έργο του «Πολιτεία», στην αλληγορία του σπηλαίου.[7]

> Συνοψίζοντας:
> τα ΣΤΟΙΧΕΙΑ διαπερνώνται από δύο κυρίαρχες φιλοσοφικές θεωρίες της εποχής:
>
> τον Ιδεαλισμό του Πλάτωνα και
>
> την επιστημολογική θεωρία του Αριστοτέλη.

Παραθέτουμε κάποιους ακόμη ορισμούς βασικών γεωμετρικών εννοιών από τα ΣΤΟΙΧΕΙΑ, που θα χρειαστούμε παρακάτω στον Hilbert και τον Leibniz: τους ορισμούς της ευθείας, του επιπέδου και του κύκλου.

- Ευθεία γραμμή είναι αυτή που βρίσκεται εξ ίσου ως προς τα σημεία της.

[6] Για τον Πλατωνισμό βλέπε [Sh2] και [Sh1].
[7] Για την «αλληγορία του σπηλαίου» βλέπε [Π] 514a–-521b.

- Επίπεδη επιφάνεια είναι αυτή που βρίσκεται εξ ίσου ως προς τις ευθείες της.
- Κύκλος είναι επίπεδο σχήμα που περιέχεται υπό μιάς γραμμής (η οποία καλείται περιφέρεια), πρός τήν οποίαν εξ ενός σημείου εκ τών κειμένων εντός τού σχήματος όλαι αι προσπίπτουσαι ευθείαι (πρός την περιφέρειαν τού κύκλου) είναι μεταξύ τών ίσαι.

Ο ορισμός της ευθείας ανάγεται στην έννοια του σημείου και ο ορισμός του επιπέδου στην έννοια της ευθείας. Και οι δύο ανάγονται στην έννοια του «εξ ίσου» που παραπέμπει σε κάτι που διακρίνεται για την ομοιομορφία του. Γεγονός είναι ότι και οι δύο ορισμοί δεν είναι σαφείς, και επιπλέον αυτό που δεν διευκολύνει την κατανόησή τους είναι ότι πουθενά στα στοιχεια δεν υπάρχει απόδειξη κάποιας ιδιότητας που να ανάγεται σ᾿ αυτούς τους ορισμούς.[8] Σε κάθε περίπτωση και οι δύο ορισμοί δείχνουν ότι οι έννοιες της ευθείας και του επιπέδου έχουν μια είδους ομοιομορφία. Σε αυτό αναφέρονται και οι περισσότεροι μετέπειτα σχολιαστές των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Προχωράμε στην παρουσίαση των 5 αιτημάτων από το 1ο Βιβλίο:

Αιτήματα:

(i) Δεχόμαστε ότι από σημείο σε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία γραμμή.

(ii) Και ότι μια πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκταθεί επ᾿ ευθείας κατά συνεχή τρόπο.

(iii) Και ότι με κάθε κέντρο και κάθε διάστημα γράφεται κύκλος.

(iv) Και ότι όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

(v) Και εάν ευθεία η οποία τέμνει δύο ευθείες κατά τρόπο ώστε το άθροισμα δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών να είναι μικρότερο από δύο ορθές γωνίες, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ᾿ άπειρον θα συμπέσουν προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες.

Ένας σύντομος σχολιασμός για τις ανάγκες της ομιλίας: Το 1ο και 2ο αίτημα εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας ευθείας, το 3ο αίτημα την ύπαρξη ενός κύκλου. Ευθεία και κύκλος, όπως γνωρίζουμε, κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη, στα στοιχεια όμως δεν γίνεται καμία ρητή αναφορά στα δύο αυτά όργανα. Από την εποχή του Πλάτωνα απαίτηση ήταν τα γεωμετρικά σχήματα να κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη

[8] Η ασάφεια αυτών των δύο ορισμών καθώς και η έλλειψη κάποιου αξιώματος/αιτήματος για το επίπεδο θα οδηγήσουν σε μια συζήτηση μεταξύ μαθηματικών τον 19ον αιώνα για την καλύτερη θεμελίωση της έννοιας του επιπέδου. Βλέπε αναλυτικά πάνω σε αυτό [Z].

αποκλειστικά. Το 4ο αίτημα εξασφαλίζει την ομοιομορφία του χώρου και δεν υπάρχει κάτι που να το συνδέει με τα τρία προηγούμενα. Το 5ο αίτημα είναι το γνωστό μας Ευκλείδειο αξίωμα των παραλλήλων, το οποίο επίσης δεν συνδέεται με τα προηγούμενα.[9]

Τα τρία πρώτα αιτήματα είναι αυτά που θεμελιώνουν τις έννοιες της ευθείας και του κύκλου και σε αυτά ανάγονται οι αποδείξεις των ιδιοτήτων που αφορούν σε αυτές τις έννοιες. Αυτές οι δύο έννοιες μαζί με αυτή του επιπέδου θεωρούνται από τις θεμελιώδεις της γεωμετρίας και αυτές θα δούμε στη συνέχεια στον Leibniz και τον Hilbert.

Προχωράμε στις κοινές έννοιες από το 1ο βιβλίο των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ. Οι πρώτες έξι αφορούν σε αριθμητικές σχέσεις και δεν έχουν κάτι που να τις συνδέει με τις επόμενες τρείς που έχουν καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα. Παρουσιάζουμε τις τρεις τελευταίες:

Κοινές έννοιες:

7. Αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους είναι ίσα.

8. Το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους του.

9. Δύο ευθείες δεν περικλείουν κάποιο χωρίο [επιφάνεια].

Η κοινή έννοια 7 εξασφαλίζει την ισότητα μεταξύ δύο σχημάτων. Δύο σχήματα είναι ίσα, όταν μπορούν να εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο. Ο Ευκλείδης με τον όρο ισότητα εννοεί, όπως προκύπτει από τις αποδείξεις των θεωρημάτων του στη συνέχεια, δύο έννοιες στη γεωμετρία: αυτή που εμείς αποκαλούμε ισοδυναμία (congruence ή Kongruenz), δηλαδή εφαρμογή του ενός σχήματος πάνω στο άλλο, και αυτή που αποκαλούμε ισεμβαδικότητα, δηλαδή διαίρεση κάθε σχήματος σε μέρη, με τα μέρη του ενός σχήματος να είναι ίσα (congruent) με τα μέρη του άλλου σχήματος. Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο Leibniz κάνει την έννοια της ισοδυναμίας (congruence) κεντρική έννοια στη θεμελίωση μιας γεωμετρίας που αναπτύσσει.

Κοινό χαρακτηριστικό των αιτημάτων και κοινών εννοιών στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ είναι ότι:

- αποτελούν προφανείς δηλώσεις
- δεν απαιτείται αυτές να ικανοποιούν κάποιες αρχές
- δεν συνδέονται μεταξύ τους με κάποια σχέση ή κάποιες αρχές.

Παραθέτουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ που θα χρειαστούμε στη συνέχεια:

[9] Περισσότερα για την ιστορία του ευκλείδειου αξιώματος των παραλλήλων που οδήγησε στην ανακάλυψη των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών βλέπε [Gr].

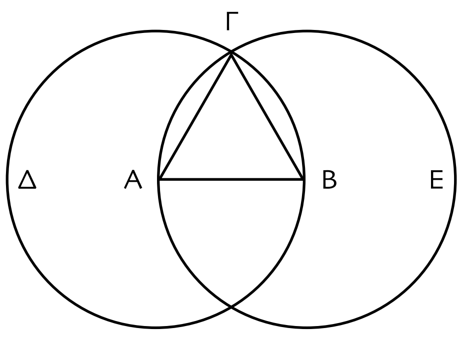
- Διαχωρισμός της γεωμετρίας σε επιπεδομετρία και στερεομετρία.

  Ο Ευκλείδης πραγματεύεται τις γεωμετρικές ιδιότητες πρώτα στο επίπεδο και στη συνέχεια στο χώρο. Η στερεομετρία ξεκινάει στο XI βιβλίο του. Αυτόν τον διαχωρισμό κάνουμε και σήμερα στη σχολική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μπορούμε όμως να εξετάσουμε τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων πρώτα στο χώρο, όπως θα δούμε να κάνει ο Leibniz τον 17ο αιώνα, αναπτύσσοντας μια χωρική αντίληψη για τη γεωμετρία.

- Η εποπτεία αποτελεί βασικό εργαλείο στην εξέταση των γεωμετρικών ιδιοτήτων.

  Ήδη αυτό είναι φανερό από τους περιγραφικούς ορισμούς, παραδείγματος χάριν η γραμμή είναι μήκος χωρίς πλάτος, η επιφάνεια είναι μήκος και πλάτος και κυρίως από τις πρώτες αποδείξεις όπως την απόδειξη της πρώτης πρότασης του Ευκλείδη, από το 1ο Βιβλίο:

  «Σε δοθείσα πεπερασμένη ευθεία να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο».



Σχήμα 1

Σ' αυτήν την απόδειξη ο Ευκλείδης αφού κατασκευάσει δύο κύκλους, τον καθένα με κέντρο το ένα άκρο του ευθύγραμμου τμήματος και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα, θεωρεί ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται σε ένα σημείο (βλέπε Σχήμα 1).

Η τομή των δύο κύκλων είναι κάτι που «βλέπουμε» αλλά θα πρέπει, όπως όλες τις ιδιότητες στη Γεωμετρία, ή να την αποδείξουμε, δηλαδή να αποδείξουμε την ύπαρξή της ή να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μέσω ενός αξιώματος. Ο Ευκλείδης θεωρεί σιωπηλά την ύπαρξή της, δηλαδή την δέχεται σιωπηλά χωρίς απόδειξη και χωρίς κάποιο αξίωμα, βασιζόμενος στην παρατήρηση και μόνο. Σήμερα γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη τομής θεμελιώνεται αξιωματικά και αυτό είναι στη Γεωμετρία το γνωστό αξίωμα του Pasch.[10]

Θα δούμε στη συνέχεια ότι στον Leibniz οι γεωμετρικές έννοιες θεμελιώνονται χωρίς αναφορά στο σχήμα και στον Hilbert θεμελιώνονται πλήρως αποκομμένες από την πραγματικότητα.

Συνοψίζουμε κάποια βασικά χαρακτηριστικά των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ του Ευκλείδη, που θα τα χρειαστούμε στη συνέχεια:

- Δεν υπάρχουν γενικές αρχές στις οποίες να υπόκειται το αξιωματικό σύστημα.

  Αυτή η αναφορά γίνεται για να γίνει κατανοητή στη συνέχεια μια άλλη τύπου θεμελίωση, όπως αυτή του Hilbert, στην οποία το αξιωματικό σύστημα πρέπει να ικανοποιεί τις αρχές της συνέπειας, της ανεξαρτησίας και της πληρότητας.

- Δεν υπάρχει ένα ενοποιητικό στοιχείο που να συνδέει τις γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ τους.

  Ο Ευκλείδης εξετάζει ξεχωριστά τις γεωμετρικές ιδιότητες των αντικειμένων, όπως του τριγώνου, του παραλληλογράμμου, του κύκλου και όλων των υπολοίπων χωρίς να υπάρχει κάποια ενοποιητική σχέση ή κάποιο ενοποιητικό στοιχείο που να τα συνδέει. Επιπλέον οι προφανείς δηλώσεις (τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες) παρουσιάζονται χωρίς να τις συνδέει κάποιο στοιχείο ή κάποια έννοια. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι είναι ατάκτως ερριμμένες.

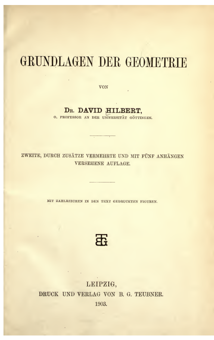
  Αυτό τέθηκε ήδη ως κριτική από τον Descartes τον 17ο αιώνα αναφερόμενος στην Γεωμετρία των Αρχαίων. Από τον 17ο αιώνα αναζητήθηκε αυτό το ενοποιητικό στοιχείο ή μια ενοποιητική σχέση πάνω στην οποία μπορεί να συγκροτηθεί και αναπτυχθεί όλη η Γεωμετρία. Αυτό το ενοποιητικό στοιχείο, για παράδειγμα για τον Leibniz τον 17ο αιώνα, θα είναι η έννοια της ισοδυναμίας στη βάση της οποίας προσπάθησε να θεμελιώσει όλες τις γεωμετρικές έννοιες, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

[10] Την ονομάζουμε «αξίωμα του Pasch» γιατί ο Pasch ήταν ο πρώτος που θεμελίωσε τις ιδιότητες τομών με αξιωματικό τρόπο στο βιβλίο του [P]. Ο D. Hilbert, το 1899, στα «Θεμέλια της Γεωμετρίας», στην αξιωματική ομάδα της «διάταξης» (ομάδα του «μεταξύ») ανήγαγε ρητά στον Pasch (βλέπε υποσημείωση [H1] 5), την ιδιότητα: μια ευθεία, όταν το ένα άκρο της είναι στο εσωτερικό ενός τριγώνου, καθώς εξέρχεται του τριγώνου (εκτός των κορυφών του τριγώνου) τέμνει την πλευρά του τριγώνου σε ένα σημείο (βλέπε [H1] 5). Έκτοτε έχει καθιερωθεί να ονομάζουμε αυτήν την ιδιότητα ή μια ισοδύναμή της, αξίωμα του Pasch.

10.3 David Hilbert και «Θεμέλια της Γεωμετρίας»

Ο David Hilbert (1862–1943) υπήρξε μαθηματικός με τεράστια επίδραση στα μαθηματικά της εποχής του και σε πολλούς κλάδους των Μαθηματικών: Θεωρία Αλγεβρικών Αριθμών, Θεωρία Ολοκληρωτικών Εξισώσεων, Μαθηματική Φυσική και με σημαντική συμβολή στα Θεμέλια της Γεωμετρίας και την αξιωματική μέθοδο. Το 1900 παρουσιάζει στο διεθνές μαθηματικό συνέδριο στο Παρίσι 23 ανοικτά μαθηματικά προβλήματα από πολλούς κλάδους των Μαθηματικών. Το 1899 στο έργο του «Θεμέλια της Γεωμετρίας» παρουσίασε το πρώτο ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα από την εποχή του Ευκλείδη, που έπρεπε να ικανοποιεί τις αρχές της συνέπειας, ανεξαρτησίας και πληρότητας.

Η ενασχόλησή του με τα θεμέλια των μαθηματικών αποτυπώνεται πρώτα στο έργο του «Grundlagen der Geometrie» [Foundations of Mathematics, Θεμέλια της Γεωμετρίας] (1899) και σε άρθρα του σχετικά με τα θεμέλια της Αριθμητικής (1900). Στη διάλεξη «Axiomatisches Denken» [Αξιωματική Σκέψη] το 1917 επανέρχεται στο θέμα των θεμελίων των μαθηματικών και ερευνά το ρόλο του αξιωματικού συστήματος στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Την ίδια περίοδο, στα τέλη της δεκαετίας του 1920 με το «Grundzüge der theoretischen Logik» [Principles of Mathematical Logic] (μαζί με τον Wilhelm Ackermann) και το «Grundlagen der Mathematik» [Foundations of Mathematics] (1934, 1939) (μαζί με τον Paul Bernays). Ακολουθούν 8 άρθρα πάνω στη θεωρία της απόδειξης, τη Λογική και τη Φιλοσοφία των Μαθηματικών. Υπάρχει πληθώρα από επιστολές και χειρόγραφα σε βιβλιοθήκες και μια συλλογή από 80 τόμους σε επίσημα πρακτικά από τις διαλέξεις του. Στο τεράστιο έργο του «Gesammelte Abhandlungen» (1932–1935) ασχολείται μεταξύ άλλων με θέματα λογικής, με τη θεωρία συνόλων, τα θεμέλια της γεωμετρίας, τη φιλοσοφία των μαθηματικών και της φυσικής.



GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

ZWEITE, DURCH ZUSÄTZE VERMEHRTE UND MIT FÜNF ANHÄNGEN VERSEHENE AUFLAGE.

MIT ZAHLREICHEN IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Στην παρούσα ομιλία θα επικεντρωθούμε στα «Θεμέλια της Γεωμετρίας» που είναι το πρώτο έργο του στο οποίο παρουσιάζεται η αντίληψή του για τη θεμελίωση της γεωμετρίας και την αξιωματική μέθοδο.[11]

Τα «Θεμέλια της Γεωμετρίας» παρουσιάστηκαν 2,5 χιλιάδες χρόνια μετά τα Στοιχεια του Ευκλείδη. Αποτέλεσαν το πρώτο ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από την εποχή του Ευκλείδη. Ο Hilbert για πρώτη φορά στην ιστορία της

[11] Για το έργο του Hilbert, Θεμέλια της Γεωμετρίας, υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία. Για μια σύντομη ανασκόπηση δείτε [T].

μαθηματικής επιστήμης έθεσε αρχές που πρέπει να ικανοποιεί το αξιωματικό σύστημα. Αυτές ήταν: η αρχή της συνέπειας (ή μη αντιφατικότητας), η αρχή της ανεξαρτησίας και η αρχή της πληρότητας. Συνέπεια ή μη αντιφατικότητα σημαίνει ότι η εφαρμογή των συγκεκριμένων αξιωμάτων δεν πρέπει να οδηγήσει σε αντιφάσεις. Ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα αξίωμα δεν μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια των υπολοίπων και πληρότητα ότι το σύστημα των αξιωμάτων είναι επαρκές για να αποδειχθούν όλες οι γεωμετρικές προτάσεις.

Για την απόδειξη της συνέπειας των αξιωμάτων, τα εφοδίασε με ένα μοντέλο από την αναλυτική γεωμετρία, ανάγοντας τη συνέπεια των γεωμετρικών αξιωμάτων στη συνέπεια των πραγματικών αριθμών. Επειδή η ίδια μέθοδος δεν μπορούσε να γίνει και με τη μη αντιφατικότητα της αριθμητικής, ο Hilbert προχώρησε με ένα διαφορετικό τρόπο. Δεν θα υπεισέλθουμε στην ομιλία μας σε περαιτέρω παρουσίαση της απόδειξης της συνέπειας, μια συζήτηση που οδήγησε σε αντιπαραθέσεις με άλλους μαθηματικούς της εποχής που ασχολήθηκαν με τα θεμέλια.

Για την απόδειξη της ανεξαρτησίας κάθε αξιώματος κατασκεύασε ένα μοντέλο στο οποίο να ισχύουν όλα τα αξιώματα εκτός από το υπό εξέταση αξίωμα. Λίγο μετά την 1η έκδοση των Θεμελίων, αποδείχτηκε ότι ένα από τα αξιώματα των Θεμελίων της Γεωμετρίας του ήταν εξαρτημένο από τα υπόλοιπα με αποτελέσματα να αφαιρεθεί στην επόμενη έκδοση.

Στην αρχή της θεμελίωσης παράλληλα με τις αρχές που πρέπει να ικανοποιεί το αξιωματικό σύστημα ο Hilbert ξεκίνησε με την παραδοχή της ύπαρξης τριών συστημάτων πραγμάτων, στα οποία δεν έδωσε κανένα περιεχόμενο. Χαρακτηριστικά γράφει: «στην αξιωματική αυτή θεμελίωση θεωρούμε τρία διαφορετικά συστήματα από πράγματα». Συνεχίζοντας αναφέρει ποια είναι τα πράγματα: «Τα πράγματα του πρώτου συστήματος τα ονομάζουμε σημεία … του δεύτερου συστήματος τα ονομάζουμε ευθείες … και του τρίτου συστήματος τα ονομάζουμε επίπεδα»[12].

Ο Hilbert αφαίρεσε από τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου, πάνω στις οποίες ανέπτυξε όλο το αξιωματικό σύστημα, οποιοδήποτε περιεχόμενο, χαρακτηρίζοντάς τις «πράγματα». Παραφραστικά μάλιστα είπε σε μία συζήτηση, ότι στη θέση των εννοιών του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου μπορεί κάποιος να θεωρήσει «τραπέζια, καρέκλες και κύπελλα μπύρας»[13], δείχνοντας μ᾽ αυτόν τον τρόπο την ξεκάθαρη επιλογή του να αφαιρέσει από τις πρωταρχικές έννοιες το οποιοδήποτε περιεχόμενο. Ακριβώς για αυτόν τον λόγο, σε αυτές τις έννοιες δεν προσδίδεται κάποιος ορισμός. Τα αξιώματα είναι εκείνα, που στο σύνολό τους, θα προσδώσουν στις έννοιες συγκεκριμένο

[12] [H1] 2.
[13] [B], 402 κ.ε.

περιεχόμενο. Με άλλα λόγια τα αξιώματα αποτελούν τους έμμεσους ορισμούς των τριών πρωταρχικών εννοιών. Στο εσωτερικό της μαθηματικής θεωρίας, δηλαδή εκεί που η θεωρία θεμελιώνεται δεν έχουν θέση οντολογικά ερωτήματα, για παράδειγμα τι είναι ευθεία ή τι είναι επίπεδο, εάν τα γεωμετρικά αξιώματα αντιστοιχούν σε καταστάσεις της πραγματικότητας ή πού μπορούν να εφαρμοστούν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Ο Freundenthal έγραψε χαρακτηριστικά για τη γεωμετρία του Hilbert:

«Η γεωμετρία έγινε καθαρά μαθηματικά και το ερώτημα εάν και πώς μπορεί αυτή να εφαρμοστεί στην πραγματικότητα, απαντάται σε αυτήν όπως και σε κάθε κλάδο άλλο κλάδο των μαθηματικών. Τα αξιώματα δεν είναι πια προφανείς αλήθειες, γιατί δεν έχει πια νόημα να ρωτήσει κανείς για την αλήθειά τους».[14]

Το αξιωματικό σύστημα στα «Θεμέλια» ορίζει τις σχέσεις σύνδεσης, διάταξης (σχέση του «μεταξύ»), ισότητας, παραλληλίας και συνέχειας και απαρτίζεται από τις αντίστοιχες πέντε αξιωματικές ομάδες: σύνδεσης, διατάξης, ισότητας, παραλληλίας και συνέχειας. Σύμφωνα με τον Hilbert το αξιωματικό σύστημα πρέπει να είναι συνεπές, ανεξάρτητο και πλήρες.

Ενδεικτικά παραθέτουμε:

- τα οκτώ αξιώματα της πρώτης αξιωματικής ομάδας, της ομάδας σύνδεσης, που ορίζουν την σχέση «κείται» μεταξύ των εννοιών του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου:[15]

I1. Προς δύο σημεία A, B υπάρχει πάντοτε μια ευθεία a, η οποία συνταιριάζεται με καθένα από αυτά τα σημεία.

I2. Για κάθε δύο σημεία A, B δεν υπάρχουν περισσότερες από μία ευθείες που να συνταιριάζονται με καθένα απ᾽ αυτά τα δύο σημεία A, B.

I3. Επί μίας ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν κείνται πάνω σε μια ευθεία.

I4. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, C, που δεν κείνται πάνω σε μία και την ίδια ευθεία υπάρχει ένα επίπεδο α το οποίο συνταιριάζεται με καθένα από τα τρία σημεία A,B,C. Προς κάθε επίπεδο υπάρχει ένα συνταιριαζόμενο με αυτό σημείο.

I5. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, C, τα οποία δεν κείνται (συγχρόνως) πάνω σε μία και την ίδια ευθεία, δεν υπάρχει παρά ένα και μόνον επίπεδο που συνταιριάζεται με καθένα από αυτά.

[14] [F], 111. Μετάφραση της συγγραφέως

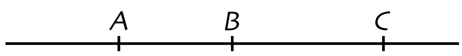
[15] Όλα τα αξιώματα που παραθέτουμε στη συνέχεια είναι από την μετάφραση στα ελληνικά του έργου του Hilbert από τον Στράτη Παπαδόπουλο, βλέπε [H2].

I6. Αν δύο σημεία A, B μιας ευθείας a κείνται σε ένα επίπεδο α τότε κάθε σημείο της a κείται στο επίπεδο α.

I7. Αν δύο επίπεδα α, β έχουν ένα κοινό σημείο A, τότε αυτά έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο B.

I8. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν κείνται σε ένα επίπεδο.

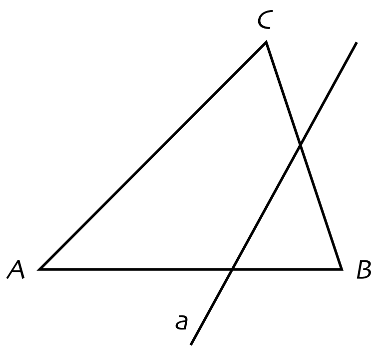
- και δύο αξιώματα της δεύτερης αξιωματικής ομάδας, της ομάδας διατάξεως.



Σχήμα 2

II1. Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ δύο σημείων A και C τότε τα A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το B κείται επίσης μεταξύ των C και A.

II4. Ας είναι A, B, C τρία σημεία μη κείμενα σε ευθεία γραμμή και a μια ευθεία στο επίπεδο ABC η οποία δε συναντά κανένα από τα σημεία A, B, C. Αν κατακολουθίαν η ευθεία a διέρχεται από ένα σημείο του τμήματος AB, τότε αυτή θα διέρχεται επίσης οπωσδήποτε από ένα σημείο του τμήματος AC ή από ένα σημείο του τμήματος BC.



Σχήμα 3

Το δεύτερο, το II4, είναι το αξίωμα του Pasch, για το οποίο μιλήσαμε στα βασικά χαρακτηριστικά του Ευκλείδη, ότι αποδέχεται σιωπηλά κάποιες ιδιότητες χωρίς να τις αποδεικνύει, όπως η ιδιότητα τομής δύο κύκλων.

Συνοψίζοντας την αντίληψη του Hilbert για την αξιωματική θεμελίωση, όπως αυτή διαπερνά τα «Θεμέλια της Γεωμετρία» στα τέλη του 19ου αιώνα:

Το αξιωματικό σύστημα πρέπει να διέπεται από τις αρχές της συνέπειας, ανεξαρτησίας και πληρότητας. Οι πρωταρχικές του έννοιες είναι «πράγματα», είναι έννοιες χωρίς περιεχόμενο. Το περιεχόμενο το αποκτούν από τα εκάστοτε αξιώματα.

10.4 Leibniz και «Geometrica Characteristica»

O Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) υπήρξε φιλόσοφος, μαθηματικός, φυσικός, ιστορικός, νομικός και διπλωμάτης. Έχει χαρακτηριστεί «ο πολυμαθέστερος ανήρ μετά τον Αριστοτέλη». Ανέπτυξε τον Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό ανεξάρτητα από τον Νεύτωνα. Είχε σημαντική προσφορά στη Φυσική, την Θεωρία Πιθανοτήτων, τη Βιολογία, Ιατρική, Γεωλογία, Ψυχολογία, Γλωσσολογία.

O Leibniz ζει σε μια εποχή που ένας μεγάλος κλάδος των μαθηματικών έχει αρχίσει και αναπτύσσεται: η αναλυτική γεωμετρία του Descartes. Διατυπώνονται νέες μαθηματικές θεωρίες και εισάγονται καινούργιες μέθοδοι στη διερεύνηση μαθηματικών προβλημάτων, που οδηγούν στο ξεπέρασμα της αποκλειστικά γεωμετρικής σκέψης. Ο Descartes (1596–1650) εισήγαγε αλγεβρικά στοιχεία στη γεωμετρία και συγκεκριμένα στη μελέτη των καμπυλών. Αποδεχόμενος το αντιαριστοτελικό και αντισχολαστικιστικό πνεύμα της εποχής του, άσκησε κριτική στη γεωμετρία του Ευκλείδη και των Αρχαίων εν γένει. Η κριτική του θέση δεν αναφερόταν τόσο σε ζητήματα λογικής αυστηρότητας και καθαρότητας, αλλά στην έλλειψη ενότητας που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία τους. Έγραφε για αυτήν ότι είναι τόσο επικεντρωμένη στην απλή παρατήρηση των σχημάτων, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να επιτύχει την εκπαίδευση της λογικής (Descartes, 1637, 14). Από τη στιγμή που η γεωμετρία είναι προσκολλημένη στην εποπτεία των μεμονωμένων σχημάτων, και που την έχει ως βασικό εργαλείο για την επαγωγή των προτάσεων, δεν μπορεί να βρει τις γενικότερες σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των διαφορετικών σχημάτων, που τα συνδέουν μεταξύ τους.

Τα ενδιαφέροντα του Leibniz κινούνται στην ίδια κατεύθυνση με εκείνη του Descartes, στην αλγεβροποίηση της γεωμετρίας. Τίθεται κριτικά απέναντι στη γεωμετρία του Ευκλείδη, γιατί αυτή έχει μια περιορισμένη εμβέλεια λόγω του αποκλειστικά συνθετικού της χαρακτήρα. Από την άλλη όμως κριτικάρει τη γεωμετρία του Descartes, γιατί σε αυτήν εμπλεκονται δύο διαφορετικές στιγμές, η γεωμετρική και η αλγεβρική.

Η αρχική ιδέα του Leibniz ήταν να απομακρύνει ολοκληρωτικά τη γεωμετρική στιγμή, με άλλα λόγια, σύμφωνα με τους όρους της εποχής του, να πραγματεύεται η γεωμετρία τα αντικείμενά της ολοκληρωτικά ανεξάρτητα από τις αισθήσεις. Σύμφωνα με αυτό θα έπρεπε η γεωμετρία να παραιτηθεί από την ιδέα κάθε γεωμετρικού μεγέθους. Όλα τα γεωμετρικά μεγέθη θα έπρεπε να αντικατασταθούν από αλγεβρικά σύμβολα.

Αυτήν την ιδέα, σε μια πιο γενική μορφή, την είχε συλλάβει ήδη στα φοιτητικά του χρόνια ο Leibniz και την παρουσίασε στο έργο του Dissertatio de arte combinatoria (1666). Σ᾽ αυτό το έργο διατύπωσε την ιδέα της διαμόρφωσης μιας γενικής γραφής εννοιών, που ονόμασε characteristica universalis. Το βασικό της σκεπτικό ήταν να αντικατασταθούν όλες οι έννοιες με σύμβολα και στη συνέχεια από τον συνδυασμό των συμβολισμένων πια εννοιών, να σχηματίζονται οι προτάσεις. Με τη βοήθεια αυτής της γραφής, θα ήταν δυνατόν, σύμφωνα με τον Leibniz, να ξεχωρίσουν από όλες τις πιθανές νοητές εκφράσεις, εκείνες μόνο που είναι λογικά σωστές. Πολύ σύντομα αντελήφθη, ότι η ιδέα του σε αυτήν τη γενική μορφή δεν ήταν πραγματοποιήσιμη. Τη γεωμετρία θα την είχε αργότερα ως μοντέλο εφαρμογής αυτής της βασικής ιδέας.[16]

Ταυτόχρονα ο Leibniz κριτίκαρε και τη γεωμετρία του Descartes, που αναμείγνυε στην εξήγηση των βασικών της εννοιών τόσο αλγεβρικές όσο και γεωμετρικές μεθόδους.[17] Έτσι σκέφθηκε να αναπτύξει μια καινούργια μέθοδο, για να μπορέσει η γεωμετρία να καταστεί παντελώς ανεξάρτητη από τις αισθήσεις. Για αυτό πρότεινε να πραγματοποιεί η γεωμετρία όλες τις γεωμετρικές πράξεις αποκλειστικά και μόνο με αλγεβρικά σύμβολα και κάποια αξιώματα και στη συνέχεια να αποδεικνύει τις γεωμετρικές προτάσεις μόνο με τη χρήση ενός λογισμού. Και αυτήν τη φορά όμως πείστηκε, ότι με αυτήν την πρόταση δεν είναι εύκολο να λυθούν όλα τα προβλήματα, μάλιστα σε μερικές περιπτώσεις η λύση που προέκυπτε ήταν πολυπλοκότερη.[18]

Σε επόμενη προσπάθεια δέχθηκε τη χρήση όχι μόνο ενός λογισμού αλλά και κάποιων μαθηματικών εννοιών. Στο έργο του «geometrica characteristica» έλαβε υπόψη του όχι μόνο το μέγεθος των σχημάτων—έννοια αριθμητική—αλλά και τη μορφή τους, ένα καθαρά γεωμετρικό χαρακτηριστικό. Από τη σύγκριση των σχημάτων με βάση το μέγεθός τους προκύπτει η γεωμετρική έννοια της «ισότητας», ενώ με βάση τη μορφή τους προκύπτει η έννοια της «ομοιότητας». Από τις δύο αυτές έννοιες προκύπτει η έννοια της «ισοδυναμίας». Έτσι κάνει ο Leibniz την ισοδυναμία κεντρική έννοια της «characteristica» του.[19]

Στο γράμμα του, στον Christiaan Huygens, στις 8 Σεπτεμβρίου 1679 παρουσίασε για πρώτη φορά το νέο του σχέδιο.[20] Του έγραψε ότι βρήκε «τα στοιχεία μιας νέας χαρακτηριστικής, η οποία μπορεί να παρουσιάζει τη γεωμετρία χωρίς την οποιαδήποτε αναφορά στο γεωμετρικό σχήμα».[21]

Στη geometrica characteristica ο Leibniz επιχείρησε με δύο πρωταρχικές έννοιες, αυτές της «ισοδυναμίας» και του «σημείου» να αναπτύξει όλη τη

[16][M], 277.
[17][Ge], V, 136.
[18][Ge], V, 137.
[19][Ge], V, 137 κ.ε.
[20]Το γράμμα βρίσκεται στο Leibniz, 1849–1863, II, 17–25. Εμείς το παραθέτουμε από την μετάφραση του A. Buchenau, που εκδόθηκε και σχολιάστηκε από τον Ernst Cassirer (βλέπε [L2], I).
[21][L2], I, 77.

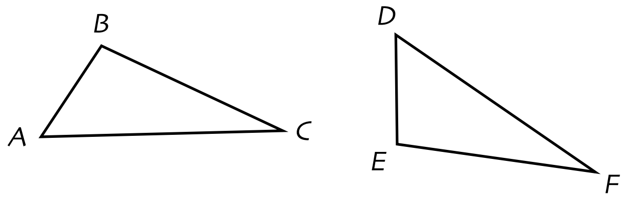
γεωμετρία. Το «σημείο» το αντικατέστησε με τα γράμματα του αλφαβήτου A, B, C,... για τα γνωστά σημεία, και με X, Y, Z,... για τα ζητούμενα. Την «ισοδυναμία» τη συμβόλισε με «ɣ». Έτσι στη θέση του λογισμού των μεγεθών και των αριθμών της αναλυτικής γεωμετρίας πρότεινε ο Leibniz ένα νέο λογισμό: το λογισμό των σημείων. Με τη βοήθεια αυτού όρισε στη συνέχεια τις γεωμετρικές έννοιες της σφαιρικής επιφάνειας, της επίπεδης επιφάνειας, του κύκλου και της ευθείας γραμμής.

10.4.1 Έννοια ισοδυναμίας

Στην εξήγηση της έννοιας της «ισοδυναμίας» μπορούμε να δούμε καθαρά τα πρώτα βήματα στη διαμόρφωση μιας αντίληψης ουσιαστικά διαφορετικής από εκείνης του Ευκλείδη, μιας αντίληψης αφηρημένης και τυποποιημένης. Ο Leibniz έδωσε σε αυτήν την έννοια δύο ορισμούς, που ο καθένας εκφράζει μια διαφορετική αντίληψη για τη γεωμετρία. Ο ένας ορισμός μπορεί να γίνει αντιληπτός με εποπτικό τρόπο, όπως γίνεται με τις έννοιες στη Γεωμετρία του Ευκλείδη και μοιάζει με τον τρόπο παρουσίασης της έννοιας της ισότητας στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ. Αναφέρεται σε συγκεκριμένα γεωμετρικά σχήματα, σε συγκεκριμένα τρίγωνα. Ο άλλος είναι αφηρημένος και αναφέρεται σε δύο συστήματα σημείων.

Θα δούμε τον κάθε ορισμό ξεχωριστά όπως κάνει ο Leibniz στη geometrica characteristica. Ξεκινώντας ο Leibniz θέτει στο χώρο δύο τριάδες σημείων (A, B, C) και (D, E, F).

Ο πρώτος ορισμός αναφέρεται στα τρίγωνα ABC και DEF (Σχήμα 4). Με την τοποθέτηση του τριγώνου ABC επί του τριγώνου DEF διαπιστώνεται εάν είναι ισοδύναμα ή όχι. Γράφει:



Σχήμα 4[22]

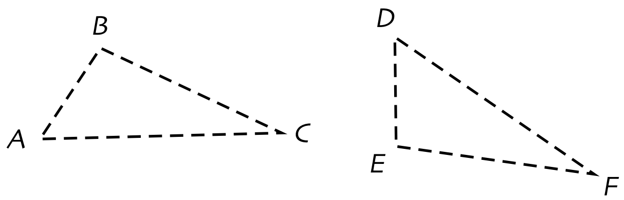
«ABCɣDEF σημαίνει: τα δύο τρίγωνα ABC και DEF είναι ισοδύναμα με αντιστοίχιση της σειράς των σημείων, όταν καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο και το ένα εφαρμόζει πάνω στο άλλο ... Εάν το D τοποθετηθεί στο A, το E στο B και το F στο C, τότε τα τρίγωνα θα εφαρμόσουν το ένα πάνω στο άλλο, γιατί είναι ίσα και όμοια.»[23]

[22]Όλα τα σχήματα που παρατίθενται στη συνέχεια είναι του Leibniz, βλέπε [L2], I, Σχήματα 3, 4, 6 μέχρι 10.

[23][L2], I, 79 κ.ε. Μετάφραση της συγγραφέως.

Αυτός ο ορισμός είναι ευκλείδειου τύπου, μια και χρησιμοποιεί την επικάλυψη των τριγώνων για να εξακριβώσει εάν τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα ή όχι. Για την εξακρίβωση της ισοδυναμίας απαιτείται μια εμπειρική διαδικασία. Αυτός ο τύπος ορισμού και συνεπώς μια τέτοια μέθοδος για όλη τη γεωμετρία, απαιτεί για την επαγωγή των γεωμετρικών ιδιοτήτων να έχουμε πάντα μπροστά μας γεωμετρικά σχήματα.

Από αυτήν τη μέθοδο ο Leibniz διαφοροποιήθηκε και απομακρύνθηκε συνειδητά, διατυπώνοντας ένα δεύτερο ορισμό. Παρέθεσε ένα δεύτερο σχήμα, το οποίο διαφοροποιείται από το πρώτο, στο ότι οι ευθείες γραμμές που ενώνουν τα σημεία είναι διακεκομένες (βλέπε Σχήμα 5). Γράφει:



Σχήμα 5

«Χωρίς να μιλάμε για τρίγωνα, μπορούμε να πούμε το ίδιο για σημεία: ABCɤDEF σημαίνει, ότι μπορούμε ταυτόχρονα να τοποθετήσουμε το A στο D, το B στο E και το C στο F, χωρίς να υποστεί η θέση των τριών σημείων ABC ή των τριών σημείων DEF οποιαδήποτε αλλαγή, με την προϋπόθεση ότι τα τρία πρώτα σημεία όπως και τα άλλα τρία, είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με στέρεες γραμμές—μπορεί να είναι ευθείες ή καμπύλες.»[24]

Σε αυτήν την περίπτωση ο Leibniz αναφέρεται αποκλειστικά σε δύο τριάδες σημείων (A, B, C) και (D, E, F) οι οποίες πρέπει να βρίσκονται σε τέτοια σχέση μεταξύ τους, ώστε το σημείο A να πηγαίνει στο D, όπως επίσης το B στο E και στο C στο F (βλέπε Σχήμα 5). Θέτει στη συνέχεια τη συνθήκη, για να είναι οι τριάδες των σημείων (A, B, C) και (D, E, F) ισοδύναμες, πρέπει να μην αλλάζει η θέση των τριών σημείων ABC ή DEF.

Αυτός ο δεύτερος ορισμός είναι πολύ διαφορετικός από τον αντίστοιχο ευκλείδειο. Δεν αναφέρεται σε συγκεκριμένα μεμονωμένα τρίγωνα αλλά σε σημεία, που βρίσκονται σε μια ειδική σχέση μεταξύ τους.

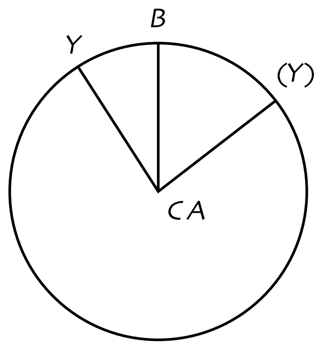
Το δεύτερο σημείο είναι η χρήση της έννοιας της «θέσης». Τι σημαίνει μαθηματικά «θέση»; Θα μπορούσε να ειδωθεί ως απόσταση, δηλαδή ως ένας αριθμός. Ο ιταλός μαθηματικός Giuseppe Veronese (1854–1917) είναι της άποψης, ότι ο Leibniz δεν ήθελε να της δώσει αυτήν τη σημασία, αλλά την έβλεπε απλά ως ένα ζεύγος σημείων.[25] Διατυπώνουμε την άποψη ότι ο Leibniz δεν ήθελε συνειδητά να δώσει σε αυτήν την έννοια ένα συγκεκριμένο περιεχόμενο και για αυτόν το λόγο τόνισε, ότι οι γραμμές μεταξύ

[24] [L2], 80, Μετάφραση της συγγραφέως.
[25] [V], 642.

των σημείων μπορεί να είναι καμπύλες ή ευθείες. Έτσι άφησε ανοικτό, με ποιο τρόπο μπορεί να εξακριβωθεί η θέση μεταξύ των δύο σημείων. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα αφήνεται στην εκάστοτε συγκεκριμένη εμπειρική θεωρία, στην οποία εφαρμόζεται το αξιωματικό σύστημα.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τους ορισμούς που έδωσε σε γεωμετρικές έννοιες ανάγοντάς τους στην έννοια της ισοδυναμίας. Με μία χωρική αντίληψη για τη γεωμετρία, δηλαδή θέτοντας τα γεωμετρικά αντικείμενα στον χώρο, και όχι στο επίπεδο όπως έκανε ο Ευκλείδης, όρισε τη σφαιρική επιφάνεια, την επίπεδη επιφάνεια, την κυκλική γραμμή και την ευθεία γραμμή. Οι ορισμοί δίνονται ως σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ σημείων που είναι σε ζεύγη.

10.4.2 Σφαιρική επιφάνεια



Σχήμα 6

«Έστω AYɣA(Y). Ο τόπος όλων των Y θα είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας, της οποίας είναι A το κέντρο και AY η ακτίνα—μια σταθερή σε σχέση με το μέγεθος ακτίνα—η οποία είναι ίση με ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα AB ή CB.

Μπορεί να εκφραστεί το ίδιο: ABɣA(Y) ή CBɣAY.»[26]

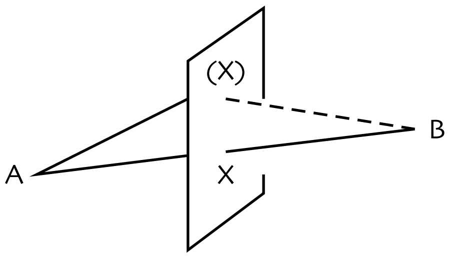
Με (Y) συμβολίζεται ο εκπρόσωπος ενός συνόλου και με Y μια μεταβλητή του. Ο Leibniz σχεδιάζει δίπλα σε αυτόν τον ορισμό ένα σχήμα (Σχήμα 6) χωρίς να εξηγεί περαιτέρω αυτήν την κατασκευή. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι η σφαιρική επιφάνεια κατασκευάζεται ως ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων Y, τα οποία έχουν πάντα στην ίδια θέση AB από ένα δεδομένο σημείο A, από τη στιγμή που αυτή η σχέση αναφέρεται στον χώρο και όχι στο επίπεδο.

Ο Leibniz δίνει μια σχέση για να ορίσει ένα αντικείμενο, χωρίς να ενδιαφέρεται για την κατασκευή αυτού του αντικειμένου. Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη ή με τη βοήθεια κινήσεων στο χώρο, όπως στα Στοιχεια

[26][L2], ό.π., 82.

του Ευκλείδη, δεν παίζουν κανένα ρόλο στην characteristica του Leibniz. Έτσι φαίνεται μια φορά ακόμη η συνειδητή επιλογή του Leibniz να παρουσιάσει με έναν αφηρημένο τρόπο τη γεωμετρία και να απομακρυνθεί από τον εποπτικό τρόπο παρουσίασης του Ευκλείδη.

10.4.3 Επίπεδη επιφάνεια



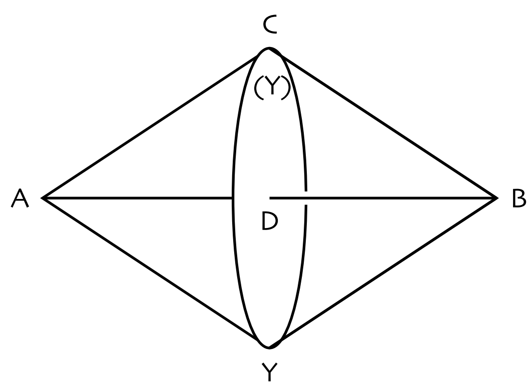
Σχήμα 7

Το επίπεδο ορίζεται μέσα από τη σχέση AXɣBX. Δοσμένα είναι τα σημεία A και B και ζητείται ένα τρίτο σημείο X, το οποίο να έχει την ίδια θέση από το A όπως και από το B.[27]

Με βάση αυτόν τον ορισμό, το επίπεδο είναι το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από τα σημεία A και B, δηλαδή το επίπεδο βρίσκεται στο μέσο και κάθετα στο ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι τοποθετημένο στο χώρο. Δεν θα μπορούσε να γίνει και αλλιώς από τη στιγμή που σε αυτό το σημείο ο Leibniz δίνει έναν ορισμό για το επίπεδο. Ο ορισμός του επιπέδου δεν μπορεί να προϋποθέσει ή να βασιστεί στην έννοια του επιπέδου.

10.4.4 Κυκλική γραμμή

Η κυκλική γραμμή ορίζεται από τον Leibniz ως εξής:



Σχήμα 8

[27] [L2], ό.π., 80 κ.ε.

«Εάν είναι ABCɤABY, τότε κυκλική γραμμή είναι ο τόπος όλων των σημείων Y.

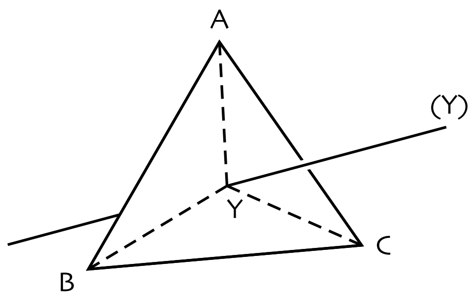
Δίνονται 3 σημεία A, B, C, και ζητείται ένα τέταρτο σημείο Y, το οποίο να έχει την ίδια θέση από το A και B, όπως έχει το C. Ισχυρίζομαι ότι υπάρχει μια απειρία σημείων που ικανοποιούν αυτήν τη συνθήκη και ο τόπος όλων αυτών των σημείων είναι η κυκλική γραμμή.»[28]

Ο Lebniz απομακρύνεται συνειδητά από τον ευκλείδειο ορισμό, σύμφωνα με τον οποίο ο κύκλος ανάγεται στην έννοια του επιπέδου και της ευθείας – με την έννοια του ευθύγραμμου τμήματος. Γράφει στη συνέχεια:

«Αυτή η περιγραφή ή αυτός ο ορισμός της κυκλικής γραμμής δεν προϋποθέτει—όπως στον Ευκλείδη—τον ορισμό του επιπέδου, ούτε καν της ευθείας.» [29]

10.4.5 Ευθεία γραμμή

Η ευθεία γραμμή ορίζεται από τη σχέση AYɤBYɤCY (βλέπε Σχήμα 9).



Σχήμα 9

«Εάν AYɤBYɤCY, τότε ο τόπος όλων των σημείων Y είναι μια ευθεία. Εδώ δίνονται 3 σημεία A, B, C. Ζητείται ένα σημείο Y, το οποίο έχει την ίδια θέση από το A, όπως από το B όπως από το C. Λέω ότι όλα αυτά τα σημεία ανήκουν στην άπειρη ευθεία Y(Y).»[30]

Η αντίληψη του Leibniz για τη γεωμετρία φαίνεται για μια ακόμη φορά και στον ορισμό της ευθείας γραμμής, για τον οποίο χρειάζεται τρία σημεία στο χώρο. Εάν την όριζε στο επίπεδο θα απαιτούνταν 2 σημεία μόνο. Παραδείγματος χάριν θα οριζόταν ως: AXɤBX, δηλαδή ως ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων, τα οποία έχουν από το A και το B την ίδια «θέση». Σε αυτήν την περίπτωση η ευθεία θα βρισκόταν κάθετη και στο μέσο του AB. Αυτό συνειδητά δεν το κάνει ο Leibniz. Γράφει μετά τον ορισμό της ευθείας: «Εάν όλα βρίσκονταν στο ίδιο επίπεδο, τότε θα αρκούσαν

[28]Ό.π.
[29]Ό.π.
[30]Ό.π, 82.

2 δοσμένα σημεία, για να οριστεί η ευθεία.»[31]

Συνοψίζοντας, στη geometrica characteristica αναπτύσσεται μια νέα χωρική αντίληψη για τη γεωμετρία και διαμορφώνεται ένας τρόπος θεμελίωσης των γεωμετρικών εννοιών αφηρημένος και συγκριτικά με τον ευκλείδειο αρκετά τυποποιημένος. Υπάρχει μια πρωταρχική σχέση, η σχέση της ισοδυναμίας, και μια πρωταρχική έννοια, η έννοια του σημείου, από τις οποίες επάγονται όλες οι βασικές γεωμετρικές σχέσεις: σφαίρα, επίπεδο, κύκλος και ευθεία. Ο Leibniz έκανε τη σχέση της ισοδυναμίας την κεντρική σχέση πάνω στην οποία θεμελίωσε τις πρωταρχικές έννοιες. Στη geometrica characteristica βρίσκουμε τα πρώτα βήματα στη διαμόρφωση μιας αντίληψης για τα μαθηματικά, που απομακρύνεται από την εποπτεία, και αναζητά πρωταρχικές σχέσεις και έννοιες από τις οποίες θα επαχθούν όλες οι επόμενες.

10.5 Περίληψη της παρουσίασης

Διανύσαμε σύντομα τρεις ιστορικές περίοδος με τρεις διαφορετικές αξιωματικές θεμελιώσεις της Γεωμετρίας:

Η πρώτη περίοδος (Ευκλείδης, Στοιχεια, γύρω στο 300 πΧ) είναι η περίοδος που αναπτύσσεται η αποδεικτική διαδικασία με τα Μαθηματικά να θεμελιώνονται ως μια αξιωματική θεωρία και τα αξιώματα να αποτελούν προφανείς αλήθειες, χωρίς όμως να διέπονται από κάποια άλλη αρχή.

Η δεύτερη περίοδος (Leibniz, geometrica characteristica, 17ος αι.) χαρακτηρίζεται από μια θεμελίωση των γεωμετρικών εννοιών αφηρημένη και αρκετά τυποποιημένη, που αρχίζει να απομακρύνεται από την πραγματικότητα. Η αναζήτηση μιας κεντρικής γεωμετρικής έννοιας πάνω στην οποία θα αναχθούν και θα θεμελιωθούν όλες οι έννοιες της γεωμετρίας είναι το ζητούμενο—αυτή η έννοια για τον Leibniz ήταν η έννοια της ισοδυναμίας. Οι γεωμετρικές έννοιες ορίζονται απλά και μόνο μέσα από γεωμετρικές σχέσεις. Διακρίνονται τα πρώτα βήματα που θα οδηγήσουν μετά από δύο αιώνες στην αξιωματική του Hilbert.

Η τρίτη και τελευταία περίοδος (Hilbert, Θεμέλια της Γεωμετρίας, 19ος αι.) χαρακτηρίζεται από μια αξιωματική θεμελίωση που βασίζεται σε αρχές, στις αρχές της συνέπειας, ανεξαρτησίας και πληρότητας, με τις πρωταρχικές έννοιες του σημείου, της ευθείας και του επιπέδου να μην έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο και με τα αξιώματα να είναι αυτά που παίζουν ρόλο έμμεσου ορισμού των πρωταρχικών εννοιών, δηλαδή είναι αυτά που προσδίδουν περιεχόμενο στις πρωταρχικές έννοιες. Στο εσωτερικό της μα-

[31] Ο.π.

θηματικής θεωρίας, δηλαδή εκεί που η θεωρία θεμελιώνεται δεν έχουν θέση οντολογικά ερωτήματα, για παράδειγμα τι είναι ευθεία ή τι είναι επίπεδο, εάν τα γεωμετρικά αξιώματα αντιστοιχούν σε καταστάσεις της πραγματικότητας ή πού μπορούν να εφαρμοστούν τα συγκεκριμένα αποτελέσματα. Είναι μια αντίληψη που θα οδηγήσει μερικές δεκαετίες αργότερα στον λεγόμενο Φορμαλισμό, μια φιλοσοφική αντίληψη για τα Μαθηματικά που έχει μέχρι σήμερα η συντριπτική πλειοψηφία της μαθηματικής ακαδημαϊκής κοινότητας.

Αναφορές

[B] O. Blumenthal, *Lebensgeschichte*. *David Hilbert*. *Gesammelte Abhandlungen*, 3e Band. Analysis. Grundlagen der Mathematik, Physik. Verschiedenes. Nebst einer Lebensgeschichte, 1965, 388–429.

[F] H. Freundenthal, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hilberts "Gundlagen der Geometrie". Nieuw Archief voor Wiskunde (4), 1957, V, 105–142.

[Ge] C. I. Gerhardt, (επιμ.) (1849–1963). *G. W. Leibniz*, Mathematische Schriften. I–VII Τόμοι, Halle: Επανεκτύπωση, Hildesheim: Olms, 1971.

[Gr] M. Greenberg, *Euclidean & Non-Euclidean Geometries. Development and History*, New York: W. H. Freeman and Company 2008.

[H1] D. Hilbert (1899), *Grundlagen der Geometrie*, από την έκδοση, Stuttgart: Teubner, 1987.

[H2] D. Hilbert, *Θεμέλια της Γεωμετρίας*. Στρ. Παπαδόπουλος, (μετάφρ.), Εκδόσεις Τροχαλία 1995.

[L1] G. W. Leibniz (1849–1863), *Mathematische Schriften*, C. I. Gerhardt (επιμ.), Τόμοι I–VII, Berlin-Halle. Επανεκτύπωση, Hildesheim: Olms, 1971.

[L2] G. W. Leibniz, *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie* E. Cassirer (επιμ.), A. Buchenau (μετάφρ.), Τόμος I, Hamburg: Meiner 1966.

[M] H. P. Münzenmayer, *Der Calculus Situs und der Grundlagen der Geometrie bei Leibniz*, Studia Leibnitiana, 1979, XI/2, 274–300.

[P] M. Pasch, *Vorlesungen über die neuere Geometrie*. Berlin 1926, Επανεκτύπωση: Berlin: Springer, 1976.

[Sh1] St. Shapiro, *Mathematics and Reality*, Philosophy of Science, 1983, 50, 523–548.

[Sia] M. Sialaros, *Euclid of Alexandria*: *a Child of the Academy?* Στο P. Kalligas κά (επιμ.) Plato's Academy: Its Workings and Its History, 141–152, Cambridge University Press 2020.

[T] M. Toepell, *On the origins of David Hilbert's "Grundlagen der Geometrie"*, Archive for History of Exact Sciences, 1986, 35 (4), 329–344.

[V] G. Veronese *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*, A. Schepp (μετάφρ.), Leipzig: Teubner 1894.

[Αρ] Αριστοτέλης. Αναλυτικά Ύστερα. Βιβλίο 1, Κεφάλαιο 2, 71b 16–18.
https://www.physics.ntua.gr/mourmouras/greats/aristoteles/analytika_ystera.html
Ανάκτηση: 09/09/2024

δεσμός

[Π] Πλάτων, *Πολιτεία* Ν. Μ. Σκουτερόπουλος (μτφρ.) Εισαγωγικό σημείωμα, μετάφραση, ερμηνευτικά σημειώματα. Αθήνα: Πόλις 2002.

[Sh2] St. Shapiro, *Σκέψεις για τα Μαθηματικά—Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών 2006.

[Σια] Μ. Σιάλαρος, *Η Χειρόγραφη Παράδοση των Στοιχείων του Ευκλείδη*, Νεύσις 2014, 22, 121–147.

[Στ] Ε. Σταμάτης, *Ευκλείδου Γεωμετρία*, στοιχεια, Βιβλία 1,2, 3, 4. Τόμος Ι: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων 1975.

[Ζ] Κ. Ζορμπαλά, *Η Έννοια του Επιπέδου και ο Ορισμός του*: *Ένα Ιστορικό Πρόβλημα στην Αξιωματική της Στοιχειώδους Γεωμετρίας*, Νεύσις 1995, 3, 155–182.

http://myria.math.aegean.gr/psag/

ISSN 2945-2473