Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Ανάλυση Ι

Μέρος 1ο

Αντώνης Τσολομύτης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Γοργύρα
Σάμος

Ενότητα 1η

Σύνολα Αριθμών

1.1 Τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$

Αξίωμα 1.1.1 (Επαγωγή) *Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ με την ιδιότητα «$1 \in A$ και όταν $n \in A$ συνεπάγεται $n+1 \in A$» τότε $A = \mathbb{N}$.*

Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Παραλλαγή του παραπάνω αξιώματος είναι το

Αξίωμα 1.1.2 (Πλήρης επαγωγή) *Αν $A \subseteq \mathbb{N}$ με την ιδιότητα «$1 \in A$ και όταν $k \in A$ για όλα τα $k < n$ συνεπάγεται $n \in A$» τότε $A = \mathbb{N}$.*

Μια σημαντική συνέπεια του αξιώματος της επαγωγής είναι η αρχή του ελαχίστου:

Θεώρημα 1.1.3 *Κάθε μή κενό υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Το σύνολο $\mathbb{Z}$ μπορεί να οριστεί από το $\mathbb{N}$. Διαισθητικά μιλώντας, προσθέτουμε στο $\mathbb{N}$ το σύμβολο 0 (μηδέν) ορίζοντας να έχει την ιδιότητα $n + 0 = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης εισάγουμε ένα νέο σύμβολο $-$ (πλήν) και ορίζουμε $-n := (-, n)$ (διατεταγμένο ζεύγος). Τέλος ορίζουμε τις εξής σχέσεις:

$$-0 := 0, \quad -(-n) := n, \quad n - m := -(m - n),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq n$. Ως προς τη διάταξη επεκτείνουμε αυτή του $\mathbb{N}$ θέτωντας

$$-n < 0 < n, \quad n < m \Leftrightarrow -n > -m,$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

1.2 Τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$

Για τα κλάσματα θα μπορούσαμε να θέσουμε $\frac{a}{b} = (a, b)$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ και $b \in \mathbb{N}$. Με αυτή τη σύμβαση όμως δεν θα μπορούσαμε να ορίσουμε άμεσα το σύνολο των ρητών αριθμών αφού τα στοιχεία $(1, 2)$ και $(2, 4)$ θα πρέπει να αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του $\mathbb{Q}$. Έτσι για να ορίσουμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ θεωρούμε το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ και σε αυτό ορίζουμε μιά σχέση ισοδυναμίας θέτωντας $(a, b) \sim (x, y)$ αν και μόνο αν $ay = bx$. Τώρα ορίσουμε το $\mathbb{Q}$ ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\sim$. Δηλαδή το κλάσμα $\frac{1}{2}$ ορίζεται ως η κλάση ισοδυναμίας $[(1, 2)]$.

Σε αυτό το σύνολο ορίζουμε τις πράξεις «κατά τα γνωστά», δηλαδή θέτουμε για παράδειγμα

$$[(a, b)] + [(x, y)] = [(ay + bx, by)] \qquad \left(\text{δηλαδή, } \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by}\right), \text{ κλπ.}$$

Ορισμός 1.2.1 *Διατεταγμένο σώμα ειναι ένα σώμα F το οποίο έχει και μία διάταξη $<$ ώστε*

(α΄) *Αν $x, y, z \in F$ και $y < z$ τότε $x + y < x + z$.*

(β΄) *Αν $x, y \in F$ με $x > 0$ και $y > 0$ τότε $xy > 0$.*

Ονομάζουμε το στοιχείο x «θετικό» αν $x > 0$ και «αρνητικό» αν $x < 0$.

Ορισμός 1.2.2 *Για ένα σώμα F λέμε ότι έχει την «ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος» αν για κάθε $A \subseteq F$ είτε το A είναι μη άνω φραγμένο είτε έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Δηλαδή είτε για κάθε $x \in F$ υπάρχει $y \in A$ ώστε $x < y$ είτε υπάρχει $x \in F$ ώστε αν $x < y$ τότε $y \notin A$, και το x είναι το ελάχιστο στοιχείο του F με αυτή την ιδιότητα.*

Θεώρημα 1.2.3 *Υπάρχει διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος. Επιπλέον το $\mathbb{R}$ περιέχει το $\mathbb{Q}$ ως υποσώμα (οι πράξεις το $\mathbb{R}$ περιορισμένες στα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ είναι ακριβώς οι πράξεις του $\mathbb{Q}$.*

Το $\mathbb{R}$ ορίζεται ως το σύνολο των τομών Dedekind του $\mathbb{Q}$· δηλαδή ως το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α΄) $a \in \mathbb{R}$ τότε $a \neq \emptyset$ και $a \neq \mathbb{Q}$.

(β΄) για κάθε a στο $\mathbb{R}$ αν $p \in a, q \in \mathbb{Q}$ και $q < p$ τότε $q \in a$ (το a είναι κάτω τελικό).

(γ΄) για κάθε a στο $\mathbb{R}$ και $p \in a$ υπάρχει $r \in a$ ώστε $p < r$ (το a είναι πάνω ανοικτό).

Θεώρημα 1.2.4 (α΄) *Αρχή του Αρχιμήδη: αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x > 0$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nx > y$.*

(β΄) *Πυκνότητα του $\mathbb{Q}$: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$ τότε υπάρχει $p \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < p < y$.*

Θεώρημα 1.2.5 (Ύπαρξη n-στης ρίζας) *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x και κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός y ώστε $y^n = x$*

Πόρισμα 1.2.6 *Για κάθε $a, b > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$.*

Παρατηρήστε ότι για κάθε a στο $\mathbb{R}$ η ακολουθία $[na]/n$ αποτελείται από ρητούς και συγκλίνει στο a.

Ορισμός 1.2.7 *Το αναπτυγμά του αριθμού $a \in \mathbb{R}$ ως προς τη βάση $\beta \in \mathbb{N}$ ορίζεται να είναι η ακολουθία*

$$\left(\frac{[\beta^n a]}{\beta^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Για παράδειγμα η ακολουθία $[10^n a]/10^n$ αποτελεί το δεκαδικό ανάπτυγμα του a ενώ η $[2^n a]/2^n$ το δυαδικό ανάπτυγμα του a.

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Δείξτε με επαγωγή ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2. Δείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2} \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)^{1/2}.$$

Άσκηση 3. Για κάθε $x > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $nx > y$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχει $p \in \mathbb{Q}$ ώστε $x < p < y$· και υπάρχει $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ώστε $x < r < y$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι αν $A \neq \emptyset$ και α κάτω φράγμα του A, και β άνω φράγμα του A τότε $\alpha \leq \beta$. Ισχύει αυτό αν $A = \emptyset$;

Ενότητα 2η

Στοιχεία τοπολογίας του $\mathbb{R}$

2.1 Ανοικτά σύνολα, σημεία συσσώρευσης

Ορισμός 2.1.1 *Κάθε σύνολο της μορφής $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$ λέγετε «ανοικτό διάστημα» με κάτω άκρο το a και άνω άκρο το b.*

Ορισμός 2.1.2 *Κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $(x = \varepsilon, x + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) λέγετε ανοιχτή περιοχή του x με ακτίνα ε. Το x λέγετε «κέντρο» του διαστήματος.*

Ορισμός 2.1.3 *Περιοχή (ανοικτή περιοχή) ενός σημείου $x \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) ώστε $x \in (a, b)$.*

Ορισμός 2.1.4 *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, το $x \in \mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$\big((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A\big) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Πόρισμα 2.1.5 *Αν x σημείο συσσώρευσης του συνόλου A τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$ είναι απειροσύνολο.*

[Διαλέξτε ένα σημείο στο $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.]

Θεώρημα 2.1.6 *Αν $K_n = [a_n, b_n]$ για $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ και $K_{n+1} \subseteq K_n$ τότε $\cup_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.*

[Παρατηρούμε ότι $a_n \leq b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ και αποδεικνύουμε ότι $x \in \cup_{n=1}^{\infty} K_n$.]

Θεώρημα 2.1.7 (Bolzano-Weierstraß) *Έστω E φραγμένο απειροσύνολο στο $\mathbb{R}$. Τότε το E έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.*

[Αφού το E είναι φραγμένο έπεται ότι θα υπάρχει διάστημα, έστω το $[a, b]$ ώστε $E \subseteq [a, b]$. Διαιρούμε το $[a, b]$ στα $[a, a+(b-a)/2]$ και $[a+(b-a)/2, b]$ και ονομάζουμε K_1 (δες Θεώρημα 2.1.6) εκείνο που έχει άπειρη τομή με το E. Επαναλαμβάνουμε τη διχοτόμηση και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.1.6.]

Θεώρημα 2.1.8 *Έστω a_n ακολουθία στο $\mathbb{R}$.*

(α') *Η a_n συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε περιοχή του x περιέχει όλους τους όρους της a_n* εκτός *από ένα πεπερασμένο πλήθος.*

(β') *Το όριο είναι μοναδικό.*

(γ') *Αν a_n συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.*

(δ') *Αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει οριακό σημείο το x τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in E$ η οποία συγκλίνει στο x.*

Ορισμός 2.1.9 *Αν x_n ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ακολουθία στο $\mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $\left(x_{n_i}\right)_{i=1}^{\infty}$ λέγετε «υπακολουθία» της x_n.*

Προφανώς αν $x_n \to x$ και x_{n_i} μια υπακολουθία της, τότε $x_{n_i} \to x$ καθώς $i \to \infty$.

Θεώρημα 2.1.10 (Heine-Borel) *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

[Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.1.7.]

Ορισμός 2.1.11 *Μιά ακολουθία $x_n \in \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq N$ τότε $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$.*

Πρόταση 2.1.12 *Μια ακολουθία x_n είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

[Για την κατεύθυνση «Cauchy $\Rightarrow$ συγκλίνουσα» δείχνουμε ότι είναι φραγμένη και χρησιμοποιούμε Θεώρημα Heine-Borel (Θεώρημα 2.1.10).]

Θεώρημα 2.1.13 *Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο supremum των όρων της. Κέθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει στο infimum των όρων της.*

Ασκήσεις

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι αν $x_n \to x$ τότε κάθε περιοχή του x περιέχει όλους τους όρους της x_n *εκτός* από ένα πεπερασμένο πλήθος όρων.

Άσκηση 7. Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε η x_n είναι φραγμένη.

Άσκηση 8. Αν το x είναι οριακό σημείο ενός συνόλου E, τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in E$ ώστε $x_n \to x$.

Άσκηση 9. Αν $x_n \to x \in \mathbb{R}$ τότε η x_n είναι ακολουθία Cauchy

Άσκηση 10.

- Αν η x_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε $x_n \to \sup\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.
- Αν η x_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $x_n \to \inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Ενότητα 3η

Ανώτερα και κατώτερα όρια

3.1 Ανώτερα και κατώτερα όρια

Ορισμός 3.1.1 *Για μια ακολουθία s_n λέμε ότι συγκλίνει στο ∞ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $s_n \geq M$.*

Για μια ακολουθία s_n λέμε ότι συγκλίνει στο $-\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $s_n \leq -M$.

Ορισμός 3.1.2 *Έστω ακολουθία $s_n \in \mathbb{R}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ώστε $x \in E$ αν και μόνο αν υπάρχει υπακολουθία s_{n_k} της s_n με $s_{n_k} \to x$ (δηλαδή το E είναι το σύνολο όλων των υπακολουθιακών ορίων της s_n).*

Θέτουμε $s^* = \sup E$ και $s_* = \inf E$. Το s^* λέγεται «ανώτερο όριο» της s_n και το s_* λέγεται «κατώτερο όριο» της s_n. Γράφουμε $s^* = \limsup s_n$ ή $\overline{\lim} s_n$ και $s_* = \liminf s_n$ ή $\underline{\lim} s_n$.

Για παράδειγμα, $\limsup(-1)^n = 1$, $\liminf(-1)^n = -1$, $\limsup \frac{1}{n} = 0$, $\liminf n^2 = \infty$.

Θεώρημα 3.1.3 *Έστω ακολουθία s_n στο $\mathbb{R}$ και E το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων της.*

(α΄) $s^* \in E$

(β΄) *αν $x > s^*$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $s_n < x$*

(γ΄) *ο αριθμός s^* είναι ο μοναδικός αριθμός με τις ιδιότητες (i) και (ii)*

(δ΄) $s_* \in E$

(ε΄) *αν $x < s_*$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $s_n > x$*

(ϛ΄) *ο αριθμός s_* είναι ο μοναδικός αριθμός με τις ιδιότητες (iv) και (v)*

[Για το (ii) αν $x > s^*$ τότε η s_n δεν μπορεί να έχει άπειρους όρους πάνω από το x γιατί τότε θα είχε υπακολουθιακό όριο μεγαλύτερο ή ίσο του x.]

Πόρισμα 3.1.4 (α′) $\limsup s_n \leq \limsup s_n$.

(β′) $\limsup s_n = \liminf s_n$ *αν και μόνο αν υπάρχει το* $\lim s_n$ *και τότε*

$$\lim s_n = \limsup s_n = \liminf s_n.$$

[Για το (ii) αν $\limsup s_n = \liminf s_n$ τότε το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων είναι μονοσύνολο.]

Πρόταση 3.1.5 *Για κάθε ακολουθία* a_n *στο* $\mathbb{R}$ *ισχύει*

$$\limsup a_n = \lim_{k\to\infty} \big(\sup\{a_n \,:\, n \geq k\}\big).$$

[Η ακολουθία $\sup\{a_n \,:\, n \geq k\}$ είναι αύξουσα.]

Θεώρημα 3.1.6 *Για κάθε ακολουθία* a_n *στο* $\mathbb{R}$ *με* $a_n > 0$ *ισχύει*

$$\underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}\overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

[Αν $s^* = \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < s^* + \varepsilon \Rightarrow a_{n+1} < \big(s^* + \varepsilon\big)^{n-N+1} a_N.$$
]

Ορισμός 3.1.7 *Ένα σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$ *λέγεται «ανοιχτό σύνολο» αν για κάθε* $x \in A$ *υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *ώστε* $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.

Ορισμός 3.1.8 *Ένα σύνολο* $F \subseteq \mathbb{R}$ *λέγεται «κλειστό σύνολο» αν για κάθε ακολουθία* $x_n \in F$ *με* $x_n \to x \in \mathbb{R}$ *συνεπάγεται* $x \in F$.

Πρόταση 3.1.9 *Έστω* $K \subseteq \mathbb{R}$. *Το* K *είναι κλειστό αν και μόνο αν το* K^c *είναι ανοιχτό.*

Πρόταση 3.1.10 (α′) *Ενώση ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.*

(β′) *Τομή πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.*

(γ′) *Τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

(δ′) *Ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

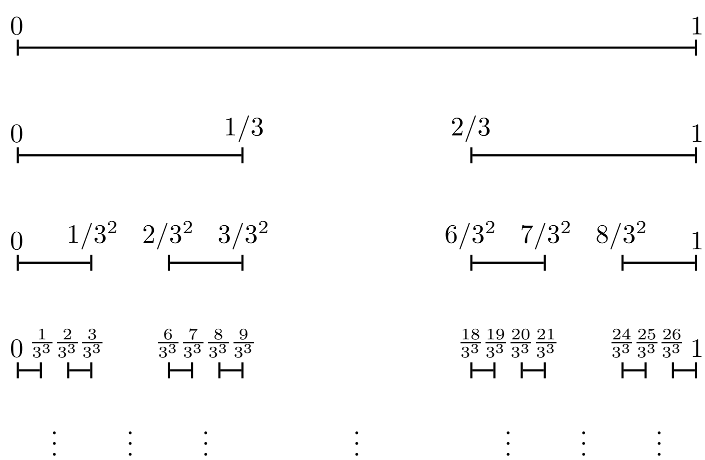
3.2 Το σύνολο Cantor

Το σύνολο Cantor κατασκευάζεται αφαιρώντας από το $[0,1]$ το μεσαίο τρίτο υποδιάστημα και επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τα εναπομείναντα διαστήματα. Ακριβέστερα θέτουμε

$$\begin{aligned}
E_1 &= [0,1]\\
E_2 &= \left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]\\
E_3 &= \left[0,\frac{1}{3^2}\right]\cup\left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right]\cup\left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right]\cup\left[\frac{8}{3^2},1\right]\\
E_4 &= \left[0,\frac{1}{3^3}\right]\cup\left[\frac{2}{3^3},\frac{3}{3^3}\right]\cup\left[\frac{6}{3^3},\frac{7}{3^3}\right]\cup\left[\frac{8}{3^3},\frac{9}{3^3}\right]\cup\\
&\qquad\cup\left[\frac{18}{3^3},\frac{19}{3^3}\right]\cup\left[\frac{20}{3^3},\frac{21}{3^3}\right]\cup\left[\frac{24}{3^3},\frac{25}{3^3}\right]\cup\left[\frac{26}{3^3},1\right]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

και ορίζουμε το σύνολο Cantor P ως την τομή όλων των E_n:

$$P=\cap_{i=1}^{\infty}E_n.$$



Σχήμα 3.1: Η κατασκευή του συνόλου Cantor

Πρόταση 3.2.1 *Για κάθε $a,b\in[0,1]$ με $a<b$ ισχύει $(a,b)\nsubseteq P$*

Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\big((3k+1)/3^m, (3k+2)/3^m\big) \cap P = \emptyset$. Αν m αρκετά μεγάλο ώστε $3/3^m < (b-a)/2$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\big((3k+1)/3^m, (3k+2)/3^m\big) \subset (a, b)$.

Ορισμός 3.2.2 *Ένα σύνολο E λέγεται τέλειο όταν είναι κλειστό και κάθε σημείο τού E είναι σημείο συσσώρευσής του.*

Πρόταση 3.2.3 *Το σύνολο Cantor είναι τέλειο σύνολο.*

Είναι φανερά κλειστό και αν $x \in P$ βρίσκουμε το διάστημα του E_n (από την κατασκευή του Cantor) που περιέχει το x και θέτουμε x_n το άκρο του διαστήματος που δεν είναι ίσο με το x.

Πρόταση 3.2.4 *Το σύνολο Cantor είναι υπεραριθμίσιμο.*

Αν $x \in P$ τότε

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

όπου $a_i \in \{0, 2\}$.

Ασκήσεις

ΆΣΚΗΣΗ 11. Υπολογίστε τα $\liminf$ και $\limsup$ των ακολουθιών $x_n = 1 + (-1)^n - (-1)^n/n$ και

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Επίσης υπολογίστε τα $\liminf$ και $\limsup$ της y_{n+1}/y_n και $\sqrt[n]{y_n}$.

ΆΣΚΗΣΗ 12. Βρείτε τα $\liminf$ και $\limsup$ της $\frac{n}{5} - \left[\frac{n}{5}\right]$.

ΆΣΚΗΣΗ 13. Βρείτε τα οριακά σημεία των συνόλων:

$$\left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \,:\, n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{(-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right]\right\}.$$

ΆΣΚΗΣΗ 14. Αν $x > \limsup a_n$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq \mathbb{N}$ ισχύει $x > a_n$.

ΆΣΚΗΣΗ 15. Δείξτε ότι αν τα σύνολα A_n είναι ανοιχτά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε το $A = \sup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι ανοιχτό.

ΆΣΚΗΣΗ 16. Δείξτε με τον ορισμό (δηλαδή με χρήση ακολουθιών) ότι αν F_1, F_2 είναι κλειστά σύνολα τότε και το $F_1 \cup F_2$ είναι κλειστό.

ΆΣΚΗΣΗ 17. Δείξτε (με ένα παράδειγμα) ότι άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι πάντα κλειστό σύνολο.

Ενότητα 4η

Συμπάγεια

4.1 Συμπάγεια

Ορισμός 4.1.1 *Τα σύνολα $(G_a)_{a\in A}$ λέγεται ότι αποτελούν «ανοιχτή κάλυψη» ενός συνόλου E αν είναι ανοικτά και $E \subseteq \cup_{a\in A} G_a$.*

Ορισμός 4.1.2 *Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}$ λέγεται «συμπαγές» αν και μόνο αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του K περιέχει πεπερασμένη υποκάλυψη· δηλαδή αν τα $(G_a)_{a\in A}$ είναι ανοιχτά και $K \subseteq \cup_{a\in A} G_a$, τότε υπάρχουν $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ώστε $K \subseteq \cup_{j=1}^{n} G_{a_x}$.*

Παράδειγμα 4.1.3 *Το σύνολο (a, b) για $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές αφού τα σύνολα $(a, b - 1/n)$ για $n \in \mathbb{N}$ αποτελούν ανοιχτή κάλυψη του (a, b) χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη.*

Πρόταση 4.1.4 *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ το σύνολο $[a, b]$ είναι συμπαγές.*

Αποδεικνύουμε ότι το supremum του συνόλου

$$A = \{t \in [a, b] \,:\, \text{το } [a, t] \text{ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα}\}$$

είναι ίσο με το b.

Πρόταση 4.1.5 *Κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.*

Πρόταση 4.1.6 *Κάθε ανοικτό κάλυμμα (οποιουδήποτε συνόλου) στο $\mathbb{R}$ έχει* αριθμήσιμο *υποκάλυμμα.*

Θεώρημα 4.1.7 *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$. Το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο K.*

[Αν η ακολουθία $x_n \in K$ δεν έχει σημείο συσσώρευσης στο K τότε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}$ είναι κλειστό υποσύνολο του K και άρα συπαγές, το οποίο οδηγεί σε άτοπο αφού χωρίς σημεία συσσώρευσης τα σημεία του A ως μεμονομένα μπορούν να καλυφθούν από άπειρο πλήθος ξένων μεταξύ τους διαστήματα. Για το αντίστροφο πάλι χρησιμοποιούμε απαγωγή στο άτοπο: πέρνουμε ένα αριθμήσιμο κάλλυμα που δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμα και διαλέγουμε x_n στο K έξω από τα πρώτα n σύνολα του καλύματος.]

Θεώρημα 4.1.8 *Αν K υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν το K είναι κλειστό και φραγμένο.*

[Προκύπτει εύκολα από το προηγούμενο και το Θεώρημα Heine-Borel (Θεώρημα 2.1.10).]

Ασκήσεις

Άσκηση 18. Έστω $a < x_n < b$ και $x_n \to b$ ($a, b, x_n \in \mathbb{R}$). Έστω $(G_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμα του $(a, b]$ ώστε το διάστημα (a, x_n) να έχει κάποιο πεπερασμένο υποκάλυμμα από το κάλυμμα $(G_i)_{i\in I}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι και το $(a, b]$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Άσκηση 19. Έστω ακολουθία $x_n \to x$. Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$x \le \sup\{x_n : n \ge k\}.$$

Άσκηση 20.

(α') Δείξτε ότι η ακολουθία $a_k = \sup\{x_n : n \ge k\}$ είτε συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $\mathbb{R}$ είτε αποκλίνει στο $+\infty$.

(β') Με τη βοήθεια της Άσκησης 19 δείξτε ότι $\limsup x_n \le a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή

$$\limsup x_n \le \lim_{k\to\infty} \big(\sup\{x_n : n \ge k\}\big).$$

(γ') Έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει k_0 ώστε για κάθε $k \ge k_0$ ισχύει $a_k \le (\limsup x_n) + \varepsilon$.

(δ') Δείξτε ότι $\lim_{k\to\infty} a_k = \limsup x_n$, δηλαδή

$$\limsup x_n = \lim_{k\to\infty} \big(\sup\{x_n : n \ge k\}\big).$$

Άσκηση 21. Δείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty$$

με τα ακόλουθα βήματα:

(α') Θέστε

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n$$

και

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Δείξτε ότι η x_n είναι αύξουσα και η y_n είναι φθίνουσα.

(β') Δείξτε ότι $y_n \ge x_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ') Από τα α' και β' συμπεράνατε ότι η y_n συγκλίνει.

Άσκηση 22. Έστω x_n ακολουθία Cauchy και x_{k_n} υπακολουθία της x_n με $x_{k_n} \to x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $x_n \to x$.

Άσκηση 23. Βρείτε τε σημεία συσσώρευσης των συνόλων:

$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad \left\{(-1)^n \left[1 + \frac{1}{n}\right] : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ενότητα 5η

Συνέχεια συναρτήσεων

5.1 Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός 5.1.1 *Μιά συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται «συνεχής» αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$ η αντίστροφη εικόνα του $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό σύνολο.*

Παρατήρηση 5.1.2 *Αν $\varepsilon>0$ τότε το σύνολο $\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)$ είναι ανοιχτό, άρα θα είναι ανοιχτό και το $f^{-1}\Big(\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)\Big)$ εφόσον η f είναι συνεχής. Όμως $x_0\in f^{-1}\Big(\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)\Big)$ (αφού $f(x_0)\in\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)$) άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε*

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq f^{-1}\Big(\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)\Big).$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $|x-x_0|<\delta$ (οπότε και $x_0\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$) τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ (αφού $f(x)\in\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)$.

Αντιστρόφως, έστω U ανοιχτό σύνολο και $x_0\in f^{-1}(U)$. Τότε $f(x_0)\in U$ και αφού U ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε $\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)\subseteq U$. Για αυτό το $\varepsilon>0$ θα υπάρχει $\delta>0$ ώστε

$$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq f^{-1}\Big(\big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)\Big)\subseteq f^{-1}(U).$$

Άρα για κάθε $x_0\in f^{-1}(U)$ βρήκαμε $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq f^{-1}(U)$. Άρα το $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό.

Θεώρημα 5.1.3 *Συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο. Δηλαδή, αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και το $K\subseteq\mathbb{R}$ είναι συμπαγές σύνολο, τότε το σύνολο $f(K)$ είναι επίσης συμπαγές.*

Θεώρημα 5.1.4 *Αν $f:K\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, και το K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε η f έχει μέγιστο και ελάχιστο στο K. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2\in K$ ώστε για κάθε $x\in K$ να ισχύει*

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2).$$

[Αφού το $f(K)$ είναι συμπαγές συνεπάγεται ότι είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα έχει supremum και infimum που λόγω της κλειστότητας του $f(K)$ ανήκουν σε αυτό.]

Θεώρημα 5.1.5 *Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ και ένα προς ένα, και K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(K) \to K$ είναι συνεχής.*

[Αρκεί να δείξουμε ότι αν το U είναι ανοιχτό υποσύνολο του K τότε είναι ανοιχτό και το $f(U)$. Το $f(K \setminus U)$ είναι κλειστό διότι το $K \setminus U$ είναι συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K) και $f(U) = f(K) \setminus f(K \setminus U)$.]

5.1.1 Είδη ασυνέχειας

Γράφουμε $f(x+)$ για το $\lim_{t \to x^+} f(t)$ και $f(x-)$ για το $\lim_{t \to x^-} f(t)$.

Ορισμός 5.1.6 *Για τη συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει «ασυνέχεια πρώτου είδους» στο $x \in (a, b)$ όταν είναι μεν ασυνεχής στο x αλλά τα πλευρικά όρια $f(x+)$ και $f(x-)$ υπάρχουν και ανήκουν στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή δεν είναι συν ή πλη άπειρο).*

Αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια της f στο x δεν υπάρχει (συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης να είναι $\pm\infty$ τότε λέμε ότι η f έχει «ασυνέχεια δεύτερου είδους» στο x.

Παρατήρηση 5.1.7 *Για να έχει μιά συνάρτηση f ασυνέχεια πρώτου είδους σε ένα σημείο x δύο πράγματα μπορούν να συμβαίνουν: είτε $f(x+) \neq f(x-)$ είτε $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.*

Παράδειγμα 5.1.8 *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

έχει ασυνέχειες δεύτερου είδους σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.1.9 *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $x = 0$ και έχει ασυνέχειες δεύτερου είδους σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Παράδειγμα 5.1.10 *Η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ και έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο $x = 0$.

Ασκήσεις

Άσκηση 24. Έστω η ακολουθία

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Για ποιά $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει υπακολουθία της παραπάνω με όριο το a;

Άσκηση 25. Το $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Άσκηση 26. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θέτω

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \text{ σημείο συσσώρευσης του } A\},$$

και $\overline{A} = A \cup A'$.Δείξτε ότι το $\overline{A}$ ίναι κλειστό σύνολο και ότι αν $F \supseteq A$ και F κλειστό τότε $F \supseteq \overline{A}$. Τέλος δείξτε ότι

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ κλειστό} \\ F \supseteq A}} F.$$

Άσκηση 27. Αποδείξτε ότι τα μοναδικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι και ανοιχτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και $\mathbb{R}$ με τον εξής τρόπο:

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}$, $G \neq \emptyset$, Gανοιχτό και κλειστό σύνολο. Αρκεί να δείξω ότι $G = \mathbb{R}$. Αφού το G δεν είναι κενό, έστω $x \in G$. Θέτω

$$M = \sup\{t \in \mathbb{R} \,:\, (x - t, x + t) \subseteq G\}$$

(γιατί υπάρχει το supremum;).

Αρκεί να δείξω ότι $M = \infty$. Αν όχι τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x + M - \varepsilon \in G$ (γιατί;). Άρα $x + M \in G$ (γιατί;). Συνεπώς $[x - M, x + M] \subseteq G$ (γιατι;). Όμως το G είναι και ανοιχτό άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x - M - \varepsilon, x + M + \varepsilon) \subseteq G$ (γιατί;) *άτοπο* (γιατί;).

Άσκηση 28. Αν A, B συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τότε τα $A \cup B$ και $A \cap B$ είναι επίσης συμπαγή. Ισχύει το ίδιο για άπειρο πλήθος συμπαγών συνόλων;

Άσκηση 29. Γιατί το σύνολο

$$\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι συμπαγές;

Άσκηση 30. Έστω K_n ακολουθία μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $K_n \supseteq K_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\cap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. (Υπόδειξη: δείξτε ότι αν διαλέξουμε ένα x_n από κάθε K_n τότε η ακολουθία που σχηματίζεται έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης το οποίο ανήκει σε όλα τα K_n.)

Ενότητα 6η

Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων

6.1 Ομοιόμορφη συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός 6.1.1 *Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, λέγεται ομοιόμορφα συνεχής στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Παράδειγμα 6.1.2 *Η συνάρτηση $f(x) = 1/x : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.*

Για $\varepsilon = 1$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in (0,1)$ με $|x - y| < \delta$ συνεπάγεται $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < \varepsilon$, τότε θα ισχύει και για $y = x + \delta/2$. Όμως

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{\delta/2}{x(x+\delta/2)}\right|,$$

το οποίο είναι μεγαλύτερο από 1 αν το x είναι αρκετά κοντά στο μηδέν.

Οι δύο ένοιες —συνέχεια και ομοιόμορφη συνέχεια— συμπίπτουν πάνω σε συμπαγή σύνολα:

Θεώρημα 6.1.3 *Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και το K είναι συμπαγές σύνολο, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.*

Για κάθε $x \in K$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε αν $|x-y| < \delta_x$ τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$. Φανερά $K \subseteq \cup_{x\in K}(x-\delta, x+\delta)$ και λόγω της συμπάγειας του K υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_N$ στο K ώστε

$$K \subseteq \cup_{j=1}^{N}\big(x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}\big).$$

Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2}\min\left\{\delta_{x_j}\ :\ j = 1, 2, \ldots, N\right\}$. Έστω $x, y \in K$ με $|x - y| < \delta$. Έστω $1 \le i \le N$ ώστε $x \in \big(x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i}\big)$. Άρα ισχύει $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2$. Τώρα έχουμε:

$$|y - x_i| \le |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_i} \le \delta_{x_i}.$$

Συνεπώς $|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2$. Μια τριγωνική ανισότητα δίνει το αποτέλεσμα.

Ασκήσεις

Άσκηση 31. Έστω $F, K \subseteq \mathbb{R}$ όπου F κλειστό και K συμπαγές. Αν $F \cap K = \emptyset$ δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in K$ να ισχύει $|x - y| \geq \varepsilon$.

Άσκηση 32. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(K)$ ενός κλειστού συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό.

Άσκηση 33. Έστω K_n συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $K_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$. Δείξτε ότι η τομή όλων των K_n είναι μή κενή με τον ακόλουθο τρόπο: αν $K_1 \cap (\cap_{n=2}^{\infty} K_n) = \emptyset$ τότε $K_1 \subseteq (\cap_{n=2}^{\infty} K_n)^c$. Χρησιμοποιήστε τον νόμο του De Morgan και τον ορισμό της συμπάγειας για το K_1 ώστε να καταλήξετε σε άτοπο.

Άσκηση 34. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συναρτήσεις. Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι ανοιχτά και ποιά είναι κλειστά:

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{2}\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}.$$

Άσκηση 35. Ποιές από τις ακόλουθες συνεπαγωγές είναι σωστές;

(α΄) ($f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής και A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f(A)$ φραγμένο.

(β΄) ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f(A)$ φραγμένο.

Άσκηση 36. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ όχι συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη που δεν έχει μέγιστο στο A.

Άσκηση 37. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε την ακόλουθη ισοδυναμία

$$f \text{ συνεχής } \Leftrightarrow [\forall x_n \in \mathbb{R} \text{ με } x_n \to x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_n) \to f(x)].$$

Άσκηση 38. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, 1-1 και επί, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{R} \to A$ *δεν* είναι απαραίτητα συνεχής.

Άσκηση 39. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$.Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $f(x) = x$.

Άσκηση 40. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι συνεχής αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής.

Άσκηση 41. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις:

(α') $f(x) = 1/x, \qquad x > 0$

(β') $f(x) = x^2/(1+x^2)$

(γ') $f(x) = x^3$

(δ') $f(x) = (x^2-4)^{-1}$.

Άσκηση 42. Έστω r ρητός αριθμός. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\sin(nr\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο πλήθος οριακών σημείων.