Πανεπιστήμιο Αιγαίου

URL: http://www.aegean.gr

Ανάλυση Ι

Μέρος 2ο

Αντώνης Τσολομύτης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
832 00 Γοργύρα
Σάμος

Ενότητα 1η

Συνέχεια συναρτήσεων

1.1 Είδη ασυνέχειας

Για το δεξιό πλευρικό όριο $\lim_{t\to x^+} f(t)$ και το αριστερό πλευρικό όριο $\lim_{t\to x^-} f(t)$ συμβολίζονται αντίστοιχα $f(x+)$ και $f(x-)$.

Ορισμός 1.1.1 *Για τη συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει ασυνέχεια πρώτου είδους στο $x \in (a,b)$ όταν είναι ασυνεχής στο x αλλά τα $f(x+)$ και $f(x-)$ υπάρχουν (και ανήκουν στο $\mathbb{R}$).*

Αν τουλάχιστον ένα από τα πλευρικά όρια της f στο x δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι η f έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο x.

Παρατήρηση 1.1.2 *Για να έχει η f ασυνέχεια πρώτου είδους στο x δύο πράγματα μπορούν να συμβαίνουν:*

- *είτε $f(x+) \neq f(x-)$*
- *είτε $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.*

Παραδείγματα

(α΄) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

έχει ασυνέχειες δεύτερου είδους σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$.

(β΄) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

έχει ασυνέχειες δεύτερου είδους σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ και είναι συνεχής στο $x = 0$.

(γ') Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

έχει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο $x = 0$ και είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.2 Μονοτονία και συνέχεια

Θεώρημα 1.2.1 *Αν f αύξουσα στο (a, b), τότε τα $f(x+)$ και $f(x-)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a, b)$. Συγκεκριμένα ισχύει*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

Ομοίως, αν f φθίνουσα στο (a, b) τότε τα $f(x+)$ και $f(x-)$ υπάρχουν για κάθε $x \in (a, b)$ και ισχύει

$$\inf_{a<t<x} f(t) = f(x-) \geq f(x) \geq f(x+) = \sup_{x<t<b} f(t).$$

Απόδειξη: Αν η f είναι αύξουσα τότε το σύνολο $E = \{f(t) : a < t < x\}$ είναι άνω φραγμένο από το $f(x)$. Άρα έχει supremum. Έστω $A = \sup_{a<t<x} f(t)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A - \varepsilon \leq f(x - \delta) \leq A \leq A + \varepsilon$. Αλλά η f είναι αύξουσα συνεπώς $A - \varepsilon \leq f(x) \leq A + \varepsilon$ για κάθε $x \in (x - \delta, x + \delta)$. Συνεπώς, $A = f(x-)$. ◀

Πρόταση 1.2.2 *Οι μονότονες συνερτήσεις δεν έχουν ασυνέχειες δεύτερου είδους.*

Θεώρημα 1.2.3 *Έστω f μονότονη συνάρτηση στο (a, b). Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Έστω E το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f και έστω πως η f είναι αύξουσα. Άρα $f(x-) < f(x+)$ για κάθε $x \in E$. Αν πάρουμε τώρα έναν ρητό αριθμό r_x ώστε $f(x-) < r_x < f(x+)$ τότε η συνάρτηση $r : E \to \mathbb{Q}$ με $r(x) = r_x$ είναι ένα προς ένα. ◀

Πρόταση 1.2.4 *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ασυνεχής στο $\mathbb{Q}$ και αύξουσα.*

Απόδειξη: Έστω $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αρίθμηση του $\mathbb{Q}$ (δηλαδή $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$). Η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{\{n : r_n < x\}} \frac{1}{2^n}$$

είναι μια τέτοια συνάρτηση. ◀

Ασκήσεις

Άσκηση 1. Έστω f αύξουσα συνάρτηση στο (a, b). Δείξτε ότι $f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t)$.

Άσκηση 2. Έστω f φθίνουσα συνάρτηση στο (a, b). Δείξτε ότι

$$\inf_{a<t<x} f(t) = f(x-) \qquad \text{και} \qquad \inf_{x<t<b} f(t) = f(x+).$$

Άσκηση 3. Έστω E το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας αύξουσας συνάρτησης $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $x \in E$ τότε $f(x-) < f(x+)$.

Για ένα τέτοιο x διαλέγουμε ρητό αριθμό r_x ώστε $f(x-) < r_x < f(x+)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $r : E \to \mathbb{Q}$ με $r(x) = r_x$ είναι συνάρτηση ένα προς ένα.

Άσκηση 4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε αν το G είναι οποιοδήποτε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε και το $f(G)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι μονότονη.

Άσκηση 5. Έστω $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αρίθμηση του $\mathbb{Q}$ (δηλαδή $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$). Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{\{n : r_n < x\}} \frac{1}{2^n}$$

είναι ασυνεχής *ακριβώς* στα σημεία του $\mathbb{Q}$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f(r_n) + 1/2^n \leq f(r_n+)$.)

Ενότητα 2η

Ολοκλήρωση

2.1 Ορισμός ολοκληρώματος

Ορισμός 2.1.1 *Με τον όρο διαμέριση ενός κλειστού διαστήματος $[a, b]$ εννοούμε ένα* πεπερασμένο *σύνολο σημείων $\mathcal{P} = \{a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b\}$. Γράφουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Η ποσότητα $\lambda(\mathcal{P})$ λέγεται «λεπτότητα της διαμέρισης $\mathcal{P}$».*

Για μία *φραγμένη* συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ θέτουμε $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ και $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ (οι τιμές αυτές μπορεί να είναι και σύν ή πλην άπειρο). Ορίζουμε τώρα το κάτω και άνω άθροισμα Darboux της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, b]$ ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$ να είναι οι ποσότητες:

κάτω άθροισμα Darboux:

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

άνω άθροισμα Darboux:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής η περιγραφή του κάτω αθροίσματος Darboux είναι το συνολικό εμβαδό των παραλληλογράμων που έχουν βάσεις τα διαστήματα της διαμέρισης $\mathcal{P}$ και ύψος το μεγαλύτερο δυνατό ώστε τα παραλληλόγραμμα αυτά να βρίσκονται εξ' ολοκλήρου κάτω από το γράφημα της f. Ομοίως το άνω άθροισμα Darboux είναι το συνολικό εμβαδό των παραλληλογράμων που έχουν βάσεις τα διαστήματα της διαμέρισης $\mathcal{P}$ και ύψος το ελάχιστο δυνατό ώστε το γράφημα της f να βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στα παραλληλόγραμμα.

Στη συνέχεια ορίζουμε το κάτω και άνω ολοκλήρωμα Darboux να είναι οι ποσότητες:

κάτω ολοκλήρωμα Darboux:

$$\bar{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P})$$

άνω ολοκλήρωμα Darboux:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{P}} U(f, \mathcal{P})$$

Αν συμπίπτουν οι δύο αυτές τιμές λέμε ότι η κοινή τιμή *είναι* το ολοκλήρωμα Darboux της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, b]$. Την κοινή αυτή τιμή τη συμβολίζουμε με $\int_a^b f(x)\,dx$.

Παρατήρηση 2.1.2 *Φανερά τα άνω και κάτω ολοκληρώματα υπάρχουν αν η f είναι φραγμένη συνάρτηση (στο $\mathbb{R}$). Συγκεκριμένα, αν $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$ (όπου m και M είναι δύο πραγματικοί αριθμοί) τότε*

$$m(b-a) \leq L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a)$$

για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του διαστήματος $[a, b]$.

2.2 Το ολοκλήρωμα Riemann

Αν για τη διαμέριση $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ θεωρήσω και μία επιλογή «ενδιάμεσων» σημείων $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ με $s_i \in (x_{i-1}, x_i)$ για $= 1, 2, \ldots, n$ τότε μπορούμε να ορίσουμε το άθροισμα Riemann:

$$R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) := \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta x_i.$$

Φανερά για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ και για κάθε επιλογή σημείων $\mathcal{S}$ ισχύει

$$L(f, \mathcal{P}) \leq R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Ορισμός 2.2.1 *Μια διαμέριση $\mathcal{P}_1$ λέγεται* εκλέπτυνση *της διαμέρισης $\mathcal{P}_2$ όταν $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}_1$.*

Το ολοκλήρωμα Riemann μπορεί να περιγραφεί διαισθητικά λέγοντας ότι είναι «η οριακή τιμή των $R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S})$ καθώς η διαμέριση $\mathcal{P}$ εκλεπτύνεται και η λεπτότητά της $\lambda(\mathcal{P})$ τείνει στο μηδέν». Αυστηρά ο ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός 2.2.2 *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη με ολοκλήρωμα τον αριθμό $\ell \in \mathbb{R}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ με $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\mathcal{S}$ στην $\mathcal{P}$ ισχύει $|R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \ell| < \varepsilon$.*

Παρατηρήστε ότι ενώ στον ορισμό του ολοκληρώματος Darboux έπρεπε η συνάρτηση f να είναι φραγμένη (γιατί ήταν απαραίτητο;) στον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann δεν ζητήσαμε κάτι τέτοιο. Μπορεί όμως να δεί κανείς εύκολα ότι αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε είναι και φραγμένη (δες Άσκηση 11).

Επόμενος στόχος είναι να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα Darboux και το ολοκλήρωμα Riemann ταυτίζονται.

Λήμμα 2.2.3 *Αν η διαμέριση $\mathcal{P}^*$ του διαστήματος $[a, b]$ είναι εκλέπτυνση της διαμέρισης $\mathcal{P}$ τότε ισχύει*

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}^*) \qquad \text{και} \qquad U(f, \mathcal{P}^*) \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Απόδειξη: Είναι εύκολο να δείξει κανείς το ζητούμενο αν η $\mathcal{P}^*$ έχει ένα μόνο σημείο επιπλεόν της $\mathcal{P}$. ◀

Θεώρημα 2.2.4 *Για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Απόδειξη: Αν $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ για δύο διαμερίσεις $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ του $[a, b]$ τότε έχουμε

$$L(f, \mathcal{P}_1) \leq L(f, \mathcal{P}^*) \leq U(f, \mathcal{P}^*) \leq U(f, \mathcal{P}_2).$$

Συνεπώς, $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$ για όλες τις διαμερίσεις $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ του $[a, b]$. ◀

Θεώρημα 2.2.5 *Μια συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon >$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ ώστε*

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Απόδειξη: Αν ισχύει η (2.1) τότε $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ αφού για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ ισχύει

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f, \mathcal{P}).$$

Έστω ℓ η κοινή τιμή τους. Συνεπώς

$$L(f, \mathcal{P}) \leq \ell \leq U(f, \mathcal{P}). \tag{2.2}$$

Τώρα έχουμε ότι για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων

$$L(f, \mathcal{P}) \leq R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) \leq U(f, \mathcal{P}). \tag{2.3}$$

Συνεπώς ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann μαζί με τις (2.2) και (2.3) δίνουν το αποτέλεσμα.

Αντίστροφα, επιλέγουμε ενδιάμεσα σημεία $\mathcal{S}_1$ και $\mathcal{S}_2$ ώστε $R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}_1) \simeq L(f, \mathcal{P})$ και $R(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}_2) \simeq U(f, \mathcal{P})$. Από τον ορισμό της ολοκληρωσιμότητας Riemann θα έχω ότι $L(f, \mathcal{P}) \simeq U(f, \mathcal{P})$. ◀

Θεώρημα 2.2.6 *Το ολοκλήρωμα Darboux και το ολοκλήρωμα Riemann ταυτίζονται. Δηλαδή, αν η φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Darboux ολοκληρώσιμη τότε είναι και Riemann ολοκληρώσιμη, και αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε είναι φραγμένη και Darboux ολοκληρώσιμη. Και στις δύο περιπτώσεις οι τιμές των δύο ολοκληρωμάτων συμπίπτουν.*

Απόδειξη: Η πρώτη κατεύθυνση έπεται άμεσα αφού θα ισχύει (2.1). Για την δεύτερη κατεύθυνση η συνάρτηση πρέπει να είναι φραγμένη (Άσκηση 11) και είναι και Darboux ολοκληρώσιμη εξαιτίας της (2.1).

Από την (2.3) έπεται ότι τα ολοκληρώματα έχουν κοινή τιμή. ◀

Θεώρημα 2.2.7 *Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη τότε είναι και Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Τα m_i και M_i στην (2.1) υπολογίζονται εύκολα. ◀

Θεώρημα 2.2.8 *Έστω συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών. Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Αν το $x \in (a, b)$ είναι σημείο ασυνέχειας έστω διαμέριση $\mathcal{P} = \{a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n = b$ του $[a, b]$ και i ώστε $x_i < x < x_{i+1}$. Το παραλληλόγραμο με βάση το διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ στο οποίο βρίσκεται η ασυνέχεια και ύψος είτε το m_i είτε το M_i έχει εμβαδό μικρότερο από το γινόμενο του $x_{i+1} - x_i$ επί το φράγμα της f. Συνεπώς το εμβαδό αυτό είναι μικρό αν η $\mathcal{P}$ έχει μικρή λεπτότητα. Στο υπόλοιπο πεδίο ορισμού, δηλαδή στο συμπαγές σύνολο $[a, x_i] \cup [x_{i+1}, b]$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και συνεπώς μια διαμέριση με μικρή λεπτότητα δίνει καλή εκτίμηση για τις διαφορές $f(x_j) - f(x_{j-1})$ που εμφανίζονται στην (2.1). Με αυτόν τον τρόπο επιβεβαιώνουμε την (2.1). ◀

Θεώρημα 2.2.9 *Έστω $m \le f \le M$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ και $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η σύνθεση $h(x) := \phi\big(f(x)\big)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος η απόδειξη των οποίων αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα 2.2.10 *Έστω f, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α') $\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

(β') *για κάθε $c \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b (cf)(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$*

(γ') *για κάθε $c \in [a, b]$ ισχύει $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$*

(δ') *αν $|f(x)| \le M$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le M(b - a)$*

(ε') $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$ (*τριγωνική ανισότητα*).

Ασκήσεις

Άσκηση 6. Υπολογιστε τα ολοκληρώματα $\int_a^b \cos x\, dx$, $\int_a^b \sin x\, dx$ και $\int_a^b e^x\, dx$ με χρήση του ορισμού του ολοκληρώματος Riemann.

Άσκηση 7. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συναρτησης $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ κάνοντας χρήση του ορισμού του ολοκληρώματος Riemann, όπου

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3(x-2)^2 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Άσκηση 8. Δείξτε ότι αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και $f \geq ; 0$ τότε αν $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ πρέπει απαραίτητα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Άσκηση 10. Έστω f φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$. Δείξτε ότι

(α') αν $|f(x)| \geq \varepsilon > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε η $1/f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(β') αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ τότε η $\sqrt{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Άσκηση 11. Αποδείξτε ότι οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι απαραίτητα φραγμένες.

Ενότητα 3η

Σειρές

3.1 Σειρές και αναδιατάξεις

Ορισμός 3.1.1 *Έστω η ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε «σειρά» της a_n την ποσότητα*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdot + a_n)$$

εφόσον αυτό το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι «η σειρά συγκλίνει». Αν το όριο δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ ή είναι $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε ότι η σειρά της a_n «αποκλίνει».

Παρακάτω θα αναπτύξουμε κριτήρια με τη βοήθεια των οποίων θα μπορούμε σε πολλές περιπτώσεις να αποφασίζουμε αν μία σειρά συγκλίνει ή όχι. Πριν όμως από αυτό θα πρέπει να ελέγξουμε αν η σειρά με την οποία προσθέτουμε τους όρους της a_n έχει ή δεν έχει σημασία. Η σειρά με την οποία προσθέτουμε πεπερασμένο πλήθος όρων ως γνωστόν δεν έχει σημασία και δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα (μάλιστα η πρόσθεση με διαφορετική σειρά πεπερασμένου πλήθους αριθμών αποτελεί τον γνωστό μας «έλεγχο της πράξης» όπως διδάσκεται στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση). Εδώ θα δούμε ότι το γεγονός ότι προσθέτουμε ένα άπειρο πλήθος όρων (στην πράγματικότητα ο υπολογισμός μας εμπεριέχει ένα όριο) ενδέχετε να παίζει αποφασιστικό ρόλο στο πιό θα είναι το αποτέλεσμα.

Ορισμός 3.1.2 *Έστω $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια 1-1 απεικόνιση. Αν για μια ακολουθία a_n θέσω $a'_n = a_{k_n}$ τότε η νέα ακολουθία a'_n είναι μιά «αναδιάταξη» των όρων της a_n. Ομοίως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ λέγεται «αναδιάταξη» της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$*

Παρατηρήστε ότι η ακολουθία a'_n έχει ακριβώς τους ίδιους όρους με την a_n αφού η k_n είναι 1-1 και επί. Η διαφορά της a'_n από την a_n είναι ότι η πρώτη παρουσιάζει τους όρους της a_n με άλλη σειρά. Για παράδειγμα έστω a_n ακολουθία στο $\mathbb{R}$ και

$$k_n = \begin{cases} n-1, & n \text{ άρτιος} \\ n+1, & n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Τότε έχουμε:

όροι της a_n: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \ldots$

όροι της a_n': $a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, a_8, a_7, a_{10}, a_9, a_{12}, \ldots$

Παράδειγμα 3.1.3 *Έστω η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Μια αναδιάταξη είναι η

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

όπου κάθε αρνητικός όρος εμφανίζεται μετά από δύο θετικούς. Φανερά ισχύει

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Έστω t το άθροισμα της αναδιάταξης. Ανά τρείς, οι όροι της αναδιάταξης είναι της μορφής

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0.$$

Άρα αν s_n' το άθροισμα των n πρώτων όρων της αναδιατεταγμένης σειράς τότε $s_3' < s_6' < s_9'$. Άρα $\limsup s_n' > s_3' = 5/6$.

Θεώρημα 3.1.4 (Riemann) *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, και έστω a, b ώστε $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Τότε υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ ώστε $\limsup s_n' = b$ και $\liminf s_n' = a$.*

Απόδειξη: Ξεχωρίζουμε τους θετικούς και τους αρνητικούς όρους της a_n σε δύο ακολουθίες $p_n > 0$ και $q_n > 0$ ώστε $p_n = a_n$ αν $a_n > 0$ και $q_n = -a_n$ αν $a_n < 0$. Ισχύει $\sum p_n = \sum q_n = \sum |a_n| = \infty$ διότι $\sum p_n + \sum q_n = \sum |a_n|$ και $\sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$. Τέλος προσθέτουμε αρκετούς όρους της p_n μέχρι να υπερβούμε για πρώτη φορά το b. Μετά αφαιρούμε όρους της q_n μέχρι να πέσει η τιμή του αθροίσματος για πρώτη φορά κάτω από το a. Μετά ξαναπροσθέτουμε επόμενους όρους από την p_n μέχρι να υπερβούμε για πρώτη φορά στο b κ.λπ. Το γεγονός ότι $p_n \to 0$ και $q_n \to 0$ συνεπάγεται ότι $\limsup s_n' = b$ και $\liminf s_n' = a$. ◀

Πόρισμα 3.1.5 *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει αναδιάταξη a_n' της a_n ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = x$.*

Απόδειξη: Ίδια απόδειξη με το Θεώρημα 3.1.4 με $a = b$. ◀

3.2 Κριτήρια σύγκλισης

Θεώρημα 3.2.1 (Κριτήριο ρίζας) *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Θέτουμε $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.*

(α') *Αν $a < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(β') *Αν $a > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

(γ') *Αν $a = 1$ δεν υπάρχει συμπέρασμα.*

Απόδειξη:

(α') Αν $a < 1$ έστω $r \in \mathbb{R}$ ώστε $a < r < 1$. Τότε από το Θεώρημα 3.1.36 του πρώτου μέρους των σημειώσεων υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, δηλαδή $|a_n| < r^n$. Αυτό μας επιτρέπει να συγκρίνουμε την σειρά της $|a_n|$ με τη γεωμετρική σειρά με λόγο r.

(β') Αν $a > 1$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\sqrt[k_n]{|a_{k_n}|}$ που συγκλίνει στο $a > 1$. Άρα $|a_{k_n}| > 1$ για άπειρο πλήθος όρων, συνεπώς η a_n δε συγκλίνει στο μηδέν.

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

◀

Θεώρημα 3.2.2 (Κριτήριο λόγου) *Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $a = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$.*

(α') *Αν $a < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).*

(β') *Αν υπάρχει υπακολουθία k_n ώστε $|a_{k_n+1}/a_{k_n}| \geq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

(γ') *Αν $a = 1$ δεν υπάρχει συμπέρασμα.*

Απόδειξη:

(α') Αν $a < 1$ έστω $r \in \mathbb{R}$ ώστε $a < r < 1$. Τότε από το Θεώρημα 3.1.36 του πρώτου μέρους των σημειώσεων υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ ισχύει $|a_{n+1}/a_n| < r$, δηλαδή $|a_n| < r^{n-N}|a_N|$. Αυτό μας επιτρέπει να συγκρίνουμε την σειρά της $|a_n|$ με τη γεωμετρική σειρά με λόγο r.

(β') Αν υπάρχει υπακολουθία k_n ώστε $|a_{k_{n+1}}/a_{k_n}| \geq 1$ τότε η a_n δε συγκλίνει στο μηδέν.

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

◀

Το επόμενο κριτήριο σύγκλισης είναι ένα κριτήριο γενικότερο του κριτηρίου Dirichlet για τις εναλλάσσουσες σειρές. Χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.2.3 (Άθροιση κατά παράγοντες) *Έστω δύο ακολουθίες a_n, b_n με $n = 0, 1, 2, \dots$ Θέτουμε $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ και $A_{-1} = 0$. Αν $0 \le p \le q$ τότε ισχύει*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p \\
&= \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.
\end{aligned}$$

◀

Θεώρημα 3.2.4 *Έστω ότι η ακολουθία $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι φραγμένη, και έστω b_n φθίνουσα και μηδενική ακολουθία. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Έστω πως $|A_n| \le M$ και $b_n \le b_N \le \varepsilon/2M$ για κάθε $n \ge N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=1}^{q} - \sum_{n=1}^{p-1} \right| &= \left| \sum_{n=p}^{q} a_n b_n \right| \\
&= \left| \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p \right| \\
&\le \sum n = p^{q-1} |A_n| (b_n - b_{n+1}) + |A_q| b_q + |A_{p-1}| b_p \\
&\le M \left(\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p \right) \\
&\le 2M b_p \le 2M b_N \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Δηλαδή η ακολουθία $\left(\sum_{n=1}^{p} a_n b_n\right)_p$ είναι ακολουθία Cauchy. ◀

Θεώρημα 3.2.5 (Κριτήριο Dirichlet) *Αν $|c_n|$ φθίνουσα και μηδενική ακολουθία, με $c_{2m-1} \ge 0$ και $c_{2m} \le 0$ τότε η σειρά $\sum c_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |c_n|$ και χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.2.4 με $A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ και $b_n = |c_n|$. ◀

Το κριτήριο Dirichlet το χρησιμοποιούμε συχνά σε σειρές που η ακολουθία που τις ορίζει αλλάζει συνεχώς πρόσημο, όπως για παράδειγμα στην $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / n$.

Το τελευταίο κριτήριο που θα μας απασχολήσει είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2.6 (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy) *Αν η ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και με μη-αρνητικούς όρους τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$. Αφού $a_n \geq 0$ αρκεί να δείξουμε ότι η s_n είναι φραγμένη αν και μόνο αν η t_n είναι φραγμένη.

Έστω t_n φραγμένη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n \leq 2^k$. Τότε

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k. \end{aligned}$$

Συνεπώς η s_n είναι φραγμένη. Αν αντιστρόφως η s_n είναι φραγμένη τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $n \geq 2^k$ οπότε

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 2^2 a_{2^3} + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} t_k. \end{aligned}$$

Άρα και η t_k είναι φραγμένη. ◀

Το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy αποτελεί τον ποιό εύκολο τρόπο για να ελεγξει κανείς τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ για $p \in \mathbb{R}$. Ομοίως είναι χρήσιμο σε σειρές που έχουν λογαρίθμους. Για παράδειγμα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \log n)$ αποκλίνει αν και μόνο αν αποκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/(2^n \log 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \log 2)$. Η τελευταία αποκλίνει αν και μόνο αν αποκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/(2^n \log 2)$ η οποία πράγματι αποκλίνει.

Ασκήσεις

Άσκηση 12. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^p\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)(\log\log n)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^2}$$

Άσκηση 13. Έστω $a_n \in \mathbb{R}_+$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να συγκλίνει. Δείξτε οτι οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν:

(α') $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

Ενότητα 4η

Ακολουθίες συναρτήσεων

4.1 Ακολουθίες συναρτήσεων

Ορισμός 4.1.1 *Έστω f_n ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Αν η ακολουθία αριθμών $f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ με πεδίο ορισμού το E και λέμε ότι «η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f». Γράφουμε δε $f_n \to f$.*

Ομοίως αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$ ορίζουμε την $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ – την σειρά των f_n.

Τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν σε αυτή την ενότητα είναι υπο ποιές προϋποθέσεις ιδιότητες που έχουν οι f_n διατηρούνται και στην οριακή συνάρτηση f. Για παράδειγμα, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις είναι συνεχής και η οριακή συνάρτηση f; Αυτό το ερώτημα βλέπει κανείς εύκολα πως είναι ισοδύναμο με μια εναλλαγή ορίων: για να είναι η οριακή συνάρτηση f συνεχής στο σημείο x θα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x} f_n(t). \tag{4.1}$$

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα με τα οποία γίνεται φανερό ότι η έννοια της σύγκλισης όπως ορίστηκε στον Ορισμό 4.1.1 δεν αρκεί για να είμαστε σίγουροι ότι ιδιότητες των f_n κληρονομούνται και στην οριακή συνάρτηση f.

Παράδειγμα 4.1.2 (α') *Έστω η ακολουθία συναρτήσεων*

$$f_n(x) = \frac{n}{n + |x-1|}.$$

Για αυτή την ακολουθία η εναλαγή των ορίων για $n \to \infty$ και $x \to 1$ όπως αυτή περιγράφεται στην (4.1) δεν ισχύει.

(β') *Έστω $g_n(x) = x^2/(1+x^2)^n$ με $x \in \mathbb{R}$ και $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x)$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to f$ με*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ 1 + x^2 & \text{αν } x \neq 0. \end{cases}$$

Φανερά όλες οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις αλλά η οριακή f είναι ασυνεχής.

(γ') *Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \big(\sin(nx)\big)/\sqrt{x}$. Ισχύει $f_n \to f = 0$, αλλά $f_n' \nrightarrow f' = 0$ αφού $f_n'(0) = \lim \sqrt{n} = \infty$. Σε αυτό το παράδειγμα βλέπουμε ότι η σύγκλιση δεν διατηρήται όταν παραγωγίζουμε.*

(δ') *Έστω η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$ για $x \in [0,1]$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $f_n \to 0$ αλλά $\int_0^1 f_n(x)\,dx \nrightarrow \int_0^1 0\,dx = 0$*

4.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση

Θα ορίσουμε τώρα μια ισχυρότερη έννοια σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων η οποία, όταν ισχύει, δεν επιτρέπει να εμφανιστούν «ανωμαλίες» όπως οι παραπάνω.

Ορισμός 4.2.1 (Ομοιόμορφη σύγκλιση) *Έστω f_n ακολουθία συναρτήσεων ορισμένη σε ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η f_n συγκλίνει «ομοιόμορφα» την f στο E και γράφουμε $f_n \rightrightarrows f$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να ισχύει*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \qquad \text{για κάθε } x \in E.$$

Ομοίως η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω f_n ορισμένη στο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq N$ να ισχύει*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν η f_n είναι «ομοιόμορφα Cauchy».

Απόδειξη: Αν $f_n \rightrightarrows f$ τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ για κάθε $x \in E$. Συνεπώς, αν $n, m \geq N$ θα ισχύει

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Αντιστρόφως, έστω $x \in E$. Τότε η ακολουθία αριθμών $f_n(x)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς συγκλίνει. Το όριο αυτό επειδή προφανώς εξαρτάται από το επιλεγμένο x το ονομάζουμε $f(x)$. Δηλαδή ορίσαμε μια συνάρτηση $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ για κάθε $x \in E$. Όμως τώρα αν $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in E$ αφήνουμε το m να πάει στο άπειρο και οδηγούμαστε έτσι στην $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $x \in E$. ◀

Θεώρημα 4.2.3 *$f_n \rightrightarrows f$ αν και μόνο αν $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη: $f_n \rightrightarrows f$ αν και μόνο αν $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ για n «αρκετά» μεγάλο. ◀

Θεώρημα 4.2.4 (Weierstraß) *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ και $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in E$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $M_n \in \mathbb{R}$. Τότε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.*

Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \in\geq N$ να ισχύει $\sum_{k=n+1}^{m} M_k \leq \varepsilon$. Άρα για κάθε $x \in E$ και για κάθε $n, m \geq N$ ισχύει

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k \leq \varepsilon.$$

Άρα

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq \varepsilon,$$

σηλαδή η ακολουθία συναρτήσεων $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)_n$ είναι ομοιόμορφα Cauchy και συνεπώς συγκλίνει ομοιόμορφα με βάση το Θεώρημα 4.2.2. ◀

4.2.1 Ομοιόμορφη σύγκλιση και συνέχεια

Θεώρημα 4.2.5 *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, $f : E \to \mathbb{R}$ και $f_n \rightrightarrows f$. Τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση στο E.*

Απόδειξη: Έστω $x \in E$ οριακό σημείο του E. Πρέπει να δείξω ότι $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(z) - f(z)| \leq \varepsilon/3$ για κάθε $z \in E$. Όμως η f_{n_0} είναι συνεχής στο E άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t - x| < \delta$ συνεπάγεται $|f_{n_0}(t) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/3$. Συνεπώς για $|t - x| < \delta$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t) - f_{n_0}(t)| + |f_{n_0}(t) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

◀

4.2.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση και παραγώγιση

Αν μιά ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων f_n συγλίνει ομοιόμορφα σε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f δεν είναι σωστό ότι $f_n' \to f$. Για παράδειγμα οι $f_n(x) = \big(\sin(nx)\big)/\sqrt{n}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $f(x) = 0$ αλλά ελέγχουμε εύκολα ότι $f_n'(0) \nrightarrow 0$.

Θεώρημα 4.2.6 *Έστω f_n παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα (a, b) ώστε για κάποιο $x_0 \in (a, b)$ η ακολουθία $\big(f_n(x_0)\big)_n$ συγκλίνει. Αν $f_n' \rightrightarrows g$ στο (a, b) τότε $f_n \rightrightarrows f$ και $f_n' = g$.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon/2$ και $|f_n'(t) - f_m'(t)| \leq \varepsilon/\big(2(b-a)\big)$ για κάθε $t \in (a,b)$. Από την τελευταία ανισότητα και το Θεώρημα Μέσης τιμής για τη συνάρτηση $f_n - f_m$ έχουμε

$$\big|\big(f_n(x) - f_m(x)\big) - \big(f_n(t) - f_m(t)\big)\big| \leq \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq \big|\big(f_n(x) - f_m(x)\big) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big)\big| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

Δηλαδή η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Μένει να δείξουμε ότι $f' = g$. Έστω $x \in (a,b)$. Ορίζουμε τις

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} & \text{αν } t \neq x \\ f_n'(x) & \text{αν } t = x \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \phi(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} & \text{αν } t \neq x \\ f'(x) & \text{αν } t = x. \end{cases}$$

Καθώς $t \to x$ ισχύει $\phi_n(t) \to f_n'(x)$ και $\phi(t) \to f'(x)$.

Τώρα $\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \varepsilon/\big(2(b-a)\big)$ συνεπώς η ϕ_n συγκλίνει ομοιόμορφα. Αλλά φανερά $\phi_n \to \phi$ (κατά σημείο) συνεπώς $\phi_n \rightrightarrows \phi$.

Τέλος επειδή οι ϕ_n είναι συνεχείς θα είναι συνεχής και η ϕ οπότε θα ισχύει

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} \phi_n(t) = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{t\to x} \phi(t) = f'(x).$$

◀

4.2.3 Ομοιόμορφη σύγκλιση και ολοκλήρωμα

Θεώρημα 4.2.7 *Αν $f_n \rightrightarrows f$ στο διάστημα $[a,b]$ και οι f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, τότε και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Αφού η f_n συγλίνει ομοιόμορφα άρα είναι και ομοιόμορφα Cauchy (Θεώρημα 4.2.2). Επειδή τώρα από την τριγωνική ανισότητα (2.2.10) ισχύει

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f_m\right| = \left|\int_a^b (f_n - f_m)\right| \leq \int_a^b |f_n - f_m| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)|(b-a)$$

έπεται ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ είναι ακολουθία Cauchy άρα υπάρχει το $\ell := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Έστω $\varepsilon > 0$· τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$. Η f_{n_0} είναι ολοκλνρώσιμη οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[a, b]$ και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\mathcal{S}$ ισχύει

$$\left| \mathcal{R}(f_{n_0}, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \int_a^b f_{n_0} \right| \leq \varepsilon.$$

Έτσι,

$$|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \ell| \leq |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \mathcal{R}(f_{n_0}, \mathcal{P}, \mathcal{S})| + \left| \mathcal{R}(f_{n_0}, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \int_a^b f_{n_0} \right| + \left| \int_a^b f_{n_0} - \ell \right|$$

Από τα προηγούμενα μένει να δείξουμε ότι η ποσότητα $|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \mathcal{R}(f_{n_0}, \mathcal{P}, \mathcal{S})|$ είναι «μικρή»:

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \mathcal{S}) - \mathcal{R}(f_{n_0}, \mathcal{P}, \mathcal{S})| &= \left| \sum \big(f(s_i) - f_{n_0}(s_i) \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum \left| \big(f(s_i) - f_{n_0}(s_i) \right| \Delta x_i \\ &\leq \sum \varepsilon \Delta x_i \\ &\leq \varepsilon \sum \Delta x_i \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

◀

Ενότητα 5η

Δυναμοσειρές

5.1 Δυναμοσειρές

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Μια ειδική κατηγορία σειρών συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ είναι εκείνες όπου η η f_n είναι της μορφής $f_n(x) = c_n(x-a)^n$, όπου $c_n, a \in \mathbb{R}$. Οι σειρές αυτής της μορφής, δηλαδή, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ λέγονται *δυναμοσειρές με κέντρο το a*.

Ορισμός 5.1.1 *Λέμε ότι μία συνάρτηση f «αναπτύσεται σε δυναμοσειρά γύρω από το a με ακτίνα $R > 0$» αν υπάρχουν $c_n \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad \text{για κάθε } x \in (a-R, a+R).$$

Θεώρημα 5.1.2 *Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ η οποία συγκλίνει για κάθε $|x| < R$. Ορίζουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-R, R)$ και $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ για κάθε $|x| < R$.*

Απόδειξη: Επειδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(R-\varepsilon)^n$ συγκλίνει *απολύτως* αφού

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(R-\varepsilon/2)^n|} \leq 1$$

(αλλιώς η σειρά θα αποκλίνει στο $R-\varepsilon/2$) και άρα

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(R-\varepsilon)^n|} &= \frac{|R-\varepsilon|}{\left|R-\frac{\varepsilon}{2}\right|} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(R-\varepsilon/2)^n|} \\
&\leq \left|\frac{R-\varepsilon}{R-\frac{\varepsilon}{2}}\right| \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Αλλά για κάθε $x \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ ισχύει $|c_n x^n| \leq |c_n(R-epsilon)^n|$. Αυτό με τη βοήθεια του Θεωρήματος Weierstraß (Θεώρημα 4.2.4) δίνει ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$.

Φανερά λοιπόν η f είναι συνεχής στο $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και συνεπώς είναι συνεχής σε όλο το διάστημα $(-R, R)$.

Για την παραγώγιση τώρα, έστω $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, οπότε $g_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}$. Από την υπόθεση η g_n συγκλίνει κατά σημείο στην f. Η $g_n'(x)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $g_n(x)$ συγκλίνει, διότι

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n c_n x^{n-1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|},$$

για κάθε $x \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$. Άρα η g_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στην g. Εφόσον $g_n(0) = c_0 \to f(0) = c_0$ από το Θεώρημα 4.2.6 συνεπάγεται ότι η g_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και $f' = g$· οπότε

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

◀

Με επαγωγή και υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n x^{n-k},$$

για κάθε $|x| < R$. Έτσι μπορούμε να συμπαιράνουμε ότι $f^{(k)}(0) = k! c_k$ και άρα

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Από την τελευταία προκύπτει «το ανάπτυγμα MacLaurin»

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Ανάλογο αποτέλεσμα με τη διαφόριση δυναμοσειρών ισχύει και για την ολοκλήρωσή τους: επειδή

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{|c_n x^{n+1}|}{n+1}} = \limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|}$$

έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^t c_n x^n = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^t \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^t,$$

για $a, t \in (-R, R)$. Επίσης η

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^t c_n x^n = \int_a^t \sum_{n=1}^{N} c_n x^n$$

συγκλίνει στο $\int_a^t \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ αφού στο $[a,t]$ η $\sum_{n=1}^{N} c_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ (από το Θεώρημα 4.2.7 και από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς στο $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ για κάθε $\varepsilon > 0$).

Άρα,

$$\int_a^t \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^t.$$

Θεώρημα 5.1.3 (Taylor) *Υποθέτω ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ όπου η σειρά συγκλίνει για κάθε $|x| < R$. Εάν $a \in (-R, R)$ τότε η f μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά γύρω από το $x = a$ η οποία συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x-a| < R - |a|$. Επιπλέον για αυτά τα x ισχύει*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Απόδειξη: Με τη βοήθεια του δυωνυμικού αναπτύγματος έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\big((x-a)+a\big)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m}\right)(x-a)^m. \end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις εκτελέσαμε μιά αλλαγή στη σειρά των αθροισμάτων ως προς n και ως προς m. Αυτή η δυνατότητα δικαιολογείται από το επόμενο λήμμα (Λήμμα 5.1.4) και δεδομένου ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \right|$$

συγκλίνει απόλυτα αφού ταυτίζεται με την $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\big(|x-a|+|a|\big)^n$, η οποία συγκλίνει αν $|x-a|+|a| < R$. ◀

Λήμμα 5.1.4 *Θεωρούμε μια διπλή ακολουθία $\{a_{i,j}\}$ και υποθέτουμε ότι $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i,j}| = b_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, \ldots$ και ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ συγκλίνει. Τότε ισχύει*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

Η απόδειξη αυτού του λήμματος μπορεί να γίνει και με πιό απλό τρόπο αλλά εδώ θα ακόλουθήσουμε το όμορφο τέχνασμα που παρουσιάζει ο Walter Rudin στο βιβλίο «Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως»

Απόδειξη: Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_i : E \to \mathbb{R}$ για $i \in \mathbb{N}$, $E = \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ να δίνονται από τους τύπους:

$$f_i(0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \quad \text{και} \quad f_i\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Είναι φανερό ότι κάθε μιά από τις f_i είναι συνεχής στο 0. Έστω $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ για κάθε $x \in E$. Παρατηρούμε ότι $|f_i(1/n)| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq b_i$ και $|f_i(0)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$. Συνεπώς $|f_i(x)| \leq b_i$ για κάθε $x \in E$. Επειδή τώρα η $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ συγκλίνει από την υπόθεση, έπεται από το Θεώρημα Weierstraß (Θεώρημα 4.2.4) ότι η $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g. Συνεπώς η g είναι συνεχής συνάρτηση άρα ισχύουν οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(0) = g(0) = \lim_{n\to\infty} g\Big(\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i\Big(\frac{1}{n}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty} a_{in} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.
\end{aligned}$$

◀

Ασκήσεις

Άσκηση 14. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες:

(α') $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, για $x \in \mathbb{R}$,

(β') $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{n^2 + nx + 1}$, για $x \in [0, a]$ όπου $a \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$,

(γ') $f_n(x) = x\sqrt{n^3} e^{-nx^2}$, για $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 15. Έστω $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ και $f_n \rightrightarrows f$. Δείξτε ότι αν όλες οι f_n είναι φραγμένες συναρτήσεις τότε και η f είναι φραγμένη συνάρτηση.

Άσκηση 16. Ελέξτε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων:

(α') $f_n(x) = x^n(1-x)^n$ για $x \in [0, 1]$,

(β')

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{αν } x = 0 \text{ ή } x \notin \mathbb{Q} \\ q + \frac{1}{n} & \text{αν } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \frac{p}{q} \text{ ανάγωγο κλάσμα με } p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 17. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x}.$$

(α') Για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει απολύτως;

(β') Σε ποιά υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$ συγκλίνει ομοιόμορφα;

(γ') Είναι η f συνεχής στα σημεία που συγκλίνει;

(δ') Είναι η f φραγμένη;

Άσκηση 18. Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αλλά όχι απόλυτα για κανένα $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 19. Έστω $f_n(x) = x/(1+nx^2)$ με $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightrightarrows f$ και $f'(x) = \lim f_n'(x)$ για κάθε x *ακριβώς* στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Άσκηση 20. Έστω ακολουθία συνεχών συναρτήσεων f_n στο $\mathbb{R}$ και συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ ώστε $f_n \rightrightarrows f$. Δείξτε ότι αν $x_n, x \in \mathbb{R}$ και $x_n \to x$ τότε $f_n(x_n) \to f(x)$.

Άσκηση 21. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-A, A]$ για κάθε $A \in \mathbb{R}$.