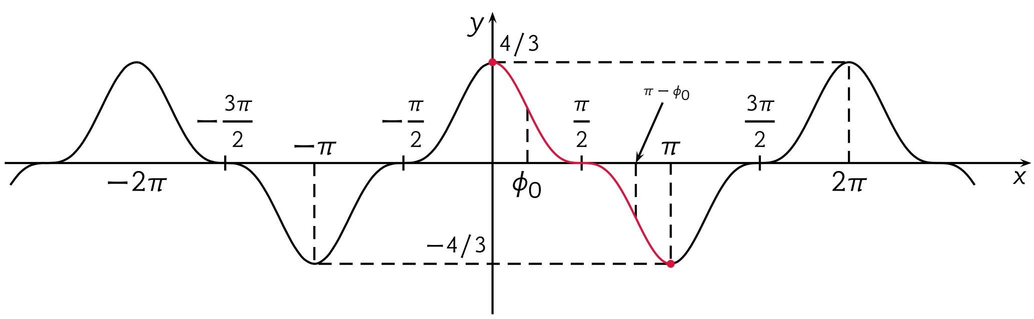
Απειροστικός Λογισμός 1

Σημειώσεις



Σάμος 2024

AT

Έκδοση 0.1. Το αρχείο δεν είναι τελικό. Μπορεί να έχει λάθη ή παραλείψεις. Προς το παρόν υπό συνεχή διαμόρφωση. Όλες οι παραπομπές είναι links για εύκολη περιήγηση. Όπου υπάρχουν links σε εξωτερικά αρχεία ή ιστοσελίδες δίνεται qrcode στο περιθώριο.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Αξιώμα 1.1 (Αρχή του ελαχίστου) *Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.*

Θεώρημα 1.2 (Επαγωγή) *Έστω ότι η p_n είναι μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$. Αν η p_1 είναι αληθής και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$p_n \text{ αληθής } \Rightarrow p_{n+1} \text{ αληθής},$$

τότε η p_n είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Αν δεν είναι αληθής η p_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $A = \{n \in \mathbb{N} : p_n \text{ όχι αληθής}\}$ και αυτό δεν είναι κενό. Από την αρχή του ελαχίστου το A έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το $n_0 \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $n_0 \in A$ αλλά $n_0 - 1 \notin A$. Άρα p_{n_0} όχι αληθής, αλλά p_{n_0-1} αληθής. Όμως $n_0 \neq 1$ γιατί p_1 αληθής. Άρα $n_0 \geq 2$ οπότε $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Τώρα όμως, αφού p_{n_0-1} αληθής, από την υπόθεση πρέπει και η $p_{n_0-1+1} = p_{n_0}$ να είναι αληθής, άτοπο. □

Παράδειγμα 1.3 $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

Παράδειγμα 1.4 $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Παράδειγμα 1.5 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

Πρόταση 1.6 *Θεωρούμε ένα $k \in \mathbb{N}$ και μια πρόταση p_n που εξαρτάται από τον φυσικό $\nu \in \mathbb{N}$. Αν p_k αληθής και ισχύει*

$$p_n \text{ αληθής } \Rightarrow p_{n+1} \text{ αληθής},$$

για κάθε $n \geq k$ τότε η p_n είναι αληθής για κάθε $n \geq k$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την πρόταση $q_n = p_{n+k-1} \cdots$ □

Παράδειγμα 1.7 $2^n > n^3$ για κάθε $n \geq 10$.

1.1 Αρχή του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης στο έργο του «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου Α΄» στην πέμπτη «κοινή έννοια» γράφει το εξής (δείτε [1]):

> Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.

δηλαδή

> Από δύο άνισα μεγέθη (μήκη γραμμών, εμβαδά επιφανειών, όγκοι στερεών) το μεγαλύτερο υπερέχει από το μικρότερο κατά κάποιο μέγεθος που όταν ληφθεί πολλές φορές είναι δυνατόν να υπερέχει από καθένα από τα δύο αρχικά μεγέθη.

Ο Αρχιμήδης δέχεται αυτή την αρχή για λόγους συντομίας μια και το συγκεκριμμένο έργο έχει άλλο στόχο από τη θεμελίωση των αριθμητικών συνόλων. Το ότι το παραπάνω ισχύει στο σύνολο $\mathbb{N}$ είναι φανερό από την κατασκευή του $\mathbb{N}$: για δύο *διαφορετικούς* φυσικούς k και m, αν είναι $k > m$ τότε πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός n ώστε $n(k-m) > k > m$. Αυτό είναι φανερό για $n = k+1$ διότι αφού $k > m$ έπεται ότι $k - m \geq 1$. Άρα

$$n(k-m) \geq n = k+1 > k > m.$$

Ας δούμε την ίδια ιδιότητα στους ρητούς. Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε ρητό r υπάρχει φυσικός n με $n > r$. Πράγματι, αφού r ρητός, αν $r \leq 0$ τότε φανερά $1 > 0 \geq r$ και η ιδιότητα ισχύει για $n = 1$. Αν $r > 0$ τότε υπάρχουν k, m φυσικοί ώστε $r = k/m$. Αν $m = 1$ τότε ο $n = k+1$ ικανοποιεί τη ζητούμενη. Αν $m \geq 2$ ο $n = k$ ικανοποιεί τη ζητούμενη αφού $k > k/m$ αν και μόνο αν $m > 1$.

Επιστρέφοντας στην ιδιότητα του Αρχιμήδη για τους ρητούς, αν r, s δυο ρητοί και $r > s$ τότε $r - s > 0$. Όμως ο $r/(r-s)$ είναι ρητός και από το προηγούμενο υπάρχει n φυσικός με $n > r/(r-s)$. Συνεπώς $n(r-s) > r > s$.

Για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού χρειαζόμαστε αυτή την ιδιότητα να ισχύει στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, την οποία συζητάμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 2

Το σύνολο των πραγματικών Αριθμών

Ο ορισμός του συνόλου των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ από τους ρητούς δεν είναι απλός και θα τον αναβάλουμε για αργότερα (Παράρτημα Β΄). Προς το παρόν θα υποκριθούμε ότι γνωρίζουμε το $\mathbb{R}$ όπως κάναμε και στο Λύκειο. Επίσης θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τις τέσσερις πράξεις και τις αλγεβρικές τους ιδιότητες καθώς και τη διάταξη στο $\mathbb{R}$. Σημαντική αρχή είναι αυτή της τριχοτομίας, δηλαδή η ιδιότητα ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ τότε είτε $a < b$ είτε $a = b$ είτε $a > b$.

Γνωστή επίσης θεωρούμε την τριγωνική ανισότητα, η απόδειξη της οποίας αφήνεται ως άσκηση: για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Ξεκινάμε με την ακόλουθη θεμελιώδη ανισότητα.

Πρόταση 2.1 (Ανισότητα Bernoulli) *Για κάθε πραγματικό αριθμό $\theta > -1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta,$$

και ισότητα ισχύει μόνο όταν $n = 1$ ή $\theta = 0$.

Απόδειξη: Αν $\theta = 0$ ή $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Υποθέτουμε ότι $\theta \neq 0$ και δείχνουμε ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$(1+\theta)^n > 1 + n\theta.$$

για $n = 2$ η προηγούμενη είναι ισοδύναμη με την $\theta^2 > 0$ που ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n. Για το επαγωγικό βήμα έχουμε

$$\begin{aligned}(1+\theta)^{n+1} &= (1+\theta)(1+\theta)^n \\ &> (1+\theta)(1+n\theta) = 1 + (n+1)\theta + \theta^2 \\ &> 1 + (n+1)\theta,\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ορισμός 2.2 Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ λέγεται

- *άνω φραγμένο*, αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \leq M$. Κάθε M που ικανοποιεί το προηγούμενο λέγεται άνω φράγμα του A. Ισοδύναμα λέμε ότι το A είναι άνω φραγμένο *από* το M.
- *κάτω φραγμένο*, αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \geq m$. Κάθε m που ικανοποιεί το προηγούμενο λέγεται κάτω φράγμα του A. Ισοδύναμα λέμε ότι το A είναι κάτω φραγμένο *από* το m.
- *φραγμένο*, αν είναι και άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.

Παρατήρηση 2.3 Αν το σύνολο A είναι άνω φραγμένο από τον αριθμό M και $M_1 \geq M$ ένας άλλος πραγματικός αριθμός, τότε και το M_1 είναι άνω φράγμα του συνόλου A. Ένα άνω φραγμένο σύνολο δηλαδή, *δεν* έχει μοναδικό άνω φράγμα! Ομοίως και για τα κάτω φραγμένα σύνολα: αν το A είναι κάτω φραγμένο από τον αριθμό m και $m_1 \leq m$ ένας άλλος πραγματικός αριθμός, τότε και το m_1 είναι κάτω φράγμα του A.

Παρατήρηση 2.4 Αν το M *δεν* είναι άνω φράγμα του A, αυτό σημαίνει ότι το A περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x ώστε $x > M$.

Ομοίως, αν το m *δεν* είναι κάτω φράγμα του A, αυτό σημαίνει ότι το A περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x ώστε $x < m$.

Ορισμός 2.5

1. Για ένα μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέμε ότι το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του, αν το s είναι άνω φράγμα του A και δεν υπάρχει άνω φράγμα του A γνησίως μικρότερο του s. Αυτός ο αριθμός s ονομάζεται supremum του A (άνω πέρας) και γράφουμε $s = \sup A$.
2. Για ένα μη κενό και κάτω φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέμε ότι το i είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του, αν το i είναι κάτω φράγμα του A και δεν υπάρχει κάτω φράγμα του A γνησίως μεγαλύτερο του i. Αυτός ο αριθμός i ονομάζεται infimum του A (κάτω πέρας) και γράφουμε $i = \inf A$.

Σημαντική Παρατήρηση 2.6 Αν λοιπόν $s = \sup A$ τότε, αν $\varepsilon > 0$ οποιοσδήποτε θετικός αριθμός το $s - \varepsilon$ *δεν* είναι άνω φράγμα του A, αφού είναι μικρότερο από το ελάχιστο άνω φράγμα s. Δηλαδή (Παρατήρηση 2.4) υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > s - \varepsilon$.

Ομοίως, αν $i = \inf A$ τότε, αν $\varepsilon > 0$ οποιοσδήποτε θετικός αριθμός το $i + \varepsilon$ *δεν* είναι κάτω φράγμα του A, αφού είναι μεγαλύτερι από το μέγιστο κάτω φράγμα i. Δηλαδή (Παρατήρηση 2.4) υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < i + \varepsilon$.

Θα αποδείξουμε στο Παράρτημα Β′ ότι στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο A έχει supremum $\sup A \in \mathbb{R}$, και κάθε μη κενό κάτω φραγμένο σύνολο B έχει infimum $\inf B \in \mathbb{R}$. Αυτή την ιδιότητα για το $\mathbb{R}$ τη λέμε *πληρότητα* ή ότι «το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες».

Αναβάλουμε την απόδειξη αυτής της ιδιότητας γιατί απαιτείται πρώτα να ορίσουμε αυστηρά το σύνολο $\mathbb{R}$ από το $\mathbb{Q}$, κάτι που όπως είπαμε θα γίνει στο Παράρτημα Β΄.

Μια πρώτη συνέπεια της πληρότητας του $\mathbb{R}$ είναι ότι το υποσύνολο του $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Πράγματι, αν ήταν άνω φραγμένο θα είχε supremum. Ας το ονομάσουμε s. Τότε το $s-1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, οπότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > s-1$. Αλλά τότε ο φυσικός $n+1$ είναι γνήσια μεγαλύτερος του s οπότε το s δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, που είναι άτοπο. Έτσι προκύπτει αμέσως το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.7 (Αρχή του Αρχιμήδη) *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b με $a > b$ υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε $n(a-b) > a > b$.*

Απόδειξη: Αν όχι τότε το $a/(a-b)$ είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο. □

Παρατήρηση 2.8 Το προηγούμενο έχει της εξής απλή συνέπεια. Όσο μικρός και αν είναι ένας θετικός αριθμός ε και όσο μεγάλος και αν είναι ένας θετικός αριθμός M υπάρχει φυσικός n ώστε $n\varepsilon > M$. Πράγματι, εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για $a = M/\varepsilon$ και $b = 0$.

Παρατηρήστε επίσης ότι τον ορισμό του supremum και infimum θα μπορούσαμε να τον διατυπώσουμε και για το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$. Εντούτοις το σύνολο $\mathbb{Q}$ *δεν* είναι πλήρες, αφού περιέχει φραγμένα σύνολα χωρίς supremum και infimum εντός του $\mathbb{Q}$. Για να αποδειχθεί αυτό πρέπει να γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει ρητός n/m με $n \in \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $(n/m)^2 = 2$. Πράγματι έστω ότι υπάρχει και μετά από απλοποιήσεις υποθέτουμε ότι το κλάσμα n/m είναι ανάγωγο. Τότε ο $n^2 = 2m^2$ είναι άρτιος, άρα και ο n (διότι κάθε περιττός στο τετράγωνο $(2k-1)^2 = 4(k^2-k)+1$ δίνει περιττό). Έστω λοιπόν $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $n = 2k$. Τότε $(2k)^2 = 2m^2$ οπότε $m^2 = 2k^2$ άρα και ο m^2 είναι άρτιος, άρα και ο m, καταλήγοντας σε άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το n/m είναι ανάγωγο.

Πρόταση 2.9 *Υπάρχει μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ που δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (στο $\mathbb{Q}$).*

Απόδειξη: Έστω ότι το $A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$ (το οποίο είναι μη κενό, αφού $1 \in A$) έχει ελάχιστο άνω φράγμα το $a \in \mathbb{Q}$. Έχουμε δείξει ότι $a^2 \neq 2$. Άρα είτε $a^2 < 2$ είτε $a^2 > 2$. Θα δείξουμε ότι και οι δύο αυτές περιπτώσεις οδηγούν σε άτοπο.

Περίπτωση 1: $a^2 < 2$.

Φανερά $a < 2$ αλλιώς, αν $a \geq 2$ τότε $2 > a^2 \geq 4$ άτοπο. Από την αρχή του Αρχιμήδη, υπάρχει ακέραιος $n > 5/(2-a^2)$, ισοδύναμα $5/n < 2-a^2$. Μα τότε, αφού $a < 2$

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2}{n}a + \frac{1}{n^2} < a^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{5}{n} < a^2 + 2 - a^2 = 2.$$

Άρα $a+1/n \in A$ αλλά $a+1/n > a$ άτοπο, αφού το a είναι άνω φράγμα του A.

Περίπτωση 2: $a^2 > 2$.

Από την αρχή του Αρχιμήδη, υπάρχει ακέραιος $n > (2a)/(a^2-2)$, ισοδύναμα $-2a/n > 2-a^2$. Ομοίως με πριν έχουμε

$$\left(a-\frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} > a^2 + 2 - a^2 + 0 = 2,$$

άρα το $a-1/n$ είναι άνω φράγμα του Α διότι αν $x \in A$ και $x \geq a-1/n$ συνεπάγεται $x^2 \geq (a-1/n)^2 > 2$ άτοπο. Αλλά $a-1/n < a$ συνεπώς το a δεν είναι το *ελάχιστο* από τα άνω φράγματα του A, πάλι άτοπο. □

Πρόταση 2.10 (Ύπαρξη ακεραίου μέρους) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος m, που θα τον συμβολίζουμε με $[x]$, για τον οποίο ισχύει $m \leq x < m+1$.*

Απόδειξη: Αν $x \geq 0$ τότε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$ είναι μη κενό (Αρχή του Αρχιμήδη) και άρα έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το n_0. Άρα $x < n_0$. Αλλά, αφού το n_0 είναι το ελάχιστο του A, το n_0-1 δεν ανήκει στο A, δηλαδή $n_0 - 1 \leq x$. Θέτουμε $m = n_0 - 1$.

Αν τώρα $x < 0$ βρίσκουμε όπως πριν το n_0 για το $-x$, οπότε θα ισχύει $n_0 - 1 \leq -x < n_0$. Συνεπώς $n_0 < x \leq -n_0 + 1$. Σε αυτή την περίπτωση, αν $x = -n_0 + 1$ θέτουμε $m = x = -n_0 + 1$ ενώ αν $x < -n_0 + 1$ θέτουμε $m = n_0$. Φανερά και πάλι $m \leq x < m+1$.

Μένει να δείξουμε ότι ο ακέραιος αυτός είναι μοναδικός. Αν υπάρχει και ένας άλλος, έστω ο m_1 τότε $m \leq x < m_1 + 1$ αλλά και $m_1 \leq x < m+1$. Συνεπώς $m < m_1 + 1$ αλλά και $m_1 < m+1$, δηλαδή $m \leq m_1$ και $m_1 \leq m$. Άρα $m = m_1$. □

Πρόταση 2.11 (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς) *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a < b$ υπάρχει ρητός r με $a < r < b$.*

Απόδειξη: Από την Αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός $n > 1/(b-a)$, ισοδύναμα $na + 1 < nb$. Από την Πρόταση 2.10, ισχύει

$$na < [na] + 1 \leq na + 1 < nb.$$

Συνεπώς

$$a < \frac{[na]+1}{n} < b.$$

Ο $([na]+1)/n$ όμως είναι ρητός και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 2.12 Αμέσως προκύπτει από το προηγούμενο ότι και οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$. Διότι αν δοθούν δυο αριθμοί $a < b$ συνεπάγεται ότι $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$ οπότε υπάρχει ρητός r με $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$, και συνεπώς ο άρρητος $r + \sqrt{2}$ είναι ανάμεσα στα a και b.

Η Πρόταση 2.11 μαζί με την Αρχή του Αρχιμήδη μάς εγγυούνται την ύπαρξη k-ριζών των θετικών αριθμών για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 2.13 *Για κάθε πραγματικό αριθμό $a > 0$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός s ώστε $s^k = a$, τον οποίο ονομάζουμε k-ρίζα του a.*

Απόδειξη: Η μοναδικότητα είναι φανερή αφού αν $s_1 < s_2$ δυο k-ρίζες του a θα έχουμε $a = s_1^k < s_2^k = a$ το οποίο είναι άτοπο.

Για την ύπαρξη τώρα, ο $a = 1$ έχει k-ρίζα το 1. Θα υποθέσουμε ότι $a > 1$, αφού αν $0 < a < 1$ θα εργαστούμε με το $1/a > 1$, και αν s η k-ρίζα του $1/a$ το $1/s$ είναι φανερά η k-ρίζα του a.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x > 0 \text{ και } x^k < a\}$. Παρατηρούμε ότι $1 \in A$ (άρα δεν είναι κενό) και φράσσεται άνω από το a: πράγματι, αν $x \geq a$ συνεπάγεται ότι $x \geq 1$. Οπότε $x^k \geq x \geq a$. Άρα $x \notin A$. Συνεπώς $A \subseteq (0, a]$.

Θέτουμε $s = \sup A$ και από τα προηγούμενα ισχύει $s \in [1, a]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $s^k \not< a$ και $s^k \not> a$.

Περίπτωση 1. Αν $s^k > a$, από την Αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός $n > ks^k/(s^k - a)$ που είναι ισοδύναμη με την $1 - (k/n) > a/s^k$. Οπότε, από την ανισότητα Bernoulli θα έχουμε

$$\left(s\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k \geq s^k\left(1 - \frac{k}{n}\right) \geq a.$$

Αλλά $s(1 - 1/n) < s$ οπότε υπάρχει $x \in A$ με $s(1 - 1/n) < x$. Συνεπώς

$$a \leq \left(s\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^k < x^k < a,$$

άτοπο.

Περίπτωση 2. Αν $s^k < a$, από την Αρχή του Αρχιμήδη υπάρχει φυσικός $n > (ak/(a - s^k)) - 1$. Ισοδύναμα $s^k/a < 1 - k/(n+1)$. Έτσι, και πάλι με την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$$\left(s\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^k = \frac{s^k}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k} \leq \frac{s^k}{1 - \frac{k}{n+1}} < a.$$

Όμως στο διάστημα $(s, s(1 + 1/n))$ υπάρχει ρητός σύμφωνα με την Πρόταση 2.11, έστω ο r. Τότε όμως $r > s > 0$ και $r^k < (s(1 + 1/n))^k < a$, δηλαδή $r \in A$ αλλά $r > s$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Κεφάλαιο 3

Γενικά περί ακολουθιών

3.1 Ακολουθίες και υπακολουθίες

Ορισμός 3.1 Κάθε συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, όπου το A είναι άπειρο σύνολο, λέγεται *ακολουθία πραγματικών αριθμών* ή απλά *ακολουθία*.

Για τις ακολουθίες δεν χρησιμοποιούμε το γράμμα f, αλλά γράμματα όπως a, b, c, x, y, z, α, β, γ κλπ. Επίσης αντί να γράφουμε $a(n)$ για την τιμή της a στο $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε a_n. Αν θέλουμε να αναφερθούμε σε μια ακολουθία, *δεν* γράφουμε «η ακολουθία $a : A \mapsto \mathbb{R}$» αλλά «η ακολουθία $(a_n)_{n \in A}$». Αν $A = \mathbb{N}$ εκτός από «η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$» μπορεί να γράψουμε και $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Αν δεν υπάρχει λόγος να δηλώσουμε το πεδίο ορισμού γράφουμε «η ακολουθία (a_n)». Τέλος αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης, για απλοποίηση του συμβολισμού, γράφουμε ακόμα και «η ακολουθία a_n» παραλείποντας και τις παρενθέσεις. Συχνά (αλλά όχι πάντα) το πεδίο ορισμού θα είναι όλο το σύνολο $\mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3.2 Η συνάρτηση $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $a_n = 1/n$ είναι μια ακολουθία. Έχουμε $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, κλπ. Μια άλλη είναι η ακολουθία $b_n = n!$ όπου $b_1 = 1$, $b_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $b_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $b_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, κλπ.

Ορισμός 3.3 Οι αριθμοί a_n, δηλαδή οι τιμές της ακολουθίας $(a_n)_{n \in A}$ για κάθε $n \in A$ λέγονται *όροι* της ακολουθίας. Ο όρος a_n (δηλαδή η τιμή της ακολουθίας στο n) ονομάζεται *n-στός όρος* ή *γενικός όρος* της ακολουθίας $(a_n)_{n \in A}$. Το σύνολο $\{a_n : n \in A\}$ ονομάζεται *σύνολο των όρων της ακολουθίας*, ενώ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ κάθε σύνολο της μορφής $\{a_n : n \in A \text{ και } n \geq m\}$ ονομάζεται *τελικό τμήμα της ακολουθίας*.

Μια ακολουθία ορίζεται είτε με έναν τύπο για τον n-στό της όρο (όπως $a_n = 1/n$) είτε αναδρομικά (για παράδειγμα $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = a_n/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) είτε με άλλο τρόπο με τον οποίο καθορίζονται με ακρίβεια όλοι οι όροι της και όχι με την παράθεση λίγων όρων. Με το τελευταίο εννοούμε ότι δεν έχει νόημα η φράση

$$\text{«θεωρούμε την ακολουθία } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \text{»}$$

διότι δεν είναι σαφές αν πρόκειται για την ακολουθία με τύπο $1/n$ ή για την ακολουθία με τύπο

$$\frac{1}{n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

οι οποίες διαφέρουν από τον πέμπτο όρο και μετά ή κάποια άλλη που ξεκινάει με αυτούς τους όρους.

Αν περιορίσουμε μια ακολουθία σε ένα άπειρο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της τότε ο περιορισμός αυτός λέγεται *υπακολουθία* της αρχικής ακολουθίας.

Ορισμός 3.4 Υποθέτουμε ότι η ακολουθία a_n είναι ορισμένη για κάθε $n \in A \subseteq \mathbb{N}$. Αν B άπειρο υποσύνολο του A τότε η ακολουθία $a_n|_{n\in B}$ ονομάζεται *υπακολουθία* της a_n.

Παράδειγμα 3.5 Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = 1/n$. Αν αντί για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιήσουμε μόνο τους άρτιους n θα πάρουμε μια υπακολουθία της αρχικής. Αυτή η υπακολουθία είναι η a_n με n άρτιο. Επειδή κάθε άρτιος είναι της μορφής $2n$ για $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να πούμε ότι αυτή η υπακολουθία είναι η $a_{2n} = 1/(2n)$. Έτσι ενώ η a_n έχει όρους τους

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

η υπακολουθία a_{2n} έχει τους όρους

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

Παράδειγμα 3.6 Θεωρούμε ένα (σταθερό) $m \in \mathbb{N}$ και μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ορίζουμε την ακολουθία $b_n = a_{m+n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η b_n είναι υπακολουθία της a_n, αφού φανερά

$$b_n = a_n \,\big|_{\{n\in\mathbb{N}\,:\, n>m\}}\,.$$

Παρατηρώντας ότι το σύνολο των όρων της b_n είναι το σύνολο

$$\{a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \dots\}$$

συμπεραίνουμε ότι κάθε τελικό τμήμα της a_n είναι υπακολουθία της!

Ορισμός 3.7 (Ισότητα ακολουθιών) Δυο ακολουθίες $(a_n)_{n\in A}$ και $(b_n)_{n\in B}$ λέγονται ίσες αν $A = B$ και $a_n = b_n$ για κάθε $n \in A$.

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1.1. Περιγράψτε τις υπακολουθίες των «άρτιων όρων» των ακολουθιών

$$n!, \qquad (-1)^n.$$

Άσκηση 3.1.2. Δείξτε ότι η φράση

«θεωρούμε την ακολουθία 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, ...»

δεν αναφέρεται απαραίτητα σε μια υπακολουθία των πρώτων φυσικών αριθμών εξετάζοντας τους όρους της $a_n = n^2 - n + 41$ μέχρι τον τεσσαρακοστό πρώτο όρο.

Ομοίως ελέγξτε ότι η ακολουθία $b_n = n^2 - 79n + 1601$ παράγει πρώτους αριθμούς μέχρι τον ογδοηκοστό όρο, αλλά $b_{81} = 1763 = 41 \cdot 43$.

Άσκηση 3.1.3. Αν a_n είναι το πλήθος όλων των διαγωνίων ενός κυρτού n-γώνου, δείξτε επαγωγικά ότι $a_n = (n^2 - 3n)/2$.

3.2 Πράξεις ακολουθιών

Αν δυο ακολουθίες a_n και b_n ορίζονται για κάθε $n \in A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζοναι και όλες οι πράξεις μεταξύ τους με τον αναμενόμενο τρόπο.

Ορισμός 3.8 Η ακολουθία s_n όπου $s_n = a_n + b_n$ για κάθε $n \in A$ ονομάζεται *άθροισμα* των ακολουθιών a_n και b_n. Η ακολουθία $d_n = a_n - b_n$ ονομάζεται *διαφορά* των ακολουθιών a_n και b_n. Η ακολουθία $p_n = a_n b_n$ για κάθε $n \in A$ ονομάζεται *γινόμενο* των ακολουθιών a_n και b_n.

Αν $a_n = 1/n^3$ και $b_n = n^2$ τότε

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= \frac{1}{n^3} + n^2 = \frac{1+n^5}{n^3} \\ a_n - b_n &= \frac{1}{n^3} - n^2 = \frac{1-n^5}{n^3} \\ a_n b_n &= \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ειδικά για το πηλίκο δύο ακολουθιών θα πρέπει να προσέξουμε ώστε η ακολουθία στον διαιρέτη να μην έχει μηδενικούς όρους.

Ορισμός 3.9 Αν οι a_n και b_n είναι ακολουθίες με $n \in A \subseteq \mathbb{N}$ και επιπλέον $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in A$, τότε η ακολουθία $q_n = a_n / b_n$ ονομάζεται πηλίκο των ακολουθιών a_n και b_n.

Αν $a_n = 1/n^3$ και $b_n = n^2$ όπως παραπάνω, τότε ισχύει $b_n = n^2 \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε ορίζεται το πηλίκο: $a_n / b_n = 1/n^5$.

Τέλος ορίζεται και η σύνθεση ακολουθιών ως εξής.

Ορισμός 3.10 Αν η k_n είναι μια ακολουθία $k_n : A \mapsto B$ όπου $A, B \subseteq \mathbb{N}$ και x_n μια ακολουθία με πεδίο ορισμού το B, τότε ορίζεται η ακολουθία $c_n = x_{k_n}$ η οποία ονομάζεται *σύνθεση* των ακολουθιών k_n και x_n.

Παρατήρηση 3.11 Αν για την ακολουθία k_n του προηγούμενου ορισμού ισχύει

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots,$$

δηλαδή $k_n < k_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σύνθεση με την x_n είναι μια υπακολουθία της x_n. Πράγματι, αυτό είναι φανερό, αφού

$$x_{k_n} = x_n \big|_{\{k_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Αυτό ισχύει και αντίστροφα: έστω ότι η $y_n = x_n|_B$ μια υπακολουθία της x_n. Το σύνολο B γράφεται στη μορφή $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, αφού το B έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το k_1, και στη συνέχεια το $B \setminus \{k_1\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το k_2, και ούτω καθ' εξής (εδώ χρησιμοποιήσαμε την καλή διάταξη του $\mathbb{N}$).

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες $k_n = n^2 \in \mathbb{N}$ και $x_n = 1/n$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$. Η σύνθεσή τους είναι η ακολουθία $c_n = x_{k_n} = x_{n^2}$. Δηλαδή πρόκειται για υπακολουθία της x_n: η x_n έχει όρους

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \ldots$$

ενώ η $c_n = x_{n^2}$ έχει όρους

$$\frac{1}{1^2} = \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \ldots$$

Παρατήρηση 3.12 Αν θεωρήσουμε μια $k_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ η οποία δεν ικανοποιεί την $k_1 < k_2 < \ldots$ τότε δεν είναι απαραίτητο η x_{k_n} να είναι υπακολουθία της x_n. Για παράδειγμα, θεωρούμε την $k_1 = 2$, $k_2 = 1 < k_1$, $k_n = n$ για κάθε $n \geq 3$ και την ακολουθία $x_n = 1/n$. Το πεδίο τιμών της $c_n = x_{k_n}$ είναι το ίδιο με αυτό της x_n. Έτσι αν ισχύει $c_n = x_n|_B$ για κάποιο $B \subseteq \mathbb{N}$, ο μόνος τρόπος να ανήκει το $1/2$ στο πεδίο τιμών της c_n είναι να ισχύει $2 \in B$ (αφού η x_n ισούται με $1/2$ μόνο για $n = 2$). Αλλά τότε θα έπρεπε να ισχύει $c_2 = x_2$ το οποίο είναι ψευδές, αφού

$$c_2 = x_{k_2} = x_1 = 1 \neq \frac{1}{2} = x_2.$$

3.3 Εφαρμογές και παραδείγματα

Πολλές φορές, παρόλο που η παράθεση πεπερασμένου πλήθους όρων δεν μπορεί να ορίσει μια ακολουθία, όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1, ορίζουμε ακολουθίες ως αθροίσματα, για παράδειγμα της μορφής

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

στο οποίο εμφανίζονται πεπερασμένο πλήθος όρων. Τέτοιες εκφράσεις όμως είναι σαφείς από τον γενικό προσθετέο που φαίνεται στον τελευταίο όρο της έκφρασης. Δηλαδή ο υπολογισμός της x_n απαιτεί να προσθέσουμε όλα τα κλάσματα $1/k$ για $k \in \mathbb{N}$ και $k \leq n$. Έτσι για να καταλάβουμε μέχρι ποιο κλάσμα προσθέτουμε κάθε φορά *κοιτάμε τον τελευταίο όρο του αθροίσματος*.

Παράδειγμα 3.13 Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Για να βρούμε τον πρώτο όρο κοιτάμε με τι ισούται το $1/n$ όταν $n = 1$. Επειδή αυτό ισούται με $1/1 = 1$ συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα θα σταματήσει στο 1, δηλαδή $x_1 = 1$. Για να βρούμε τον x_2 παρατηρούμε ότι το $1/n$ ισούται με $1/2$ όταν $n = 2$ άρα το άθροισμα θα σταματήσει στο $1/2$, δηλαδή $x_2 = 1 + 1/2$. Ομοίως $x_3 = 1 + 1/2 + 1/3$.

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μας δίνεται μια ακολουθία η οποία ορίζεται αναδρομικά, για παράδειγμα $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = 2 + a_n/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και πρέπει να βρούμε τον n-στο όρο της, a_n ως συνάρτηση του n. Στις απλούστερες αυτών των προβλημάτων η εξίσωση που προκύπτει όταν αντικαταστήσουμε τόσο την a_n όσο και την a_{n+1} με x, η οποία ονομάζεται «εξίσωση αναδρομής», έχει λύση. Τότε ακολουθούμε το τέχνασμα που παρουσιάζεται στα παρακάτω παραδείγματα. Μια γενικότερη θεωρία των γραμμικών αναδρομικών ακολουθιών παρουσιάζεται στο βιβλίο [7].

Παράδειγμα 3.14 Βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας $a_1 = 4$ και $a_{n+1} = 2 + a_n/3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σχηματίζουμε την εξίσωση αναδρομής $x = 2 + x/3$ η οποία έχει μοναδική λύση την $x = 3$. Στη συνέχεια αφαιρούμε τον αριθμό 3 και από τα δύο μέλη του αναδρομικού τύπου:

$$a_{n+1} - 3 = \left(2 + \frac{a_n}{3}\right) - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} a_n - 3 &= \frac{1}{3}(a_{n-1} - 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (a_{n-2} - 3) = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_1 - 3) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

(Ο σωστός εκθέτης στην προτελευταία ισότητα είναι πράγματι $n - 1$: το βρίσκουμε παρατηρώντας ότι ο εκθέτης του κλάσματος $1/3$ σε κάθε ισότητα αθροίζεται στο n όταν του προστεθεί ο δείκτης του όρου της ακολουθίας που είναι στην παρένθεση (για παράδειγμα $2 + (n-2) = n$).)

Άρα ο γενικός όρος της a_n είναι $a_n = 3 + (1/3)^{n-1}$.

Παράδειγμα 3.15 Βρείτε τον γενικό όρο της a_n με $a_1 = 5$ και $a_{n+1} = 5 - \frac{6}{a_n}$.

Η εξίσωση αναδρομής $x = 5-6/x$ έχει δύο λύσεις, τις 2 και 3. Αφαιρούμε από την αναδρομική εξίσωση της ακολουθίας τόσο τον 2 όσο και τον 3. Αφαιρώντας τον 2 μετά από πράξεις παίρνουμε

$$a_{n+1} - 2 = \frac{3}{a_n}(a_n - 2),$$

και αφαιρώντας το 3,

$$a_{n+1} - 3 = \frac{2}{a_n}(a_n - 3).$$

Τώρα θέλουμε να διαιρέσουμε κατά μέλη, αλλά για να το κάνουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε ότι κανένας όρος της a_n δεν ισούται με 3. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από την τελευταία. Αν $a_{n+1} = 3$ για κάποιο n τότε $a_n = 3$. Δηλαδή αν κάποιος όρος της ακολουθίας ισούται με 3 τότε ισούται με 3 και ο προηγούμενος. Επαγωγικά θα καταλήξουμε σε άτοπο, αφού $a_1 = 5 \neq 3$.

Διαιρώντας λοιπόν κατά μέλη οδηγούμαστε στην

$$\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 3} = \frac{3}{2}\frac{a_n - 2}{a_n - 3}.$$

Άρα,

$$\frac{a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{3}{2}\frac{a_{n-1} - 2}{a_{n-1} - 3} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a_{n-2} - 2}{a_{n-2} - 3} = \cdots = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{a_1 - 2}{a_1 - 3} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Λύνοντας ως προς a_n (αφαιρούμε αριθμητές από παρονομαστές!) παίρνουμε αμέσως

$$a_n = 2 + \frac{3^n}{3^n - 2^n}.$$

Παράδειγμα 3.16 Βρείτε τον γενικό όρο της a_n με $a_1 = 5$ και $a_{n+1} = \frac{4a_n-9}{a_n-2}$.

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση αναδρομής $x = (4x - 9)/(x - 2)$ είναι ισοδύναμη με την $(x-3)^2 = 0$ δηλαδή έχει *διπλή ρίζα* το 3. Σε αυτές τις περιπτώσεις κάνουμε το εξής τέχνασμα: πρώτα αφαιρούμε τη διπλή ρίζα για να καταλήξουμε στη σχέση

$$a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n - 2}.$$

Τώρα αντιστρέφουμε τους όρους:

$$\frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{a_n - 2}{a_n - 3} = \frac{a_n - 3 + 1}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_n - 3}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{a_n - 3} = 1 + \frac{1}{a_{n-1} - 3} = 2 + \frac{1}{a_{n-2} - 3} = n - 1 + \frac{1}{a_1 - 3} = n - \frac{1}{2}.$$

Αντιστρέφοντας τους όρους της εξίσωσης και λύνοντας ως προς a_n παίρνουμε

$$a_n = 3 + \frac{2}{2n-1}.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.1. Γράψτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

και της

$$b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}.$$

Άσκηση 3.3.2. Βρείτε τον τύπο της υπακολουθίας των περιττών όρων των ακολουθιών:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \qquad b_n = \cos(n\pi), \qquad c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Άσκηση 3.3.3. Θεωρήστε την ακολουθία $a_n = \log n$. Βρείτε τους τύπους των υπακολουθιών

$$a_{n^2}, \qquad a_{n^m}, \qquad a_{2^n}, \qquad a_{n!}.$$

Άσκηση 3.3.4. Βρείτε τους γενικούς τύπους των ακολουθιών a_n, b_n και c_n που ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

1. $a_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}a_n, \quad a_1 = 2,$
2. $b_{n+1} = 3 - \frac{2}{b_n}, \quad b_1 = 3,$
3. $c_{n+1} = \frac{3c_n - 1}{4c_n + 7}, \quad c_1 = \frac{3}{4}.$

Άσκηση 3.3.5. Δίνονται δυο δοχεία όγκου $2a$ λίτρων το καθένα, το δοχείο A και το δοχείο B. Το A περιέχει a λίτρα καθαρής αιθανόλης (οινόπνευμα) και το B περιέχει a λίτρα νερού. Λέμε ότι εκτελέσαμε μία πράξη όταν (μετά από ανακάτεμα του A) αδειάσουμε το μισό περιεχόμενο του A στο B και στη συνέχεια (μετά από ανακάτεμα του B) αδειάσουμε το μισό περιεχόμενο του B πίσω στο A. Να υπολογιστεί η ποσότητα αιθανόλης στο δοχείο B μετά από άπειρο πλήθος πράξεων καθώς και ο συνολικός όγκος του περιεχομένου του B. (Υπόδειξη: η απάντηση *δεν* είναι ότι το B θα περιέχει τη μισή ποσότητα αιθανόλης.)

Αποδείξτε όμως ότι η περιεκτικότητα του B σε αιθανόλη μετά από άπειρο πλήθος πράξεων θα είναι 50%.

Κεφάλαιο 4

Μονότονες ακολουθίες

4.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με γενικό όρο $a_n = (n-1)/n$. Παρατηρούμε ότι
$$a_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = a_n.$$
Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$. Για μια ακολουθία a_n με αυτή την ιδιότητα λέμε ότι η a_n είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *γνησίως αύξουσα*, και γράφουμε $a_n \nearrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *αύξουσα*, και γράφουμε $a_n \nearrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *γνησίως φθίνουσα*, και γράφουμε $a_n \searrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n > a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *φθίνουσα*, και γράφουμε $a_n \searrow$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *γνησίως μονότονη* αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα.
- Μια ακολουθία a_n λέγεται *μονότονη* αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι μια γνήσια μονότονη ακολουθία είναι και μονότονη· μια γνήσια αύξουσα είναι και αύξουσα, αφού αν $a_n < a_{n+1}$ τότε $a_n \leq a_{n+1}$ και ομοίως για τις γνήσια φθίνουσες. Το αντίστροφο δεν είναι βεβαίως σωστό, αφού για παράδειγμα μια σταθερή ακολουθία

$a_n = 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι και αύξουσα και φθίνουσα αλλά δεν είναι ούτε γνήσια αύξουσα ούτε γνήσια φθίνουσα.

Συχνά για να εξετάσουμε τη μονοτονία μιας ακολουθίας a_n εξετάζουμε αν οι διαφορές $a_{n+1} - a_n$ έχουν το ίδιο πρόσημο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{n+1} - a_n \geq 0$ τότε η a_n είναι αύξουσα, και ομοίως για τις άλλες περιπτώσεις. Αν μας ενδιαφέρει απλά ο έλεγχος της μονοτονίας (και όχι απαραίτητα το είδος της) μπορούμε να εξετάσουμε αν το γινόμενο $(a_{n+2} - a_{n+1})(a_{n+1} - a_n)$ έχει σταθερό πρόσημο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν αυτό συμβαίνει, φανερά η ακολουθία είναι μονότονη, αφού σε αυτή την περίπτωση κανένας παράγοντας $(a_{n+2} - a_{n+1})$ δεν μπορεί να αλλάζει πρόσημο σε σχέση με τον $(a_{n+1} - a_n)$.

Επιπλέον για θετικές ακολουθίες a_n μπορούμε να εξετάζουμε αν ο λόγος a_{n+1}/a_n είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 ή μικρότερος ή ίσος του 1. Φανερά αν $a_{n+1}/a_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία είναι αύξουσα, ενώ αν $a_{n+1}/a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία είναι φθίνουσα.

Πρόταση 4.2 *Αν η ακολουθία a_n είναι μονότονη τότε κάθε υπακολουθία της έχει την ίδια μονοτονία με την a_n.*

Απόδειξη: Έστω ότι η $c_n = a_{k_n}$ είναι υπακολουθία της a_n με $k_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ με $k_1 < k_2 < \dots$, δηλαδή η k_n είναι γνήσια αύξουσα. Υποθέτουμε ότι η a_n είναι άυξουσα. Φανερά ισχύει

$$c_n = a_{k_n} \leq a_{k_n+1} \leq a_{k_n+2} \leq \dots \leq a_{k_{n+1}} = c_{n+1},$$

οπότε και η c_n είναι αύξουσα. Ομοίως αν η a_n έχει οποιοδήποτε άλλο είδος μονοτονίας. □

Δεν είναι βεβαίως αλήθεια ότι κάθε ακολουθία είναι μονότονη. Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n/n$ δεν είναι αύξουσα, αφού $a_3 = -1/3 < 1/2 = a_2$ αλλά ούτε και φθίνουσα, αφού $a_1 = -1 < 1/2 = a_2$. Παρατηρούμε όμως ότι η υπακολουθία των αρτίων όρων της $a_{2n} = 1/(2n)$ είναι φθίνουσα (και των περιττών της όρων είναι αύξουσα). Βλέπουμε δηλαδή ότι παρόλο που η ίδια η a_n δεν έχει κανένα είδος μονοτονίας, εν τούτοις έχει τουλάχιστον μια μονότονη υπακολουθία. Αυτό είναι ένα γενικό φαινόμενο και διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.3 *Κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει μια μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο των *σημείων κορυφής* της ακολουθίας a_n:

$$A = \{k \in \mathbb{N} : a_k \geq a_n \text{ για κάθε } n \geq k\}.$$

Αν το A είναι άπειρο σύνολο, έστω ότι περιέχει τα στοιχεία

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots .$$

Αφού το k_n είναι σημείο κορυφής (δηλαδή στοιχείο του A) και $k_{n+1} > k_n$ συμπεραίνουμε ότι $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η a_{k_n} είναι φθίνουσα.

Αν σε αντίθετη περίπτωση το σύνολο A είναι πεπερασμένο. Έστω ότι m είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του. Τότε το $k_1 := m+1$ δεν ανήκει το A οπότε υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_1} < a_{k_2}$. Αλλά τώρα $k_2 > k_1 = m+1$ οπότε $k_2 \notin A$. Έτσι υπάρχει $k_3 > k_2$ ώστε $a_{k_2} < a_{k_3}$. Επαγωγικά, αν έχουμε ορίσει τον a_{k_n} για $k_n > k_{n-1} \dots > k_1 = m+1$ ισχύει $k_n \notin A$, οπότε υπάρχει $k_{n+1} > k_n$ ώστε $a_{k_n} < a_{k_{n+1}}$. Επαγωγικά λοιπόν, ορίζεται η υπακολουθία a_{k_n} η οποία από την κατασκευή της είναι γνησίως αύξουσα.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση η a_n έχει μια μονότονη υπακολουθία. □

4.2 Εφαρμογές και παραδείγματα

Παράδειγμα 4.4 Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία $a_n = (n^2-1)/(2n)$.

Ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n^2+n+1}{2n(n+1)} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς η a_n είναι γνησίως αύξουσα.

Άλλος τρόπος:

$$a_n = \frac{n^2-1}{2n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = a_{n+1}.$$

Παράδειγμα 4.5 Ελέγξτε ως προς τη μονοτονία την ακολουθία a_n με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$.

Ο έλεγχος γίνεται εύκολα με επαγωγή: για $n = 1$ ισχύει

$$a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{2} > 1 = a_1.$$

Υποθέτοντας ότι $a_{n+1} > a_n$, έχουμε

$$a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} > \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}.$$

Παράδειγμα 4.6 Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = (1+1/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli στην ακολουθία $(1-1/n^2)^n$.

Σύμφωνα με την υπόδειξη

$$1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

άρα για κάθε $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι ακολουθίες

$$a_n = 3n + 2 \qquad a_n = \frac{n+4}{n^2+1}$$

$$a_n = \frac{n}{2^n} \qquad a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \qquad a_n = \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right)(n+2)$$

$$a_n = 2^{n+2} \sin \frac{\theta}{2^n}, \text{ με } 0 < \theta < \pi/2 \qquad a_n = \frac{(2n)! \sqrt{n}}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

Άσκηση 4.2.2. Αποδείξτε ότι αν $k_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ισχύει $k_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 5

Φραγμένες ακολουθίες

5.1 Ορισμοί και ιδιότητες

Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = (n-1)/n$. Παρατηρούμε ότι $a_n = 1 - 1/n$. Έτσι κανένας όρος της ακολουθίας δεν είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό 1. Δηλαδή $a_n = 1 - 1/n \leq 1$. Για αυτή την ακολουθία λέμε ότι είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό 1 ή ότι το 1 είναι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας. Παρατηρήστε ότι, αφού $a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα $a_n \leq 2$ και $a_n \leq \sqrt{3}$ και γενικώς $a_n \leq M$ για κάθε $M \geq 1$. Έτσι το άνω φράγμα μιας ακολουθίας δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο αλλά αν μια ακολουθία έχει ένα άνω φράγμα τότε κάθε μεγαλύτερος από αυτό αριθμός είναι και αυτός άνω φράγμα της ακολουθίας. Για αυτό λέμε «ένα άνω φράγμα» και όχι «το άνω φράγμα» της a_n. Γενικότερα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.1

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *άνω φραγμένη* αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το M λέγεται (ένα) άνω φράγμα της a_n.

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *κάτω φραγμένη* αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \geq m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το m λέγεται (ένα) κάτω φράγμα της a_n.

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη; δηλαδή, αν υπάρχουν $M, m \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq a_n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Μια ακολουθία a_n λέγεται *απολύτως φραγμένη* αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Φανερά από τον ορισμό, αν η a_n είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό M τότε και κάθε υπακολουθία της a_n είναι άνω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό M. Ομοίως, αν η a_n είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό m τότε και κάθε υπακολουθία της a_n είναι κάτω φραγμένη από τον ίδιο αριθμό m.

Αν ο αριθμός b *δεν είναι* άνω φράγμα της ακολουθίας a_n, αυτό σημαίνει ότι *δεν είναι* όλοι οι όροι της ακολουθίας μικρότεροι του b. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος a_{n_0}, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $b < a_{n_0}$.

Ομοίως, αν ο αριθμός c *δεν είναι* κάτω φράγμα της ακολουθίας a_n, αυτό σημαίνει ότι *δεν είναι* όλοι οι όροι της ακολουθίας μεγαλύτεροι του c. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος a_{n_0}, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $a_{n_0} < c$.

Παρατήρηση 5.2 Μια ακολουθία a_n που είναι φθίνουσα είναι άνω φραγμένη, αφού φανερά $a_n \leq a_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως μια αύξουσα ακολουθία a_n είναι κάτω φραγμένη, αφού $a_n \geq a_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 5.3 *Μια ακολουθία a_n είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απολύτως φραγμένη.*

Απόδειξη: Αν η a_n είναι απολύτως φραγμένη, τότε υπάρχει ένας αριθμός $M \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $-M \leq a_n \leq M$ και άρα η a_n είναι φραγμένη.

Αν η a_n είναι φραγμένη, τότε υπάρχουν αριθμοί $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $m \leq a_n \leq M$. Θέτουμε $K = \max\{|m|, |M|\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$a_n \leq M \leq |M| \leq \max\{|m|, |M|\} = K,$$

και

$$a_n \geq m \geq -|m| \geq -\max\{|m|, |M|\} = -K.$$

Συνεπώς $-K \leq a_n \leq K$, δηλαδή $|a_n| \leq K$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

□

Όπως είπαμε και νωρίτερα τα φράγματα δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Αλλά δύο συγκεκριμένα φράγματα είναι ιδιαίτερα σημαντικά:

Ορισμός 5.4 Το *ελάχιστο άνω φράγμα* μιας άνω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in A}$ συμβολίζεται με $\sup a_n$ ή $\sup_n a_n$ ή $\sup_{n\in A} a_n$ και εκτός από ελάχιστο άνω φράγμα, ονομάζεται *άνω πέρας* ή *supremum* της a_n.

Το *μέγιστο κάτω φράγμα* μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας $(a_n)_{n\in A}$, συμβολίζεται με $\inf a_n$ ή $\inf_n a_n$ ή $\inf_{n\in A} a_n$ και εκτός από μέγιστο κάτω φράγμα, ονομάζεται *κάτω πέρας* ή *infimum* της a_n.

Η ύπαρξη αυτών των φραγμάτων στο $\mathbb{R}$ δεν έχει ακόμα αποδειχθεί. Για να γίνει αυτό θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε αυστηρά το $\mathbb{R}$, κάτι που θα γίνει στο Κεφάλαιο Β′. Προς το παρόν δεχόμαστε την ύπαρξή τους στο $\mathbb{R}$.

Πολύ σημαντική είναι η παρακάτω ιδιότητα που μας επιτρέπει να χειριζόμαστε αυτά τα ιδιαίτερα φράγματα, και χρησιμοποιείται συστηματικά όποτε και όπου αυτά εμφανίζονται.

Παρατήρηση 5.5

- Αν το $s \in \mathbb{R}$ είναι το άνω πέρας μιας ακολουθίας a_n, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα της a_n, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το $s - \varepsilon$, ως μικρότερο του ελαχίστου άνω φράγματος s, δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας! Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s - \varepsilon < a_{n_0}$.
- Αν το $i \in \mathbb{R}$ είναι το κάτω πέρας μιας ακολουθίας a_n, δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα της a_n, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ το $i + \varepsilon$, ως μεγαλύτερο του μεγίστου κάτω φράγματος i, δεν είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας! Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} < i + \varepsilon$.

Παρατήρηση 5.6 Αν μια ακολουθία a_n δεν είναι άνω φραγμένη, τότε θεωρούμε ότι το άνω πέρας της είναι το $+\infty$. Γράφουμε $\sup a_n = +\infty$. Ομοίως, αν δεν είναι κάτω φραγμένη θεωρούμε ότι το κάτω πέρας της είναι το $-\infty$, και γράφουμε $\inf a_n = -\infty$. Σε αυτές τις περιπτώσεις, φανερά δεν ισχύει η Παρατήρηση 5.5, αφού πάντα $-\infty < a_n < +\infty$.

5.2 Εφαρμογές και παραδείγματα

Παράδειγμα 5.7 Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $a_n = (3n^2 - 1)/(2n^2 + 1)$, $b_n = (3n^2 + 1)/(2n^2 - 1)$, $c_n = (3n^2 + 1)/(n^2 - 3)$ για $n \geq 2$, και $d_n = (3n^2 + 1)/(n^2 - n - 1)$ για $n \geq 2$, είναι φραγμένες.

Φανερά και οι τέσσερις ακολουθίες είναι θετικές οπότε μένει να αποδειχθεί ότι είναι άνω φραγμένες. Για αυτό προσπαθούμε να μεγαλώσουμε τις ακολουθίες απλοποιώντας τες αλλά χωρίς να αλλάξουμε την τάξη μεγέθους αριθμητή και παρονομαστή. Έτσι έχουμε:

$$a_n = \frac{3n^2 - 1}{2n^2 + 1} \leq \frac{3n^2}{2n^2} = \frac{3}{2},$$

συνεπώς η a_n είναι άνω φραγμένη από το $3/2$.

Για τη b_n δεν μπορούμε να κάνουμε ακριβώς το ίδιο τέχνασμα για το άνω φράγμα, διότι το να διαγράψουμε το $+1$ από τον αριθμητή ή το -1 από τον παρονομαστή δεν μεγαλώνει, αλλά μικραίνει το κλάσμα. Μπορούμε όμως να μεγαλώσουμε το $+1$ του αριθμητή σε $+n^2$ και να μικρύνουμε το -1 του παρονομαστή με $-n^2$, αλλαγές που δεν αλλάζουν την τάξη μεγέθους των όρων του κλάσματος:

$$b_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - 1} \leq \frac{3n^2 + n^2}{2n^2 - n^2} = 4.$$

Για τη c_n δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το -3 του παρονομαστή με $-n^2$ όπως κάναμε στην b_n διότι θα μηδενιστεί ο παρονομαστής. Μπορούμε όμως να ελέγξουμε ότι $3 < n^2/3$ για κάθε $n \geq 3$. Έτσι για $n \geq 3$

$$c_n = \frac{3n^2 + 1}{n^2 - 3} \leq \frac{3n^2 + n^2}{n^2 - \frac{1}{3}n^2} = \frac{4n^2}{\frac{2}{3}n^2} = 6.$$

Η ακολουθία όμως ορίζεται για $n \geq 2$. Άρα για να βρούμε ένα άνω φράγμα πρέπει να ελέγξουμε μήπως το c_2 είναι μεγαλύτερος του 6. Πράγματι $c_2 = 13$. Άρα

$$c_n \leq \max\{6, 13\} = 13.$$

Τέλος για την d_n αναζητούμε n_0 ώστε $n+1 \leq n^2/2$ για κάθε $n \geq n_0$ ώστε να απλοποιήσουμε τον παρονομαστή χρησιμοποιώντας ότι $n^2 - n - 1 = n^2 - (n+1) \geq n^2 - n^2/2 = n^2/2$. Η $n+1 \leq n^2/2$ είναι ισοδύναμη με την $n^2 - 2n - 2 \geq 0$ η οποία είναι αληθής για κάθε $n \geq 3$ (η εξίσωση $x^2 - 2x - 2 = 0$ είναι θετική για κάθε $x > 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}7320508$). Οπότε για κάθε $n \geq 3$,

$$d_n = \frac{3n^2+1}{n^2-n-1} \leq \frac{3n^2+n^2}{n^2 - \frac{1}{2}n^2} = 8.$$

Επειδή τώρα $d_2 = 13$ συμπεραίνουμε ότι $d_n \leq \max\{13, 8\} = 13$.

Παράδειγμα 5.8 Αποδείξτε ότι η ακολουθία a_n με $a_1 = 8$ και $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ είναι άνω φραγμένη από το 8. Δείξτε ότι αν ο a_1 δοθεί να είναι μικότερος από τη μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης αναδρομής $x = \sqrt{2+x}$ τότε το ίδιο ισχύει και για τον γενικό όρο της a_n. Τέλος αποδείξτε ότι αν $r > 0$ τότε κάθε ακολουθία με $a_1 > 0$ και αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = \sqrt{r + a_n}$ είναι άνω φραγμένη από το $\max\{a_1, \rho\}$ όπου ρ η μέγιστη ρίζα της εξίσωσης αναδρομής $x = \sqrt{r+x}$.

Πράγματι, για $n = 1$ ισχύει $a_1 = 8 \leq 8$. Υποθέτουμε ότι $a_n \leq 8$. Τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+8} \leq \sqrt{16} = 4 \leq 8,$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Η εξίσωση αναδρομής έχει μεγαλύτερη ρίζα τον αριθμό $x = 2$. Αν $a_1 \leq 2$ και υποθέσουμε ότι $a_n \leq 2$ τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2,$$

ολοκληρώνοντας την επαγωγή.

Τέλος, αν θέσουμε $M = \max\{a_1, \rho\}$ φανερά $a_1 \leq M$. Και αν υποθέσουμε ότι $a_n \leq M$ τότε

$$a_{n+1} = \sqrt{r+a_n} \leq \sqrt{r+M} \leq M,$$

αφού η τελευταία είναι ισοδύναμη με την $M^2 - M - r \geq 0$ η οποία είναι αληθής αφού το M είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τη μέγιστη ρίζα ρ της $x^2 - x - r = 0$.

Παράδειγμα 5.9 Αποδείξτε (με κατάλληλη χρήση της ανισότητας Bernoulli ότι η ακολουθία $(1+1/2n)^n$ είναι άνω φραγμένη από το 2 και στη συνέχεια αποδείξτε ότι η $(1+1/n)^n$ είναι άνω φραγμένη από το 4.

Έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n} \leq \frac{1}{\left(1-\frac{n}{2n+1}\right)} = \frac{2n+1}{n+1} \leq 2.$$

Από το Παράδειγμα 4.6 η ακολουθία $(1+1/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)^2 \leq 2^2 = 4.$$

Παράδειγμα 5.10 Αποδείξτε ότι αν a_n αύξουσα ακολουθία και $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ η ακολουθία a_n βρίσκεται τελικά στο διάστημα $(s-\varepsilon, s]$.

Χρησιμοποιούμε την Παρατήρηση 5.5: το $s-\varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της ακολουθίας a_n άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s-\varepsilon < a_{n_0} \leq s$. Αφού η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ συμπεραίνουμε ότι $s-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$, δηλαδή το ζητούμενο.

Παράδειγμα 5.11 Αποδείξτε ότι η $a_n = (n^2+\sin(n\pi/2))/(n+1)$ δεν είναι άνω φραγμένη.

Έχουμε

$$\frac{n^2+\sin(n\pi/2)}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = n-1,$$

η οποία φανερά δεν είναι άνω φραγμένη.

Ασκήσεις

Άσκηση 5.2.1. Να εξετάσετε αν είναι φραγμένες οι παρακάτω ακολουθίες:

$$a_n = \frac{5\sin(3n)}{4n} \qquad a_n = \frac{n+1000}{n+100}$$

$$a_n = (-5)^{-n} \qquad a_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

$$a_n = \frac{n}{3^n} \qquad a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$$

$$a_n = \frac{n+5}{2^n} \qquad a_n = \frac{n^2+2n+4}{n^3+2}$$

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)+n\sin(n+1)}{n^2+n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$a_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \qquad a_n = \sqrt{n^2+n}-n$$

Άσκηση 5.2.2. Να εξεταστούν ως προς το φράγμα οι ακολουθίες

$$a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n+b} \text{ me } a, b \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad \text{για } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Άσκηση 5.2.3. Να εξεταστεί ως προς το φράγμα η ακολουθία a_n με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + 6}{2a_n + 1}.$$

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

Άσκηση 5.2.4. Για κάθε $p > 0$ θέτουμε

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 1$ η ακολουθία s_n είναι φραγμένη, αποδεικνύοντας (με επαγωγή) ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1} - \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Επιπλέον για κάθε $p > 0$ ισχύει

$$n^{1-p} \leq 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

Ειδικά για $p = 1$, αποδείξτε με επαγωγή ότι ισχύει

$$\frac{1}{2}\log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log n.$$

Συμπεράνετε ότι για $0 < p \leq 1$ η s_N δεν είναι φραγμένη. (Υπόδειξη: η περίπτωση $0 < p < 1$ είναι εύκολη αν όλα τα κλάσματα του αθροίσματος αντικατασταθούν από το μικρότερο από αυτά. Αν όμως γίνει επαγωγικά, θα χρειαστεί η παρατήρηση ότι $(n+1)^p n^{1-p} \geq n^p n^{1-p} = n$.)

Άσκηση 5.2.5. Θεωρήστε μια αύξουσα ακολουθία a_n για την οποία υπάρχει $c > 0$ ώστε $a_{2n} - a_n \leq cn$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία a_n/n είναι άνω φραγμένη. (Υπόδειξη: για κάθε ακέραιο k βρείτε πρώτα n ώστε $2^{n-1} < k \leq 2^n$. Επειδή η a_n είναι αύξουσα ισχύει $a_k \leq a_{2^n}$. Τώρα εφαρμόστε την υπόθεση.)

Κεφάλαιο 6

Σύγκλιση ακολουθιών

6.1 Μηδενικές ακολουθίες

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ κάθε διάστημα της μορφής (a, b) ώστε $x \in (a, b)$ ονομάζεται μια *ανοικτή περιοχή του* x ή απλά *περιοχή* του x. Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε περιοχές ειδικού τύπου. Συγκεκριμένα παίρνουμε ένα θετικό αριθμό $\varepsilon > 0$ και σχηματίζουμε την περιοχή $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ του x. Το x για αυτή την περιοχή ονομάζεται *κέντρο* της περιοχής και το ε ακτίνα της περιοχής. Περιοχές της μορφής $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ συμβολίζονται και με $\varpi(x, \varepsilon)$. Φανερά, αν $x = 0$ τότε $\varpi(0, \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Παρατηρούμε επίσης ότι $y \in \varpi(x, \varepsilon)$ αν και μόνο αν $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$ και ισοδύναμα $|y - x| < \varepsilon$. Με άλλα λόγια

$$\varpi(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, |y - x| < \varepsilon\}.$$

Αν δοθεί ένα x και μια περιοχή του $\varpi(x, \varepsilon)$, λέμε ότι μια ακολουθία a_n περιέχεται *τελικά* σε αυτή την περιοχή αν υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \in \varpi(x, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Για παράδειγμα, ας πάρουμε $x = 0$ και $a_n = 1/n$. Βλέπουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ αν θέλουμε να ισχύει $a_n \in \varpi(0, \varepsilon)$ θα πρέπει $-\varepsilon < 1/n < \varepsilon$ ισοδύναμα $n > 1/\varepsilon$. Άρα, αν θέσουμε $n_0 = [1/\varepsilon] + 1 \in \mathbb{N}$, αν $n \geq n_0 > 1/\varepsilon$ τότε $a_n = 1/n \in \varpi(0, \varepsilon)$. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ η ακολουθία $a_n = 1/n$ βρίσκεται τελικά στην περιοχή $\varpi(0, \varepsilon)$. Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι η ακολουθία a_n είναι μηδενική ή ότι έχει όριο το μηδέν ή ότι συγκλίνει στο μηδέν:

Ορισμός 6.1 Λέμε ότι μια ακολουθία a_n *συγκλίνει στο μηδέν* ή ότι είναι *μηδενική* ή ότι *έχει όριο το μηδέν* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $a_n \to 0$ ή $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ή απλούστερα $\lim a_n = 0$.

Παρατήρηση 6.2 Στον παραπάνω ορισμό είτε γράψουμε $|a_n| < \varepsilon$, είτε γράψουμε $|a_n| \leq \varepsilon$ το νόημα του ορισμού δεν αλλάζει:

- Αν $|a_n| < \varepsilon$ τότε προφανώς $|a_n| \leq \varepsilon$.

- Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό με $\leq$ αντί για $<$ και για $\varepsilon/2$ τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| \leq \varepsilon/2$ και συνεπώς $|a_n| < \varepsilon$.

Παράδειγμα 6.3 Η ακολουθία $a_n = \frac{n\sin(\pi n/4)+1}{n^2+1}$ είναι μηδενική. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$|a_n| = \frac{\left|n\sin(\pi n/4)+1\right|}{n^2+1} \leq \frac{\left|n\sin(\pi n/4)\right|+1}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Έτσι αν $\varepsilon > 0$ και θέλουμε να ισχύει $|a_n| < \varepsilon$, αρκεί να απαιτήσουμε $2/n < \varepsilon$ ισοδύναμα $n > 2/\varepsilon$. Άρα αν θέσουμε $n_0 = [2/\varepsilon]+1$ τότε αν $n \geq n_0 > 2/\varepsilon$ θα έχουμε $|a_n| \leq 2/n < \varepsilon$. Συνεπώς η a_n είναι μηδενική.

Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα μεγαλώσαμε το κλάσμα αλλά *χωρίς* να μεταβάλουμε την τάξη του n ούτε στον αριθμητή ούτε στον παρονομαστή. Αυτή την τεχνική θα τη χρησιμοποιούμε τακτικά.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1.1. Δείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

$$a_n = \frac{1}{2n^3} \qquad a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{5}}{n^2} \qquad a_n = \frac{5+\sin(n\pi/5)}{n^2+n+1}$$

$$a_n = \frac{\sin n + \cos(3n)}{n^2} \qquad a_n = \frac{1}{n^s} \text{ όπου } s \in \mathbb{Q}_+$$

Άσκηση 6.1.2. Αποδείξτε με τη βοήθεια του ορισμού ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

$$\frac{n-1}{n^2-1}, \quad \frac{n-1}{n^2+1}, \quad \frac{8n^2-1}{2n^3+3}, \quad \frac{8n^2+1}{2n^3-3} \quad \frac{\sin(\sqrt{n}\pi)+\cos(\sqrt[4]{n}\pi)}{n},$$

$$\frac{n^{11/6}+n^{9/5}+n^{7/4}+n^{5/3}+n^{3/2}+1}{n^2-n+1}.$$

Άσκηση 6.1.3. Αποδείξτε ότι αν μια ακολουθία a_n είναι φθίνουσα και μηδενική τότε $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6.2 Ιδιότητες μηδενικών ακολουθιών

Ιδιότητα 6.4 *Για κάθε ακολουθία a_n ισχύει*

$$\lim a_n = 0 \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad \lim |a_n| = 0.$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim a_n = 0$ και έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$. Τότε επειδή μπορούμε να βρούμε n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$ συνεπάγεται ότι $\big||a_n|\big| < \varepsilon$, και συνεπώς $\lim |a_n| = 0$.

Αντίστροφα, αν $\lim |a_n| = 0$ και μας έχει δοθεί ένα $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\big||a_n|\big| < \varepsilon$, οπότε επειδή $\big||a_n|\big| = |a_n|$, συμπεραίνουμε ότι $|a_n| < \varepsilon$, και άρα $\lim a_n = 0$. $\square$

Ιδιότητα 6.5 *Για κάθε ακολουθία a_n αν $\lim a_n = 0$ τότε η a_n είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = 1$. Οπότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| < 1$. Δηλαδή ο αριθμός 1 αποτελεί άνω φράγμα για την ακολουθία $|a_n|$ αλλά όχι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, αλλά μόνο για τα n που είναι μεγαλύτερα ή ίσα με το n_0. Θέτουμε τώρα

$$M = \max\{1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|\}$$

ώστε να είμαστε σίγουροι ότι

$$|a_n| \leq M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι, η ακολουθία a_n είναι απολύτως φραγμένη και άρα φραγμένη. $\square$

Ιδιότητα 6.6 *Για κάθε ακολουθία a_n, κάθε ακολουθία b_n και κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν $\lim a_n = \lim b_n = 0$ τότε $\lim(\lambda a_n \pm \mu b_n) = 0$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0 \neq \mu$, και έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης στο μηδέν για τις ακολουθίες a_n και b_n χρησιμοποιώντας για «ε» τα $\varepsilon/2|\lambda| > 0$ και $\varepsilon/2|\mu| > 0$ αντίστοιχα. Έτσι βρίσκουμε ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ για την a_n και ένα n_2 για την b_n ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$\text{για κάθε } n \geq n_1 \text{ ισχύει } |a_n| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \tag{6.1}$$

και

$$\text{για κάθε } n \geq n_2 \text{ ισχύει } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}. \tag{6.2}$$

Θέτοντας $n_0 = \max\{n_0, n_1\}$, αν $n \geq n_0$ θα ισχύουν ταυτόχρονα και η (6.1) και η (6.2). Οπότε για $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$|\lambda a_n \pm \mu b_n| \leq |\lambda a_n| + |\mu b_n| = |\lambda|\,|a_n| + |\mu|\,|b_n| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2|\mu|} = \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. $\square$

Ιδιότητα 6.7 *Για κάθε ακολουθία a_n και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αν $\lim a_n = 0$ τότε $\lim(\lambda a_n) = 0$.*

Απόδειξη: Άμεσο από την προηγούμενη ιδιότητα για $\mu = 0$. $\square$

Ιδιότητα 6.8 *Για κάθε ακολουθία a_n και κάθε ακολουθία b_n θέτουμε*

$$x_n = \max\{a_n, b_n\} \quad \textit{και} \quad y_n = \min\{a_n, b_n\}.$$

Αν $\lim a_n = 0$ και $\lim b_n = 0$ τότε $\lim x_n = 0$ και $\lim y_n = 0$.

Απόδειξη: Προκύπτει αμέσως από τις προηγούμενες ιδιότητες και τις σχέσεις

$$\max\{t, s\} = \frac{t+s+|t-s|}{2} \qquad \text{και} \qquad \min\{t, s\} = \frac{t+s-|t-s|}{2}. \qquad \square$$

Ιδιότητα 6.9 *Για κάθε ακολουθία a_n και κάθε ακολουθία b_n αν* $\lim a_n = 0$ *και η b_n είναι φραγμένη, τότε* $\lim(a_n b_n) = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$, και έστω ότι για τον αριθμό M ισχύει $|b_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της a_n στο 0 για $\varepsilon/M > 0$ οπότε θα υπάρχει ένα n_0 στο $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|a_n| < \varepsilon/M$. Οπότε, αν $n \ge n_0$ θα έχουμε

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon.$$

Συνεπώς $\lim(a_n b_n) = 0$. $\square$

Ιδιότητα 6.10 *Για κάθε ακολουθία a_n και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ αν* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} a_{n\pm k} = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim a_n = 0$. Αν για $n \ge n_0$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon$ επειδή θα είναι $n + k \ge n \ge n_0$, θα ισχύει και η $|a_{n+k}| < \varepsilon$. Οπότε $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = 0$.

Για την $\lim a_{n-k} = 0$ απλά θέτουμε $n_1 = n_0 + k$, και αν $n \ge n_1$ θα ισχύει $n - k \ge n_1 - k \ge n_0$, οπότε $|a_{n-k}| < \varepsilon$, και άρα $\lim_{n\to\infty} a_{n-k} = 0$. $\square$

Γενικότερα έχουμε την εξής:

Ιδιότητα 6.11 *Αν η ακολουθία a_n είναι μηδενική κάθε υπακολουθία της είναι μηδενική.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim a_n = 0$ και έστω ότι η k_n είναι μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία φυσικών αριθμών. Αν $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Αλλά από την Άσκηση 4.2.2. ισχύει $k_n \ge n$, οπότε αν $n \ge n_0$ συνεπάγεται $k_n \ge k_{n_0} \ge n_0$ οπότε $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon$. $\square$

Ιδιότητα 6.12 *Για κάθε ακολουθία a_n και κάθε $k \in \mathbb{N}$ αν* $\lim a_n = 0$ *τότε* $\lim \sqrt[k]{|a_n|} = 0$.

Απόδειξη: Αν μας δοθεί $\varepsilon > 0$, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της a_n για ε^k. Έτσι θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \ge n_0$ θα έχουμε $|a_n| < \varepsilon^k$ οπότε $\left|\sqrt[k]{|a_n|}\right| = \sqrt[k]{|a_n|} < \varepsilon$. Δηλαδή $\lim \sqrt[k]{|a_n|} = 0$. $\square$

Ιδιότητα 6.13 (Κριτήριο σύγκρισης) *Για κάθε ακολουθία a_n και κάθε ακολουθία b_n αν* $0 \le a_n \le b_n$ *για κάθε* $n \ge n_1$, *και* $\lim b_n = 0$ *τότε* $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη: Για $\varepsilon > 0$ έστω $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $b_n < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, οπότε αν $n \geq n_0$ θα έχουμε

$$-\varepsilon < 0 \leq a_n \leq b_n < \varepsilon,$$

συνεπώς $|a_n| < \varepsilon$. Δηλαδή $\lim a_n = 0$. □

Εφαρμογή 6.14 *Για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $\lambda^n \to 0$.*

Απόδειξη: Επειδή $\lambda \in (0,1)$ θα ισχύει $1/\lambda > 1$. Θέτουμε $\theta = (1/\lambda) - 1 > 0$, οπότε $1/\lambda = 1 + \theta$. Με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli (Πρόταση 2.1) έχουμε

$$\frac{1}{\lambda^n} = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta,$$

και έτσι

$$0 < \lambda^n \leq \frac{1}{1+n\theta}.$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική άρα και η λ^n. □

Πρόταση 6.15 (Κριτήριο λόγου) *Έστω ότι για μια ακολουθία με μη μηδενικούς όρους a_n υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ και ένα $0 \leq \lambda < 1$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda.$$

Τότε $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη: Αν $n \geq n_0 + 1$ θα έχουμε

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}\right| \cdots \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \ldots \lambda \tag{6.3}$$

Παρατηρούμε ότι επειδή ο δείκτης n στον αριθμητή του τελευταίου κλάσματος μπορεί να γραφτεί και ως $n_0 + (n - n_0)$, στο αριστερό σκέλος της ανισότητας το πλήθος των κλασμάτων είναι $n - n_0$. Άρα τόσα είναι και τα λ στο δεξιό σκέλος. Δηλαδή η (6.3) μπορεί να γραφτεί ως

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}}\right| \cdots \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leq \lambda^{n-n_0} = \lambda^{-n_0} \cdot \lambda^n. \tag{6.4}$$

Όμως στο αριστερό σκέλος της (6.4) έχουμε διαγραφές: κάθε αριθμητής διαγράφεται με τον παρονομαστή του επόμενου κλάσματος. Συνεπώς θα διαγραφούν όλοι οι όροι εκτός από τον παρονομαστή του πρώτου κλάσματος και τον αριθμητή του τελευταίου. Έτσι η (6.4) γίνεται:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| \leq \lambda^{-n_0} \cdot \lambda^n,$$

και ισοδύναμα $|a_n| \leq (\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|)\lambda^n$, για κάθε $n \geq n_0+1$. Επειδή $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $\lim \lambda^n = 0$ (Εφαρμογή 6.14), οπότε επειδή η ποσότητα $\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του n), θα ισχύει $\lim(\lambda^{-n_0}|a_{n_0}|)\lambda^n = 0$. Και έτσι $\lim a_n = 0$. □

Παράδειγμα 6.16 Ποιο είναι το λάθος στην παρακάτω «απόδειξη» ;

> $1/3^n \to 0$ διότι
>
> $$\left|\frac{1/3^{n+1}}{1/3^n}\right| = \frac{1}{3} < 1$$
>
> για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 6.17 (Κριτήριο ρίζας) *Έστω ότι για μια ακολουθία* a_n *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε να ισχύει* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \ell < 1$ *για κάθε* $n \geq n_0$. *Τότε* $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη: Αυτό είναι φανερό, διότι θα ισχύει $|a_n| \leq \ell^n$, και από την Εφαρμογή 6.14 ισχύει $\ell^n \to 0$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 6.2.1. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = n \sin \frac{1}{n^2}$$

είναι μηδενική, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|\sin x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 6.2.2. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$

είναι μηδενική, δείχνοντας πρώτα με επαγωγή ότι $a_n < 1/\sqrt{3n}$.

Άσκηση 6.2.3. Αν $\lim a_n = 0$ δείξτε ότι $\lim \dfrac{a_n}{1+a_n} = 0$.

Άσκηση 6.2.4. Δίνονται οι ακολουθίες $a_n > 0$ kai $b_n > 0$ για τις οποίες ισχύει $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} = 0.$$

6.3 Συγκλίνουσες ακολουθίες

Μια ακολουθία a_n θα λέγεται *συγκλίνουσα* με όριο τον αριθμό ℓ αν η ακολουθία $a_n - \ell$ είναι μηδενική. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 6.18 Λέμε ότι μια ακολουθία a_n *συγκλίνει στον αριθμό* ℓ ή ότι *έχει όριο τον αριθμό* ℓ ή ότι *τείνει στο* ℓ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Παρατήρηση 6.19 Παρατηρήστε ότι στον παραπάνω ορισμό είτε γράψουμε $|a_n - \ell| < \varepsilon$, είτε γράψουμε $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ η ουσία του ορισμού δεν αλλάζει:

- Αν $|a_n - \ell| < \varepsilon$ τότε προφανώς $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$.
- Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό με $\leq$ αντί για $<$ και για $\varepsilon/2$, τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| \leq \varepsilon/2$ και συνεπώς $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Παρατήρηση 6.20 Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή στην ανισότητα $|a_n - \ell| < \varepsilon$ και προσθέτοντας ℓ, ο ορισμός του $\lim a_n = \ell$ λέει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα $a_n \in \varpi(\ell, \varepsilon)$.

Η παρακάτω πρόταση λέει ότι δεν γίνεται μια ακολουθία να συγκλίνει σε δύο διαφορετικούς αριθμούς.

Πρόταση 6.21 *Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι $a_n \to \ell_1$, $a_n \to \ell_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$. Θέτουμε $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3 > 0$ οπότε θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - \ell_1| < \varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1$$

και

$$|a_n - \ell_2| < \varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_2.$$

Αλλά τότε για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &= \big|(a_n - \ell_2) - (a_n - \ell_1)\big| \\ &\leq |a_n - \ell_2| + |a_n - \ell_1| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} + \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} = \frac{2}{3}|\ell_1 - \ell_2|, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 6.22 *Αν* $a_n \to \ell$ *και* a_{k_n} *υπακολουθία της* a_n *τότε* $a_{k_n} \to \ell$.

Απόδειξη: Αφού αν η $a_n - \ell$ είναι μηδενική, είναι μηδενική και η $a_{k_n} - \ell$ από την Ιδιότητα 6.11. □

6.4 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Ιδιότητα 6.23 *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim(-a_n) = -\ell.$$

Απόδειξη: Επειδή $|a_n - \ell| = |(-a_n) - (-\ell)|$ όποτε ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$ θα ισχύει και $|(-a_n) - (-\ell)| < \varepsilon$. □

Ιδιότητα 6.24 *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim |a_n| = |\ell|.$$

Απόδειξη: Επειδή από την τριγωνική ανισότητα ισχύει $\big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell|$, αν για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$ τότε $\big||a_n| - |\ell|\big| < \varepsilon$. □

Ιδιότητα 6.25 *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \text{η } a_n \text{ είναι φραγμένη.}$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας a_n για $\varepsilon = 1$. Έτσι θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < 1$. Από την τριγωνική ανισότητα, θα έχουμε ότι

$$|a_n| - |\ell| \leq \big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell| < 1,$$

Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $|a_n| \leq 1 + |\ell|$. Θέτουμε τώρα

$$M = \max\big\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0 - 1}|, 1 + |\ell|\big\},$$

οπότε $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Ιδιότητα 6.26 *Για κάθε ακολουθία a_n και $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq n_0 \text{ τα} \\ a_n \text{ και } \ell \text{ είναι ομόσημοι.} \end{cases}$$

Απόδειξη: Έστω ότι $\ell > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό της σύγκλισης για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε λοιπόν τον ορισμό για $\varepsilon = \ell/2 > 0$. Έτσι θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \ell/2$. Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή προκύπτει ότι $-\ell/2 < a_n - \ell$ οπότε $\ell/2 < a_n$. Δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί.

Αν τώρα $\ell < 0$, από την Ιδιότητα 6.23 θα ισχύει ότι $-a_n \to -\ell > 0$ οπότε από το προηγούμενο θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ η $-a_n$ θα είναι θετική, οπότε η a_n θα είναι αρνητική. □

Ιδιότητα 6.27 *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα, και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim(\lambda a_n \pm \mu b_n) = \lambda \ell_1 \pm \mu \ell_2.$$

Απόδειξη: Έστω ότι μας δόθηκε ένα $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης των ακολουθιών a_n και b_n για $\varepsilon/2(1+|\lambda|)$ και $\varepsilon/2(1+|\mu|)$ αντίστοιχα:

- θα υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει
$$|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)},$$
- θα υπάρχει ένα $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει
$$|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1+|\mu|)}.$$

Οπότε θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, αν $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}
|(\lambda a_n \pm \mu b_n) - (\lambda \ell_1 \pm \mu \ell_2)| &= |\lambda(a_n - \ell_1) \pm \mu(b_n - \ell_2)| \\
&\leq |\lambda|\,|a_n - \ell_1| + |\mu|\,|b_n - \ell_2| \\
&< |\lambda|\frac{\varepsilon}{2(1+|\lambda|)} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2(1+|\mu|)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\lambda|}{1+|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\mu|}{1+|\mu|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \varepsilon.
\end{aligned}$$ □

Ιδιότητα 6.28 *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα. Θέτουμε*

$$x_n = \max\{a_n, b_n\} \quad \textit{και} \quad y_n = \min\{a_n, b_n\}.$$

Τότε $\lim x_n = \max\{\ell_1, \ell_2\}$ και $\lim y_n = \min\{\ell_1, \ell_2\}$.

Απόδειξη: Όπως και στην αντίστοιχη ιδιότητα για τις μηδενικές ακολουθίες η απόδειξη είναι άμεση από τις σχέσεις

$$\max\{t, s\} = \frac{t+s+|t-s|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{t, s\} = \frac{t+s-|t-s|}{2}.$$ □

Ιδιότητα 6.29 *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα. Τότε*

$$\lim(a_n b_n) = \ell_1 \ell_2.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\ell_2 \neq 0$ τότε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $b_n \neq 0$ και

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \ell_1\ell_2| &= \big|(a_nb_n - b_n\ell_1) + (b_n\ell_1 - \ell_1\ell_2)\big| && (6.5)\\ &= \big|b_n(a_n - \ell_1) + \ell_1(b_n - \ell_2)\big| && (6.6)\\ &\le |b_n|\,|a_n - \ell_1| + |\ell_1||b_n - \ell_2|. && (6.7)\end{aligned}$$

Αφού η b_n συγκλίνει, από την Ιδιότητα 6.25 θα είναι και φραγμένη. Άρα θα υπάρχει ένας αριθμός $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|b_n| \le M$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την a_n για την ποσότητα $\varepsilon/2M$: θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_1$ να ισχύει $|a_n - \ell_1| < \varepsilon/2M$. Ομοίως, εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την b_n για την ποσότητα $\varepsilon/2(1 + |\ell_1|)$: θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_2$ να ισχύει

$$|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)}.$$

Θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, αν $n \ge n_0$ τότε συνεχίζοντας από την (6.7) θα έχουμε

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \ell_1\ell_2| &\le |b_n|\,|a_n - \ell_1| + |\ell_1||b_n - \ell_2| \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_1|\frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|\ell_1|}{1 + |\ell_1|} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεχίζουμε την απόδειξη για τον λόγο ακολουθιών. Λόγω του προηγουμένου, και επειδή $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$ αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για την ακολουθία $1/b_n$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης της b_n για την ποσότητα $|\ell_2|/2$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_1$ να ισχύει

$$|\ell_2| - |b_n| \le \big||\ell_2| - |b_n|\big| \le |\ell_2 - b_n| = |b_n - \ell_2| < \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Έτσι για κάθε $n \ge n_1$ θα έχουμε

$$|\ell_2| - |b_n| < \frac{|\ell_2|}{2}$$

και συνεπώς

$$|b_n| > \frac{|\ell_2|}{2}.$$

Οπότε από τη μια μεριά έχουμε ότι για $n \ge n_1$ ισχύει $b_n \ne 0$, και άρα ορίζεται το πηλίκο $1/b_n$, και από την άλλη μεριά

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2}\right| = \frac{|b_n - \ell_2|}{|b_n|\,|\ell_2|} < \frac{|b_n - \ell_2|}{\frac{|\ell_2|}{2}\,|\ell_2|} = \frac{2}{|\ell_2|^2}\,|b_n - \ell_2|.$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της σύγκλισης της b_n ξανά, για την ποσότητα $\varepsilon|\ell_2|^2/2$ θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $|b_n - \ell_2| < \varepsilon|\ell_2|^2/2$. Επιλέγοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, αν $n \geq n_0$ θα ισχύουν μαζί όλα τα παραπάνω και άρα θα έχουμε

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell_2}\right| \leq \frac{2}{|\ell_2|^2}|b_n - \ell_2| < \frac{2}{|\ell_2|^2}\varepsilon|\ell_2|^2/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

Ιδιότητα 6.30 *Για κάθε ακολουθία $a_n \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim a_n^k = \ell^k.$$

Απόδειξη: Έστω ότι μας έχει δοθεί ένα $\varepsilon > 0$. Αφού η a_n συγκλίνει θα είναι και φραγμένη, και άρα θα υπάρχει αριθμός $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|a_n| \leq M$. Έτσι θα ισχύει και $|\ell| \leq M$ (γιατί;). Οπότε

$$\begin{aligned} |a_n^k - \ell^k| &= |a_n - \ell|\,|a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\ell + a_n^{k-3}\ell^2 + \ldots + \ell^{k-1}| \\ &\leq |a_n - \ell|\left(|a_n^{k-1}| + |a_n^{k-2}\ell| + |a_n^{k-3}\ell^2| + \ldots + |\ell^{k-1}|\right) \\ &\leq |a_n - \ell|\,(\underbrace{M^k + M^k + M^k + \ldots + M^k}_{k-\text{όροι}}) \\ &\leq (kM^k)|a_n - \ell| \end{aligned} \tag{6.8}$$

Οπότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την ακολουθία a_n για την ποσότητα ε/kM^k, και βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon/kM^k$. Έτσι συνεχίζοντας από την (6.8) θα έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n^k - \ell^k| \leq (kM^k)|a_n - \ell| < (kM^k)\varepsilon/kM^k = \varepsilon. \qquad \square$$

Ιδιότητα 6.31 *Για κάθε ακολουθία $a_n \geq 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\lim a_n = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\ell}.$$

Απόδειξη: Έστω ότι μας έχει δοθεί ένα $\varepsilon > 0$. Αν $\ell = 0$ τότε εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης της a_n για το ε^k, οπότε βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n| < \varepsilon^k$. Οπότε $|\sqrt[k]{a_n}| < \varepsilon$.

Αν $\ell > 0$ τότε παρατηρούμε ότι

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\ell}\right| = \frac{|a_n - \ell|}{a_n^{k-1} + a_n^{k-2}\ell + \ldots + \ell^{k-1}} \leq \frac{1}{\ell^{k-1}}|a_n - \ell|.$$

Έτσι, εφαρμόζουμε τον ορισμό σύγκλισης της a_n για την ποσότητα $\varepsilon\ell^{k-1}$. Βρίσκουμε λοιπόν $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\ell}\right| \leq \frac{1}{\ell^{k-1}}|a_n - \ell| < \frac{1}{\ell^{k-1}}\varepsilon\ell^{k-1} = \varepsilon,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. $\square$

Ιδιότητα 6.32 *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα, και επιπλέον υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $a_n \leq b_n$. Τότε $\ell_1 \leq \ell_2$.*

Απόδειξη: Αν δεν ισχύει, τότε $\ell_2 < \ell_1$ οπότε η ακολουθία $b_n - a_n \geq 0$ δεν είναι ποτέ ομόσημη με το όριό της $\ell_2 - \ell_1 < 0$ αντιφάσκοντας με την Ιδιότητα 6.26. □

Πρόταση 6.33 (Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες) *Έστω ότι οι ακολουθίες a_n, b_n και c_n ικανοποιούν την ανισότητα*

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

και ότι $\lim a_n = \lim c_n = \ell$. Τότε αναγκαστικά $\lim b_n = \ell$.

Απόδειξη: Από την $a_n \leq b_n \leq c_n$ συμπεραίνουμε ότι $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$. Η $c_n - a_n$ είναι συγκλίνουσα με όριο το μηδέν. Άρα και η $b_n - a_n$ είναι συγκλίνουσα με όριο το μηδέν. Συνεπώς η b_n είναι συγκλίνουσα ως άθροισμα συγκλινουσών ($b_n = (b_n - a_n) + a_n$) και $\lim b_n = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = 0 + \ell = \ell$. □

Πρόταση 6.34 (Οριακό κριτήριο λόγου) *Αν για μια ακολουθία a_n με μη μηδενικούς όρους ισχύει $\lim |a_{n+1}/a_n| < 1$, τότε $\lim a_n = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim |a_{n+1}/a_n| = \ell \in (0, 1)$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης για την ποσότητα $(1 - \ell)/2 > 0$. Τότε θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\big||a_{n+1}/a_n| - \ell\big| < (1 - \ell)/2$. Αλλά τότε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell < \frac{1 - \ell}{2}$$

από όπου συνεπάγεται ότι

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \frac{1 - \ell}{2} = \frac{1 + \ell}{2} < 1.$$

Δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε ότι $|a_{n+1}/a_n| < (1 + \ell)/2 < 1$. Αυτό και η Πρόταση 6.15 συνεπάγονται ότι $a_n \to 0$. □

6.5 Κριτήρια σύγκλισης

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο αφορά τις ακολουθίες που είναι μονότονες και φραγμένες:

Πρόταση 6.35 *Αν η ακολουθία a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα και μάλιστα $a_n \to \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Ομοίως, αν μια ακολουθία b_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε είναι και συγκλίνουσα, και μάλιστα $b_n \to \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$.*

Απόδειξη: (Για τις ποσότητες $\sup a_n$ και $\inf a_n$ δείτε τον Ορισμό 5.4.) Ας υποθέσουμε ότι η a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Θέτουμε $s = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to s$. Αφού το s είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα της a_n, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα της a_n. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $s - \varepsilon < a_{n_0}$. Επειδή η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $a_{n_0} \leq a_n$, οπότε $s - \varepsilon < a_n$. Αλλά φανερά $a_n \leq s < s + \varepsilon$, αφού το s είναι το άνω πέρας των όρων της. Έτσι καταλήξαμε στο ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$s - \varepsilon < a_n < s + \varepsilon,$$

δηλαδή $|a_n - s| < \varepsilon$. Άρα $a_n \to s$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η b_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Εργαζόμαστε ομοίως: θέτουμε $i = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Αφού το i είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα της a_n, για κάθε $\varepsilon > 0$ το $i + \varepsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα της $a - n$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $b_{n_0} < i + \varepsilon$. Επειδή η b_n είναι φθίνουσα, για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $b_n \leq b_{n_0}$, οπότε $b_n < i + \varepsilon$. Αλλά φανερά $i - \varepsilon < i \leq b_n$. Έτσι καταλήξαμε στο ότι για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$i - \varepsilon < b_n < i + \varepsilon,$$

δηλαδή $|b_n - i| < \varepsilon$. Άρα $b_n \to i$. □

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές της παραπάνω πρότασης είναι το ακόλουθο:

Πόρισμα 6.36 *Η ακολουθία*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση από το γεγονός ότι η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (Παραδείγματα 4.6 και 5.9). □

Το όριο της παραπάνω ακολουθίας *δεν είναι* 1, διότι η ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\lim x_n = \sup x_n \geq x_1 = 2.$$

Το όριο αυτό έχει *εξέχουσα* σημασία για τα Μαθηματικά (μαζί με τους αριθμούς 0, 1, π και τη μιγαδική μονάδα i). Ονομάζεται αριθμός του Euler και συμβολίζεται με e. Ο αριθμός αυτός είναι περίπου

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,47093\,69995\ldots$$

Ο αριθμός e (όπως και ο π) είναι άρρητος και υπερβατικός, δηλαδή δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές (ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αλλά δεν είναι υπερβατικός αφού είναι ρίζα του πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές $x^2 - 2$). Η απόδειξη της υπερβατικότητας του e δεν είναι στους σκοπούς του παρόντος (δείτε στο [16]). Το ότι είναι όμως άρρητος θα το αποδειξουμε στο Παράρτημα Γ′.

Θεώρημα 6.37 (Bolzano-Weierstraß) *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη: Κάθε ακολουθία έχει μια μονότονη υπακολουθία σύμφωνα με την Πρόταση 4.3, και επειδή η ακολουθία είναι φραγμένη, είναι φραγμένη και αυτή η μονότονη υπακολουθία της. Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα συγκλίνει. ☐

Όταν μια ακολουθία a_n συγκλίνει σε έναν αριθμό ℓ τότε μετά από κάποιο δείκτη οι όροι της είναι «κοντά» στον αριθμό ℓ. Συνεπώς είναι και μεταξύ τους «κοντά». Αυτή η τελευταία ιδιότητα ονομάζεται ιδιότητα Cauchy.

Ορισμός 6.38 (Ακολουθία Cauchy) Μια ακολουθία a_n ονομάζεται *ακολουθία Cauchy* ή *βασική ακολουθία* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα ακόμα κριτήριο σύγκλισης.

Θεώρημα 6.39 *Μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι $a_n \to \ell$ και $\varepsilon > 0$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγλισης όχι για το ε αλλά για το $\varepsilon/2$. Έτσι, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$. Άρα, αν $n, m \geq n_0$ τότε ισχύει και η $|a_n - \ell| < \varepsilon/2$ και η $|a_m - \ell| < \varepsilon/2$. Συνεπώς

$$|a_n - a_m| = \big|(a_n - \ell) - (a_m - \ell)\big| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα τώρα, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία a_n είναι ακολουθία Cauchy. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6.37, οπότε αποδεικνύουμε πρώτα ότι η a_n είναι φραγμένη: εφαρμόζουμε τον ορισμό της ιδιότητας Cauchy για $\varepsilon = 1 > 0$. Έτσι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε n, $m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < 1$. Άρα αυτό ισχύει και για $m = n_0$. Συνεπώς

$$|a_n| - |a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1,$$

και άρα $|a_n| \leq 1 + |a_{n_0}|$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η a_n είναι φραγμένη.

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß λοιπόν, η a_n έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω ότι αυτή είναι η a_{k_n} όπου k_n γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι $a_{k_n} \to \ell$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to \ell$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της ιδιότητας Cauchy για το $\varepsilon/2 > 0$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε n, $m \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Αλλά τότε, επειδή $k_m \geq m \geq n_0$ (από την Άσκηση 4.2.2.), ισχύει

$$|a_n - a_{k_m}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n, m \geq n_0. \tag{6.9}$$

Τώρα εφαρμόζουμε τον ορισμό σύγκλισης της a_{k_n} στο ℓ πάλι για το $\varepsilon/2$. Άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{για κάθε } m \geq n_1 \text{ να ισχύει } |a_{k_m} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.10}$$

Έτσι, αν $n \geq n_0$ και $m = \max\{n_0, n_1\}$ θα ισχύει και η (6.9) και η (6.10). Άρα

$$\begin{aligned} |a_n - \ell| &= \left|(a_n - a_{k_m}) + (a_{k_m} - \ell)\right| \\ &\leq \left|a_n - a_{k_m}\right| + \left|a_{k_m} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Ένα άλλο κριτήριο που συχνά είναι χρήσιμη η άρνησή του είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 6.40 *Μια ακολουθία a_n συγκλίνει στο ℓ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει και αυτή στο ℓ.*

Απόδειξη: Το ευθύ έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 6.22. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο, αφού η ίδια η a_n είναι υπακολουθία του εαυτού της. □

Η άρνηση της παραπάνω πρότασης μας δίνει ένα κριτήριο *μη σύγκλισης*: Αν μια ακολουθία έχει δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικούς αριθμούς, τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει. Για παράδειγμα, η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει διότι η υπακολουθία της $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ συγκλίνει στο 1, ενώ η υπακολουθία της $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$ συγκλίνει στο -1. Ομοίως η ακολουθία $x_n = \sin(7n\pi/8)$ δεν συγκλίνει. Η υπακολουθία της $x_{16n} = \sin(7(2n\pi)) = 0$ συγκλίνει στο μηδέν. Ενώ η υπακολουθία

$$x_{16n+4} = \sin\left(14n\pi + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(14n\pi + 3\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

συγκλίνει στο -1.

6.6 Ακολουθίες με όριο το $+\infty$ ή $-\infty$

Ορισμός 6.41 Για μια ακολουθία a_n λέμε ότι *αποκλίνει στο* $+\infty$ ή ότι *τείνει στο* $+\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε

$n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > M$. Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ή $\lim a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$.

Συχνά αντί για $+\infty$ γράφουμε απλά ∞.

Ορισμός 6.42 Για μια ακολουθία a_n λέμε ότι *αποκλίνει στο* $-\infty$ ή ότι *τείνει στο* $-\infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n < -M$. Γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ή $\lim a_n = -\infty$ ή $a_n \to -\infty$.

Παρατήρηση 6.43 Πολλές φορές λέγεται καταχρηστικά ότι η ακολουθία «συγκλίνει στο $+\infty$» αντί «αποκλίνει στο $+\infty$». Ομοίως λέγεται καταχρηστικά ότι η ακολουθία «συγκλίνει στο $-\infty$» αντί «αποκλίνει στο $-\infty$».

Παράδειγμα 6.44 Η ακολουθία $a_n = n^2$ αποκλίνει στο $+\infty$, διότι αν μας δοθεί ένα $M > 0$ θα θέλουμε να ισχύει $n^2 > M$ ισοδύναμα $n > \sqrt{M}$. Οπότε αν θέσουμε $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ θα ισχύει $n \geq n_0 = [\sqrt{M}] + 1 > \sqrt{M}$ οπότε $n^2 > M$.

Ιδιότητα 6.45 *$a_n \to +\infty$ αν, και μόνο αν, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $a_n > 0$ και $1/a_n \to 0$.*

Ομοίως, $a_n \to -\infty$ αν, και μόνο αν, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $a_n < 0$ και $1/a_n \to 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι $\varepsilon > 0$ και $a_n \to +\infty$. Αν εφαρμόσουμε τον ορισμό για $M = 1/\varepsilon > 0$ τότε θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n > 1/\varepsilon > 0$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $a_n > 0$ και ότι $|1/a_n| = 1/a_n < \varepsilon$, δηλαδή $1/a_n \to 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $a_n > 0$ και $1/a_n \to 0$. Έστω ότι $M > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = 1/M > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης $1/a_n \to 0$: θα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_2$ να ισχύει $|1/a_n| < \varepsilon = 1/M$, οπότε ισοδύναμα $|a_n| > M$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ οπότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n = |a_n| > M$, δηλαδή $a_n \to +\infty$.

Για την περίπτωση $a_n \to -\infty$ εργαζόμαστε ανάλογα. □

Ιδιότητα 6.46 (α) *Αν $a_n \geq b_n$ και $\lim b_n = +\infty$ τότε $\lim a_n = +\infty$.*

(β) *Αν $a_n \leq b_n$ και $\lim b_n = -\infty$ τότε $\lim a_n = -\infty$.*

Απόδειξη: Αφού $\lim b_n = +\infty$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $b_n > 0$ (Ιδιότητα 6.45) άρα και $a_n > 0$. Αλλά τώρα, $0 < 1/a_n < 1/b_n \to 0$. Συνεπώς, ισχύει $0 < 1/a_n \to 0$ (Ιδιότητα 6.13), και άρα $a_n \to +\infty$.

Εργαζόμαστε ομοίως για το (β). □

6.7 Η εκθετική συνάρτηση

Σε αυτή την ενότητα θα θεμελιώσουμε την εκθετική συνάρτηση e^x με $x \in \mathbb{R}$, και θα αποδείξουμε βασικές ιδιότητες.

Θεώρημα 6.47 *Η ακολουθία*

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και για κάθε $n > -x$ (άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν $x > -1$). Επιπλέον είναι και φραγμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια η x_n είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

την οποία ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση.

Απόδειξη: Αν $n > -x$ τότε οι ποσότητες $1 + x/n$ και $1 + x/(n+1)$ είναι θετικές (αν $x \geq 0$ είναι προφανές και αν $x < 0$ τότε $x/(n+1) > x/n > -1$). Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(1 + x/n)^n}{(1 + x/(n+1))^n} \leq 1 + \frac{x}{n+1}.$$

Αλλά μεταφέροντας τον αριθμητή του αριστερού κλάσματος στον παρονομαστή, και εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli έχουμε,

$$\frac{(1 + x/n)^n}{(1 + x/(n+1))^n} = \frac{1}{\left(\frac{n^2+n+nx}{n^2+n+nx+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι μικρότερη της ζητούμενης $1 + x/(n+1)$ αν και μόνο αν

$$1 \leq 1 + \frac{x}{n+1} - \frac{nx}{(n+1)(n+x)} - \frac{nx^2}{(n+1)^2(n+x)}.$$

Απαλείφοντας τη μονάδα και παραγοντοποιώντας στα δεξιά, η τελευταία είναι ισοδύναμη με την

$$0 \leq \frac{x^2}{(n+1)^2} \frac{1}{n+x},$$

η οποία είναι αληθής αφού $n > -x$. Η προηγούμενη ανισότητα είναι γνήσια εκτός αν $x = 0$ άρα η x_n είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $n > -x$.

Για το φράγμα τώρα, θέτουμε $k_0 = [|x|] + 1 \in \mathbb{N}$. Επειδή η x_n είναι αύξουσα και η $(1 + 1/n)^n$ είναι αύξουσα με όριο το e (Πόρισμα 6.36) θα έχουμε:

$$|x_n| \le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{k_0}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{k_0}{k_0 n}\right)^{k_0 n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{k_0} \le e^{k_0},$$

δηλαδή η x_n είναι φραγμένη. □

Στη συνέχεια θα «ταυτοποιήσουμε» τη συνάρτηση $\exp(x)$ (θα προσπαθήσουμε να την κατανοήσουμε). Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.48 *Αν η ακολουθία b_n έχει την ιδιότητα $\lim nb_n = 0$ τότε $\lim(1+b_n)^n = 1$. Αν επιπλέον $\lim a_n = 0$ και το όριο $\lim(1+a_n)^n$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε $\lim(1+a_n+b_n)^n = \lim(1+a_n)^n$.*

Απόδειξη: Από την ταυτότητα διαφοράς δυνάμεων και την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|(1+b_n)^n - 1\right| &= |b_n|\,|(1+b_n)^{n-1} + (1+b_n)^{n-2} + \ldots + (1+b_n) + 1| \\ &\le |b_n|\left((1+|b_n|)^{n-1} + (1+|b_n|)^{n-2} + \ldots + (1+|b_n|) + 1\right) \\ &\le |b_n|\, n(1+|b_n|)^{n-1}.\end{aligned}$$

Αλλά, αφού $nb_n \to 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|nb_n| < 1$ δηλαδή $|b_n| < 1/n$. Συνεχίζοντας τις προηγούμενες ανισότητες για $n \ge n_0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\left|(1+b_n)^n - 1\right| \le |nb_n|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \to 0\cdot e = 0.$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό,

$$|(1+a_n+b_n)^n - (1+a_n)^n| = (1+a_n)^n\left|\left(1+\frac{b_n}{1+a_n}\right)^n - 1\right|.$$

Αλλά η ακολουθία $c_n = b_n/(1+a_n)$ έχει την ιδιότητα $nc_n \to 0$. Έτσι από το προηγούμενο σκέλος της απόδειξης

$$\lim\left|\left(1+\frac{b_n}{1+a_n}\right)^n - 1\right| = 0.$$

Οπότε $\lim((1+a_n+b_n)^n - (1+a_n)^n) = 0$, και επειδή το όριο $\lim(1+a_n)^n$ υπάρχει από την υπόθεση, υπάρχει και το $\lim(1+a_n+b_n)^n$ και ισχύει $\lim(1+a_n+b_n)^n = \lim(1+a_n)^n$. □

Πρόταση 6.49 *Η συνάρτηση $\exp$ έχει τις ιδιότητες:*

(i) $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$ *για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.*

(ii) $\exp(x) > 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(0) = 1$, *και* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(iii) $\exp(k) = e^k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$, *όπου* e *ο αριθμός Euler.*

(iv) $(\exp(1/k))^k = e$.

Απόδειξη: Για το (i) έχουμε

$$\begin{aligned}\exp(x)\exp(y) &= \lim\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\right)\\ &= \lim\left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Αλλά η $(x+y)/n$ είναι μηδενική, το όριο $(1+(x+y)/n)^n$ υπάρχει, και η $b_n = xy/n^2$ έχει την ιδιότητα $nb_n \to 0$. Συνεπώς, από το προηγούμενο λήμμα το παραπάνω όριο ισούται με το

$$\lim\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n = \exp(x+y).$$

Για το (ii), αν $x \geq 0$ τότε

$$\exp(x) = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim\left(1+n\frac{x}{n}\right) = 1+x \geq 1.$$

Επίσης

$$\exp(-x)\exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = \lim\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1.$$

Συνεπώς $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ και αν $x < 0$ τότε $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

Για το (iii), επειδή $\exp(-k) = 1/\exp(k)$ αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $k \in \mathbb{N}$. Αλλά

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e \cdot e = e^2.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο k.

Για το (iv) με επαγωγή ισχύει

$$\begin{aligned}\exp(1/k)^k &= \exp\left(\frac{1}{k}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{k}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{k}\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{1}{k}\right) = \exp(1)\\ &= e.\end{aligned}$$

□

Ορισμός 6.50 Για κάθε $r \in \mathbb{Q}$ με $r = m/n$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την ποσότητα e^r να είναι η $(e^{1/n})^m$.

Είναι λοιπόν φυσιολογικό να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.51 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ποσότητα e^x να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\exp(x) = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.49 η e^x έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες των δυνάμεων, όχι μόνο για ακέραιους εκθέτες αλλά για πραγματικούς εκθέτες.

Επίσης σύμφωνα με τα προηγούμενα εύκολα βλέπουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες:

Πρόταση 6.52 *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$e^x \geq 1 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ για κάθε } x < 1.$$

Απόδειξη: Η $e^x \geq 1 + x$ είναι άμεση από τον ορισμό της e^x και την ανισότητα Bernoulli. Άρα $e^{-x} \geq 1 + (-x)$ συνεπώς, αν $x < 1$ παίρνουμε ότι $e^x \geq 1/(1-x)$. □

6.8 Βασικά όρια

Πρόταση 6.53 *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < 1$ ισχύει $\lambda^n \to 0$.*

Απόδειξη: Για $\lambda = 0$ είναι προφανές. Για $0 < \lambda < 1$ είναι η Εφαρμογή 6.14. Για $-1 < \lambda < 0$ ισχύει

$$|\lambda^n| = |\lambda|^n \to 0,$$

αφού $0 < |\lambda| < 1$. Άρα $\lambda^n \to 0$. □

Πρόταση 6.54 *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 1$ ισχύει $\lambda^n \to +\infty$, ενώ για $\lambda \leq -1$ η λ^n δεν συγκλίνει.*

Απόδειξη: Αν $\lambda > 1$ τότε $0 < 1/\lambda < 1$ συνεπώς $(1/\lambda)^n \to 0$. Αλλά $(1/\lambda)^n = 1/\lambda^n$ άρα $\lambda^n \to +\infty$ από την Ιδιότητα 6.45.

Αν $\lambda = -1$ η λ^n δεν συγκλίνει, αφού $\lambda^{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ ενώ $\lambda^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1) = -1 \to -1 \neq 1$.

Αν $\lambda < -1$ η $\lambda^{2n} = (\lambda^2)^n \to +\infty$, αφού $\lambda^2 > 1$ ενώ $\lambda^{2n+1} = \lambda(\lambda^{2n}) \to -\infty$, αφού $\lambda < 0$ και $\lambda^{2n} \to +\infty$. □

Πρόταση 6.55 *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < 1$ ισχύει $n\lambda^n \to 0$. Επιπλέον, για κάθε $p > 0$ ισχύει $n^p\lambda^n \to 0$.*

Απόδειξη: $1/\sqrt{|\lambda|} > 1$ άρα υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $\sqrt{|\lambda|}^{-1} = 1 + \theta$. Έτσι, με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli έχουμε

$$n\lambda^n = \left(\frac{\sqrt{n}}{(1+\theta)^n}\right)^2 \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{1+n\theta}\right)^2 \to 0.$$

Τέλος, για $p > 0$ ισχύει

$$|n^p \lambda^n| = \left(n(|\lambda|^{1/p})^n\right)^p \to 0^p = 0,$$

αφού $|\lambda|^{1/p} < 1$. □

Πόρισμα 6.56 *Για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ και $|\lambda| < 1$ ισχύει* $\lim p(n)\lambda^n \to 0$. □

Πρόταση 6.57 *Για κάθε $a > 0$ ισχύει $\sqrt[n]{a} \to 1$.*

Απόδειξη: Αν $a \geq 1$ τότε $\sqrt[n]{a} \geq 1$. Θέτουμε $v_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$, οπότε $a = (1 + v_n)^n$. Από την ανισότητα Bernoulli

$$a = (1 + v_n)^n \geq 1 + nv_n$$

και λύνοντας ως προς v_n:

$$0 \leq v_n \leq \frac{a-1}{n}. \tag{6.11}$$

Η τελευταία ακολουθία είναι μηδενική, οπότε από την Πρόταση 6.33, $\lim v_n = 0$. Έτσι

$$\sqrt[n]{a} = 1 + v_n \to 1 + 0 = 1.$$ □

Πρόταση 6.58 $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Απόδειξη: Η ανισότητα (6.11) ισχύει για κάθε $a > 1$ άρα και για $a = \sqrt{n}$. Συνεπώς για $v_n = \sqrt[n]{\sqrt{n}} - 1$ ισχύει

$$0 \leq v_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Άρα (από την Πρόταση 6.33) $\sqrt[n]{\sqrt{n}} \to 1$ συνεπώς (από την Ιδιότητα 6.30) $\sqrt[n]{n} = (\sqrt[n]{\sqrt{n}})^2 \to 1$. □

Πρόταση 6.59 *Αν $a_n \to \ell > 0$, τότε $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.*

Απόδειξη: Από τον ορισμό της σύγκλισης (για $\varepsilon = \ell/2 > 0$), υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε

$$|a_n - \ell| < \frac{\ell}{2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{\ell}{2} < a_n < \frac{3\ell}{2},$$

και άρα,

$$\sqrt[n]{\ell/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3\ell/2}.$$

Από την Πρόταση 6.57 οι ακολουθίες $\sqrt[n]{\ell/2}$ και $\sqrt[n]{3\ell/2}$ συγκλίνουν στο 1, και άρα από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συγκλίνει στο 1 και η $\sqrt[n]{a_n}$. □

Πρόταση 6.60 *Αν* $a_n \to 0$ *τότε* $\lim_{n\to\infty} \cos a_n = 1$.

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες, έχουμε

$$|\cos a_n - 1| = |\cos a_n - \cos 0| = \left| -2\sin\left(\frac{a_n+0}{2}\right)\sin\left(\frac{a_n-0}{2}\right)\right|$$
$$= 2\sin^2(a_n/2) \leq \frac{1}{2}a_n^2.$$

Παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.61 *Αν* $a_n \to 0$ *και* $a_n \neq 0$ *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$$

που ισχύει για κάθε $0 < \theta < \pi/2$. Πράγματι, θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο (ακτίνας 1) κέντρου O με τον άξονα των εφαπτομένων κάθετο στην x-άξονα στο σημείο $A(1,0)$ Φέρνουμε την OB ώστε η γωνία AOB να είναι ίση με $\theta \in (0,\pi/2)$ και έστω C η τομή της επέκτασης της OB με τον άξονα των εφαπτομένων. Φανερά το τρίγωνο OBA περιέχεται στον κυκλικό τομέα OBA και αυτός περιέχεται στο τρίγωνο OAC. Έτσι, συγκρίνονται τα εμβαδά τους:

$$|OAB| = \frac{1}{2}\sin\theta \leq \frac{\theta}{2\pi}\pi \leq |OAC| = \frac{1}{2}\tan\theta,$$

όπου το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι το ποσοστό της γωνίας θ ως προς τον πλήρη κύκλο γωνίας 2π του εμβαδού του κύκλου π. Άρα

$$\sin\theta \leq \theta \leq \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

απ' όπου προκύπτει η παραπάνω ανισότητα.

Η a_n τείνει στο 0 οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < a_n < \pi/2$ για κάθε $n \geq n_0$ άρα για αυτά τα n ισχύει

$$\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1.$$

Παίρνοντας τώρα όρια προκύπτει η ζητούμενη με τη βοήθεια της Πρότασης 6.60.

□

Πρόταση 6.62 *Για κάθε ακολουθία* $a_n \neq 0$ *με* $a_n \to 0$ *ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.52, για κάθε $-1 < x < 1$ ισχύει

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x}. \tag{6.12}$$

Χρησιμοποιώντας την a_n στη θέση του x (αφού μετά από κάποιο δείκτη θα βρίσκεται στο διάστημα $(-1,1)$, λόγω του ότι $a_n \to 0$) προκύπτει

$$1 \le \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \le \frac{1}{1-a_n}$$

για τους θετικούς όρους της a_n, και

$$1 \ge \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \ge \frac{1}{1-a_n}$$

για τους αρνητικούς όρους της a_n. Παίρνοντας όρια σε κάθε περίπτωση, προκύπτει το ζητούμενο. □

Για τις επόμενες προτάσεις λείπει ο αυστηρός ορισμός του λογαρίθμου. Εν τούτοις θα δεχθούμε προσωρινά ως «γνωστή» τη συνάρτηση του λογαρίθμου με τις ιδιότητές της όπως διδάσκεται στο Λύκειο, μέχρι το Κεφάλαιο 9 στο οποίο θα οριστεί αυστηρά.

Πρόταση 6.63 *Για κάθε $a > 1$ και για κάθε p, $q > 0$ οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:*

$$\frac{\log n}{n}, \qquad \frac{\log n}{n^p}, \qquad \frac{\log^q n}{n^p}, \qquad \frac{\log_a n}{n}, \qquad \frac{\log_a n}{n^p}, \qquad \frac{\log_a^q n}{n^p}.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $\log x \le x - 1$ που ισχύει για κάθε $x \ge 1$ και προκύπτει άμεσα από την $1 + x \le e^x$. Έχουμε:

$$0 \le \frac{\log n}{n} = \frac{2 \log n^{1/2}}{n} \le \frac{2(\sqrt{n} - 1)}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \to 0,$$

$$0 \le \frac{\log n}{n^p} = \frac{(2/p)\log(n^{p/2})}{n^p} \le \frac{2}{p}\frac{n^{p/2} - 1}{n^p} = \frac{2}{p}\frac{1}{n^{p/2}} - \frac{2}{p}\frac{1}{n^p} \to 0,$$

και

$$0 \le \frac{\log^q n}{n^p} = \left(\frac{\log n}{n^{p/q}}\right)^q \to 0.$$

Τα κλάσματα με τους λογαρίθμους βάσης $a > 1$ προκύπτουν από τα προηγούμενα και τον τύπο $\log_a n = (\log n)/(\log a)$. □

Πρόταση 6.64 *Αν $a > 1$, $a_n \to 0$ και $a_n > -1$ τότε $\log_a(1 + a_n) \to 0$.*

Απόδειξη: Από τη σχέση $\log_a x = (\log x)/(\log a)$ αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $a = e$. Αλλά αυτό προκύπτει αμέσως από τις ανισότητες $1 - \frac{1}{x} \le \log x \le x - 1$ που προκύπτει λογαριθμίζοντας τη σχέση (6.12) (δείτε και Πρόταση 9.25 μετά τον αυστηρό ορισμό του λογαρίθμου). □

Πρόταση 6.65 *Αν $a_n \to 0$, $a_n \neq 0$ και $a_n > -1$ τότε*

$$\frac{\log(1+a_n)}{a_n} \to 1.$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$ προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{1}{1+a_n} \leq \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \leq 1$$

για τους θετικούς όρους της a_n, και

$$\frac{1}{1+a_n} \geq \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \geq 1$$

για τους αρνητικούς όρους της a_n. Παίρνοντας όρια προκύπτει το ζητούμενο.

□.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.8.1. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (Πρόταση 6.33) για να βρείτε το όριο των ακολουθιών

1. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.
2. $b_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.
3. $c_n = \sqrt[n]{\beta_k n^k + \beta_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0}$, όπου $\beta_i > 0$ για $i = 1, 2, \ldots, k$.
4. $d_n = \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}}$.
   (Παρατηρήστε ότι $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) \geq 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.)

Άσκηση 6.8.2. Αν το $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x (δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν είναι μεγαλύτερος του x), αποδείξτε χρησιμοποιώντας ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{n} = x.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ποσότητα $[nx]/n$ είναι ρητός αριθμός. Συμπεράνετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ακολουθία *ρητών* που συγκλίνει σε αυτόν.

Άσκηση 6.8.3. Αν $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\sin x \neq -1/3$ υπολογίστε το όριο της

$$a_n = \frac{x}{1 + (3\sin x)^{3n}},$$

διακρίνοντας περιπτώσεις για το αν η ποσότητα $3 \sin x$ είναι απολύτως μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από το 1.

Άσκηση 6.8.4. Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)^n. \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n. \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\log n}.$$

Άσκηση 6.8.5. Χρησιμοποιήστε την Πρόταση 6.59 για να υπολογίσετε το όριο της ακολουθίας a_n με

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{\lambda^n+2}{\lambda^{2n}+e^n}}$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda > 0$. (Υπόδειξη: Διακρίνετε τις περιπτώσεις $0 < \lambda < 1$, $1 \le \lambda \le \sqrt{e}$ και $\lambda > \sqrt{e}$.

Άσκηση 6.8.6. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\frac{\sqrt[3]{2n^6+n+1}}{3n^2+1} \qquad \frac{2n^2(3n^3-5n+6)}{(4n^4-1)(2n+3)}$$

$$\frac{\sqrt{5n^5+1}}{\sqrt[4]{3n^{10}+n+1}} \qquad \sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}$$

$$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n} \qquad \sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n}$$

$$\frac{n^2 3^n-2n9^{n+1}+2}{3n2^{n-1}+5n^2 3^{2n}+4^n} \qquad \frac{a^n+5b^n}{2a^n+7b^n}, \quad a,b>0$$

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+1} \qquad \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$$

$$\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n(1+2+3+\ldots+n)}$$

$$\frac{1}{2^0+2^{n+1}}+\frac{1}{2+2^{n+1}}+\frac{1}{2^2+2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^n+2^{n+1}}$$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\dots\sqrt{3}}}}}}_{n-\text{ριζικά}}$$

$$\frac{(2n-1)!}{(3n+1)!} \qquad n!\sin\frac{\lambda}{1}\sin\frac{\lambda}{2}\cdots\sin\frac{\lambda}{n}, \quad \lambda\in(0,1)$$

$$\sqrt[n+3]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n} \qquad \left(\frac{3n^2+4n}{4n^2+1}\right)^n$$

$$\left(\frac{2n-1}{3n+7}\right)^n \qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+2}$$

$$\sqrt[n]{1+\frac{1}{2n}} \qquad \sqrt[n+1]{n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{n^2+2n}{2n^2+1}} \qquad \sqrt[3n]{\frac{n^2+7n+18}{8n+4}}$$

Άσκηση 6.8.7. Αν $z_n \to 0$ βρείτε τα όρια των ακολουθιών:

$$\frac{\sqrt[3]{1+z_n}-1}{z_n} \qquad \frac{(\lambda+z_n)^3-\lambda^3}{z_n}, \quad \lambda>0.$$

$$\frac{\sqrt{z_n+1}-1}{z_n}.$$

Άσκηση 6.8.8. Αποδείξτε ότι αν $a_n, b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, $a_n/b_n \to \ell > 0$ τότε $\sqrt[n]{b_n} \to 1$.

Άσκηση 6.8.9. Αποδείξτε ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$, υπάρχουν ακολουθίες s_n, $i_n \in A$ με την s_n αύξουσα και την i_n φθίνουσα ώστε $s_n \to \sup A$ και $i_i \to \inf A$. Αν επιπλέον τα $\sup A$ και $\inf A$ είναι σημεία συσσώρευσης του A, τότε μπορούμε να επιλέξουμε την s_n να είναι γνήσια αύξουσα και την i_n γνήσια φθίνουσα.

Άσκηση 6.8.10. Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά θέτοντας

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad \text{και} \quad x_1 = a,$$

συγκλίνει σε αριθμό $x > 0$ με την ιδιότητα $x^2 = a$. (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι για $a \geq 1$ η x_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.)

Οι επόμενες δύο ασκήσεις δίνουν ένα αποτελεσματικό τρόπο υπολογισμού της n-στης ρίζας θετικού αριθμού, ορίζοντας μια ακολουθία που συγκλίνει ταχύτατα.

Άσκηση 6.8.11. Χρησιμοποιήστε τη μονοτονία της $(1+x/n)^n$ για να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{(n-1)x+a}{n}\right)^n \geq x^{n-1}a.$$

(Υπόδειξη: Διαιρέστε με x^n και τα δύο σκέλη της ζητούμενης για να αναχθείτε σε μια ανισότητα της μορφής $(1+(b-1)/n)^n \geq b$.)

Άσκηση 6.8.12. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη ανισότητα για να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{(k-1)x+\frac{a}{x^{k-1}}}{k}\right)^k \geq a.$$

Με τη βοήθεια αυτού αποδείξετε ότι η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά με

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \quad \text{και} \quad x_1 = a \geq 1,$$

ικανοποιεί την ανισότητα $a/x_n^k \leq 1$. Στη συνέχεια δείξτε ότι συγκλίνει (είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη), και το όριό της $x > 0$ έχει την ιδιότητα $x^k = a$.

Για $0 < a < 1$ ορίζουμε την k-ρίζα του a εργαζόμενοι με τον $1/a > 1$.

Οι επόμενες δύο ασκήσεις παρέχουν ένα εναλλακτικό τρόπο για να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $x_n = (1+x/n)^n$ είναι αύξουσα:

Άσκηση 6.8.13. Αποδείξτε ότι η $x_n = (1+x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα για $x > 0$ αποδεικνύοντας ότι $x_{n+1}/x_n > 1$ ως εξής: γράψτε πρώτα

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)\left(\frac{\frac{n+1+x}{n+1}}{\frac{n+x}{n}}\right)^n,$$

μεταφέρετε όλους τους όρους στον παρονομαστή (ώστε στον αριθμητή να μείνει μονάδα) και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli.

Άσκηση 6.8.14. Αποδείξτε ότι η $x_n = (1+x/n)^n$ είναι γνήσια αύξουσα για $x < 0$ και $n > -x$ ως εξής: θεωρήστε την ακολουθία

$$y_n = \left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^n,$$

για κάθε $n > |x| = -x$, και γράφοντας

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{|x|}{n-|x|}\right)^n}{\left(1+\frac{|x|}{n+1-|x|}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{|x|}{n+1-|x|}}\left(\frac{\frac{n}{n-|x|}}{\frac{n+1}{n+1-|x|}}\right)^n$$

μεταφέρετε όλους τους όρους στον παρονομαστή (ο αριθμητής να μείνει μονάδα) και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli για να δείξετε ότι $y_n/y_{n+1} \geq 1$, δηλαδή η y_n είναι φθίνουσα. Στη συνέχεια παρατηρήστε ότι $y_n = 1/x_n$.

Η ανισότητα Bernoulli ισχύει και για μη ακέραιους εκθέτες. Η επόμενες δύο ασκήσεις μας καθοδηγούν στο να την αποδείξουμε.

Άσκηση 6.8.15. Για κάθε $t > -1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left(1+\frac{1}{n}\frac{t}{1+t}\right)^n \leq 1+t.$$

Η ανισότητα είναι γνήσια, εκτός αν $t = 0$.

Άσκηση 6.8.16. Για κάθε $\theta > -1$ και για κάθε $p \in \mathbb{R}$ με $p \geq 1$ ισχύει

$$(1+\theta)^p \geq 1 + p\theta.$$

(Υψώστε την ανισότητα της Άσκησης 6.8.15. εις την m/n και εφαρμόστε την ανισότητα Bernoulli για να αποδείξετε τη ζητούμενη με $p = 1 + m/n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$. Μετά χρησιμοποιήστε τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης για να περάσετε σε πραγματικούς εκθέτες.)

Άσκηση 6.8.17. Αποδείξτε με διαφορετικό τρόπο ότι η $x_n = (1 + x/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα αν $x \neq 0$ και $n > -x$ ως εξής: πολλαπλασιάστε την ανισότητα της Άσκησης 6.8.15. με $(1+t)^n$ (για $t > -1$) και στη συνέχεια αντικαταστήστε το t με $x/(n+1)$.

Άσκηση 6.8.18. Αποδείξτε με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 6.47 ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > -a$ και $x \neq 0$. Για να το καταφέρετε εύκολα, για $x < y$ ξεκινήστε με την παράσταση $((1 + a/x)/(1 + a/y))^{x/(y-x)}$, μεταφέρετε τον αριθμητή στον παρονομαστή και προετοιμάστε την εφαρμογή της ανισότητας Bernoulli για πραγματικούς αριθμούς όπως στην Άσκηση 6.8.16. Μετά την εφαρμογή της Bernoulli η ποσότητα που θα προκύψει θα είναι μικρότερη της $1 + a/y$ αν και μόνο αν

$$0 \leq \frac{a^2}{y^2}\frac{y-x}{x+a},$$

η οποία είναι αληθής αν $x > -a$, και δεν είναι γνήσια μόνο αν $a = 0$.

Κεφάλαιο 7

Συναρτήσεις

Το κεφάλαιο υπάρχει μόνο και μόνο για να συμπληρώσει ελάχιστες έννοιες που λείπουν από το σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου. Έτσι, η έννοια της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού της, του πεδίου τιμών της, του συνόλου τιμών της, η ιδιότητα 1-1, η μονοτονία συνάρτησης (αύξουσα, φθίνουσα, γνήσια αύξουσα, γνήσια φθίνουσα) και οι πράξεις μεταξύ συναρτήσεων συμπεριλαμβανομένης της σύνθεσης θεωρούνται γνωστές από το Λύκειο. Εδώ θα τροποποιήσουμε την έννοια της ισότητας δύο συναρτήσεων του σχολικού βιβλίου, θα προσθέσουμε την έννοια της φραγμένης συνάρτησης και την έννοια της ιδιότητας του «επί» ειδικά σε σχέση με την αντιστρεψιμότητα.

Ορισμός 7.1 Δυο συναρτήσεις $f : A \mapsto B$ και $g : C \mapsto D$ λέγονται ίσες αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A = C$, έχουν το ίδιο πεδίο τιμών, δηλαδή $B = D$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A = C$.

Η διαφορά με το σχολικό βιβλίο είναι η απαίτηση να ταυτίζονται τα πεδία τιμών, συνθήκη που λείπει από το σχολικό βιβλίο και είναι απαραίτητη. Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και $g : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ με $g(x) = x^2$ είναι ίσες, αλλά για εμάς *δεν* θα είναι ίσες γιατί έχουν διαφορετικά πεδία τιμών.

Ορισμός 7.2 Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται

- *άνω φραγμένη* αν υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in A$.
- *κάτω φραγμένη* αν υπάρχει αριθμός $m \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- *φραγμένη* αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη.

Πρόταση 7.3 *Η συνάρτηση $f : A \mapsto B$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν η $|f|$ είναι άνω φραγμένη.*

Απόδειξη: Αν η $|f|$ είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. Συνεπώς $-M \leq f(x) \leq M$ και η f είναι φραγμένη (πάνω από το M και κάτω από το $m = -M$).

Αντίστροφα, αν η f είναι φραγμένη, υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in A$. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $T = \max\{|m|, |M|\}$ τότε $T \geq |M| \geq M$ και $T \geq |m| \geq -m$ συνεπώς $-T \leq m$. Άρα

$$-T \leq m \leq f(x) \leq M \leq T,$$

δηλαδή $-T \leq f(x) \leq T$ για κάθε $x \in A$, άρα $|f(x)| \leq T$. □

Ορισμός 7.4 Μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ λέγεται «επί του B» ή απλούτερα «επί» όταν για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $f(a) = b$.

Δηλαδή η f είναι επί αν κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών της είναι τιμή της. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ δεν είναι επί γιατί το -1 είναι στο πεδίο τιμών της αλλά δεν είναι βεβαίως τιμή της f, αφού $x^2 \neq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ είναι 1-1 και επί τότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1} : B \mapsto A$ ως εξής: για κάθε $y \in B$, αφού η f είναι επί, υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = y$. Το x αυτό είναι μοναδικό, διότι η f είναι 1-1 (αν υπάρχει $z \in A$ ώστε $f(z) = y = f(x)$ από το 1-1 της f συμπεραίνουμε $z = x$). Ορίζουμε λοιπόν $f^{-1}(y) = x$.

Κεφάλαιο 8

Όρια συναρτήσεων

8.1 Όριο στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Το όριο μιας συνάρτησης $f : A \mapsto \mathbb{R}$ στο $+\infty$ ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ορίζεται το όριο των ακολουθιών. Εκεί το n κινείται προς το $+\infty$ και εδώ το x. Άρα το πεδίο ορισμού A της f πρέπει να επιτρέπει κάτι τέτοιο. Θα πρέπει δηλαδή το A να περιέχει, όχι απαραίτητα όλους, αλλά οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς όπως το $\mathbb{N}$ για τις ακολουθίες. Εξάλλου δεν έχει νόημα να μιλάμε για όριο καθώς το x τείνει στο $+\infty$ αν το πεδίο ορισμού δεν το επιτρέπει. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sqrt{1-x}$ η μεγαλύτερη επιτρεπόμενη τιμή του x είναι 1. Οπότε για αυτή τη συνάρτηση δεν έχει νόημα το όριο με το x να τείνει στο $+\infty$.

Ο αυστηρός ορισμός είναι πρακτικά ο ίδιος με το όριο ακολουθίας με μια μικρή προσθήκη που αφορά το παραπάνω πρόβλημα με το πεδίο ορισμού της f.

Ορισμός 8.1 Αν η συνάρτηση $f : A \mapsto \mathbb{R}$ έχει πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα αυτό να περιέχει οσοδήποτε μεγάλους αριθμούς, δηλαδή $A \cap (t, +\infty) \neq \emptyset$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι το όριο της f στο $+\infty$ ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$, και γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in A$ και $x > t$ να ισχύει

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ομοίως, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x < t$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ανάλογα ορίζουμε τις περιπτώσεις

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Για παράδειγμα, η τελευταία περίπτωση ισχύει όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x < t$ να ισχύει $f(x) < -M$. Δείτε τον αντίστοιχο ορισμό για ακολουθίες και γράψτε ως άσκηση τους ορισμούς για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Στην πράξη, όπως και στις ακολουθίες, ο έλεγχος για το αν ισχύει ο ορισμός για μια συγκεκριμένη συνάρτηση και ένα υπό εξέταση όριο, είναι να θεωρούμε δεδομένο το $\varepsilon > 0$ και να αναζητούμε το κατάλληλο t μετά το οποίο (ή πριν το οποίο για την περίπτωση $x \to -\infty$) ισχύει το συμπέρασμα του ορισμού.

Παράδειγμα 8.2 (Όριο μονονύμων) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Απόδειξη: Για κάθε $M > 1$ για κάθε $x \geq M$ ισχύει $x^n \geq M^n \geq M$ άρα από τον ορισμό $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Αν $n = 2k$ είναι άρτιος φυσικός ($k \geq 1$), για κάθε $M > 1$ αν $x \geq -M$ τότε $x^2 \geq M^2$ οπότε $x^n = (x^2)^k \geq M^{2k} \geq M$. Δηλαδή από τον ορισμό $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Τέλος, αν $n = 2k+1$ περιττός φυσικός αριθμός ($k = 0, 1, 2, \ldots$) και $\mathrm{M} > 1$, αν $x < -M$ τότε όπως και πριν $x^{2k} \geq M$, και αφού $x < -1$ θα ισχύει $x^n = x \cdot x^{2k} \leq xM < -M$. Δηλαδή από τον ορισμό $\lim_{x\to+\infty} x^n = -\infty$. □

Παράδειγμα 8.3 (Όριο πολυωνύμων) Για κάθε πολυώνυμο $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ βαθμού n (δηλαδή $a_n \neq 0$) ισχύει

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \mathrm{sign}(a_n) \lim_{x\to\pm\infty} x^n,$$

όπου $\mathrm{sign}(a_n)$ το πρόσημο του a_n, και

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{p(x)} = 0.$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι για κάθε x με $x \neq 0$

$$p(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

Όμως, από την τριγωνική ανισότητα, και για $|x| \geq 1$ ισχύει

$$\begin{aligned} \left|\frac{p(x)}{a_n x^n} - 1\right| &\leq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right| \\ &\leq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|x|} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| \frac{1}{|x|^2} + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|x|^n} \\ &\leq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|x|} + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| \frac{1}{|x|} + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|x|} \\ &\leq \alpha \frac{1}{|x|}, \end{aligned}$$

όπου

$$\alpha = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|.$$

Αν τώρα $|x| \geq 2/\alpha$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha/|x| \leq 1/2$. Συνεπώς για $|x| \geq \max\{1, 2/\alpha\}$ ισχύει

$$\frac{1}{2}a_n x^n \leq p(x) \leq \frac{3}{2}a_n x^n. \tag{8.1}$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(i) Αν $a_n > 0$ και $x \to +\infty$ τότε για κάθε $M > 0$ επιλέγουμε $x > \max\{1, 2/\alpha, \sqrt[n]{2M/a_n}\}$ οπότε από την αριστερή ανισότητα της (8.1) προκύπτει $p(x) \geq M$, άρα $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$.

(ii) Αν $a_n < 0$ και $x \to +\infty$ τότε για κάθε $M > 0$ επιλέγουμε $x > \max\{1, 2/\alpha, \sqrt[n]{2M/(-3a_n)}\}$ οπότε από τη δεξιά ανισότητα της (8.1) προκύπτει $p(x) \leq -M$, άρα $\lim_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$.

(iii) Αν $a_n > 0$ και $x \to -\infty$, και n άρτιος, για κάθε $M > 0$ επιλέγουμε $x < -\max\{1, 2/\alpha, \sqrt[n]{2M/a_n}\}$ οπότε από την αριστερή ανισότητα της (8.1) προκύπτει $p(x) \geq M$, άρα $\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$. Ενώ αν n περιττός, για $x < -\max\{1, 2/\alpha, \sqrt[n]{2M/3a_n}\}$ από τη δεξιά ανισότητα της (8.1) προκύπτει $p(x) \leq -M$, άρα $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$.

(iv) Αν $a_n < 0$ και $x \to -\infty$, ομοίως με πριν, και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος, από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} |p(x)| = +\infty$ οπότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε αν $x \geq t$ να ισχύει $|p(x)| > 1/\varepsilon$, ισοδύναμα $1/|p(x)| < \varepsilon$ άρα $\lim_{x\to+\infty} 1/p(x) = 0$. Ομοίως χειριζόμαστε και την περίπτωση $x \to -\infty$. □

Παράδειγμα 8.4 (Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση) Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.52 για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1+x$ άρα για κάθε $M \in \mathbb{R}$ αν $x > M$ θα ισχύει και $e^x > M$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Από αυτό, αν $x \to -\infty$ για $x < -1/\varepsilon$ συνεπάγεται $-x > 1/\varepsilon$ οπότε $e^{-x} > 1/\varepsilon$ ισοδύναμα $0 < e^x < \varepsilon$, δηλαδή $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Τέλος για τον λογάριθμο, για κάθε $M \in \mathbb{R}$ παίρνουμε $x > e^M$ οπότε $\log x > M$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 8.1.1. Γράψτε τους ορισμούς των ορίων $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

8.2 Όριο σε πραγματικό αριθμό

Το όριο μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 περιγράφει την «εξέλιξη» των τιμών της f (και αν οι τιμές $f(x)$ πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά ή όχι κάποια τιμή) όταν το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο x_0. Το x_0 μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$. Για να έχει νόημα αυτή η συζήτηση θα πρέπει βεβαίως η f να έχει στο πεδίο ορισμού της στοιχεία οσοδήποτε κοντά στο x_0. Για παράδειγμα, δεν έχει νόημα να προσπαθούμε να σκεφτούμε πώς εξελίσσονται οι τιμές της $\sqrt{x}$ καθώς το x πλησιάζει το -2, διότι το πεδίο ορισμού της $\sqrt{x}$, δηλαδή το $[0, +\infty)$, δεν περιέχει σημεία οσοδήποτε κοντά στο -2. Αυτή είναι η έννοια του σημείου συσσώρευσης ενός συνόλου:

Ορισμός 8.5 Ένα σημείο x_0 ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\big((x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\big) \cap A \neq \emptyset.$$

Το «για κάθε $\varepsilon > 0$» εξασφαλίζει ότι οσοδήποτε κοντά στο x_0 το A έχει στοιχεία διαφορετικά του x_0.

Το όριο το σκεφτόμαστε ως διαδικασία, ως εξέλιξη των τιμών της f προς κάποια τιμή (που θα την ονομάσουμε όριο *αν* μια τέτοια τιμή υπάρχει) και όχι ως «τελική τιμή» όταν το x γίνει ίσο με x_0, γιατί συχνά δεν επιτρέπεται το x να γίνει ίσο με το x_0. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = (\sin x)/x$ και εξετάσουμε την εξέλιξη των τιμών της καθώς το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά το 0, αυτό που εξετάζουμε *δεν* είναι κάποια τελική τιμή. Διότι βεβαίως δεν γίνεται για αυτή τη συνάρτηση να θέσουμε $x = 0$. Θα δούμε παρακάτω ότι αν το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο 0 η $f(x) = (\sin x)/x$ παίρνει τιμές οι οποίες πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο 1 (χωρίς ποτέ να είναι ίση με 1 και χωρίς ποτέ να μπορούμε να θέσουμε $x = 0$).

Ορισμός 8.6 Έστω ότι η $f : A \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$ και το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A. Λέμε ότι η f έχει όριο ℓ στο x_0, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Ομοίως με πριν ορίζουμε τα όρια στο x_0 να είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Ορισμός 8.7 Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στον προηγούμενο ορισμό λέμε ότι το όριο στο x_0 της f είναι $+\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και $|x - x_0| < \delta$ τότε $f(x) > M$.

Επίσης λέμε ότι το όριό της στο x_0 είναι $-\infty$ και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f και $|x - x_0| < \delta$ τότε $f(x) < -M$.

Η πρώτη βασική πρόταση μετά τους ορισμούς των ορίων είναι ότι όταν το όριο υπάρχει αυτό είναι μοναδικό.

Πρόταση 8.8 (Μοναδικότητα ορίου) *Αν το όριο* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *υπάρχει αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί ℓ_1 και ℓ_2 που ικανοποιούν τον ορισμό του ορίου της f στο x_0. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/2$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και στο $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ να ισχύει $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$. Ομοίως, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και στο $(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ να ισχύει $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$. Έτσι αν θέσουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ισχύει $\delta > 0$ και για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f και στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει και η

$$|f(x) - \ell_1| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

και η

$$|f(x) - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, για $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ παίρνουμε

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_2 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} + \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} = |\ell_1 - \ell_2|,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Οι περιπτώσεις $\ell_1 = +\infty$, $\ell_2 = -\infty$ και $\ell_1 \in \mathbb{R}$, $\ell_2 = \pm\infty$ αφήνονται ως άσκηση. □

Πολύ χρήσιμα είναι τα πλευρικά όρια σε πραγματικό αριθμό.

Ορισμός 8.9 (Πλευρικό όριο από δεξιά) Αν $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $(x_0, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$ λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο από δεξιά στο x_0 τον αριθμό ℓ, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $0 < x - x_0 < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ομοίως, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο από δεξιά στο x_0 το $+\infty$, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $0 < x - x_0 < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.

Ή, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο από δεξιά στο x_0 το $-\infty$, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $0 < x - x_0 < \delta$ να ισχύει $f(x) < -M$.

Εντελώς αντίστοιχος είναι ο ορισμός για το όριο από αριστερά:

Ορισμός 8.10 (Πλευρικό όριο από αριστερά) Αν $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $(x_0 - \delta, x_0) \cap A \neq \emptyset$ λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο από αριστερά στο x_0 τον αριθμό ℓ, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $0 < x_0 - x < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ομοίως, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο από αριστερά στο x_0 το $+\infty$, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $0 < x_0 - x < \delta$ να ισχύει $f(x) > M$.

Ή, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο από αριστερά στο x_0 το $-\infty$, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $0 < x_0 - x < \delta$ να ισχύει $f(x) < -M$.

Και πάλι κάθε πλευρικό όριο είναι μοναδικό με την ίδια απόδειξη με τις προφανείς τροποποιήσεις και αφήνεται ως άσκηση.

Το επόμενο θεώρημα μεταφέρει την έννοια του ορίου των συναρτήσεων στα όρια των ακολουθιών, και μας επιτρέπει έτσι να χρησιμοποιήσουμε τις γνώσεις από τις ακολουθίες στον υπολογισμό των ορίων συναρτήσεων.

Θεώρημα 8.11 (Αρχή της μεταφοράς) *Για κάθε συνάρτηση $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) *Για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ που συγκλίνει στο x_0 η ακολουθία $f(x_n)$ συγκλίνει στο ℓ.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ και μια ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \to x_0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $f(x_n) \to \ell$. Από τον ορισμό του ορίου της συνάρτησης για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Αλλά $x_n \to x_0$ άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - x_0| < \delta$. Άρα $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$, συνεπώς $f(x_n) \to \ell$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η f στο x_0 δεν έχει όριο το ℓ. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για $\delta = 1/n$ υπάρχει $t_n \in A$ με $|t_n - x| < \delta = 1/n$ ώστε $|f(t_n) - \ell| \geq \varepsilon$. Αυτό όμως αντιφάσκει με το (ii) αφού η συγκεκριμμένη t_n συγκλίνει στο x_0 αλλά η $f(t_n)$ δεν συγκλίνει στο ℓ. □

Ασκήσεις

Άσκηση 8.2.1. Αποδείξτε ότι δεν γίνεται μια συνάρτηση στο x_0 να συγκλίνει και στο $+\infty$ και στο $-\infty$, ούτε γίνεται να συγκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$ και σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

Άσκηση 8.2.2. Αποδείξτε ότι το όριο όταν $x \to +\infty$ μιας συνάρτησης f με κατάλληλο πεδίο ορισμού είναι μοναδικό. Ομοίως για $x \to -\infty$.

Άσκηση 8.2.3. Αποδείξτε σε κάθε περίπτωση ότι τα πλευρικά όρια όταν υπάρχουν είναι μοναδικά.

8.3 Ιδιότητες των ορίων

Τα όρια συναρτήσεων ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες με τα όρια ακολουθιών, οι οποίες συνοψίζονται στην εξής πρόταση.

Πρόταση 8.12 *Έστω ότι οι f, g, h είναι συναρτήσεις από το $A \subseteq \mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Τότε για κάθε λ, $\mu \in \mathbb{R}$ και εφόσον οι συναρτήσεις έχουν όριο στο x_0, ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(i) *Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$, τότε υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to x_0}(\lambda f + \mu g)(x)$ και $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) + \mu \lim_{x\to x_0} g(x)$$

και

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

(ii) *Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ και επιπλέον ισχύει $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x)$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

(iii) *Αν $g(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$ και τα όρια και των δύο συναρτήσεων στο x_0 υπάρχουν στο $\widetilde{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} f(x)$.*

(iv) *Αν f φραγμένη συνάρτηση και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = 0$.*

(v) *Αν το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} |f(x)|$ και ισχύει $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$.*

Όλα τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που το x_0 αντικατασταθεί με το $= +\infty$ ή το $-\infty$.

Απόδειξη:

□

Πόρισμα 8.13 *Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in A$ και*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) =: \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

τότε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με την κοινή τιμή ℓ.

Πρόταση 8.14 *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αν το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε στο σύνολο $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ η f είναι φραγμένη.*

Πρόταση 8.15 *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \mapsto \mathbb{R}$ και x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Αν το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \widetilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε στο σύνολο $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ η f παίρνει τιμές ομόσημες με το ℓ.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $0 < \ell \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να συνεπάγεται $|f(x) - \ell| < \ell/2$. Συνεπώς $f(x) > \ell/2$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ομοίως χειριζόμαστε και τις άλλες περιπτώσεις. □

Πρόταση 8.16 *Αν η συνάρτηση $f : A \mapsto \mathbb{R}$ είναι μονότονη και το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε τα όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ υπάρχουν, και είτε είναι πραγματικοί αριθμοί είτε $\pm\infty$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Θέτουμε $s = \sup\{f(x) : x < x_0\}$. Αν $s \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ τότε το $s - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $C := \{f(x) : x < x_0\}$ οπότε υπάρχει $x_1 < x_0$ ώστε $s - \varepsilon < f(x_1)$. Θέτουμε $\delta = x_0 - x_1 > 0$. Τότε αν $x_1 < x < x_0$ επειδή η f είναι αύξουσα θα ισχύει

$$s - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) < s + \varepsilon.$$

Άρα $|f(x) - s| < \varepsilon$ και συνεπώς $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = s$.

Αν $s = +\infty$ για κάθε $M > 0$ υπάρχει $x_1 < x_0$ ώστε $f(x_1) \geq M$. Πάλι από το ότι η f έχει υποτεθεί αύξουσα, για κάθε x με $x_1 < x < x_0$ θα ισχύει $f(x) \geq f(x_1) \geq M$. Άρα $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty = s$.

Ομοίως για τις υπόλοιπες περιπτώσεις. □

Πρόταση 8.17 *Έστω ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $f : A \mapsto \mathbb{R}$. Το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και ισχύει*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Σε αυτή την περίπτωση το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ισούται με την κοινή τιμή τους.

Απόδειξη: Το ευθύ είναι προφανές. Για το αντίστροφο, για κάθε $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$, και $\delta_2 > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ οπότε αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x + \delta)$ φανερά $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. □

Πρόταση 8.18 *Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και η $f : I \mapsto \mathbb{R}$ είναι μονότονη τότε τα πλευρικά όρια υπάρχουν σε κάθε σημείο του I*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι f αύξουσα και έστω $x_0 \in I$. Αν το I έχει σημεία αριστερά του x_0 τότε εύκολα δείχνουμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x)$ ενώ αν το I έχει σημεία δεξιά του x_0 ομοίως δείχνουμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x)$. □

8.4 Βασικά όρια

Τα παρακάτω βασικά όρια προκύπτουν αμέσως από την Αρχή της Μεταφοράς (Πρόταση 8.11) και τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες.

Πρόταση 8.19 *Στα παρακάτω υποθέτουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της συνάρτησης της οποία υπολογίζουμε το όριο στο x_0. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει* $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.

(ii) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_0 \neq 0$ ισχύει* $\lim_{x \to x_0} x^{-n} = x_0^{-n}$.

(iii) *Για κάθε $r > 0$ ισχύει* $\lim_{x \to x_0} x^r = x_0^r$, *άρα και* $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$.

(iv) $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$.

(v) $\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$.

(vi) *Αν $x_0 > 0$ τότε* $\lim_{x \to x_0} \log x = \log x_0$.

(vii) $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$ *και* $\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

(viii) *Αν το x_0 δεν είναι ρίζα του συνημιτόνου τότε* $\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$, *και αν το x_0 δεν είναι ρίζα του ημιτόνου τότε* $\lim_{x \to x_0} \cot x = \cot x_0$. $\square$

8.5 Όριο σύνθεσης συναρτήσεων

Θεώρημα 8.20 *Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $g : A \mapsto B$ και $f : B \mapsto C$ με $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε x_0 σημείο συσσώρευσης του A και υποθέτουμε ότι το $y_0 := \lim_{x \to x_0} g(x)$ υπάρχει και είναι σημείο συσσώρευσης του B. Αν το όριο $\lim_{y \to y_0} f(y)$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x)$ και ισχύει*

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = \lim_{y \to y_0} f(y).$$

8.6 Μερικές συνθήκες ύπαρξης ορίου

Πρόταση 8.21 *Αν η f είναι μονότονη και x_0 σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της τότε τα πλευρικά όρια στο x_0 υπάρχουν, και συγκεκριμένα ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν η f είναι αύξουσα, τότε*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x < x_0} f(x).$$

(ii) *Αν η f είναι φθίνουσα, τότε*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x < x_0} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x).$$

Πρόταση 8.22 (Κριτήριο Cauchy) *Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f τότε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x_1 - x_0| < \delta$ και $|x_2 - x_0| < \delta$, με x_1, x_2 στο πεδίο ορισμού της f, τότε $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon/2.$$

Άρα, αν x_1 και x_2 στο πεδίο ορισμού της f με $|x_1 - x_0| < \delta$ και $|x_2 - x_0| < \delta$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - \ell) - (f(x_2) - \ell)| \\ &\le |f(x_1) - \ell| + |f(x_2) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς (Θεώρημα 8.11). Θεωρούμε ακολουθία x_n στο πεδίο ορισμού της f που τείνει στο x_0. Αφού η f ικανοποιεί την ιδιότητα Cauchy άμεσα συμπεραίνουμε ότι η $f(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ άρα έχει όριο, έστω το ℓ. Μένει να δείξουμε ότι αν y_n μια οποιαδήποτε ακολουθία στο πεδίο ορισμού της f που τείνει στο x_0 θα συνεπάγεται ότι $\lim f(y_n) = \ell$. Όμως αφού $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να ισχύει $|x_n - x_0| < \delta/2$ και $|y_0 - x_0| < \delta/2$, και άρα, από την τριγωνική ανισότητα, $|x_n - y_n| < \delta$. Άρα $|f(y_n) - f(x_n)| < \varepsilon$. Δηλαδή $\lim(f(y_n) - f(x_n)) = 0$, και προσθέτοντας την $\lim f(x_n) = \ell$ κατά μέλη προκύπτει $\lim f(y_n) = \ell$. □

Κεφάλαιο 9

Συνέχεια συναρτήσεων

9.1 Ορισμός της συνέχειας

Ορισμός 9.1 Μια συνάρτηση $f : A \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Άμεσα προκύπτει ότι αν το $x_0 \in A$ είναι και σημείο συσσώρευσης του συνόλου A τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αν όμως το x_0 *δεν* είναι σημείο συσσώρευσης του A τότε η f είναι πάντα συνεχής στο x_0. Διότι, αφού δεν είναι σημείο συσσώρευσης υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$. Οπότε το μόνο σημείο του πεδίου ορισμού A που ικανοποιεί την $|x - x_0| < \delta$ είναι το ίδιο το x_0 και φανερά $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Έτσι ο έλεγχος της συνέχειας σε σημεία που δεν είναι σημεία συσσώρευσης περιττεύει. Οπότε στα επόμενα, για τον έλεγχο της συνέχειας σε ένα σημείο x_0 θα υποθέτουμε *πάντα* ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης.

Ομοίως ορίζεται και η πλευρική συνέχεια στο x_0:

Ορισμός 9.2 Η $f : A \mapsto \mathbb{R}$ είναι αριστερά συνεχής στο $x_0 \in A$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $x_0 - x < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Η $f : A \mapsto \mathbb{R}$ είναι δεξιά συνεχής στο $x_0 \in A$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $x - x_0 < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Και πάλι όπως πριν, αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A από αριστερά, δηλαδή $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset$ για κάθε $\delta > 0$ τότε η f είναι αριστερά συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$· και αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A από δεξιά, δηλαδή $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$ για κάθε $\delta > 0$ τότε η f είναι δεξιά συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Θεώρημα 9.3 (Αρχή της μεταφοράς) *Μια συνάρτηση* $f : A \mapsto \mathbb{R}$ *είναι* *συνεχής στο σημείο συσσώρευσης* $x_0 \in A$ *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* $x_n \in A$ *με* $x_n \to x_0$ *ισχύει* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Απόδειξη: Έστω ότι $x_n \to x_0$ με $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αλλά, αφού $x_n \to x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - x_0| < \delta$. Άρα $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, συνεπώς $f(x_n) \to f(x_0)$.

Αντιστρόφως, αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Άρα αυτό ισχύει και αν διαλέξουμε $\delta = 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή υπάρχει $x_n \in A$ με $|x_n - x_0| < 1/n$ αλλά $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Τότε όμως $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, άτοπο. □

Από την Αρχή της Μεταφοράς και τις ιδιότητες των ορίων ακολουθιών παίρνουμε άμεσα το ακόλουθο.

Πρόταση 9.4 *Θεωρούμε συναρτήσεις* $f, g : A \mapsto \mathbb{R}$ *οι οποίες είναι συνεχείς στο* $x_0 \in A$. *Τότε*

(i) *οι* $f \pm g$, fg *είναι συνεχείς στο* x_0.

(i) *αν υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε* $g(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ *τότε η* $1/g$ *είναι συνεχής στο* x_0. *Άρα και η* f/g *είναι συνεχής στο* x_0.

(i) *αν* $k \in \mathbb{N}$ *και υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, *τότε και η* $\sqrt[k]{f(x)}$, *ορισμένη στο* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, *είναι συνεχής στο* x_0. □

Βέβαια η παραπάνω πρόταση μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με τον ορισμό της συνέχειας, κάτι που αφήνεται ως άσκηση (Άσκηση 9.3.1.).

Πρόταση 9.5 *Θεωρούμε τις συναρτήσεις* $f : A \mapsto B$ *και* $g : B \mapsto C$, *όπου η μεν* f *είναι συνεχής στο* $x_0 \in A$ *και η* g *είναι συνεχής στο* $f(x_0) \in B$. *Τότε η σύνθεση* $g \circ f$ *είναι συνεχής στο* x_0.

Απόδειξη: Άμεση από την αρχή της μεταφοράς. □

Άρα αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A και η g είναι συνεχής σε κάθε σημείο του B, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Πρόταση 9.6 *Τα πολυώνυμα είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο του* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 9.4 αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ η συναρτηση $f(x) = x^k$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ (για $k = 0$ είναι τετριμμένο και αφήνεται ως άσκηση). Αυτό όμως έχει ήδη αποδειχθεί λόγω της αρχής της μεταφοράς στην Ιδιότητα 6.30 σελίδα 39. □

Πρόταση 9.7 *Οι συναρτήσεις* $f(x) = \sqrt[k]{x}$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε σημείο στο* $[0, \infty)$.

Απόδειξη: Από την αρχή της μεταφοράς αυτό έχει αποδειχθεί στην ιδιότητα 6.31 σελίδα 39. □

Πρόταση 9.8 *Η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε σημείο του* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Έστω ακολουθία $x_n \to x_0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $e^{x_n} \to e^{x_0}$. Αλλα

$$e^{x_n} - e^{x_0} = e^{x_0}(x_n - x_0)\frac{e^{x_n - x_0} - 1}{x_n - x_0} \to e^{x_0} \cdot 0 \cdot 1$$

από την Πρόταση 6.62 σελίδα 50. □

Πρόταση 9.9 *Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στα σημεία που ορίζονται.*

Απόδειξη: Για την $\cos x$ ισχύει

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}\right| \le |x - x_0|$$

και η $\cos x$ είναι φανερά συνεχής.

Για την $\sin x$ ισχύει

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le |x - x_0|$$

και η $\sin x$ είναι φανερά συνεχής.

Για τις $\tan x$ και $\cot x$ το αποτέλεσμα προκύπτει από την Πρόταση 9.4. □

9.1.1 Συνέπειες της ιδιότητας της συνέχειας

Πρόταση 9.10 *Αν η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ τότε η f είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Αν δεν είναι, υπάρχει $x_n \in [a, b]$ ώστε $|f(x_n)| \to +\infty$. Αλλά η x_n ως φραγμένη έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω ότι μια τέτοια υπακολουθία της είναι η x_{k_n} με όριο το $\ell \in [a, b]$. Η $|f|$ όμως είναι συνεχής, οπότε η $|f(x_{k_n})|$ θα έπρεπε να συγκλίνει στο $|f(\ell)|$, αλλά αυτή έχει όριο το $+\infty$ ως υπακολουθία της $|f(x_n)|$, άτοπο. □

Πρόταση 9.11 (Ύπαρξη μεγίστου και ελαχίστου) *Αν η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν x_1 και $x_2 \in [a, b]$ ώστε $f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ και $f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.*

Απόδειξη: Η f ως συνεχής είναι φραγμένη από την Πρόταση 9.10. Άρα $s := \sup_{x\in[a,b} f(x)$, $i := \inf_{x\in[a,b} f(x) \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε ακολουθίες x_n και y_n στο $[a, b]$ ώστε $f(x_n) \to s$ και $f(y_n) \to i$. Οι x_n και y_n ως φραγμένες έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες, έστω τις x_{k_n} και y_{m_n} με όρια τα x_1 και x_2

αντίστοιχα. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_1) = \lim f(x_{k_n}) = s$, αφού η $f(x_{k_n})$ είναι υπακολουθία της $f(x_n)$. Ομοίως, $f(x_2) = \lim f(y_{m_n}) = i$, αφού η $f(y_{m_n})$ είναι υπακολουθία της $f(y_n)$. □

Το παρακάτω λήμμα λέει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ «αλλάζει πρόσημο» από το a στο b τότε έχει αναγκαστικά ρίζα στο $[a, b]$:

Λήμμα 9.12 *Αν η συνάρτηση f ορίζεται και είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a)f(b) \leq 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Αν $f(a) = 0$ ή $f(b) = 0$ δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(a) > 0$ και $f(b) < 0$ (αλλιώς εργαζόμαστε με την $-f$).

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in [a, b] \ : \ f(x) \geq 0\} \subseteq [a, b]$, το οποίο δεν είναι κενό αφού φανερά $a \in A$. και έστω $s = \sup A$. Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία $s_n \in A$ με $s_n \to s$ (Άσκηση 6.8.9.), από την αρχή της μεταφοράς θα συμπεράνουμε ότι $f(s) \geq 0$. Έτσι όμως $s \neq b$ οπότε $s < b$. Αν τώρα $f(s) > 0$, ισχύει $s + 1/n \notin A$ και τελικά $s + 1/n \in [a, b]$, αφού $s < b$, οπότε $f(s+1/n) < 0$. Παίρνοντας όρια και χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς, προκύπτει $f(s) \leq 0$. Όμως $f(s) \geq 0$ οπότε αναγκαστικά $f(s) = 0$. □

Θεώρημα 9.13 (Ενδιάμεσης τιμής) *Έστω ότι συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$. Τότε για κάθε y στο διάστημα με άκρα τα $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) = y$.*

Απόδειξη: Είτε $f(a) \leq y \leq f(b)$ είτε $f(b) \leq y \leq f(a)$, η συνάρτηση $g(x) = f(x) - y$ είναι συνεχής και ικανοποιεί την

$$g(a)g(b) = (f(a) - y)(f(b) - y) \leq 0.$$

Άρα υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $g(x) = 0$. □

Η Πρόταση 9.11 μαζί με την Πρόταση 9.13 δίνουν άμεσα το ακόλουθο:

Πόρισμα 9.14 *Η εικόνα κλειστού διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα.* □

9.2 Συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης

Πρόταση 9.15 *Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής, τότε και το $f(I)$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Αν το $f(I)$ είναι μονοσύνολο (της μορφής $[y_0, y_0]$, δηλαδή η f είναι σταθερή) το αποτέλεσμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι το $f(I)$ δεν είναι μονοσύνολο. Θεωρούμε μια ακολουθία $i_n \in f(I)$ με $i_n \to i = \inf f(I)$ και μια $s_n \in f(I)$ με $s_n \to s = \sup f(I)$ (Άσκηση 6.8.9.). Τελικά θα ισχύει $i_n < s_n$ διότι το $f(I)$ δεν είναι μονοσύνολο, οπότε $\inf f(I) < \sup f(I)$, ενώ φανερά $f(I) \subseteq [i, s]$ όπου αν το i ή το s είναι άπειρα αλλάζουμε τα κλειστά άκρα σε ανοικτά.

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, $(i_n, s_n) \subseteq f(I) \subseteq [i, s]$, άρα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(i_n, s_n) \subseteq f(I) \subseteq [i, s].$$

Αφήνεται ως εύκολη άσκηση ότι $(i, s) \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}(i_n, s_n)$. Συνεπώς

$$(i, s) \subseteq f(I) \subseteq [i, s]$$

αλλάζοντας τα κλειστά άκρα σε ανοικτά αν i ή s είναι $-\infty$, $+\infty$ αντίστοιχα. Άρα το $f(I)$ έχει τέσσερις δυνατότητες να είναι ένα από τα (i, s), $(i, s]$, $[i, s)$ ή $[i, s]$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Πρόταση 9.16 *Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 τότε είτε f γνήσια αύξουσα είτε γνήσια φθίνουσα.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δυο σημεία $a < b$ στο I με $f(a) < f(b)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο I. Έστω λοιπόν δυο σημεία x, $y \in I$ με $x < y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει ότι το $(1-t)a + tx$ ανήκει στο διάστημα με άκρα τα a και x άρα βρίσκεται στο I και το $(1-t)b + ty$ ανήκει στο διάστημα με άκρα τα b και y, άρα βρίσκεται και αυτό στο I. Επίσης, φανερά $(1-t)a + tx < (1-t)b + ty$, αφού $a < b$ και $x < y$. Θέτουμε

$$F(t) = f((1-t)a + tx) - f((1-t)b + ty).$$

Επειδή η f είναι 1-1 έπεται ότι η F δεν μηδενίζεται στο $[0, 1]$. Αλλά φανερά είναι συνεχής οπότε δεν αλλάζει πρόσημο από το 0 στο 1. Επειδή $F(0) = f(a) - f(b) < 0$ συμπεραίνουμε $f(x) - f(y) = F(1) < 0$. □

Πρόταση 9.17 *Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \mapsto \mathbb{R}$ μονότονη τότε η $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \mapsto I$ έχει την ίδια μονοτονία με την f.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν η f^{-1} δεν είναι αύξουσα τότε υπάρχουν $y_1 < y_2$ στο $f(I)$ ώστε $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Αλλά αφού η f είναι αύξουσα συμπεραίνουμε ότι $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$, άτοπο. □

Πρόταση 9.18 *Έστω ότι το I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : I \mapsto \mathbb{R}$ είναι 1-1 και συνεχής στο I. Τότε η $f^{-1} : f(I) \mapsto I$ είναι συνεχής στο $f(I)$.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 9.15 το $f(I)$ είναι διάστημα. Η f είναι γνήσια μονότονη από την Πρόταση 9.16. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα (ομοίως αν είναι γνήσια φθίνουσα) και άρα και η f^{-1} είναι γνήσια αύξουσα.

Έστω $y_0 \in f(I)$ που δεν είναι άκρο του. Θεωρούμε $c < y_0 < d$ σημεία του $f(I)$ και $a = f^{-1}(c)$, $b = f^{-1}(d)$ οπότε a, $b \in I$, συνεπώς $[a, b] \subseteq I$,

$a < x_0 := f^{-1}(y_0) < b$ καθώς και $[c, d] \subseteq f(I)$ (αφού το $f(I)$ είναι διάστημα).

Έτσι, αν $f(x_n) = y_n \to y_0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας $y_n \in [c, d]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πρέπει να δείξουμε—από την αρχή της μεταφοράς—ότι $f^{-1}(y_n) = x_n \to x_0 = f^{-1}(y_0)$. Αν αυτό δεν είναι σωστό, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία x_{k_n} για την οποία ισχύει $|x_{k_n} - x_0| \geq \varepsilon$. Αλλά επειδή είναι φραγμένη (αφού ανήκει στο $[a, b]$) θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία έστω την $x_{k_{m_n}}$ με όριο έστω το ℓ για το οποίο ισχύει βεβαίως $|\ell - x_0| \geq \varepsilon$. Αλλά $f(x_{k_{m_n}}) \to f(x_0) = y_0$ ως υπακολουθία της $y_n = f(x_n)$. Άρα $f(\ell) = f(x_0)$, και αφού η f είναι 1-1 θα πρέπει $\ell = x_0$, άτοπο. Άρα f^{-1} συνεχής το y_0.

Ομοίως κάνουμε την απόδειξη αν το y_0 είναι άκρο του διαστήματος $f(I)$. □

Η παραπάνω πρόταση έχει τον περιορισμό ότι υποθέτουμε τη συνέχεια της f σε κάθε σημείο του I. Αυτός ο περιορισμός δεν χρειάζεται και η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί για ένα μόνο σημείο όπως θα δούμε σε λίγο.

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα I και είναι μονότονη, για κάθε $x_0 \in I$, ορίζουμε την ποσότητα $J_f(x_0)$ ως εξής:

- αν το x_0 δεν είναι άκρο του I θέτουμε
$$J_f(x_0) = \left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|.$$
- αν το x_0 είναι αριστερό άκρο του I θέτουμε
$$J_f(x_0) = \left| f(x_0) - \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right|.$$
- αν το x_0 είναι δεξιό άκρο του I θέτουμε
$$J_f(x_0) = \left| \lim_{x \to x_0^-} f(x) - f(x_0) \right|.$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (τα όρια αυτά υπάρχουν από τη μονοτονία της f) και την ονομάζουμε «άλμα» της f στο x_0.

Πρόταση 9.19 *Αν I διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f : I \mapsto \mathbb{R}$ μονότονη και ασυνεχής στο $x_0 \in I$ τότε $J_f(x_0) > 0$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν το x_0 δεν είναι άκρο του I, τότε για κάθε t, s με $t < x_0 < s$ ισχύει $f(t) \leq f(x_0) \leq f(s)$. Έτσι αν $\lim_{t \to x_0^-} f(t) = \lim_{s \to x_0^+} f(x)$ η f είναι αναγκαστικά συνεχής στο x_0.

Αν το x_0 είναι αριστερό άκρο του I τότε, $f(x_0) \leq \lim_{s \to x_0^+} f(x)$ και το συμπέρασμα είναι το ίδιο. Ομοίως αν το x_0 είναι δεξί άκρο του I. □

Πρόταση 9.20 *Έστω ότι το I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f : I \mapsto \mathbb{R}$ είναι 1-1 και συνεχής στο $x_0 \in I$. Τότε η $f^{-1} : f(I) \mapsto I$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η f και οι f^{-1} είναι γνησίως αύξουσες. Αν η f^{-1} είναι ασυνεχής στο $y_0 = f(x_0)$, έστω ότι το y_0 δεν είναι άκρο του διαστήματος $f(I)$. Τότε

$$a := \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) < \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) =: b.$$

Το διάστημα (a, b) έχει άπειρο πλήθος σημείων, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $x \in (a, b) \setminus \{f^{-1}(y_0)\}$. Επειδή $a < x < b$ υπάρχουν $y_1 < y_0 < y_2$ ώστε $x \in (f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \subseteq I$. Θέτουμε $z = f(x)$. Το z δεν μπορεί να είναι το y_0 αφού το x το επιλέξαμε ώστε $x \neq f^{-1}(y_0)$. Άρα είτε $z < y_0$ είτε $z > y_0$. Αν $z < y_0$ τότε παίρνουμε ένα y_1 με $z < y_1 < y_0$ οπότε για $y \in (y_1, y_0)$ θα έχουμε

$$x = f^{-1}(z) < f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y)$$

και παίρνοντας όριο με $y \to y_0^-$ προκύπτει $x < f^{-1}(y_1) \leq \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y_0)$ άτοπο από την επιλογή του x.

Ομοίως, αν $z > y_0$, παίρνουμε $y_2 \in (y_0, z)$ και για $y \in (y_0, y_2)$ ισχύει

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) < f^{-1}(z) = x,$$

και άρα

$$\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_2) < x,$$

άτοπο από την επιλογή του x.

Ανάλογα χειριζόμαστε την περίπτωση που το y_0 είναι άκρο του διαστήματος $f(I)$. □

Παρατήρηση 9.21 (Είδη ασυνέχειας) Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ και $x_0 \in A$. Αν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι *ίσα*, αλλά

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0),$$

λέμε ότι η ασυνέχεια στο x_0 είναι επουσιώδης ασυνέχεια, διότι μπορεί να αρθεί, να διορθωθεί, αν αλλάξουμε μόνο την τιμή $f(x)$.

Αν όμως $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ τότε η ασυνέχεια της f στο x_0 λέγεται *πρώτου είδους* και λέμε ότι η f παρουσιάζει άλμα στο x_0 την ποσότητα $J_f(x)$.

Τέλος αν ένα από τα δύο πλευρικά όρια δεν υπάρχουν τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει *ουσιώδη* ασυνέχεια ή ασυνέχεια *δεύτερου είδους* στο x_0.

9.3 Εφαρμογές της συνέχειας

Πρόταση 9.22 *Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_0$ με $a_k \neq 0$ και k περιττό. Αν $a_k > 0$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ (Παράδειγμα 8.3) άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $p(x_1) > 0$ (αν όχι, τότε $p(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ απ' όπου $+\infty = \lim_{x\to+\infty} p(x) \leq 0$ άτοπο). Επίσης, αφού k περιττός, $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, οπότε ομοίως υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $p(x_2) < 0$. Συνεπώς ισχύει $p(x_1)p(x_2) < 0$ και από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $p(x) = 0$. □

Θεώρημα 9.23 (Θεώρημα σταθερού σημείου) *Αν $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ συνεχής, υπάρχει $x \in [a, b]$ ώστε $f(x) = x$.*

Απόδειξη: Αn $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα. Υποθέτουμε ότι $f(a) \in (a, b]$ και $f(b) \in [a, b)$. Τότε η συνεχής συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ αλλάζει πρόσημο από το a στο b. □

Πρόταση 9.24 *Η e^x είναι γνησίως αύξουσα και επί του* $(0, \infty)$

Απόδειξη: Αν $x < y$ τότε $e^y = e^x e^{y-x}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $e^{y-x} > 1$. Αλλά

$$e^{y-x} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y-x}{n}\right)^n \geq 1 + y - x > 1$$

από την ανισότητα Bernoulli.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και τη συνέχεια τα e^x αρκεί να αποδείξουμε ότι η e^x παίρνει οσοδήποτε μεγάλες και οσοδήποτε μικρές θετικές τιμές. Αυτό προκύπτει αμέσως: η e^x παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, αφού

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης παίρνει οσοδήποτε μικρές θετικές τιμές, αφού $e^{-x} = 1/e^x$ και από το προηγούμενο η e^x μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές.

□

Έτσι η εκθετική συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \mapsto (0, +\infty)$ είναι 1-1 (αφού είναι γνησίως αύξουσα) και επί και συνεπώς αντιστρέφεται. Η αντίστροφή της ονομάζεται λογάριθμος και συμβολίζεται με $\log(x) : (0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Φανερά θα ισχύει $e^{\log x} = x$ για κάθε $x > 0$ και $\log(e^x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\log(x)$ ως αντίστροφη της εκθετικής είναι και αυτή γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 9.25 *Για τον λογάριθμο ισχύουν οι ανισότητες*

$$1 - \frac{1}{x} < \log x \leq x - 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.52 σελίδα 48, επειδή $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συνεπάγεται $e^{x-1} \geq x$ και αφού η log είναι αύξουσα $\log(e^{x-1}) \geq \log x$, δηλαδή $\log x \leq x-1$.

Λογαριθμίζοντας την $e^x \geq 1/(1-x)$ παίρνουμε $x \geq \log(1/(1-x))$ και αντικαθιστώντας με t την ποσότητα $1/(1-x)$ παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη $x < 1$ ισοδυναμεί με $t > 0$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ορισμός 9.26 (Η γενική εκθετική συνάρτηση) Για κάθε $a > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^x = e^{x \log a}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο ορισμός αυτός έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες: για παράδειγμα $a^n = a \cdot a \cdots a$ με n παράγοντες διότι

$$e^{nt} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{nt}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{nt}{nk}\right)^{nk},$$

διότι η τελευταία είναι υπακολουθία της προηγούμενης! Συνεπώς

$$e^{nt} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{t}{k}\right)^k\right)^n = (e^t)^n.$$

Άρα

$$a^n = e^{n\log a} = (e^{\log a})^n = e^{\log a}e^{\log a}\cdots e^{\log a} = a \cdot a \cdots a$$

με n παράγοντες.

Ή $(e^x)^y = e^{y \log e^x} = e^{yx} = e^{xy}$, οπότε και

$$(a^x)^y = e^{y\log a^x} = e^{y \log e^{x\log a}} = e^{yx\log a} = a^{xy}.$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται όλες οι ιδιότητες της εκθετικής a^x. Η συνάρτηση αυτή για $a > 0$ και $a \neq 1$ εύκολα βλέπουμε ότι είναι και αυτή γνήσια μονότονη (άρα 1-1), συνεχής και επί του $(0,\infty)$. Οπότε αντιστρέφεται και την αντίστροφή της την ονομάζουμε λογάριθμο με βάση το a και γράφουμε $\log_a$. Προφανώς ισχύει $\log_a a^x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $a^{\log_a x} = x$ για κάθε $x > 0$. Ως αντίστροφη της a^x για $0 < a \neq 1$, ο λογάριθμος με βάση a είναι συνεχής συνάρτηση, με την ίδια μονοτονία με την a^x, 1-1 και επί του $\mathbb{R}$.

Όλες οι αλγεβρικές ιδιότητές τόσο της εκθετικής όσο και του λογάριθμου προκύπτουν εύκολα και αφήνονται ως απλή άσκηση.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα παρατηρώντας ότι $(e^{(\log a)/n})^n = e^{\log a} = a$, δηλαδή κάθε θετικός αριθμός a έχει n-στη ρίζα τον αριθμό $a^{1/n} = e^{(\log a)/n}$.

Ασκήσεις

Άσκηση 9.3.1. Αποδείξτε την Πρόταση 9.4 με τον ορισμό της συνέχειας και όχι με την αρχή της μεταφοράς.

Κεφάλαιο 10

Παράγωγος συνάρτησης

10.1 Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 10.1 Θεωρούμε μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) με τιμές στο $\mathbb{R}$, και $x_0 \in (a, b)$. Θα λέμε ότι η f έχει παράγωγο στο x_0 αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

το οποίο θα συμβολίζουμε με $f'(x_0)$. Αν η παράγωγος της f υπάρχει σε κάθε σημείο του (a, b) θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) με παράγωγο τη συνάρτηση $f' : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 10.2 Αν θέσουμε $h = x - x_0$, τότε $h \to 0$ καθώς $x \to x_0$ και επειδή $x = x_0 + h$ μπορούμε να γράψουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε ένα ανοικτό διάστημα που μπορεί να είναι και όλο το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 10.3 Αν $f(x) = c$ είναι σταθερή συνάρτηση τότε $f'(x) = 0$. Πράγματι

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Παράδειγμα 10.4 Αν $f(x) = x^n$ για $n \in \mathbb{N}$, τότε $f'(x) = nx^{n-1}$. Πράγματι, αν $n \geq 2$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \qquad = nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Αν $n = 1$ αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 10.5 Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει είναι παντού παραγωγίσιμη *εκτός* από το $x_0 = 0$.

Πρόταση 10.6 *Αν μια συνάρτηση $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ τότε είναι και συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη: Η συνέχεια στο x_0 προκύπτει άμεσα από το ότι

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Πρόταση 10.7 $(e^x)' = e^x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και* $(\log x)' = 1/x$ *για κάθε* $x > 0$.

Απόδειξη:

$$(e^{x_0})' = \lim_{x\to x_0}\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

$$(\log x)' = \lim_{x\to x_0}\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{\log(x/x_0)}{(x/x_0) - 1} = \frac{1}{x_0}. \qquad \square$$

Ασκήσεις

Άσκηση 10.1.1. Χρησιμοποιήστε τον τύπο

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

τη συνέχεια του συνημιτόνου καθώς και το όριο $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$ για να αποδείξετε ότι $(\sin x)' = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 10.1.2. Χρησιμοποιήστε τον τύπο

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

τη συνέχεια του ημιτόνου και το όριο $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$ για να αποδείξετε ότι $(\cos x)' = -\sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10.2 Κανόνες παραγώγισης

Πρόταση 10.8 *Έστω ότι οι συναρτήσεις $f, g : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) *η $\lambda f + \mu g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει*

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

(ii) *η fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) *αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η f/g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2}.$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\frac{\lambda f(x) + \mu g(x) - \big(\lambda f(x_0) + \mu g(x_0)\big)}{x - x_0} = \lambda\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν πάρουμε το όριο για $x \to x_0$ βρίσκουμε ότι υπάρχει το $(\lambda f + \mu g)'(x_0)$ και ισχύει $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$. Ομοίως, από τη σχέση

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και από το γεγονός ότι η f ως παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0, βρίσκουμε ότι υπάρχει το $(f \cdot g)'(x_0)$ και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

Επειδή

$$\begin{aligned}\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,g(x_0) - f(x_0)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)\end{aligned}$$

και από το γεγονός ότι η g ως παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0, βρίσκουμε ότι υπάρχει η παράγωγος της f/g και ισχύει η ζητούμενη. □

Πόρισμα 10.9 *Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $p'(x) = k a_k x^{k-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Κάθε ρητή συνάρτηση, πηλίκο πολυωνύμων, είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. □

Παράδειγμα 10.10 Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ και ισχύει

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τον κανόνα για το πηλίκο και τις συναρτήσεις $f(x) = 1$ και $g(x) = x^n$. □

Πρόταση 10.11 (Κανόνας αλυσίδας) *Θεωρούμε δυο συναρτήσεις f, g με $f : (a,b) \mapsto (c,d)$ και $g : (c,d) \mapsto \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0) \in (c,d)$ τότε η συνθεση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Απόδειξη: Θέτουμε $y_0 = f(x_0)$ και χρησιμοποιούμε την «παρατήρηση Καραθεοδωρή»· ορίζουμε:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad x \in (a,b) \setminus \{x_0\}, \\
\varepsilon_2(y) &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0), \quad y \in (c,d) \setminus \{y_0\}.
\end{aligned}$$

Τότε: $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$, $\lim_{y \to y_0} \varepsilon_2(y) = 0$ και ισχύουν:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \big(f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\big)(x - x_0), \\
g(y) - g(y_0) &= \big(g'(y_0) + \varepsilon_2(y)\big)(y - y_0).
\end{aligned}$$

Θέτοντας $y = f(x)$ και $y_0 = f(x_0)$ στη δεύτερη σχέση και αντικαθιστώντας την πρώτη σε αυτή έχουμε:

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{x - x_0} = \Big(g'\big(f(x_0)\big) + \varepsilon_2\big(f(x)\big)\Big)\big(f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\big)$$

για $x \neq x_0$. Από αυτή, και αφού η f είναι συνεχής στο x_0, έπεται ότι υπάρχει η παράγωγος $(g \circ f)'(x_0)$ και ισχύει: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. □

Παράδειγμα 10.12 Για $a > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε $f'(x) = a^x \log a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $a^x = e^{x \log a}$ οπότε από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a}(x \log a)' = a^x \log a.$$

Παράδειγμα 10.13 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{g(x)}$ όπου $g : (a,b) \to (0,+\infty)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{\frac{1}{2}\log g(x)}\right)' = e^{\frac{1}{2}\log g(x)} \left(\frac{1}{2}\log\big(g(x)\big)\right)' = \frac{1}{2}\frac{g'(x)}{g(x)}\sqrt{g(x)} \\
&= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μια πρόταση για τη παράγωγο της αντίστροφης συνάρτησης.

Πρόταση 10.14 (Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης) *Έστω ότι η $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ είναι μια 1-1 και συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και ότι $f'(x_0) \neq 0$. Τότε, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και ισχύει*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε μια ακολουθία $y_n = f(x_n) \to f(x_0)$. Από τη συνέχεια της αντίστροφης (Πρόταση 9.18 σελίδα 73) θα πρέπει $x_n \to x_0$. Συνεπώς

$$\lim \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(f(x_0))}{y_n - f(x_0)} = \lim \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Άρα, από την αρχή της μεταφοράς, το όριο

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)}$$

υπάρχει και ισούται με $1/f'(x_0)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Παρατήρηση 10.15 Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι το ανοικτό (a,b) αντί για το κλειστό $[a,b]$, πάλι ισχύει το συμπέρασμα. Πράγματι, από την Πρόταση 9.16, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Θεωρούμε διάστημα $[c,d] \subset (a,b)$ ώστε $f(c) < f(x_0) < f(d)$ (για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε $c = (a + x_0)/2$ και $d = (x_0 + b)/2$). Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής και την ιδιότητα 1-1 της συνάρτησης, κάθε σημείο του $[f(c), f(d)]$ είναι εικόνα ενός και μοναδικού σημείου το οποίο—λόγω της μονοτονίας της f—είναι εντός του $[c,d]$. Οπότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα 10.14 για την $f : [c,d] \mapsto \mathbb{R}$, παρατηρώντας ότι για κάθε ακολουθία y_n του (a,b) με $y_n \to f(x_0)$, αυτή θα βρίσκεται τελικά στο $(f(c), f(d))$, άρα θα είναι τελικά της μορφής $y_n = f(x_n)$ για κατάλληλη ακολουθία $x_n \in [c,d]$.

Παρατήρηση 10.16 Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η αντίστροφη συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο $f(x_0)$. Διότι αν είχε θα έπρεπε $(f^{-1} \circ f)'(x) = x' = 1$ αλλά από τον κανόνα της αλυσίδας για τη σύνθεση θα έπρεπε $(f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = 0$.

10.3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Αν μια συνάρτηση $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του (a,b) ορίζεται η συνάρτηση $f' : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ όπου απεικονίζει κάθε σημείο του (a,b) στην παράγωγο της f σε αυτό το σημείο. Ενδέχεται όμως και η νέα αυτή συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη, οπότε θα ορίζεται η 2η παράγωγος της f που τη συμβολίζουμε με f'' και είναι η παράγωγος της f'. Ομοίως ορίζεται, αν υπάρχει, και η παράγωγος της f'' που τη συμβολίζουμε με f''' κοκ. Από την 4η παράγωγο της f και μετά, συνήθως σταματάμε να γράφουμε με τόνους και γράφουμε ως εξής: η 4η παράγωγος συμβολίζεται με $f^{(4)}$, η 5η με $f^{(5)}$ κλπ. Επαγωγικά ορίζεται η «n-στή» παράγωγος της f που τη γράφουμε με $f^{(n)}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον βέβαια υπάρχει.

Για παράδειγμα, η $f(x) = e^x$ επειδή όπως είδαμε ισχύει $f'(x) = e^x$, αυτή και κάθε επόμενη παράγωγός της υπάρχει, και ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μια συνάρτηση που έχει n-στη παράγωγο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ λέγεται «απεριόριστα παραγωγίσιμη».

Ασκήσεις

Άσκηση 10.3.1. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$, είναι απεριόριστα παραγωγίσιμες αποδεικνύοντας με επαγωγή ότι $(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x$ και $(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^{(n)} \cos x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ για τη συνάρτηση του ημιτόνου. Βρείτε και αποδείξτε τους ανάλογους τύπους και για την $\cos x$.

Άσκηση 10.3.2. Αποδείξτε ότι ο λογάριθμος είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση, δείχνοντας επαγωγικά ότι

$$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 10.3.3. Αποδείξτε ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και ισχύει

$$a_m = \frac{p^{(m)}(0)}{m!},$$

για κάθε $m = 1, 2, \ldots, k$.

Άσκηση 10.3.4. Αποδείξτε με τη βοήθεια του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης ότι για τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\arcsin : [-1, 1] \mapsto [-\pi/2, \pi/2]$ $\arccos : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$, $\arctan : \mathbb{R} \mapsto (-\pi/2, \pi/2)$ ισχύουν οι τύποι

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}.$$

Κεφάλαιο 11

Εφαρμογές παραγώγων

11.1 Τοπικά ακρότατα

Ορισμός 11.1 Η $f : A \mapsto \mathbb{R}$ λέμε ότι έχει τοπικό μέγιστο *στο* σημείο $x_0 \in A$ *τον* αριθμό $f(x_0)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x_0) \geq f(x)$.

Ομοίως, λέμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο *στο* σημείο $x_0 \in A$ *τον* αριθμό $f(x_0)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $f(x_0) \leq f(x)$.

Θεώρημα 11.2 (Fermat) *Αν $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, b)$ στο οποίο έχει τοπικό ακρότατο, τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a, b)$ να ισχύει $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Άρα

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{αν } x \leq x_0 \quad \text{και} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{αν } x \geq x_0.$$

Παίρνοντας όρια από αριστερά και από δεξιά στο x_0 προκύπτει $f'(x_0) \geq 0$ και $f'(x_0) \leq 0$.

Ομοίως για την περίπτωση που στο x_0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

□

Παρατήρηση 11.3

1. Το Θεώρημα Fermat συνεχίζει να ισχύει αν η f είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, αλλά το x_0 δεν πρέπει να είναι άκρο. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x$ στο $[0, 1]$ έχει μέγιστο στο $x = 1$ αλλά η παράγωγος στο 1 (εδώ αναγκαστικά η αριστερή παράγωγος) δεν είναι μηδέν.

2. Το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat δεν ισχύει. Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο $(-1, 1)$ έχουμε $f'(x_0) = 0$ αλλά δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$.

3. Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο αλλά να μην έχει παράγωγο στο σημείο αυτό. Για παράδεγμα, η $f(x) = |x|$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι η αναζήτηση των σημείων στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα θα πρέπει να γίνεται στα σημεία που είναι άκρα διαστημάτων του πεδίου ορισμού της, στα σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη, και στα σημεία που η παράγωγός της μηδενίζεται. Έτσι, αν αναζητούμε τη μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης θα πρέπει να την αναζητήσουμε σε αυτά τα σημεία.

Αν όμως αναζητούμε τις ποσότητες $\sup f(x)$ και $\inf f(x)$, κάτι που θα χρειαστούμε στα μαθήματα της Ανάλυσης, θα πρέπει στα τοπικά ακρότατα της f να προσθέσουμε και τις τιμές $\lim_{x\to c} f(x)$ για κάθε σημείο συσσώρευσης c του πεδίου ορισμού της που δεν ανήκει σε αυτό. Διότι αυτά τα σημεία c διαφεύγουν της παραπάνω διαδικασίας. Έτσι έχουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 11.4 *Αν $f : A \mapsto \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, το $\sup_{x\in A} f(x)$ και το $\inf_{x\in A} f(x)$ υπολογίζεται ανάμεσα στις τιμές*

- *της f στα σημεία που είναι άκρα διαστημάτων στο A,*
- *της f που είναι εσωτερικά σημεία του A και ρίζες της $f'(x)$,*
- *$\lim_{x\to c} f(x)$ για κάθε σημείο c που είναι σημείο συσσώρευσης του A και δεν ανήκει σε αυτό.* □

Θεώρημα 11.5 (Rolle) *Αν $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και για την οποία ισχύει $f(a) = f(b)$. Τότε υπάρχει σημείο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 9.11 η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω ότι η ελάχιστη τιμή είναι στο σημείο ξ_1 και η μέγιστη στο σημείο ξ_2. Αν ένα από αυτά τα σημεία ανήκουν στο (a,b) τότε από το Θεώρημα του Fermat η παράγωγος μηδενίζεται σε αυτό. Αν όμως κανένα δεν είναι εσωτερικό σημείο τότε ξ_1, $\xi_2 \in \{a,b\}$. Αλλά τότε $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ αφού από την υπόθεση $f(a) = f(b)$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f συμπίπτουν, άρα η f είναι σταθερή, και βεβαίως $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$ σε αυτή την περίπτωση. □

Παρατηρούμε ότι η υπόθεση να είναι η f συνεχής στο *κλειστό* διάστημα $[a,b]$ είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0 \\ x & \text{αν } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(0,1)$, ισχύει $f(0) = f(1) = 1$ αλλά η παράγωγος f' δεν έχει σημείο μηδενισμού στο $(0,1)$.

Το παρακάτω είναι συνέπεια αλλά και γενίκευση του θεωρήματος του Rolle:

Θεώρημα 11.6 (Μέσης τιμής) *Αν* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο* (a, b). *Τότε υπάρχει σημείο* $\xi \in (a, b)$ *ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} F(x) &= \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \end{vmatrix} \\ &= f(x)(a - b) - x\big(f(a) - f(b)\big) + bf(a) - af(b), \end{aligned}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη και φανερά ισχύει $F(a) = F(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ για το οποίο ισχύει $F'(\xi) = 0$. Ισοδύναμα

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ □

Πόρισμα 11.7 *Αν η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* (a, b) *και για κάθε* $x \in (a, b)$ *ισχύει* $f'(x) = 0$ *τότε η* f *είναι σταθερή στο* (a, b).

Απόδειξη: Για οποιαδήποτε σημεία $s, t \in (a, b)$ από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (s, t)$ ώστε $0 = f'(\xi) = (f(s) - f(t))/(s - t)$, άρα $f(s) = f(t)$. □

Πόρισμα 11.8 *Αν οι συναρτήσεις* f, g *οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο* (a, b) *και για κάθε* $x \in (a, b)$ *ισχύει* $f'(x) = g'(x)$. *Τότε υπάρχει σταθερά* $c \in \mathbb{R}$ *ώστε* $f(x) = g(x) + c$ *για κάθε* $x \in (a, b)$.

Απόδειξη: Άμεσο από το Πόρισμα 11.7 και το ότι $(f - g)' = 0$. □

Ορισμός 11.9 Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμό ένα διάστημα (a, b). Μια συνάρτηση F με το ίδιο πεδίο ορισμού λέγεται *παράγουσα* ή *αρχική* της f αν ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Πρόταση 11.10 *Αν η* F *είναι παράγουσα της* f *στο διάστημα* (a, b) *τότε κάθε άλλη παράγουσα της* f *είναι της μορφής* $F(x) + c$ *για κάποια σταθερά* $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Άμεσο από το Πόρισμα 11.8, αφού κάθε άλλη παράγουσα G θα ικανοποιεί την $G' = F' = f$. □

Θεώρημα 11.11 (Μέσης τιμής του Cauchy) *Αν* $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *συνεχείς συναρτήσεις, παραγωγίσιμες στο* (a, b), *τότε υπάρχει σημείο* $\xi \in (a, b)$ *ώστε*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

Ειδικά, αν $g'(x_0) \neq 0$ *τότε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x)),$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη και φανερά ισχύει $F(a) = F(b) = 0$. Άρα, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ για το οποίο ισχύει $F'(\xi) = 0$. Απλές πράξεις οδηγούν στη ζητούμενη σχέση. □

11.2 Απροσδιόριστες μορφές ορίων

Αν για δυο συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού τα όρια $\lim_{x\to c} f(x)$ και $\lim_{x\to c} g(x)$ σε κάποιο σημείο συσσώρευσης ή στο $\pm\infty$ είναι και τα δύο ίσα με μηδέν ή και τα δύο ίσα με ∞ τότε το όριο $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ δεν μπορεί να υπολογιστεί ως το πηλίκο των ορίων των f και g και ονομάζεται απροσδιόριστη μορφή ορίου. Σε τέτοιες περιπτώσεις συχνά βοηθάει στον υπολογισμό η παράγωγος με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 11.12 (Κανόνας L' Hospital) *Έστω ότι το I είναι ανοικτό, φραγμένο ή άπειρο διάστημα στο $\mathbb{R}$ και το c είναι άκρο του I, πεπερασμένο ή άπειρο. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ορισμένες στο I, παραγωγίσιμες και οι g και g' δεν μηδενίζονται πουθενά στο I. Αν είτε*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \tag{11.1}$$

ή

$$\lim_{x\to c} |g(x)| = +\infty \tag{11.2}$$

και το όριο $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ υπάρχει, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας το c είναι δεξιό άκρο του I. Έστω ότι $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του ορίου υπάρχει $x_0 < c$ ώστε αν $y \in (x_0, c)$ να είναι $|f'(y)/g(y) - L| < \varepsilon/3$. Θεωρούμε οποιαδήποτε x, y στο (x_0, c) με $x < y$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy (Θεώρημα 11.11) υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Αν ισχύει η (11.1) διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή στο αριστερό κλάσμα με $g(x)$ ενώ αν ισχύει η (11.2) διαιρούμε με $g(y)$. Στην περίπτωση λοιπόν της (II.1) παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon}{3} > \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| = \frac{\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L + L\frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}\right|}{\left|1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right|},$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (κάτω) τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon}{3}\left|1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right| > \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| - \left|L\frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}\right|.$$

Παίρνοντας όριο ως προς $y \to c$ προκύπτει

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

για κάθε $x \in (x_0, c)$, δηλαδή $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = L$.

Αν τώρα ισχύει η (II.2), κρατάμε σταθερό το x και γράφουμε

$$\frac{\varepsilon}{3} > \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| = \frac{\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L + L\frac{g(x)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}\right|}{\left|\frac{g(x)}{g(y)} - 1\right|}.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα

$$\frac{\varepsilon}{3}\left(1 + \left|\frac{g(x)}{g(y)}\right|\right) > \left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| - \left|L\frac{g(x)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}\right|.$$

Έτσι,

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3}\left(1 + \left|\frac{g(x)}{g(y)}\right|\right) + |L|\left|\frac{g(x)}{g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)}{g(y)}\right|.$$

Όμως, αφού $\lim_{y\to c} |g(y)| = +\infty$, υπάρχει $c_0 > c$ ώστε για καθε $y \in (c_0, c)$ να ισχύει

$$\left|\frac{g(x)}{g(y)}\right| < 1, \qquad |L|\left|\frac{g(x)}{g(y)}\right| < \frac{\varepsilon}{6}, \qquad \left|\frac{f(x)}{g(y)}\right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Άρα

$$\left|\frac{f(y)}{g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{3}2 + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

δηλαδή $\lim_{y\to c} f(y)/g(y) = L$.

Αν τώρα $L = +\infty$ ή $-\infty$ η απόδειξη είναι παρόμοια. Για παράδειγμα, αν $L = +\infty$ για κάθε $M > 0$ βρίσκουμε $x_0 < c$ ώστε για κάθε $y \in (x_0, c)$

να ισχύει $f'(y)/g'(y) > 2(M+1)$. Ανάλογα με το αν ισχύει η (11.1) ή η (11.2) παίρνουμε αντίστοιχα

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2(M+1) \quad \text{ή} \quad \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(y)}}{1 - \frac{g(x)}{g(y)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2(M+1).$$

Οπότε στην πρώτη περίπτωση το όριο $y \to c$ δίνει $f(x)/g(x) \geq 2(M+1) > \mathrm{M}$ για κάθε $x \in (x_0, c)$ ενώ η δεύτερη, κρατώντας σταθερό το x στο διάστημα (x_0, c) και επιλέγοντας $c_0 < c$ ώστε για κάθε $y \in (c_0, c)$ να ισχύει $|f(x)/g(y)| \leq 1$ και $|g(x)/g(y)| \leq 1/2$ παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \left(1 - \frac{g(x)}{g(y)}\right)(2(M+1)) + \frac{f(x)}{g(y)} \geq \frac{1}{2}(2(M+1)) - 1 = M.$$

Ομοίως για την περίπτωση $L = -\infty$. □

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίζουμε γρήγορα «περίπλοκα» όρια. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{1 - \cos x\pi}.$$

Το όριο είναι της μορφής $0/0$ και ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται σε διαστήματα δεξιά του 2 ούτε και η παράγωγός του. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L' Hospital και παίρνουμε ότι το παραπάνω όριο ισούται με

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(\sqrt{x-2})'}{(1 - \cos x\pi)'} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\pi \sin x\pi} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2\pi\sqrt{x-2}\sin x\pi} = +\infty.$$

Παρατήρηση 11.13 Κάποια όρια εξαρτώνται από τον τρόπο που αναπτύχθηκε η θεωρία. Για παράδειγμα, έτσι όπως αναπτύξαμε εδώ τη θεωρία δεν είναι σωστό να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

με τον κανόνα L' Hospital, διότι απλά θα πρέπει να ξέρουμε ότι $(e^x)' = e^x$ και αυτή η ταυτότητα αποδείχθηκε χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο. Ομοίως για τα όρια $\lim_{x \to 0}(\sin x)/x$ και $\lim_{x \to 1}(\log x)/(x-1)$.

Κεφάλαιο 12

Μελέτη συνάρτησης

12.1 Μονοτονία συνάρτησης

Θεώρημα 12.1 *Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b). Τότε*

(i) $f'(x) \geq 0$ *αν και μόνο αν η f είναι αύξουσα.*

(ii) $f'(x) \leq 0$ *αν και μόνο αν η f είναι φθίνουσα.*

Απόδειξη: Αν η f είναι αύξουσα τότε φανερά $(f(x)-f(x_0))/(x-x_0) \geq 0$, οπότε παίρνοντας όριο $x \to x_0$ προκύπτει $f'(x_0) \geq 0$.

Αντιστρόφως, αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in I$ και $x_1 < x_2$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0,$$

συνεπώς $f(x_1) \leq f(x_2)$ και η f είναι αύξουσα.

Ομοίως για την περίπτωση $f'(x) \leq 0$. □

Πόρισμα 12.2 *Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b). Τότε*

(i) *Αν $f'(x) > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.*

(ii) *Αν $f'(x) < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.*

Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν.

Απόδειξη: Όπως και πριν, αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ και $x_1 < x_2$, θα ισχύει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

συνεπώς $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Ομοίως αν $f'(x) < 0$.

Αντίστροφα αυτό δεν ισχύει. Πράγματι, η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 1)$ αλλά η παράγωγός της μηδενίζεται στο $x_0 = 0$. □

12.2 Εύρεση ακροτάτων συνάρτησης

Θεώρημα 12.3 *Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) και $f'(x_0) = 0$ για κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$. Τότε η f παρουσιάζει στο x_0*

(i) *τοπικό μέγιστο, αν για κάθε $x \in (a, x_0]$ και $x \in [x_0, b)$ είναι αντίστοιχα $f'(x) \geq 0$ και $f'(x) \leq 0$.*

(ii) *τοπικό ελάχιστο, αν για κάθε $x \in (a, x_0]$ και $x \in [x_0, b)$ είναι αντίστοιχα $f'(x) \leq 0$ και $f'(x) \geq 0$.*

Απόδειξη: Αφού $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, x_0]$ και $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_0, b)$, η f είναι αύξουσα στο $(a, x_0]$ και φθίνουσα στο $[x_0, b)$. Συνεπώς για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$, άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Εργαζόμαστε ομοίως για την δεύτερη περίπτωση. □

Θεώρημα 12.4 *Έστω ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) και $f'(x_0) = 0$ για κάποιο σημείο $x_0 \in (a, b)$.*

(i) *Αν $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.*

(ii) *Αν $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.*

Απόδειξη: Αφού $f'(x_0) = 0$ ισχύει

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Έτσι, αν $f''(x_0) > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ να ισχύει $f'(x)/(x - x_0) > 0$. Άρα η f' είναι αρνητική στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και θετική στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Συνεπώς στο x_0 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σύμφωνα με το Θεώρημα 12.3.

Ομοίως για την περίπτωση $f''(x_0) < 0$. □

12.3 Κοίλα της γραφικής παράστασης

Θεώρημα 12.5 *Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b).*

(i) *Αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f''(x) \geq 0$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη ευθεία στο γράφημά της, δηλαδή η f είναι κυρτή. Συχνά αυτό το περιγράφουμε με τη φράση: «η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα (a, b)».*

(ii) *Αν για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $f''(x) \leq 0$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη ευθεία στο γράφημά της, δηλαδή η f είναι κοίλη. Συχνά αυτό το περιγράφουμε με τη φράση: «η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα (a, b)».*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in (a, b)$ και θεωρούμε την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ για οποιοδήποτε $x_0 \in (a, b)$. Η ευθεία αυτή έχει εξίσωση $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, οπότε

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ξ_1 ανάμεσα στα x και x_0 ώστε $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x - x_0)$. Άρα

$$f(x) - y = f'(\xi_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi_1) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$

Ξανά από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f' υπάρχει ξ_2 ανάμεσα στα ξ_1 και x_0 ώστε $f'(\xi_1) - f'(x_0) = f''(\xi_2)(\xi_1 - x_0)$, οπότε

$$f(x) - y = f''(\xi_2)(\xi_1 - x_0)(x - x_0).$$

Το ξ_1 όμως είναι πάντα ανάμεσα στα x και x_0, οπότε εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει $(\xi_1 - x_0)(x - x_0) > 0$.

Συνεπώς, αν $f'' \geq 0$ θα ισχύει $f(x) - y \geq 0$ δηλαδή το γράφημα της f είναι πάνω από την ευθεία που εφάπτεται στο γράφημά της στο x_0. Ενώ αν $f'' \leq 0$ θα είναι $f(x) - y \leq 0$ δηλαδή το γράφημα της f είναι κάτω από την ευθεία που εφάπτεται στο γράφημά της στο x_0. □

12.4 Σημεία καμπής

Ορισμός 12.6 Αν σε ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$ μια συνάρτηση $f : (a, b)\mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f''(x_0) = 0$ ενώ σε ένα από τα (a, x_0), (x_0, b) έχει θετικές τιμές και στο άλλο αρνητικές τότε λέμε ότι η f «κάμπτεται» στο x_0 ή παρουσιάζει «καμπή» στο x_0, και το x_0 λέγεται «σημείο καμπής» της συνάρτησης f.

Έτσι η εφαπτομένη σε ένα σημείο καμπής «διαπερνά» το γράφημα της f στο σημείο x_0 και η γραφική παράσταση βρίσκεται εκατέρωθεν της εφαπτπομένης ευθείας.

12.5 Ασύμπτωτες

Οι ασύμπτωτες ευθείες αποτελούν βασικά στοιχεία στη μελέτη συνάρτησης και στη χάραξη της γραφικής της παράστασης.

Ορισμός 12.7 Η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + b$ λέγεται (πλάγια) ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αν

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - \lambda x\big) = b$$

ή

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - \lambda x\big) = b.$$

Παρατήρηση 12.8 Αν από τον υπολογισμό των παραπάνω ορίων προκύψει $\lambda = 0$, οπότε η ευθεία γίνεται $y = b$, αυτη ονομάζεται οριζόντια ασύμπτωτη.

Ορισμός 12.9 Μια συνάρτηση έχει κάθετη ασύμπτωση την ευθεία $x = x_0$ αν είτε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ είτε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ είτε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$ είτε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

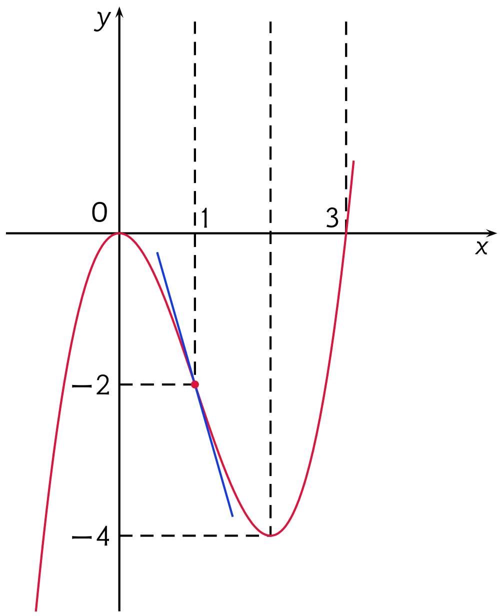
12.6 Μελέτη συνάρτησης

1. Βρίσκουμε το ευρύτερο πεδίο ορισμού της συνάρτησης A αν αυτό δεν δίνεται.
   (α΄) Αν όμως είναι περιοδική με περίοδο T τότε αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα της μορφής $[a, a+T)$.
   (β΄) Αν είναι άρτια ή περιττή, αρκεί να τη μελετήσουμε στο $A \cap [0, +\infty)$. Αν η f είναι άρτια η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Αν είναι περιττή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
2. Εντοπίζουμε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής, και ειδικότερα παραγωγίσιμη.
3. Το πεδίο ορισμού A είναι συχνά διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Εξετάζουμε λοιπόν τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων που συνθέτουν το A, ιδιαίτερα όταν τα σημεία αυτά είναι σημεία ασυνέχειας ή το $+\infty$ ή το $-\infty$.
4. Υπολογίζουμε την παράγωγο f' της f και εξετάζουμε το πρόσημό της για τις διάφορες τιμές της μεταβλητής. Έτσι προκύπτουν τα διάφορα διαστήματα μονοτονίας της f, καθώς και τα κρίσιμα σημεία στα οποία η f ενδεχομένως παρουσιάζει ακρότατα.
5. Υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f. Από τη μελέτη του προσήμου της ορίζονται τα διαστήματα στα οποία η f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω, καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.
6. Άλλα συμπληρωματικά στοιχεία της μελέτης είναι:
   (α΄) Προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες της f.
   (β΄) Βρίσκουμε τα σημεία που η f τέμνει τους άξονες, δηλαδή λύνουμε την εξισώση $f(x) = 0$ και υπολογίζουμε το $f(0)$.

Με αυτά τα στοιχεία καταρτίζουμε πίνακα ο οποίος μας βοηθάει στην χάραξη της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στις επόμενες εφαρμογές.

Παράδειγμα 12.10 Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2$.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			μ		κ		ε				



Παράδειγμα 12.11 Να μελετηθεί η συνάρτηση

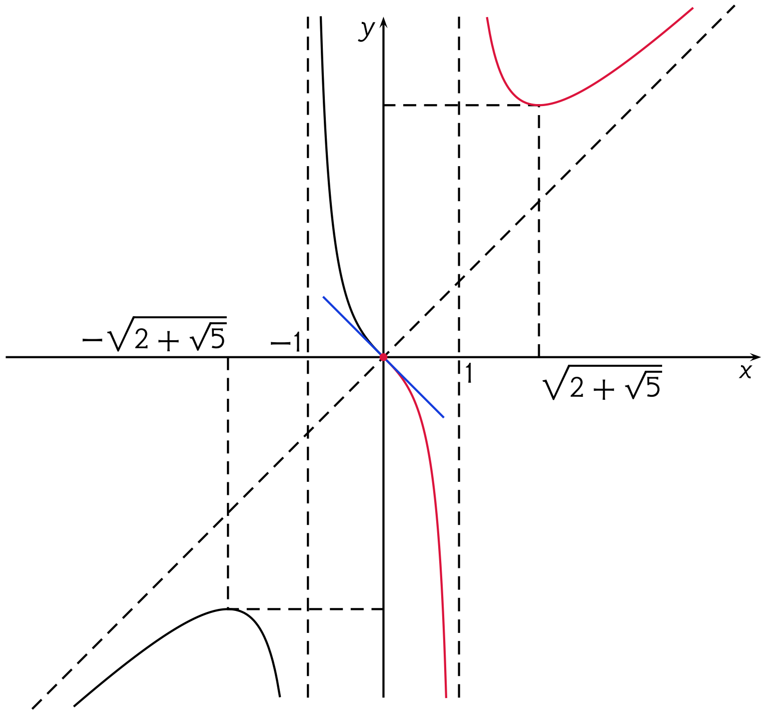
$$f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}.$$

Πεδίο ορισμού $I = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. f περιττή.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2-1)^2} \qquad f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2+\sqrt{5}}$		-1		0				$\sqrt{2+\sqrt{5}}$		$-\infty$
f'			0		//			$-$	//	$-$	0	$+$	
f''					//		0	$-$	//	$+$		$+$	
f		$-\infty$ $\nearrow$		$\searrow$ $-\infty$	//	$+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	//	$+\infty$ $\searrow$		$\nearrow$ $+\infty$	
			μ				κ				ε		



Παράδειγμα 12.12 Να μελετηθεί η συνάρτηση

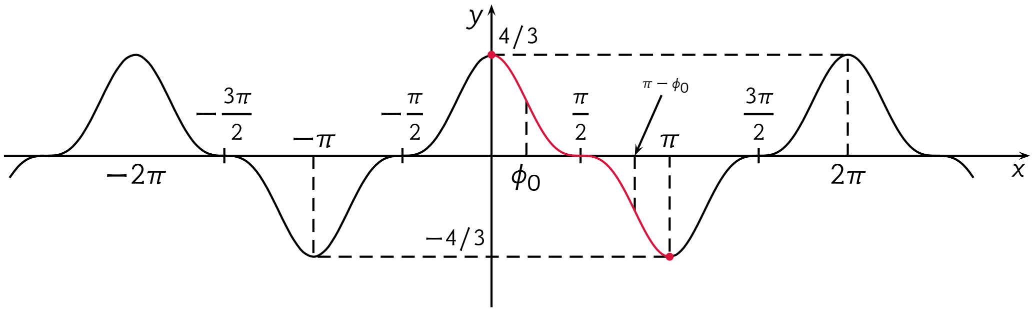
$$f(x) = \frac{4}{3}\cos^3 x.$$

Πεδίο ορισμού $I = \mathbb{R}$. Περιοδική με περίοδο 2π. Άρτια, οπότε τη μελετάμε στο $[0, \pi]$.

$$f'(x) = -4\sin x\cos^2 x \qquad f''(x) = -12\cos x\left(\cos x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(\cos x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Επειδή $0 < \sqrt{2/3} < 1$ υπάρχει $\phi_0 \in (0, \pi/2)$ ώστε $\cos\phi_0 = \sqrt{2/3}$ ($\phi = \arccos(\sqrt{2/3}) \simeq .6154797$). Οπότε η f'' έχει ρίζες τις ϕ_0, $\pi/2$, $\pi - \phi_0$.

x	0		ϕ_0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\phi_0$		π
f'	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0
f''	-4	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	-4
f	$\frac{4}{3}$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{4}{3}$
	μ		κ		κ		κ		ε


y
4/3
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\pi-\phi_0$
$\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
π
-2π
ϕ_0
2π
x
$-4/3$

Παράρτημα Α΄

limsup και liminf

Α΄.1 Το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων

Όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 6.37, μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ παρόλο που μπορεί να μην συγκλίνει έχει πάντα συγκλίνουσες υπακολουθίες αν σε αυτές συμπεριλάβουμε και εκείνες που τείνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ (αν η ακολουθία είναι φραγμένη έχει συγκλίνουσα υπακολουθία ενώ αν δεν είναι φραγμένη έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$).

Ας συμβολίσουμε με $\Upsilon(a_n)$—ή απλά με Υ αν είναι σαφές για ποια ακολουθία μιλάμε—το σύνολο όλων των ορίων των υπακολουθιών της a_n. Για παράδειγμα, αν $a_n = (-1)^n(1+1/n)$ τότε $\Upsilon(a_n) = \{-1, +1\}$. Φανερά, αν μια ακολουθία έχει όριο στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, κάθε υπακολουθία της τείνει στο όριο της ακολουθίας, οπότε το Υ είναι μονοσύνολο.

Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ακολουθίες των οποίων το σύνολο Υ είναι όλο το $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Μια τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία των ρητών αριθμών.

Πρόταση Α΄.1 *Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θέτουμε $s := \sup\Upsilon(a_n)$ και $i := \inf\Upsilon(a_n)$. Τότε $s, i \in \Upsilon(a_n)$, δηλαδή το σύνολο των υπακολουθιακών ορίων έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο στο $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Ισοδύναμα, υπάρχουν δυο υπακολουθίες της a_n που η μια τείνει στο s και η άλλη στο i*

Απόδειξη: Αν $s = +\infty$ τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει υπακολουθιακό όριο $s_N > N$ (αλλιώς όλα τα υπακολουθιακά όρια είναι μικρότερα ή ίσα του N οπότε και το s). Άρα υπάρχει όρος a_{k_N} της a_n ώστε $a_{k_N} > N$ (αλλιώς αν κάθε όρος της a_n είναι μικρότερος ή ίσος του N τότε η a_n έχει άνω φράγμα το N και δεν γίνεται να έχει υπακολουθία που να συγκλίνει στο $s_N > N$). Έτσι η υπακολουθία a_{k_N} τείνει στο $+\infty = s$. Άρα $s \in \Upsilon(a_n)$

Αν $s = -\infty$ τότε όλα τα υπακολουθιακά όρια της a_n είναι $-\infty$ οπότε $a_n \to -\infty = s$. Άρα $s \in \Upsilon(a_n)$

Έστω τώρα ότι $s \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει στοιχείο $s_n \in \Upsilon(a_n)$ με $s \geq s_n > s - 1/n$ από τον ορισμό του s ως supremum του $\Upsilon(a_n)$. Αφού το s_n είναι υπακολουθιακό όριο της a_n υπάρχει a_{k_n} όρος της a_n ώστε

$|s_n - a_{k_n}| < 1/n$. Έτσι, έχουμε

$$|a_{k_n} - s| \leq |a_{k_n} - s_n| + |s_n - s| = |a_{k_n} - s_n| + s - s_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \to 0.$$

Συνεπώς η υπακολουθία a_{k_n} της a_n συγκλίνει στο s. Δηλαδή $s \in \Upsilon(a_n)$. Ομοίως, $i \in \Upsilon(a_n)$. □

Ορισμός Α′.2 Τα $\sup \Upsilon(a_n)$ και $\inf \Upsilon(a_n)$ ονομάζονται lim sup και lim inf της ακολουθίας a_n ή *ανώτερο* (ή άνω) και *κατώτερο* (*ή κάτω*) *όριο* της ακολουθίας a_n ή *μέγιστο* και *ελάχιστο υπακολουθιακό όριο της* a_n αντίστοιχα. Γράφουμε

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \Upsilon(a_n) \quad \text{και} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \Upsilon(a_n),$$

ή απλούστερα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, αν $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$ τότε $\Upsilon = \{-1, +1\}$ οπότε $\limsup a_n = +1$ και $\liminf a_n = -1$.

Φανερά ισχύει πάντα η

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n, \tag{Α′.1}$$

αφού $\inf\{a_k \,:\, k \geq n\} \leq \sup\{a_k \,:\, k \geq n\}$.

Πρόταση Α′.3 *Κάθε ακολουθία a_n έχει όριο αν και μόνο αν*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

και η κοινή αυτή τιμή είναι το $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Απόδειξη: Αν η a_n έχει όριο το ℓ τότε $\Upsilon(a_n) = \{\ell\}$, αφού κάθε υπακολουθία έχει και αυτή το ίδιο όριο ℓ. Συνεπώς

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \Upsilon(a_n) = \ell = \sup \Upsilon(a_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Αντιστρόφως, αν $\ell := \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ τότε το $\Upsilon(a_n)$ είναι μονοσύνολο, το μονοσύνολο $\{\ell\}$, αφού το infimum και το supremum του $\Upsilon(a_n)$ συμπίπτουν. Η απόδειξη θα ήταν τετριμμένη αν ξέραμε ότι η a_n συγκλίνει, διότι η a_n είναι υπακολουθία του εαυτού της. Όμως δεν είναι εκ των προτέρων σαφές ότι αυτή συγκλίνει. Για αυτό καταφεύγουμε στο ακόλουθο επιχείρημα. Ας υποθέσουμε ότι η a_n δεν τείνει στο ℓ. Τότε η ακολουθία αυτή δεν είναι ακολουθία Cauchy. Συνεπώς υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $n > m \geq n_0$ ώστε $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. Εφαρμόζουμε το παραπάνω για $n_0 = 1$ και βρίσκουμε $n_1 > m_1 \geq 1$ ώστε $|a_{n_1} - a_{m_1}| \geq \varepsilon$. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο για $n_0 = n_1 + 1$ και βρίσκουμε $n_2 > m_2 \geq n_1 + 1$ ώστε $|a_{n_2} - a_{m_2}| \geq \varepsilon$. Επαναλαμβάνουμε το προηγούμενο για $n_0 = n_2 + 1$ κοκ. Έτσι βρίσκουμε δύο υπακολουθίες a_{n_k} και a_{m_k} ώστε $|a_{n_k} - a_{n_k}| \geq \varepsilon$.

Καθεμιά από τις ακολουθίες $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ και $(a_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ έχουν υπακολουθίες που τείνουν σε κάποιο όριο (είτε πραγματικό αριθμό αν είναι φραγμένες είτε κάποιο από τα $\pm\infty$ αν δεν είναι φραγμένες). Έστω ότι αυτά τα όρια είναι τα ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα. Τότε φανερά $|\ell_1 - \ell_2| \geq \varepsilon$ και ταυτόχρονα $\ell_1, \ell_2 \in \Upsilon(a_n)$ το οποίο είναι άτοπο, αφού το τελευταίο σύνολο είναι μονοσύνολο. □

Α′.2 Ιδιότητες των limsup και liminf

Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας ένα «τύπο» για τα lim sup και lim inf. Θεωρούμε μια ακολουθία a_n. Από αυτή ορίζουμε μια άλλη ακολουθία, την $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Φανερά η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα, διότι αν $n_1 > n_2$,

$$\{a_k : k \geq n_1\} \subseteq \{a_k : k \geq n_2\}$$

οπότε

$$b_{n_1} = \sup\{a_k : k \geq n_1\} \leq \sup\{a_k : k \geq n_2\} = b_{n_2}.$$

Άρα η b_n ως φθίνουσα είτε συγκλίνει (αν είναι φραγμένη) είτε αποκλίνει στο $-\infty$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Ομοίως, ορίζουμε την ακολουθία $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$. Φανερά η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα, διότι αν $n_1 > n_2$,

$$\{a_k : k \geq n_1\} \subseteq \{a_k : k \geq n_2\}$$

οπότε

$$c_{n_1} = \inf\{a_k : k \geq n_1\} \geq \inf\{a_k : k \geq n_2\} = c_{n_2}.$$

Άρα η c_n ως αύξουσα είτε συγκλίνει (αν είναι φραγμένη) είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} c_n \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Η επόμενη πρόταση μάς λέει ότι τα παραπάνω όρια είναι τα lim sup και lim inf της a_n αντίστοιχα.

Πρόταση Α′.4 *Για κάθε ακολουθία a_n ισχύει*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big)$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\big(\inf\{a_k : k \geq n\}\big).$$

Απόδειξη: Αν $\limsup a_n = \sup \Upsilon(a_n) = +\infty$ τότε υπάρχει υπακολουθία $a_{k_n} \to +\infty$ οπότε $\sup\{a_k : k \geq n\} = +\infty$ και άρα

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big) = +\infty = \limsup a_n.$$

Αν $\limsup a_n = \sup \Upsilon(a_n) = -\infty$ τότε $\Upsilon(a_n) = \{-\infty\}$ δηλαδή $a_n \to -\infty$. Έτσι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε

$n \geq n_0$ να ισχύει $a_n < -M$. Συνεπώς $\sup\{a_k : k \geq n\} \leq -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big) = -\infty = \limsup a_n.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\limsup a_n = s \in \mathbb{R}$, και έστω ότι η υπακολουθία a_{k_n} συγκλίνει στο s (Πρόταση Α΄.1). Έτσι για κάθε $k_n \geq n$ ισχύει $a_{k_n} \in \{a_k : k \geq n\}$ οπότε

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq a_{k_n}.$$

Παίρνουμε τώρα όριο ως προς n για να καταλήξουμε στην

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big) \geq s.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, εργαζόμαστε με απαγωγή στο άτοπο. Θέτουμε

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\big(\sup\{a_k : k \geq n\}\big),$$

υποθέτουμε ότι $\ell > s$, και εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = (\ell - s)/2 > 0$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\Big|\sup\{a_k : k \geq n\} - \ell\Big| < \frac{\ell - s}{2}.$$

Ανοίγοντας την απόλυτη τιμή και προσθέτοντας ℓ προκύπτει ότι

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \geq \frac{\ell + s}{2},$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα υπάρχει υπακολουθία a_{k_n} της a_n ώστε $a_{k_n} \geq (\ell + s)/2$. Περνώντας σε μια συγκλίνουσα υπακολουθία βρίσκουμε υπακολουθιακό όριο μεγαλύτερο του $(\ell + s)/2$, δηλαδή γνησίως μεγαλύτερο του s, το οποίο είναι άτοπο.

Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση του $\liminf$. □

Πρόταση Α΄.5 *Αν για δυο ακολουθίες a_n και b_n υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n \leq b_n$, τότε*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n$$

και

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση από την Πρόταση Α΄.4, αφού για $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$\sup\{a_k : k \geq n\} \leq \sup\{b_k : k \geq n\}$$

και

$$\inf\{a_k : k \geq n\} \leq \inf\{b_k : k \geq n\}.$$

□

Πρόταση Α′.6 *Για κάθε ακολουθία $a_n > 0$ ισχύει*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Απόδειξη: Η δεύτερη ανισότητα στη ζητούμενη είναι ήδη γνωστή (σχέση (Α′.1)) Η πρώτη ανισότητα έχει την ίδια απόδειξη με την τρίτη, οπότε θα αποδείξουμε μόνο την τρίτη.

Θέτουμε $\ell = \limsup(a_{n+1}/a_n)$ και θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Έτσι, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\sup\left\{\frac{a_{k+1}}{a_k} \,:\, k \geq n\right\} \leq \ell + \varepsilon.$$

Άρα αν $n = n_0$ ισχύει

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \ell + \varepsilon, \tag{Α′.2}$$

για κάθε $k \geq n_0$. Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (Α′.2) για $k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n-1$ για κάθε n με $n - 1 \geq n_0$, παίρνουμε

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0},$$

αφού στα αριστερά έχουμε $n - n_0$ κλάσματα. Μετά από τις διαγραφές στα αριστερά παίρνουμε ότι $a_n/a_{n_0} \leq (\ell + \varepsilon)^{n-n_0}$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (\ell + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}}.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0 + 1$

$$\sup\left\{\sqrt[k]{a_k} \,:\, k \geq n\right\} \leq (\ell + \varepsilon) \sup\left\{\sqrt[k]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} \,:\, k \geq n\right\}.$$

Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\sqrt[k]{a_k} \,:\, k \geq n\right\}\right) \leq \ell + \varepsilon,$$

διότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n_0}/(\ell + \varepsilon)^{n_0}}$ υπάρχει και ισούται με 1, οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sup\left\{\sqrt[k]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} \,:\, k \geq n\right\}\right) &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(\ell + \varepsilon)^{n_0}}} = 1,\end{aligned}$$

από την Πρόταση Α′.3.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon$. Τέλος, αφήνοντας $\varepsilon \to 0^+$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Ασκήσεις

Άσκηση Α′.2.1. Γράψτε τις λεπτομέρειες για την απόδειξη της ανισότητας

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

για κάθε ακολουθία $a_n > 0$.

Άσκηση Α′.2.2. Αποδείξτε ότι και τα τέσσερα όρια της Πρότασης Α′.6 μπορεί να είναι διαφορετικά, υπολογίζοντάς τα για την ακολουθία

$$a_n = 2^{(-1)^n n - n},$$

και δείχνοντας ότι

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}, \quad \limsup \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad \text{και} \quad \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty.$$

Παράρτημα Β′

Ορισμός του συνόλου $\mathbb{R}$

Ο ορισμός του $\mathbb{R}$ ξεκινάει με τη δουλειά του Ευδόξου όπως αποτυπώνεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, στο Βιβλίο 5, Ορισμός 5 (δείτε [2]). Στα μαθηματικά της εποχής η λέξη «αριθμός» χρησιμοποιόταν για τους φυσικούς αριθμούς. Για τους ρητούς έλεγαν «λόγος αριθμών». Για τις ποσότητες (είτε μήκη, είτε εμβαδά, είτε όγκους) που δεν είναι ρητές χρησιμοποιόταν η λέξη «μέγεθος». Σήμερα τα «μεγέθη» της αρχαίας περιόδου αντιστοιχούν στους πραγματικούς αριθμούς και ο Εύδοξος δίνει τον ορισμό πότε δυο «μεγέθη» θεωρούνται ίσα. Γράφει λοιπόν:

> (ορ. 5) Δυο λόγοι μεγεθών α/β και γ/δ λέγονται ίσοι όταν για οποιουσδήποτε αριθμούς μ, ν
>
> $$\left\{\begin{array}{l} \text{είτε ισχύει } \mu\alpha > \nu\beta \text{ και } \mu\gamma > \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha = \nu\beta \text{ και } \mu\gamma = \nu\delta \\ \text{είτε ισχύει } \mu\alpha < \nu\beta \text{ και } \mu\gamma < \nu\delta. \end{array}\right\}$$

Δηλαδή τα μεγέθη α και γ (για $\beta = \delta = 1$) λέγονται ίσα αν για οποιουσδήποτε (φυσικούς) αριθμούς μ, ν ισχύει είτε $\mu/\nu < \alpha$ και $\mu/\nu < \gamma$ είτε $\mu/\nu = \alpha$ και $\mu/\nu = \gamma$ είτε $\mu/\nu > \alpha$ και $\mu/\nu > \gamma$. Σε σημερινή ορολογία, οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α και γ ταυτίζονται αν τα σύνολα

$$\{\mu/\nu \,:\, \mu,\nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu < \alpha\} \cup \{\mu/\nu \,:\, \mu,\nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu > \alpha\}$$

και

$$\{\mu/\nu \,:\, \mu,\nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu < \gamma\} \cup \{\mu/\nu \,:\, \mu,\nu \in \mathbb{N} \text{ και } \mu/\nu > \gamma\}$$

ταυτίζονται. Αυτά τα σύνολα ονομάζονται σήμερα «τομές» του $\mathbb{R}$ και χρησιμοποιήθηκαν από τον Dedekind εννοιολογικά αντίστροφα για να ορίσουν το $\mathbb{R}$. Δηλαδή ο Dedekind, παίρνει τον ορισμό του Ευδόξου και σκεπτόμενος «αντίστροφα» λέει ορίζω το $\mathbb{R}$ ως το σύνολο όλων των τομών του $\mathbb{Q}$. Έτσι οι τομές αυτές σήμερα ονομάζονται «τομές Dedekind» και ο αυστηρός ορισμός του $\mathbb{R}$ αποδίδεται σε αυτόν. Οφείλουμε να σημειώσουμε ότι στο έργο του Dedekind απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά στα «Στοιχεία» ή στον Εύδοξο, κοινή πρακτική για την εποχή του. Τα βιβλία της αρχαίας περιόδου, κλειδωμένα στα μοναστήρια και τις εκκλησιαστικές βιβλιοθήκες ήταν ανυπεράσπιστα στις λεηλασίες. Η σύγχρονη όμως Μαθηματική κοινότητα, δεν ανέχεται την απάλειψη των αναφορών, και συνεπώς η αναφορά στον Εύδοξο και στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι μια οφειλή που έχει καθυστερήσει **...**αρκετούς αιώνες.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε μια μικρή παραλλαγή για τον ορισμό του $\mathbb{R}$ αφού μόνο το πρώτο σύνολο, το $\{\mu/\nu \,:\, \mu,\nu \in \mathbb{N}$ και $\mu/\nu < \alpha\}$ αρκεί για να χαρακτηρίσει τον πραγματικό αριθμό α.

Β′.1 Ορισμός του $\mathbb{R}$

Ορισμός Β′.1 Ονομάζουμε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ *αρχικό τμήμα* αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε $p \in A$ υπάρχει $q \in A$ ώστε $p < q$.

(ii) Αν $r \in \mathbb{Q}$ και $r < p$ τότε $r \in A$.

Παρατηρούμε ότι στο $\mathbb{Q}$ υπάρχουν αρχικά τμήματα. Για παράδειγμα το σύνολο $\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < r\}$ είναι αρχικό τμήμα του $\mathbb{Q}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Ένα άλλο αρχικό τμήμα είναι και το $\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \leq 0$ ή $x^2 < r\}$ για κάθε $r > 0$ με $r \in \mathbb{Q}$. Η απόδειξη ότι αυτά τα σύνολα είναι αρχικά τμήματα απαιτεί την Αρχή του Αρχιμήδη στο $\mathbb{Q}$ (δείτε Ενότητα 1.1 σελίδα 6) και αφήνεται ως άσκηση.

Ορισμός Β′.2 Ορίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών να είναι το σύνολο όλων των αρχικών τμημάτων του $\mathbb{Q}$. Δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{\alpha \,:\, \alpha \text{ αρχικό τμήμα του } \mathbb{Q}\}.$$

Με αυτόν τον εκ πρώτης όψεως «περίεργο» ορισμό πράγματι ορίσαμε τους πραγματικούς αριθμούς να είναι σύνολα και συγκεκριμένα αρχικά τμήματα του $\mathbb{Q}$. Έτσι κάθε ρητός r—όπως και το 0 και το 1—τον ταυτίζουμε με το σύνολο $\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < r\}$.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε ελληνικά γράμματα για τα αρχικά τμήματα του $\mathbb{Q}$ (δηλαδή τους πραγματικούς αριθμούς!). Ορίζουμε τώρα στο $\mathbb{R}$ τη διάταξη και τις πράξεις.

- Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\alpha \subset \beta$ $(\alpha \neq \beta)$. Επίσης $\alpha \leq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha \subseteq \beta$). Τέλος $\alpha > \beta$ αν και μόνο αν $\alpha \supset \beta$ και $\alpha \geq \beta$ αν και μόνο αν $\alpha \supseteq \beta$.
- $\alpha + \beta := \{r + s \,:\, r \in \alpha$ και $s \in \beta\}$
- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ ορίζουμε

$$\alpha\beta := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, r < 0\} \cup \{rs \,:\, r, s > 0,\ r \in \alpha,\ s \in \beta\}.$$

- Αν α ορίζουμε

$$-a = \{r \in \mathbb{Q} \,:\, \exists s \in \mathbb{Q},\ s > 0 \text{ με } -r - s \notin \alpha\}.$$

- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ ορίζουμε $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ ορίζουμε $\alpha\beta = -(-\alpha)\beta$ και ομοίως, αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ ορίζουμε $\alpha\beta = -\alpha(-\beta)$.
- Για κάθε $\alpha > 0$ ορίζουμε τον

$$\frac{1}{\alpha} = \{r \in \mathbb{Q} \,:\, r < 0 \text{ ή } \exists s \in \mathbb{Q} \text{ ώστε } \frac{1}{sr} \notin \alpha\}.$$

Για κάθε $\alpha < 0$ ορίζουμε $1/\alpha = -(1/(-\alpha))$.

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι τα παραπάνω ορίζουν τις πράξεις και τη διάταξη στο $\mathbb{R}$ με τρόπο που ικανοποιούνται όλες οι γνωστές ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης ώστε το $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ να είναι ένα διατεταγμένο σώμα με το 0 ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης (δηλαδή $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$) και το 1 ουδέτερο στοιχεία του πολλαπλασιασμού (δηλαδή $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$). Οι αποδείξεις είναι απλές και για αυτό παραλείπονται και αφήνονται ως άσκηση.

Θεώρημα B′.3 (Πληρότητα του $\mathbb{R}$) *Το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη διάταξη $\leq$ είναι πλήρες, δηλαδή κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει supremum και κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο B του $\mathbb{R}$ έχει infimum.*

Απόδειξη: Αν το A είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ θέτουμε $\sigma = \cup_{\alpha \in A} \alpha$.

- Ισχυρισμός 1: Το σ είναι αρχικό τμήμα του $\mathbb{Q}$.

[Αν $r \in \sigma$ ένας ρητός και $s \in \mathbb{Q}$ με $s < r$, τότε επειδή $r \in \cup_{\alpha \in A} \alpha$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha_r \in A$ ώστε $r \in \alpha_r$. Αλλά το α_r είναι αρχικό τμήμα, συνεπώς $s \in \alpha_r \subseteq \sigma$.

Επιπλέον, πάλι αφού το α_r είναι αρχικό τμήμα, υπάρχει $t \in \mathbb{Q}$ ώστε $r < t$ και $t \in \alpha_r \subseteq \sigma$. Συνεπώς το σ είναι αρχικό τμήμα, δηλαδή πραγματικός αριθμός.]

- Ισχυρισμός 2: Το σ είναι άνω φράγμα του A.

[Φανερά, για κάθε $\beta \in A$ ισχύει $\beta \subseteq \cup_{\alpha \in A} \alpha = \sigma$, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό της διάταξης, $\beta \leq \sigma$.]

- Ισχυρισμός 3: Το σ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

[Αν σ_1 ένα άλλο άνω φράγμα του A θα πρέπει να ισχύει $\alpha \leq \sigma_1$ για κάθε $\alpha \in A$. Άρα θα ισχύει και $\cup_{\alpha \in A} \alpha \subseteq \sigma_1$, συνεπώς $\sigma \subseteq \sigma_1$, δηλαδή $\sigma \leq \sigma_1$.]

Ομοίως αποδεικνύουμε την ύπαρξη του infimum για τα κάτω φραγμένα σύνολα. Απλώς πρέπει να προσέξουμε το εξής: η τομή αρχικών τμημάτων δεν είναι απαραίτητα αρχικό τμήμα. Για παράδειγμα, τα σύνολα

$(-\infty, 1/n) \cap \mathbb{Q}$ είναι αρχικά τμήματα αλλά η τομή τους είναι το σύνολο $(-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$ που δεν είναι αρχικό τμήμα (αφού $0 \in (-\infty, 0]$ αλλά δεν υπάρχει ρητός $s \in (-\infty, 0]$ ώστε $0 < s$). Έτσι ορίζουμε το infimum του κάτω φραγμένου και μη κενού συνόλου B ως εξής: θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \alpha \leq \beta \text{ για κάθε } \beta \in B\}.$$

Το A είναι καλά ορισμένο (δηλαδή ο ορισμός του έχει νόημα) αφού το B ως μη κενό έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο. Το A είναι μη κενό διότι αφού το B είναι κάτω φραγμένο υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $M \leq \beta$ για κάθε $\beta \in B$. Φανερά λοιπόν $M \in A$. Θέτουμε $\iota = \sup A$ και αποδεικνύουμε ότι το ι είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B. Πραγματι, το ι είναι αρχικό τμήμα όπως ήδη δείξαμε για το supremum ενός συνόλου παραπάνω.

• Ισχυρισμός 4. Το ι είναι κάτω φράγμα του B.

[Κάθε $\alpha \in A$ ικανοποιεί από τον ορισμό του A την $\alpha \subseteq \beta$ για κάθε $\beta \in B$. Άρα $\iota = \cup_{\alpha \in A} \subseteq \beta$, δηλαδή $\iota \leq \beta$ για κάθε $\beta \in B$.]

• Ισχυρισμός 5. Το ι είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B.

[Έστω ι_1 ένα άλλο κάτω φράγμα του B. Τότε $\iota_1 \leq \beta$ για κάθε $\beta \in B$, οπότε $\iota_1 \in A$. Άρα $\iota_1 \subseteq \cup_{\alpha \in A} = \iota$.]

Με τον τελευταίο ισχυρισμό ολοκληρώθηκε η απόδειξη. □

Παράρτημα Γ΄

Ο e είναι άρρητος

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ισχύει ο τύπος

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Κάτι πιο ισχυρό ισχύει εδώ, δηλαδή υπάρχει ανάλογη με αυτήν περιγραφή για την ποσότητα e^x για καθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά αυτό θα το δούμε όταν θα ασχοληθούμε με σειρές στον Απειρστικό Λογισμό 2.

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω τύπο, αναπτύσσουμε με το διωνυμικό ανάπτυγμα το $(1+1/n)^n$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{1}{n}+\frac{n!}{2!(n-1)!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n!}{n!0!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots \\
&\qquad \ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots \\
&\qquad \ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} =: s_n.
\end{aligned}$$

Η s_n είναι φανερά (γνησίως) αύξουσα (αφού $s_{n+1} = s_n + 1/(n+1)! > s_n$) και είναι και άνω φραγμένη, διότι $2^n \leq n!$ για κάθε $n \geq 4$ οπότε

$$s_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n} \leq 3-\frac{1}{2^3} < 3.$$

Άρα η s_n είναι συγκλίνουσα (ως αύξουσα και άνω φραγμένη), οπότε παίρνοντας όρια βρίσκουμε ότι

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \lim s_n.$$

Για την αντίστροφη, από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι αν σταθεροποιήσουμε ένα $k < n$ τότε ισχύει

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

για κάθε $n \geq k$. Αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο συμπεραίνουμε ότι $e \geq s_k$, αφού όλες οι προηγούμενες παρενθέσεις συγκλίνουν στο 1 καθώς $n \to \infty$ με το k *σταθερό*. Αφήνοντας τώρα το k να πάει στο άπειρο βρίσκουμε $e \geq \lim_{k\to\infty} s_k$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο e είναι ρητός, και έστω ότι $e = k/m$ με k, $m \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι $m \geq 2$, αφού $2 < e < 3$. Θεωρούμε τον αριθμό

$$x = m!(e - s_m) = m!\left(\frac{k}{m}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)\right).$$

Φανερά $x > 0$ (αφού $e > s_m$). Επίσης επιμερίζοντας το $m!$ στην παραπάνω συμπαιρένουμε αμέσως ότι $x \in \mathbb{N}$. Άρα θα καταλήξουμε σε άτοπο αν αποδείξουμε ότι $x < 1$, αφού ανάμεσα στο 0 και στο 1 δεν υπάρχουν φυσικοί ακέραιοι. Έχουμε

$$\begin{aligned}
x &= m!\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)-s_m\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} m!\left(\frac{1}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+2)!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\ldots\right.\\
&\qquad\qquad \left.\ldots+\frac{1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+(n-m))}\right)\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^{n-m}}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n-m+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα ο e είναι άρρητος.

Βιβλιογραφία

[1] Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου Α'*, ηλεκτρονική έκδοση https://myria.math.aegean.gr/aem

[2] Ευκλείδης ο Αλεξανδρεύς, *Στοιχεία*, ηλεκτρονική έκδοση
`https://myria.math.aegean.gr/aem`

---

[3] Απόστολος Γιαννόπουλος, *Απειροστικός Λογισμός I & II*, (Σημειώσεις Μαθήματος), http://users.uoa.gr/~apgiannop/notes.html

[4] Δημήτριος Κάππος, *Μαθήματα Αναλύσεως, Απειροστικός Λογισμός Α*.

[5] Στυλιανός Νεγρεπόντης, Σταύρος Γιωτόπουλος, Ευστάθιος Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Συμμετρία 1997. 2004.

[6] Σωτήρης Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός I*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων 2000. 2004.

[7] Αντώνης Τσολομύτης, *Σύνολα και Αριθμοί*, Leader Books 2004.

---

[8] Robert Bartle, *The elements of Real Analysis*, 2nd ed. John Wiley & Sons 1989

[9] Konrad Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, 1956.

[10] Thomas William Körner, *A companion to Analysis*, Graduate Studies in Mathematics vol. 62, American Mathematical Society, 2004.

[11] Serge Lang, *A first Course in Calculus*, 5th ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag 1986.

[12] Pierre Simon Laplace, *Memoir on the probability of causes of events*, tome sixième of *Mémoires de Mathématique et de Physique*. English translation by S. M. Stigler, Statist. Sci., 1(19):364–378. 1986.

[13] D. J. Newman, *Simple analytic proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 693–696.

[14] Reinhold Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, volume 172 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1998.

[15] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3^{rd} edition, McGraw Hill International Editions 1976.

[16] Karl Stromberg, *An introduction to Classical Real Analysis*, Chapman & Hall, 1996.