Αντώνης Τσολομύτης

Γραμμική Άλγεβρα

μια αναλυτική και γεωμετρική προσέγγιση

Δεν υπάρχει σχεδόν καμία θεωρία η οποία να είναι πιο στοιχειώδης από τη γραμμική άλγεβρα, παρά το γεγονός ότι γενιές καθηγητών και συγγραφέων βιβλίων έχουν κρύψει την απλότητά της με εξωφρενικούς υπολογισμούς με πίνακες.—Jean Dieudonné

(Treatise on Analysis Vol.1, Appendix on Linear Algebra)

Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Τμήμα Μαθηματικών
Σάμος 2018
http://myria.math.aegean.gr/~atsol

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Υπάρχουν εκατοντάδες βιβλία γραμμικής άλγεβρας στη διεθνή βιβλιογραφία και αρκετά βιβλία στην ελληνική, και πολλά από αυτά είναι πραγματικά εξαιρετικά. Όμως τα περισσότερα από αυτά τα βιβλία παρουσιάζουν με τέτοιο τρόπο το υλικό που τελικά καταλήγουν να βάζουν έμφαση (τουλάχιστον στα μάτια των φοιτητών και φοιτητριών) στο «πώς;». Οι σημειώσεις αυτές αντιθέτως στοχεύουν στο *είναι* της Γραμμικής Άλγεβρας. Έτσι, για αυτές τις σημειώσεις πίνακας *δεν είναι* μια «ορθογώνια διάταξη στοιχείων». Ορίζουσα *δεν είναι* το αποτέλεσμα των γνωστών περίτεχνων πράξεων με τα στοιχεία του πίνακα ή μια «εναλλάσσουσα πλειογραμμική μορφή». Ίχνος *δεν είναι* το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου. Το ότι κάθε ισομετρία στον $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, *δεν είναι* το αποτέλεσμα ευφυών πράξεων με το εσωτερικό γινόμενο αλλά μια εντελώς προφανής συνέπεια του αντίστροφου του Πυθαγορείου Θεωρήματος, βεβαίως γνωστό από την αρχαιότητα. Και ο κατάλογος αυτών των «*δεν είναι*» συνεχίζεται σχεδόν σε όλα τα θέματα που πραγματεύεται η Γραμμική Άλγεβρα σε μια προσπάθεια να δοθεί νόημα σε περίτεχνες αλγεβρικές πράξεις—πράξεις που κατά τη γνώμη μου, και συμφωνώντας με τον Dieudonné, κρύβουν το πραγματικά απλό νόημα συχνά με απίστευτα μεγάλη επιτυχία.

Στα μαθήματα Ανάλυσης των προχωρημένων ετών οι φοιτητές μας έρχονται γνωρίζοντας επαρκώς να κάνουν τις πράξεις, αλλά δεν γνωρίζουν ακριβώς τι κάνουν. Αυτό βάζει εμπόδια στη γρήγορη πρόοδό τους σε σημαντικούς κλάδους της Ανάλυσης. Νομίζω ότι οι φοιτητές και φοιτήτριες που κλίνουν προς την Ανάλυση πρέπει να παίρνουν τα απαραίτητα εφόδια από την Άλγεβρα, και αντιστρόφως: τα παιδιά που κλίνουν προς την Άλγεβρα πρέπει να εφοδιάζονται σωστά και από την Ανάλυση. Οι κλάδοι είναι πλήρως συνδεδεμένοι μεταξύ τους—είναι Μαθηματικά—και δεν είναι απομονωμένοι ο ένας από τον άλλον. Η παρουσίαση του πώς ο ένας κλάδος συνδέεται με τον άλλον όχι μόνο δεν πρέπει να κρύβεται αλλά πρέπει να «διαφημίζεται» με κάθε πρόσφορο τρόπο. Γιατί αυτό αυξάνει τα κίνητρα για την μελέτη των Μαθηματικών και βελτιώνει την απόδοση των παιδιών.

Οι σημειώσεις αυτές προέκυψαν όταν φοιτητές και φοιτήτριες με ενδιαφέρον στο να μάθουν άρχισαν να με ρωτούν διάφορα πράγματα για αυτά τα θέματα. Γρήγορα συνειδητοποίησαν με έκπληξη ότι υπάρχει ένας υπέροχος κρυμμένος κόσμος πίσω από τις δυσχερείς πράξεις αυτού του μαθήματος και μου ζήτησαν να γράψω το υλικό «αλλιώς».

Θέλω να ευχαριστήσω για τις συζητήσεις και τις παρατηρήσεις τους πολλούς φοιτητές και πολλές φοιτήτριές μου όπως την Ευφροσύνη Χασιώτη, τη Τζένη Κοντού και τη Φρειδερίκη Παπαγεωργίου. Ιδιαίτερες ευχαριστίες πρέπει να πάνε στον Μάνο Μπομπολάκη, μεταξύ άλλων για την ακομπλεξάριστη και υγιή επιμονή του στο «δεν καταλαβαίνω» και να καλέσω τους φοιτητές και φοιτήτριες να απαιτούν εξηγήσεις αντί να δέχονται παθητικά τα μαθήματα.

Αντώνης Τσολομύτης
Σάμος 2018

Μέρος I

The name of the game

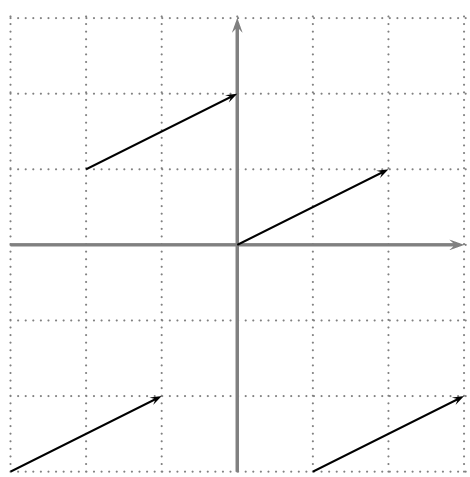
Κεφάλαιο 1

Διανύσματα

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Αρχικά θα μιλήσουμε για διανύσματα στο επίπεδο, δηλαδή στο $\mathbb{R}^2$.

Το πώς αντιλαμβανόμαστε την έννοια του διανύσματος έχει να κάνει και με το από πια επιστημονική περιοχή ερχόμαστε. Για παράδειγμα, ο Φυσικός φαντάζεται το διάνυσμα ως ένα βέλος το οποίο έχει μήκος και κατεύθυνση και μπορεί να το μετακινεί ελεύθερα στον χώρο αρκεί να το μετακινεί παράλληλα και να διατηρεί μήκος και κατεύθυνση.



Όλα τα βέλη του παραπάνω σχήματος είναι το ο ίδιο διάνυσμα. Ο Φυσικός τα μετακινεί ελεύθερα στο χώρο διατηρώντας κατεύθυνση και μήκος.

Για τον οικονομολόγο ή για τον άνθρωπο της πληροφορικής, διάνυσμα είναι μια λίστα, ένας κατάλογος, από αριθμούς. Κάτι σαν τα

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} -2.000 \\ 3.000 \end{pmatrix}.$$

Για τον Μαθηματικό όμως τα διανύσματα είναι οποιαδήποτε αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο V στο οποίο μπορεί να γίνει πρόσθεση μεταξύ τους και πολλαπλασιασμός με αριθμό, πράξεις που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο V με αυτές τις πράξεις λέγεται διανυσματικός χώρος. Αυστηρά μιλώντας έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.1 Ο V λέγεται διανυσματικός χώρος αν

- για κάθε $x, y \in V$ ορίζεται το άθροισμα $x + y$ ώστε να ανήκει στο σύνολο V και η πρόσθεση αυτή είναι τέτοια ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες

  1. $x + y = y + x$ και $(x + y) + z = (x + y) + z$,
  2. υπάρχει διάνυσμα $0 \in V$ ώστε $x + 0 = 0 + x = x$ και
  3. για κάθε $x \in V$ υπάρχει διάνυσμα $x' \in V$ ώστε $x' + x = x + x' = 0$. Το x' το συμβολίζουμε με $-x$.

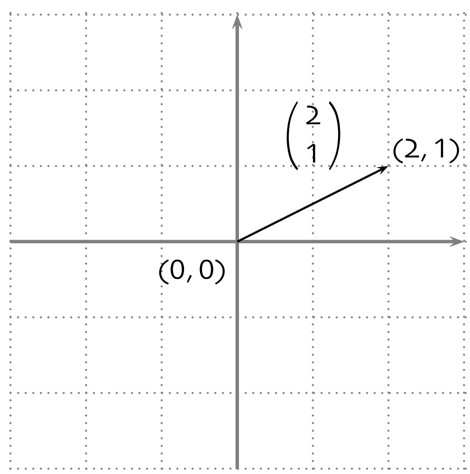
- για κάθε $x \in V$ και για κάθε αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζεται το γινόμενο $\lambda \cdot x \in V$ ώστε αυτός ο πολλαπλασιασμός να έχει τις ιδιότητες

  1. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$,
  2. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,
  3. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
  4. $1 \cdot x = x$,

  για κάθε $x, y \in V$ και για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Το $\mathbb{R}$ στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να το αλλάξουμε σε άλλα σύνολα όπως το $\mathbb{C}$ και τότε ο διανυσματικός χώρος αλλάζει από το να λέγεται «πραγματικός διανυσματικός χώρος» σε «μιγαδικός διανυσματικός χώρος». Και άλλα σύνολα μπορούν να παίξουν τον ρόλο του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$ αλλά αυτό το θέμα δεν θα μας απασχολήσει. Για να απλοποιηθεί ο συμβολισμός στο εξής θα γράφουμε λx αντί για $\lambda \cdot x$.

Ας δούμε με ποια έννοια το επίπεδο είναι ένας διανυσματικός χώρος. Θεωρούμε λοιπόν το επίπεδο με ένα σύστημα αξόνων. Για εμάς τους Μαθηματικούς όλα τα διανύσματα (που μπορούμε να τα φανταζόμαστε σαν βέλη) έχουν αρχή την αρχή των αξόνων. Έτσι με αυτή την παραδοχή (που δε θα άρεσε στους Φυσικούς) κάθε διάνυσμα περιγράφεται από τις συντεταγμένες του τέλους του. Για να ξεχωρίζουμε το σημείο $(2,1)$ του επιπέδου από το διάνυσμα που ξεκινάει από το $(0,0)$ και καταλήγει στο σημείο $(2,1)$ θα γράφουμε σε στήλες. Έτσι το $(2,1)$ είναι σημείο, αλλά το $\binom{2}{1}$ είναι το διάνυσμα (βέλος) με αρχή το $(0,0)$ και τέλος το $(2,1)$.



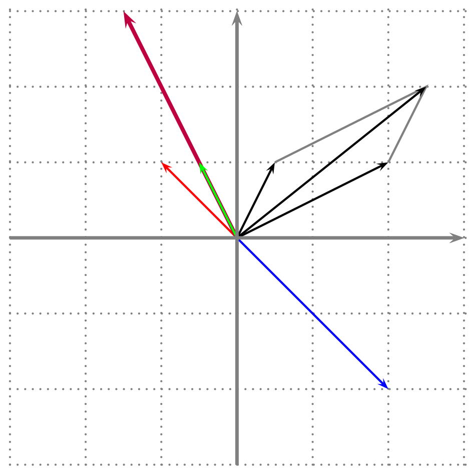
Υπ' αυτή την έννοια θα μπορούσε να πει κανείς ότι δεν υπάρχει λόγος να διαχωρίσουμε τα διανύσματα από τα σημεία, αφού ακόμα και αν γράφαμε $(2,1)$ για το διάνυσμα θα ήταν σαφές ότι μιλάμε για το διάνυσμα $\binom{2}{1}$. Όμως θα επιμείνουμε στον διαχωρισμό αυτό σε πρώτη φάση για πρακτικούς λόγους. Αργότερα θα επανεξετάσουμε το θέμα.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό κατά συντεταγμένη, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} \text{ και } \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix},$$

και εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου είναι διανυσματικός χώρος, δηλαδή ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 1.1.1 (Άσκηση).

Δεν κάνουμε τις πράξεις και το αφήσαμε ως άσκηση, διότι εμάς εδώ μας ενδιαφέρει να καταλάβουμε τι συμβαίνει στο επίπεδο. Αν προσθέσετε τα διανύσματα $\binom{2}{1}$ και $\binom{1/2}{1}$ θα προκύψει το $\binom{5/2}{2}$. Το ενδιαφέρον είναι ότι το διάνυσμα που προκύπτει δεν είναι παρά η διαγώνιος από το $(0,0)$ του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα που προσθέτουμε όπως φαίνεται στο σχήμα. Και αυτό δεν είναι τυχαίο για τους συγκεκριμένους αριθμούς, αλλά ισχύει για οποιαδήποτε δύο διανύσματα προσθέτουμε (Άσκηση).



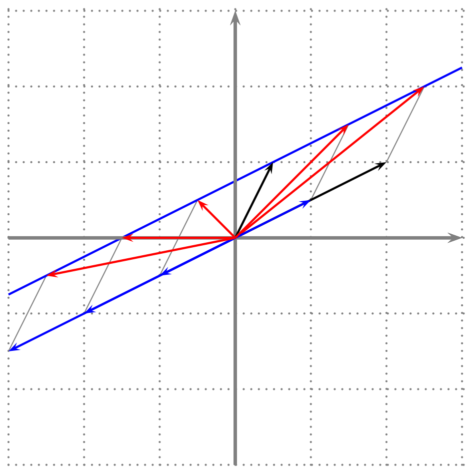
Ενώ ο πολλαπλασιασμός με αριθμό δεν κάνει τίποτα άλλο από το να μεγεθύνει ή να μικραίνει το μήκος του διανύσματος ή να του αλλάζει και φορά αν πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό. Στο παραπάνω σχήμα, το μπλε διάνυσμα είναι -2 φορές το κόκκινο και το μωβ 3 φορές το πράσινο.

1.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Το άθροισμα δύο ή περισσότερων διανυσμάτων με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται *γραμμικός συνδυασμός*. Δηλαδή γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων u, v είναι παραστάσεις της μορφής

$$\lambda u + \mu v$$

για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ο λόγος για τον οποίο οι παραστάσεις $\lambda u + \mu v$ ονομάζονται γραμμικές είναι ότι αν αφήσουμε το λ ή το μ να αλλάζει τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$, τότε το $\lambda u + \mu v$ παράγει μια ευθεία στον χώρο που βρίσκονται τα διανύσματα. Αν για παράδειγμα πάρουμε στο $\mathbb{R}^2$ τα $u = \binom{2}{1}$ και $v = \binom{1/2}{1}$ και σχηματίσουμε τα αθροίσματα $\lambda u + v$ (εδώ το μ είναι ίσο με 1) τότε αυτά σχηματίζουν μια ευθεία που περνάει από το σημείο τερματισμού του v και είναι παράλληλη με το u, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (τα αποτελέσματα του γραμμικού συνδυασμού εμφανίζονται με κόκκινο και με μπλε η παραγόμενη ευθεία και τα πολλαπλάσια του u).



Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει όταν στον γραμμικό συνδυασμό $\lambda u + \mu v$ σταθεροποιήσουμε το λ και επιτρέψουμε στο μ να πάρει όλες τις τιμές στο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση θα παραχθεί μια ευθεία που περνάει από το σημείο τερματισμού του λu και είναι παράλληλη στο v.

1.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Τι θα συμβεί όμως αν αφήσουμε και τις δύο παραμέτρους ελεύθερες; Τι διανύσματα παίρνουμε από τον συνδυασμό $\lambda u + \mu v$ όταν τα λ και μ πάρουν όλες τις δυνατές τιμές στο $\mathbb{R}$; Είναι φανερό ότι σε αυτή την περίπτωση, αν τα u και v δεν είναι στην ίδια ευθεία τότε θα πάρουμε οποιοδήποτε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$. Αν όμως τα u και v είναι συνευθειακά τότε τα μόνα διανύσματα που μπορούμε να πάρουμε από τους γραμμικούς συνδυασμούς είναι πάνω στην κοινή ευθεία των u και v. Πράγματι, αν τα u και v είναι συνευθειακά (και το u δεν είναι το μηδέν) τότε υπάρχει ένα $t \in \mathbb{R}$ ώστε $v = tu$. Οπότε

$$\lambda u + \mu v = \lambda u + \mu(tu) = (\lambda + \mu t)u,$$

δηλαδή ο γραμμικός αυτός συνδυασμός είναι πάνω στην ευθεία του u, και συνεπώς δεν γίνεται να πάρουμε οποιοδήποτε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$.

Στην περίπτωση που τα u και v δεν γίνεται να παράγουν με γραμμικούς συνδυασμούς όλο το $\mathbb{R}^2$ τότε λέμε ότι τα u και v είναι γραμμικά εξαρτημένα στο $\mathbb{R}^2$. Ο όρος σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός του άλλου, και επειδή μιλάμε για ένα διάνυσμα, αναγκαστικά αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι απλά ένα πολλαπλάσιο του άλλου διανύσματος. Για παράδειγμα, τα $\binom{1}{2}$ και $\binom{3}{6}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

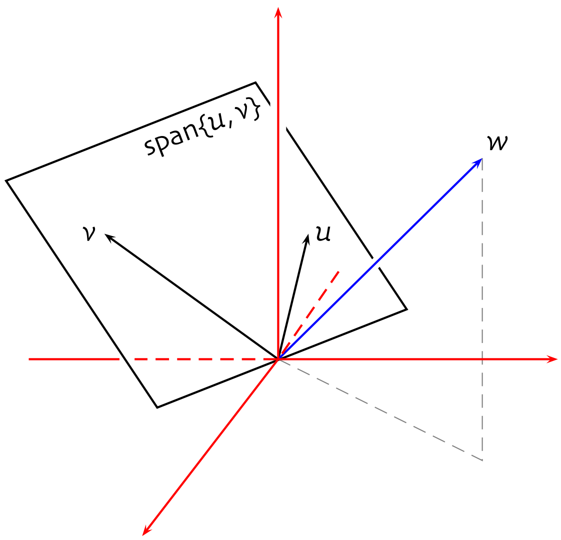
Δηλαδή τα διανύσματα αυτά είναι πάνω στην ίδια ευθεία και έτσι κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι πάνω σε αυτή την ευθεία.

Πρέπει να προσέξουμε στο προηγούμενο ότι ο χώρος έχει σημασία: δύο οποιαδήποτε διανύσματα u και v δεν μπορούν με γραμμικούς συνδυασμούς να παράγουν τον $\mathbb{R}^3$. Αυτό δεν σημαίνει ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^3$. Η διάκριση αυτή θα ξεκαθαριστεί παρακάτω με τον τυπικό ορισμό της γραμμικής εξάρτησης (Ορισμός 1.3.2).

Ας δούμε λίγο αυτό το θέμα στον $\mathbb{R}^3$ για τρία διανύσματα u, v και w. Οι γραμμικοί συνδυασμοί τώρα είναι οι παραστάσεις της μορφής

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w,$$

με τα λ_1, λ_2 και λ_3 στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι τα u και v δεν είναι μηδέν ούτε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα οι γραμμικοί συνδυασμοί τους θα παράγουν ένα επίπεδο (το οποίο το ονομάζουμε $\mathrm{span}\{u, v\}$). Αν το w δεν ανήκει σε αυτό το επίπεδο τότε μπορεί κανείς να παράγει με γραμμικούς συνδυασμούς οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ (δείτε το επόμενο σχήμα). Αν όμως το w βρίσκεται στο επίπεδο που παράγουν με γραμμικούς συνδυασμούς τα u και v τότε αυτό δεν γίνεται. Οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός θα δώσει διάνυσμα πάνω σε αυτό το επίπεδο. Σε αυτή την περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση που υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε $w = \lambda u + \mu v$ λέμε ότι τα u, v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα.



Βέβαια δεν είναι αυτή η μόνη περίπτωση που τα διανύσματα u, v και w είναι γραμμικά εξαρτημένα. Θα μπορούσε για παράδειγμα να συμβαίνει $v = 0$ και το w να μην είναι πολλαπλάσιο του u στον $\mathbb{R}^3$. Τότε το w δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των u και v (αφού η $w = \lambda u + \mu v = \lambda u$ συνεπάγεται ότι τα w και u είναι συνευθειακά) αλλά το v είναι γραμμικός συνδυασμός των w και u, αφού $v = 0 \cdot u + 0 \cdot w$. Για να έχουμε ένα ενιαίο τρόπο αντιμετώπισης όλων των περιπτώσεων δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.3.1 Τρία διανύσματα u, v, w στον $\mathbb{R}^3$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν υπάρχουν λ_1, λ_2 και λ_3 στο $\mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με το μηδέν ώστε

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0.$$

Αυτός ο ορισμός φαίνεται περίεργος. Όμως η ιδέα είναι απλή: αν κάποιος συντελεστής είναι μη μηδενικός τότε μπορεί κανείς να λύσει ως προς το αντίστοιχο διάνυσμα και να το γράψει ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Αν, για παράδειγμα, ισχύει $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ με $\lambda_2 \neq 0$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$v = \left(\frac{-\lambda_1}{\lambda_2}\right) u + \left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}\right) w,$$

δηλαδή το v είναι γραμμικός συνδυασμός των u και w.

Γενικότερα έχουμε τον εξής ορισμό σε ένα διανυσματικό χώρο V.

Ορισμός 1.3.2 Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ σε ένα διανυσματικό χώρο V λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ στο $\mathbb{R}$ όχι όλα ίσα με το μηδέν ώστε

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Επαναλαμβάνουμε: το να μην είναι όλοι οι συντελεστές ίσοι με το μηδέν, χρησιμοποιείται προκειμένου να καταλάβουμε ότι κάποιο από αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, αφού μη μηδενικός συντελεστής σε κάποιο διάνυσμα σημαίνει ότι μπορούμε να λύσουμε ως προς αυτό το διάνυσμα.

Όταν αυτό δεν συμβαίνει, όταν κανένα διάνυσμα δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τότε τα διανύσματα ονομάζονται *γραμμικά ανεξάρτητα*, όπως τα u, v και w του παραπάνω σχήματος. Αυτό το διατυπώνουμε με τον εξής τρόπο:

Ορισμός 1.3.3 Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ σε ένα διανυσματικό χώρο V λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα αν ο μόνος τρόπος να ισχύει

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0,$$

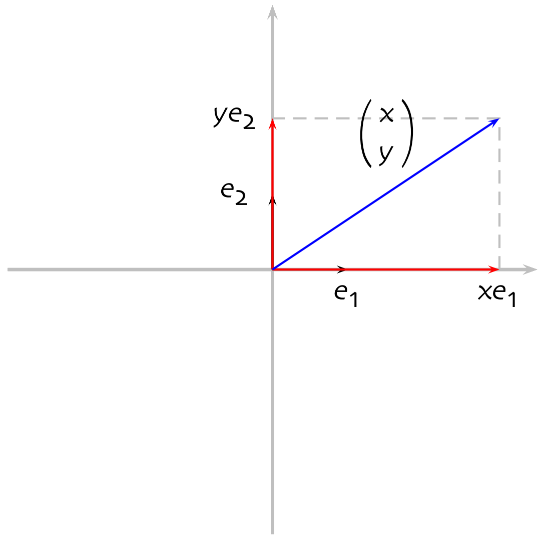
είναι να είναι όλοι οι συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ίσοι με το μηδέν.

Ο Ορισμός 1.3.3 είναι η άρνηση του Ορισμού 1.3.2. Για αυτό είναι ισοδύναμο με τον Ορισμό 1.3.3 να πούμε ότι τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

1.4 ΒΑΣΕΙΣ

Στο $\mathbb{R}^2$ δύο διανύσματα είναι πολύ ιδιαίτερα. Αναφερόμαστε στα διανύσματα $e_1 = \binom{1}{0}$ και $e_2 = \binom{0}{1}$ που έχουν μήκος 1 και βρίσκονται πάνω στους άξονες. Η ιδιαιτερότητά τους έγκειται στο ότι κάθε διάνυσμα $\binom{x}{y}$ του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να παραχθεί από τα e_1 και e_2 με τον εξής τρόπο: αν πολλαπλασιάσουμε το e_1 με τον αριθμό x την πρώτη συντεταγμένη του $\binom{x}{y}$ και το e_2 με το y, τη δεύτερη συντεταγμένη του $\binom{x}{y}$, θα προκύψουν τα διανύσματα $x \cdot e_1$ και $y \cdot e_2$ (δείτε το επόμενο σχήμα) και αν τα προσθέσουμε θα πάρουμε το διάνυσμα $\binom{x}{y}$. Δηλαδή ισχύει

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2.$$



Επίσης παρατηρούμε ότι κάτι ανάλογο δεν ισχύει αν χρησιμοποιήσουμε μόνο το e_1 ή μόνο το e_2. Δεν είναι δηλαδή σωστό ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφτεί μόνο με τη βοήθεια του e_1 ή μόνο με τη βοήθεια του e_2, αλλά απαιτούνται *και τα δύο* αυτά διανύσματα.

Ένα τέτοιο σύνολο διανυσμάτων, που με τη βοήθεια τους μπορούμε να γράψουμε με ένα γραμμικό συνδυασμό οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου μας και που χρειάζονται όλα του τα διανύσματα για να είναι αυτό εφικτό, το ονομάζουμε *βάση* του διανυσματικού μας χώρου. Έτσι τα e_1 και e_2 αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^2$. Πρέπει να προσέξουμε στο εξής: για να είναι βάση ένα σύνολο διανυσμάτων *δεν αρκεί* να μπορούμε να γράψουμε με γραμμικούς συνδυασμούς τους όλα τα διανύσματα του χώρου, αλλά πρέπει να μην μπορεί να γίνει αυτό με λιγότερα διανύσματα. Για παράδειγμα, τα διανύσματα $e_1 = \binom{1}{0}$, $e_2 = \binom{0}{1}$ και $v = \binom{3}{4}$ έχουν τη ιδιότητα ότι οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου είναι γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + 0v.$$

Δεν είναι όμως βάση του R^2 διότι την ίδια ιδιότητα έχουν τα e_1 και e_2 που είναι λιγότερα από τα e_1, e_2 και v. Επίσης η βάση δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα και τα $-e_1$ και e_2 είναι βάση του R^2, αφού

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x(-e_1) + ye_2$$

αλλά και τα $u = \binom{2}{1}$, $v = \binom{-1}{3}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$. Πράγματι, εύκολα ελέγχουμε ότι για να ισχύει $\binom{x}{y} = \lambda u + \mu v$ θα πρέπει να έχει λύση το σύστημα

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu & = x \\ 2\lambda + 6\mu & = y, \end{cases}$$

το οποίο λύνεται και δίνει $\lambda = (3x + y)/7$ και $\mu = (2y - x)/7$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3x + y}{7} u + \frac{2y - x}{7} v.$$

Ορισμός 1.4.1 Αν τα διανύσματα του συνόλου $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ σε ένα διανυσματικό χώρο V έχουν την ιδιότητα οι γραμμικοί συνδυασμοί τους να δίνουν οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου V και οποιοδήποτε γνήσιο υποσύνολό του να μην έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το σύνολο αυτό λέγεται βάση του διανυσματικού χώρου V.

Για την περίπτωση που $V = \mathbb{R}^n$ εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του V και την ονομάζουμε *συνήθη βάση του* $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 1.4.2 *Τα διανύσματα μιας βάσης ενός διανυσματικού χώρου είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη: Αν $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι βάση ενός διανυσματικού χώρου V και τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε κάποιο από αυτά, έστω το u_n, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή υπάρχουν συντελεστές $a_1, \dots, a_{n-1}$ ώστε

$$u_n = a_1 u_1 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1}.$$

Αλλά αν x οποιοδήποτε διάνυσμα στον V, αφού τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι βάση, υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ώστε

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n-1} u_{n-1} + \lambda_n \sum_{i=1}^{n-1} a_i u_i \\ &= (\lambda_1 + a_1 \lambda_n) u_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} + a_{n-1} \lambda_n) u_{n-1}, \end{aligned}$$

δηλαδή τα u_1, $u_2, \dots, u_n$ έχουν ένα γνήσιο υποσύνολό τους, το $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, που παράγει τον χώρο με γραμμικούς συνδυασμούς. Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό της βάσης. □

Πόρισμα 1.4.3 *Αν $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι βάση ενός διανυσματικού χώρου V τότε για κάθε $x \in V$ υπάρχουν μοναδικοί συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n.$$

Απόδειξη: Η ύπαρξη των συντελεστών είναι άμεση από τον ορισμό της βάσης. Η μοναδικότητα προκύπτει από το εξής: αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν λ_i και $\mu_i \in \mathbb{R}$ για $i = 1, \dots, n$ ώστε

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_n u_n,$$

τότε

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0,$$

και από τη γραμμική ανεξαρτησία των u_i συμπεραίνουμε ότι $\lambda_i = \mu_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. □

Πρόταση 1.4.4 *Αν τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου V, τότε κάθε άλλη βάση του χώρου V έχει αναγκαστικά n διανύσματα.*

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει βάση με λιγότερα από n διανύσματα. Διότι τότε δεν θα μπορεί να υπάρχει βάση με ούτε περισσότερα από n διανύσματα, αφού αν υπήρχε βάση $v_1, \dots, v_m$ με $m > n$ τότε τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ θα ήταν βάση με λιγότερα διανύσματα από m που θα έχει ήδη αποκλειστεί από το πρώτο βήμα.

Έστω λοιπόν ότι $k < n$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει βάση με k διανύσματα $v_1, \dots, v_k$. Το u_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots, v_n$, αφού τα τελευταία είναι βάση. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ πραγματικοί αριθμοί ώστε

$$u_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k.$$

Όμως $u_1 \neq 0$ (αφού τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ ως βάση είναι γραμμικά ανεξάρτητα) άρα κάποιο λ_i είναι μη μηδενικό. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε λύνοντας ως προς v_1 βρίσκουμε ότι

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}u_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)v_k.$$

Δηλαδή $v_1 \in \text{span}\{u_1, v_2, \dots, v_k\}$ συνεπώς, αφού

$$v_1, v_2, \dots, v_k \in \text{span}\{u_1, v_2, \dots, v_k\},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\text{span}\{u_1, v_2, \dots, v_k\} = V.$$

Τώρα επαναλαμβάνουμε με επαγωγή το προηγούμενο: το u_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, v_2, \dots, v_k$ άρα αν

$$u_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_k v_k$$

για κατάλληλους πραγματικούς $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$. Κάποιο από τα $\mu_2, \dots, \mu_k$ δεν είναι μηδέν (αλλιώς τα u_1 και u_2 είναι γραμμικά εξαρτημένα). Έστω ότι $\mu_2 \neq 0$ οπότε λύνοντας ως προς v_2 συμπεραίνουμε ότι $v_2 \in \text{span}\{u_1, u_2, v_3 \dots, v_k\}$. Αλλά τώρα και $v_1 \in \text{span}\{u_1, u_2, v_3 \dots, v_k\}$, αφού

$$v_1 \in \text{span}\{u_1, v_2, v_3 \dots, v_k\} \subseteq \text{span}\{u_1, u_2, v_3 \dots, v_k\}.$$

Άρα $\text{span}\{u_1, u_2, v_3 \dots, v_k\} = V$. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία καταλήγουμε στο ότι $\text{span}\{u_1, u_2, u_3 \dots, u_k\} = V$ το οποίο είναι άτοπο αφού τα $u_1, u_2, u_3 \dots, u_n$, ως βάση, δεν έχουν μικρότερο υποσύνολο που να παράγει τον χώρο. □

Παρατήρηση 1.4.5 Ένας χώρος μπορεί να έχει και άπειρο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Για παράδειγμα ο χώρος όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών, εύκολα βλέπουμε ότι είναι διανυσματικός χώρος και οι ακολουθίες

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0 \dots)$$

με όλους τους όρους της μηδέν και τον n-στο όρο ίσο με 1 είναι άπειρο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων.

Για να δώσουμε τον ορισμό της διάστασης τώρα χρειάζεται πρώτα να βεβαιωθούμε ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει μία βάση. Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο. Στο επόμενο θεώρημα για $F \subseteq V$ συμβολίζουμε με $\text{span}F$ το σύνολο όλων των *πεπερασμένων* γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του F. Δηλαδή

$$\text{span}F = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \,:\, u_j \in F,\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Θεώρημα 1.4.6 *Αν τα* $u_1, \dots, u_n$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μέσα σε ένα σύνολο* F *υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου* V *το οποίο παράγει τον χώρο, δηλαδή* $\mathrm{span}F = V$, *τότε υπάρχει σύνολο* B *ώστε*

$$\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq B \subseteq F$$

το οποίο είναι βάση του διανυσματικού χώρου V.

Απόδειξη: Η απόδειξη χρησιμοποιεί το λήμμα του Zorn από τη Θεωρία Συνόλων. Στην περίπτωση που το F είναι πεπερασμένο τότε το λήμμα του Zorn δεν είναι απαραίτητο. Αν αυτό το λήμμα δεν είναι γνωστό μπορείτε να διαβάσετε μόνο το τμήμα της απόδειξης που αφορά σε πεπερασμένο F. Στην περίπτωση λοιπόν που το F είναι πεπερασμένο σύνολο, επιλέγουμε από όλα τα υποσύνολά του που περιέχουν τα $u_1, \dots, u_n$ και έχουν όλα τα στοιχεία τους γραμμικά ανεξάρτητα, ένα από εκείνα με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων. Αυστηρά, ο αριθμός

$$\max\Big\{|B| \,:\, B \subseteq F,\ \ u_j \in B,\ \ j = 1, 2, \dots, n, \\ \text{τα στοιχεία του } B \text{ είναι γρ. ανεξ.}\Big\}$$

(όπου $|B|$ η πληθικότητα του B), υπάρχει γιατί το F είναι πεπερασμένο, άρα και το δυναμοσύνολό του, και επιλέγουμε οποιοδήποτε από αυτά τα B με την παραπάνω πληθικότητα (του maximum). Φανερά τα στοιχεία του B είναι γραμμικά ανεξάρτητα και περιέχει τα u_j για $j = 1, 2, \dots, n$. Επίσης $\mathrm{span}B = \mathrm{span}F = V$ διότι αν όχι, τότε το F περιέχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα έξω από το $\mathrm{span}B$, άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητο από τα διανύσματα του B. Αν το προσθέσουμε λοιπόν στο B θα προκύψει σύνολο με μεγαλύτερη πληθικότητα από το B που ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες, πράγμα άτοπο από την επιλογή του B. Άρα το B παράγει τον χώρο V. Τέλος κανένα γνήσιο υποσύνολο του B δεν παράγει τον V αφού θα του λείπει τουλάχιστον ένα γραμμικά ανεξάρτητο από τα στοιχεία, του διάνυσμα. Άρα το B είναι βάση του V.

Για τη γενική περίπτωση που το F είναι άπειρο σύνολο εργαζόμαστε ομοίως αλλά αντί για τη χρήση του μεγίστου ως προς την πληθικότητα χρησιμοποιούμε το λήμμα του Zorn ως εξής. Έστω ότι η $\mathscr{B}$ είναι η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του F που περιέχουν μόνο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και περιέχουν τα u_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Αν τα B_j συνιστούν μια ολικά διατεταγμένη οικογένεια στοιχείων της $\mathscr{B}$ το σύνολο $B_0 = \cup_j B_j$ περιέχει τα u_j, $j = 1, 2, \dots, n$ και βεβαίως $B_0 \subseteq F$. Επίσης τα στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι αν $v_k \in B_0$ για $k = 1, 2, \dots, N$ τότε υπάρχουν j_k ώστε $v_k \in B_{j_k}$ για κάθε k (από τον ορισμό της ένωσης συνόλων). Αλλά τα $B_{j_1}, \dots, B_{j_N}$ είναι μεταξύ τους ολικά διατεταγμένα άρα κάποιο από αυτά περιέχει όλα τα v_k (είτε $B_{j_1} \subseteq B_{j_2}$ είτε $B_{j_1} \supseteq B_{j_2}$. Αν $B_{j_1} \subseteq B_{j_2}$ απορρίπτουμε το B_{j_1} αλλιώς το B_{j_2}. Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να εξαντληθούν όλα τα B_{j_k}, $k = 1, 2, \dots, N$, και να μείνει μόνο ένα, που από τη διαδικασία περιέχει όλα τα προηγούμενα). Συνεπώς τα v_k είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα $\cup_j B_j \in \mathcal{B}$. Από το λήμμα του Zorn η $\mathcal{B}$ έχει μεγιστικό στοιχείο. Δηλαδή υπάρχει $B_0 \in \mathcal{B}$ ώστε κανένα γνήσιο υπερσύνολό του δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$. Εφαρμόζουμε στο σύνολο αυτό τα ίδια επιχειρήματα που εφαρμόσαμε στο B στην περίπτωση που το F ήταν πεπερασμένο. □

Επειδή ένα μη μηδενικό διάνυσμα (για $n = 1$) είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητο και επειδή πάντα μπορούμε να επιλέξουμε το F να είναι το ίδιο το V, το παραπάνω θεώρημα λέει ότι *κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση*.

Ορισμός 1.4.7 Το πλήθος των διανυσμάτων μιας βάσης ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται διάσταση του χώρου, και τη συμβολίζουμε με $\dim V$.

Για παράδειγμα $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ και γενικά $\dim \mathbb{R}^n = n$. Αν X ο χώρος όλων των πραγματικών ακολουθιών, επειδή αυτός περιέχει τα διανύσματα e_n για κάθε n τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ισχύει $\dim X = \infty$.

Παρατήρηση 1.4.8 Προσοχή στο εξής: στον προηγούμενο χώρο X τα e_n για $n = 1, 2, \dots$ *δεν* είναι βάση! Διότι κάθε διάνυσμα θα πρέπει να γράφεται ως *πεπερασμένος* γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των e_n. Αλλιώς, πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των e_n δίνουν ακολουθίες που από ένα σημείο και μετά είναι σταθερά μηδέν. Τα διανύσματα e_n είναι βάση του διανυσματικού χώρου c_{00} που περιέχει όλες τις πραγματικές ακολουθίες με πεπερασμένο φορέα. Δηλαδή

$$c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ ώστε } x_n = 0 \text{ για κάθε } n \geq n_0\}.$$

1.5 Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΝΟΡΜΑ

Με τον όρο «νόρμα» ενός διανύσματος στον $\mathbb{R}^n$ θα εννοούμε το Ευκλείδειο μήκος του διανύσματος. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα αν το διάνυσμα x έχει συντεταγμένες $x_1, \ldots, x_n$ ως προς τη συνήθη βάση αυτό είναι ίσο με $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Για να μην επαναλαμβάνουμε αυτή την παράσταση την ονομάζουμε Ευκλείδεια νόρμα του x και γράφουμε

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Πρόταση 1.5.1 (Τριγωνική ανισότητα) *Για οποιαδήποτε διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\big|\|x\|_2 - \|y\|_2\big| \leq \|x \pm y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Απόδειξη:

Πόρισμα 1.5.2 *Η ποσότητα $\|x\|_2$ στο $\mathbb{R}^n$ είναι νόρμα.*

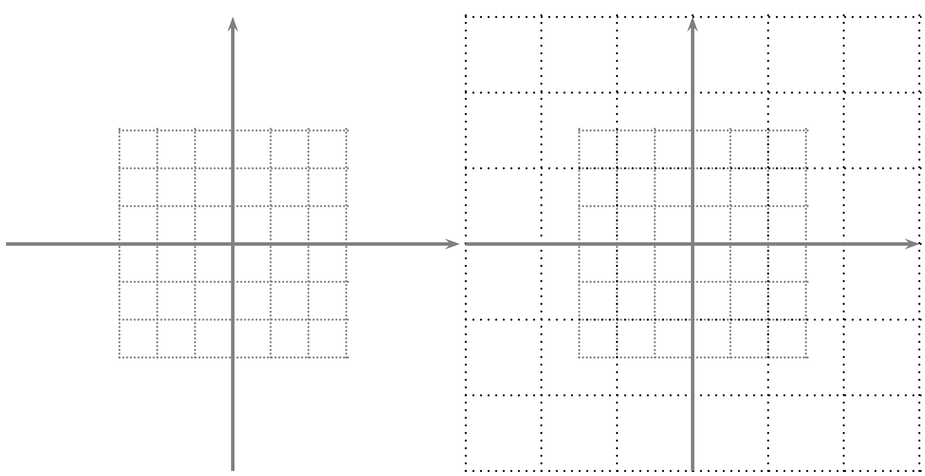
Απόδειξη:

Κεφάλαιο 2

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

2.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Επιστρέφοντας στο θέμα του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό έχουμε να παρατηρήσουμε κάτι ενδιαφέρον. Αν πολλαπλασιάσουμε, για παράδειγμα με 2, όλα τα διανύσματα του επιπέδου, τότε βεβαίως θα ξαναπάρουμε ως σύνολο όλο το επίπεδο. Όμως κάθε διάνυσμα πολλαπλασιάστηκε με το 2. Άρα αν κάθε τελεία στο αριστερό πλέγμα του επόμενου σχήματος τη θεωρήσουμε σημείο τερματισμού ενός διανύσματος και πολλαπλασιάσουμε όλα τα διανύσματα με 2 τότε θα πάρουμε τα διανύσματα στα δεξιά (όπου και πάλι οι τελείες δείχνουν τα σημεία τερματισμού των διανυσμάτων). Είναι σαφές δηλαδή ότι ο πολλαπλασιασμός με 2 «διαστέλλει» τον χώρο κατά ένα παράγοντα 2.



Στα δεξιά έχουμε σχεδιάσει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον αριθμό 2 με τις μαύρες τελείες ενώ έχουμε κρατήσει με γκρι χρώμα τις αρχικές τελείες για να είναι άμεση η σύγκριση. Στα επόμενα σχήματα για να είναι ευκολότερη η εποπτεία του σχήματος το νέο «πλέγμα» που δημιουργείται θα το σχεδιάζουμε με διακεκομμένες γραμμές ενώ θα κρατάμε και το αρχικό με τελείες.

Αυτό είναι το πρώτο ουσιαστικό θέμα που πρέπει οπωσδήποτε να καταλάβουμε πριν προχωρήσουμε στα επόμενα. Πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων με τον αριθμό λ όπου $|\lambda| > 1$ διαστέλλει τον χώρο σε όλες τις διευθύνσεις, ενώ αν $|\lambda| < 1$ συρρικνώνει τον χώρο σε όλες τις διευθύνσεις. Η επόμενη παρατήρηση είναι καθοριστικής σημασίας: αν ονομάσουμε e_1 το διάνυσμα $\binom{1}{0}$ και e_2 το διάνυσμα $\binom{0}{1}$ τότε

- Κάθε διάνυσμα γράφεται ως συνδυασμός αυτών των δύο με τον εξής τρόπο

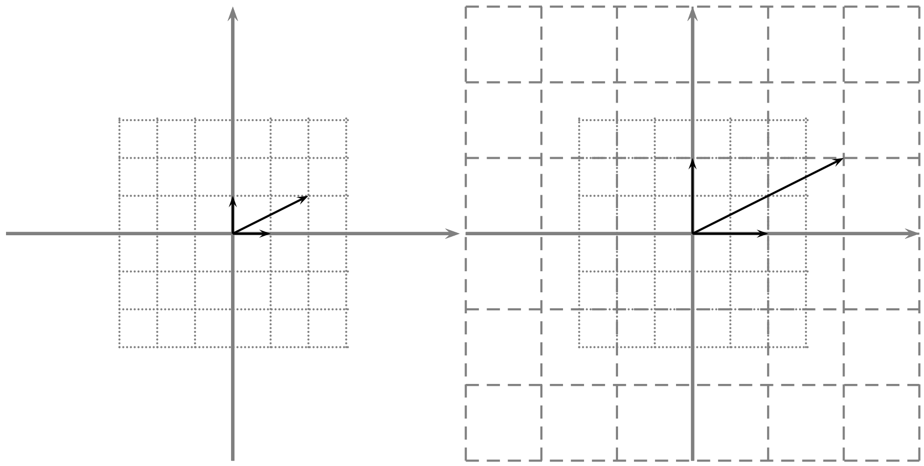
  $$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ae_1 + be_2,$$

  και

- η διαστολή ή συρρίκνωση κατά λ κάθε διανύσματος καθορίζεται από τη διαστολή ή συρρίκνωση των e_1 και e_2, διότι

  $$\begin{aligned} \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \lambda(ae_1 + be_2) = \lambda(ae_1) + \lambda(be_2) \\ &= (\lambda a)e_1 + (\lambda b)e_2 = (a\lambda)e_1 + (b\lambda)e_2 \\ &= a(\lambda e_1) + b(\lambda e_2). \end{aligned}$$

  Δηλαδή *όταν γνωρίζουμε πώς μεταβάλλονται (με πολλαπλασιασμό) τα* e_1 *και* e_1 *μπορούμε να βρούμε πώς μεταβάλλεται οποιοδήποτε διάνυσμα* $\binom{a}{b}$. Δείτε το επόμενο σχήμα όπου χρησιμοποιούμε το $\lambda = 2$.



Στα αριστερά το διάνυσμά μας $\binom{2}{1}$ είναι ίσο με $2e_1 + e_2$ και όταν πολλαπλασιάζεται με $\lambda = 2$ γίνεται $2(2e_1) + (2e_2)$ ισοδύναμα το $\binom{4}{2}$. Αν λοιπόν πούμε ότι απεικονίζουμε το e_1 στο $2e_1 = \binom{2}{0}$ και το e_2 στο $2e_2 = \binom{0}{2}$ τότε αυτή η πληροφορία καθορίζει ακριβώς και πώς θα αλλάξουν τα υπόλοιπα διανύσματα του χώρου. Είναι φυσιολογικό λοιπόν να βάλουμε μαζί τα διανύσματα $\binom{2}{0}$ και $\binom{0}{2}$ φτιάχνοντας έτσι το σύμβολο

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

και να θεωρούμε ότι αυτό «κωδικοποιεί» μέσα του (δηλαδή περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες) τις αλλαγές που γίνονται σε *κάθε* διάνυσμα του χώρου.

Ας το τονίσουμε άλλη μια φορά γιατί είναι ιδιαίτερα σημαντικό: το σύμβολο

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

μας περιγράφει πού απεικονίζονται τα διανύσματα $e_1 = \binom{1}{0}$ και $e_2 = \binom{0}{1}$. Απεικονίζονται στα $\binom{2}{0}$ και $\binom{0}{2}$· και εφόσον ξέρουμε αυτό, ξέρουμε και πού απεικονίζεται οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα. Συγκεκριμένα το $\binom{x}{y}$ απεικονίζεται στο $\binom{2x}{2y}$. Συμβολικά γράφουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Το σύμβολο

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

το ονομάζουμε «πίνακα» και αντιλαμβανόμαστε την πράξη μεταξύ αυτού του πίνακα και του $\binom{x}{y}$ ως ένα είδος πολλαπλασιασμού.

Ας δούμε το ίδιο τώρα πιο γενικά. Δεν είναι απαραίτητο να απεικονίσουμε το e_1 στο λe_1 όπως κάναμε πριν (με $\lambda = 2$). Μπορούμε να απεικονίσουμε το e_1 στο $\binom{a}{b}$ (οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα) και το e_2 στο $\binom{c}{d}$. Τώρα το σύμβολο που περιγράφει αυτή τη μεταβολή είναι το

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Με τον ίδιο με πριν τρόπο μπορούμε να δούμε που θα απεικονιστεί το τυχόν διάνυσμα $\binom{x}{y}$. Αφού

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

το διάνυσμα $\binom{x}{y}$ θα απεικονιστεί στο

$$x\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

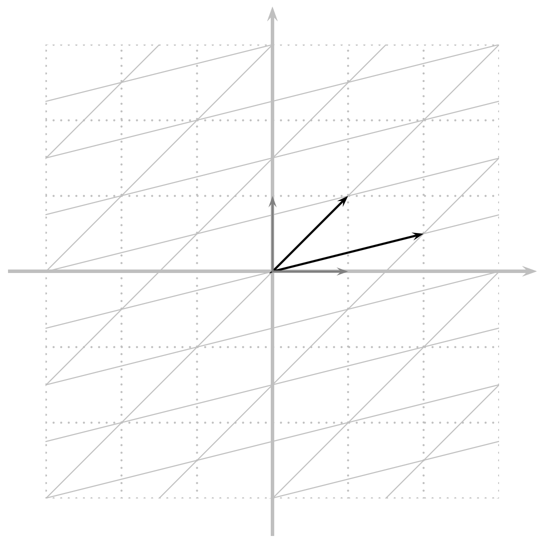
δηλαδή στο

$$\begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}.$$

Συμβολικά, όπως και πριν γράφουμε

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

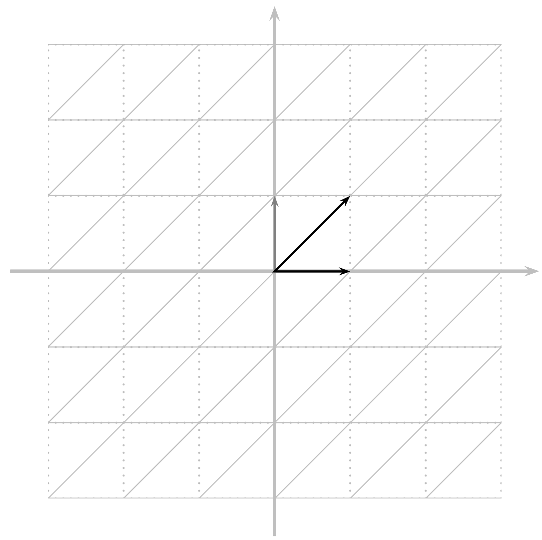
και αντιλαμβανόμαστε το αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης ως ένα είδος πολλαπλασιασμού. Ας δούμε τώρα σχηματικά πώς αλλάζουν με αυτή την απεικόνιση τα διανύσματα του επιπέδου παρατηρώντας το γνωστό μας πλέγμα των προηγούμενων σχημάτων. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να απεικονίσουμε το $e_1 = \binom{1}{0}$ στο $\binom{2}{1/2}$ και το $e_2 = \binom{0}{1}$ στο $\binom{1}{1}$.



Βλέπουμε δηλαδή ότι αυτή η απεικόνιση «παραμορφώνει» το επίπεδο. Λέμε «το μετασχηματίζει». Για αυτό και ονομάζεται «μετασχηματισμός» (ως ένα συγκεκριμένο είδος συνάρτησης). Μάλιστα το μετασχηματίζει με τρόπο που κάθε ευθεία γραμμή απεικονίζεται σε μια ευθεία γραμμή. Για αυτό τον λόγο αυτή η συνάρτηση ονομάζεται ειδικότερα «γραμμικός μετασχηματισμός». Επιπλέον οι αποστάσεις μεταξύ παραλλήλων ευθειών αν ήταν σταθερές διατηρούνται σταθερές. Αυτό, όπως και το ότι οι ευθείες γραμμές απεικονίζονται σε ευθείες γραμμές, εκτός του ότι είναι φανερό από το παραπάνω σχήμα θα το αποδείξουμε παρακάτω (δείτε Πρόταση 2.3.3). Πριν το αποδείξουμε ας δούμε άλλον ένα γραμμικό μετασχηματισμό: τον

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δεν πρέπει να επιτρέψουμε στο σύμβολο να μας μπερδέψει. Το σύμβολο λέει απλά ότι το $e_1 = \binom{1}{0}$ θα απεικονιστεί στον εαυτό του και το $e_2 = \binom{0}{1}$ στο $\binom{1}{1}$. Αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός παραμορφώνει (μετασχηματίζει) τον χώρο του επιπέδου όπως δείχνει το επόμενο σχήμα.



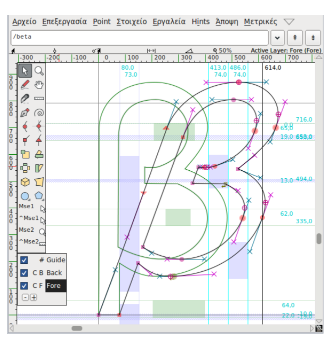
Αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός λέμε ότι «στρεβλώνει» το επίπεδο 45 μοίρες προς τα δεξιά. Επιπλέον το τυχόν διάνυσμα $\binom{x}{y}$ απεικονίζεται στο

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

Από εδώ και στο εξής θα σταματήσουμε να γράφουμε την ενδιάμεση παράσταση «$x\binom{1}{0} + y\binom{1}{1}$» και θα γράφουμε κατευθείαν

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

Βρείτε ένα μνημονικό κανόνα για να κάνετε τις πράξεις όπως δείχνει ο τύπος (2.1).



Στο διπλανό σχήμα ο σχεδιαστής γραμματοσειρών εφαρμόζει τον πίνακα στρέβλωσης $\begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ στο γράμμα β για να παράγει την πλάγια έκδοσή του.

Υπάρχει βεβαίως η ειδική περίπτωση όπου τόσο το e_1 όσο και το e_2 απεικονίζονται σε διανύσματα πάνω στην ίδια ευθεία. Η περίπτωση αυτή είναι «ειδική» διότι όταν συμβαίνει αυτό, τότε κάθε διάνυσμα του επιπέδου θα απεικονιστεί αναγκαστικά στην ίδια αυτή ευθεία κάνοντας δηλαδή μια «υπερβολική» συρρίκνωση όλου του επιπέδου σε μια ευθεία. Πράγματι, αν τα

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ του πίνακα } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

είναι στην ίδια ευθεία τότε φανερά το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Τότε το τυχόν διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

θα απεικονιστεί στο

$$x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x + \lambda y) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

δηλαδή οποιοδήποτε διάνυσμα απεικονίζεται στην ευθεία που ορίζει το $\binom{a}{b}$. Όταν το προηγούμενο δεν συμβαίνει, όταν δηλαδή ούτε το $\binom{a}{b}$ βρίσκεται στη ευθεία του $\binom{c}{d}$ ούτε το $\binom{c}{d}$ βρίσκεται στη ευθεία του $\binom{a}{b}$ τότε, όπως έχουμε ήδη δει, τα $\binom{a}{b}$ και $\binom{c}{d}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

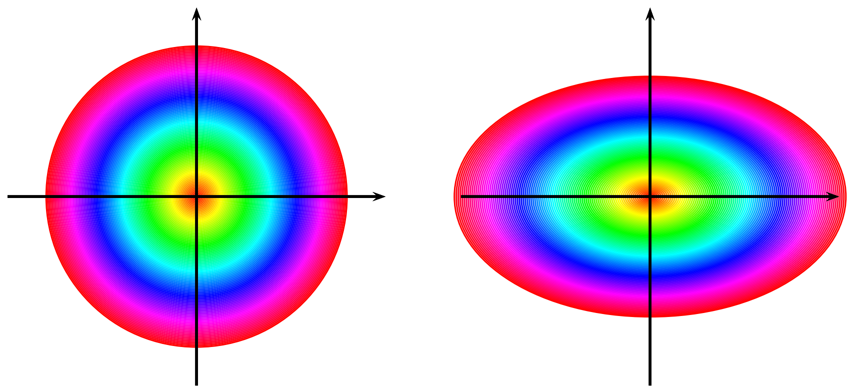
Πρόταση 2.1.1 *Ένας πίνακας*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{με τα } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ γραμμικά ανεξάρτητα}$$

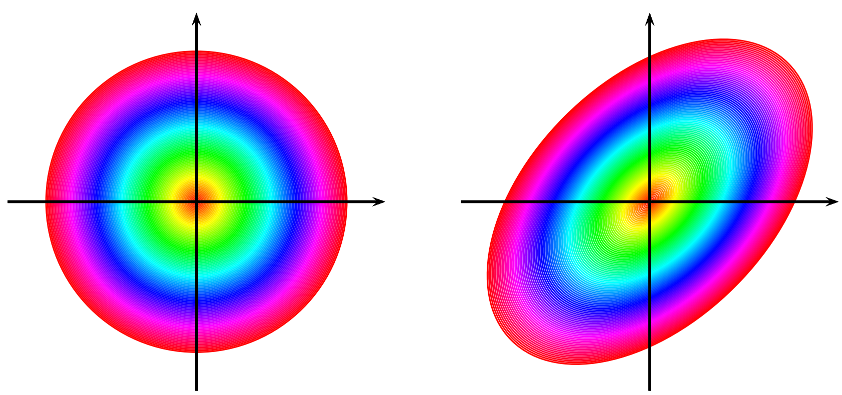
μετασχηματίζει ελλείψεις σε ελλείψεις. Ειδικότερα μετασχηματίζει κύκλους σε ελλείψεις.

Αυτή την πρόταση θα την αποδείξουμε αργότερα. Τη διατυπώσαμε όμως τώρα γιατί μας επιτρέπει να δούμε οπτικά τις παραμορφώσεις που κάνει ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο επίπεδο χρησιμοποιώντας κύκλους και ελλείψεις αντί για το πλέγμα που χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα.

Στο πρώτο παράδειγμα του επόμενου σχήματος η χώρος του επιπέδου μετασχηματίζεται με τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Το διάνυσμα e_1 πολλαπλασιάζεται με 1,3 και το e_2 με 0,8. Έτσι ο χώρος του επιπέδου μεγεθύνεται στη διάσταση x και συστέλλεται στη διάσταση y, «παραμορφώνοντας» ομόκεντρους κύκλους σε ομόκεντρες ελλείψεις.



Στο δεύτερο παράδειγμά μας η μεγέθυνση και σμίκρυνση γίνεται στις διευθύνσεις των διανυσμάτων $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (στη διεύθυνση της κύριας διαγωνίου) και $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ στη διεύθυνση της άλλης διαγωνίου).



Για να βρούμε πώς οδηγούμαστε σε αυτόν τον μετασχηματισμό του επιπέδου μπορούμε να κάνουμε το εξής. Να σκεφτούμε ότι μπορούμε πρώτα να εφαρμόσουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ όπως και πριν, και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε έναν πίνακα που θα στρίψει το επίπεδο αριστερόστροφα κατά 45 μοίρες. Αυτός ο δεύτερος πίνακας απεικονίζει το e_1 στο $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ και το e_2 στο $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Δηλαδή είναι ο πίνακας $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$. Έτσι ο μετασχηματισμός αυτός υλοποιείται αν εφαρμόσουμε τη σύνθεση των γραμμικών μετασχηματισμών

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Ποιος είναι όμως αυτός ο νέος μετασχηματισμός; Αυτό θα το «ανακαλύψουμε» στην επόμενη ενότητα.

2.2 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Θα μελετήσουμε τώρα τι συμβαίνει όταν εφαρμόσουμε στο επίπεδο έναν γραμμικό μετασχηματισμό και στη συνέχεια εφαρμόσουμε στο μετασχηματισμένο επίπεδο ένα δεύτερο. Ας υποθέσουμε ότι οι πίνακές μας είναι οι

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο στο διάνυσμα $\binom{x}{y}$ παίρνουμε το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + c_1y \\ b_1x + d_1y \end{pmatrix} = (a_1x+c_1y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (b_1x+d_1y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, όταν σε αυτό εφαρμόσουμε τον δεύτερο θα πάρουμε ότι

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad = (a_1x + c_1y)\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + (b_1x + d_1y)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} a_2(a_1x + c_1y) + c_2(b_1x + d_1y) \\ b_2(a_1x + c_1y) + d_2(b_1x + d_1y) \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} (a_2a_1 + c_2b_1)x + (a_2c_1 + c_2d_1)y \\ (b_2a_1 + d_2b_1)x + (b_2c_1 + d_2d_1)y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Αλλά αν θυμηθούμε τον τύπο (2.1) παρατηρούμε ότι το τελευταίο διάνυσμα είναι το αποτέλεσμα

$$\begin{pmatrix} a_2a_1 + c_2b_1 & a_2c_1 + c_2d_1 \\ b_2a_1 + d_2b_1 & b_2c_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή η σύνθεση δύο γραμμικών μετασχηματισμών παραμένει γραμμικός μετασχηματισμός (αν και ομολογουμένως έχει ένα περίπλοκο αλγεβρικό τύπο). Έτσι είναι φυσιολογικό να ορίσουμε τη σύνθεση των δύο αυτών απεικονίσεων θέτοντας:

$$\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + c_2b_1 & a_2c_1 + c_2d_1 \\ b_2a_1 + d_2b_1 & b_2c_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Συχνά όταν αναφερόμαστε στους γραμμικούς αυτούς μετασχηματισμούς ως πίνακες δεν λέμε «σύνθεση πινάκων» για τον τύπο (2.2) αλλά τον ονομάζουμε πολλαπλασιασμό πινάκων. Επειδή ο ορισμός πράγματι είναι περίπλοκος θα πρέπει να βρείτε ένα μνημονικό κανόνα για να μπορείτε να τον θυμάστε.

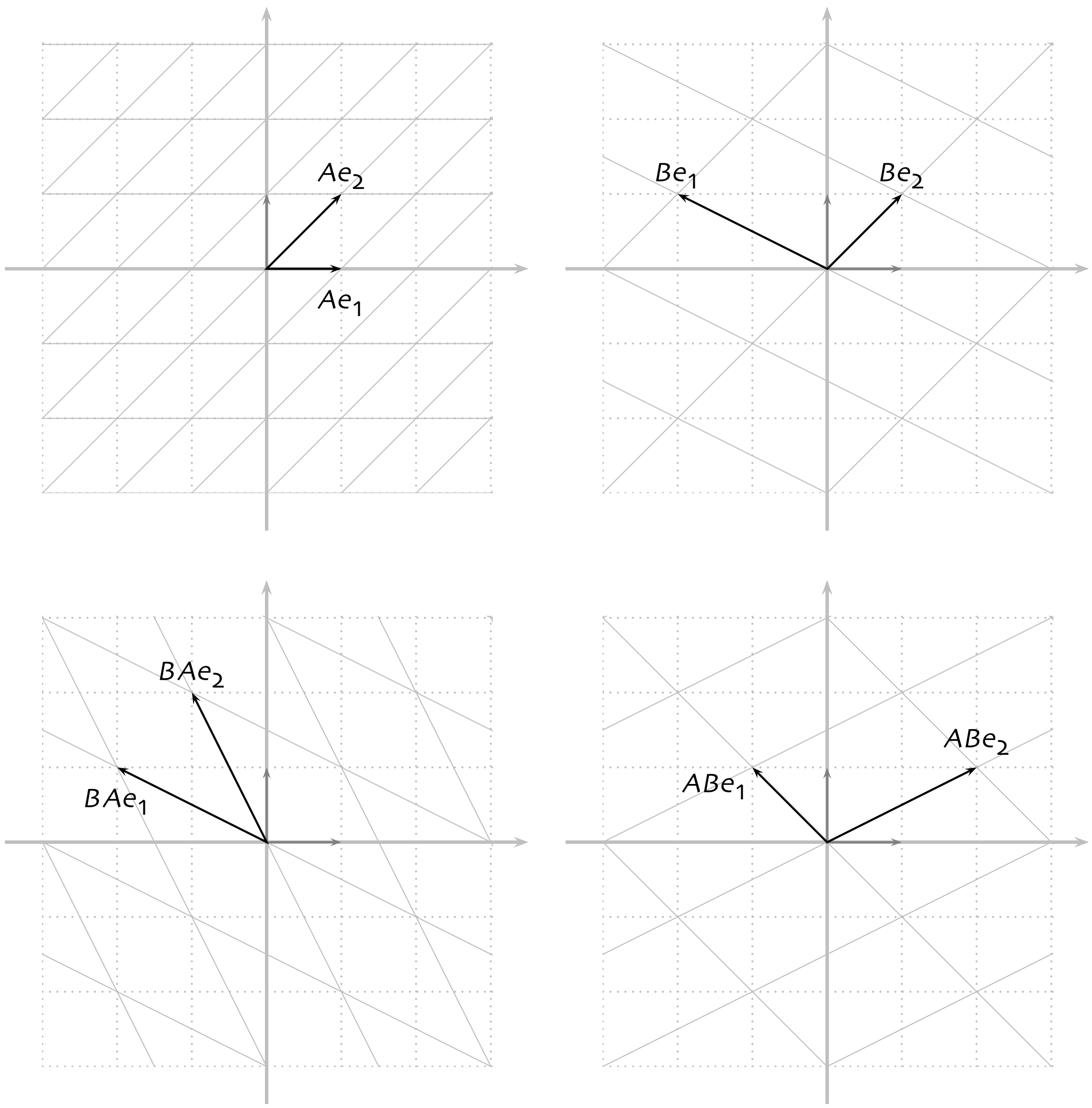
Το γεγονός όμως είναι ότι ο πρώτος μετασχηματισμός «παραμορφώνει» το επίπεδο όπως έχουμε συζητήσει και στη συνέχεια ο δεύτερος μετασχηματισμός το «παραμορφώνει» επιπλέον. Για ένα παράδειγμα, αν χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

μπορούμε όπως παραπάνω να υπολογίσουμε ότι

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Στο Σχήμα 2.1 (σελίδα 37) το πρώτο γράφημα δείχνει την παραμόρφωση του χώρου του επιπέδου που κάνει ο A, το δεύτερο την παραμόρφωση που κάνει ο B και το τρίτο την παραμόρφωση που κάνει ο A αν στη συνέχεια εφαρμοστεί ο B.



Σχήμα 2.1: Οι μετασχηματισμοί A, B, BA και AB. Φανερά $AB \neq BA$.

Ενώ αν επιστρέψουμε στο τελευταίο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας εκείνος ο μετασχηματισμός είναι ο

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3\sqrt{2}/2 & -0{,}8\sqrt{2}/2 \\ 1{,}3\sqrt{2}/2 & 0{,}8\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 *Ιδιότητες πολλαπλασιασμού*

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι το γινόμενο πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικό. Δηλαδή *δεν* ισχύει πάντα ότι $BA = AB$. Αυτό είναι αναμενόμενο εφόσον στην ουσία μιλάμε για σύνθεση απεικονίσεων (και γνωρίζουμε ότι για πραγματικές συναρτήσεις f και g δεν ισχύει $f \circ g = g \circ f$). Αλλά μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε εύκολα. Αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ και $B = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ τότε

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ενώ

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(δείτε και Σχήμα 2.1 σελίδα 37).

Η προσεταιριστική ιδιότητα όμως ισχύει:

Πρόταση 2.2.1 *Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B και C ισχύει*

$$(AB)C = A(BC).$$

Απόδειξη: Θα μπορούσαμε να μπούμε σε μια διαδικασία πράξεων αλλά δεν είναι απαραίτητο: για να βρούμε που απεικονίζει ένα διάνυσμα ο πίνακας $(AB)C$ πρέπει να εφαρμόσουμε στο διάνυσμα πρώτα τον πίνακα C. Στο αποτέλεσμα πρέπει να εφαρμόσουμε τώρα τον AB. Δηλαδή να εφαρμόσουμε πρώτα τον B και τέλος τον A. Το ίδιο ακριβώς θα πρέπει να κάνουμε όταν στο διάνυσμα πρέπει να εφαρμόσουμε τον $A(BC)$. Πρώτα τον C, μετά τον B και τέλος τον A. Επειδή και στις δύο περιπτώσεις κάνουμε ακριβώς τους ίδιους μετασχηματισμούς με την ίδια σειρά θα πάρουμε αναγκαστικά ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. □

Αυτό που κάναμε στην παραπάνω απόδειξη δεν ήταν άλλο από το ότι εφόσον οι πίνακες είναι μετασχηματισμοί του επιπέδου, είναι ίσοι αν δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα σε κάθε διάνυσμα. Αλλά

$$\text{και } \big((AB)C\big)(v) = A\Big(B\big(C(v)\big)\Big) \text{ και } \big(A(BC)\big)(v) = A\Big(B\big(C(v)\big)\Big).$$

Οπότε $(AB)C = A(BC)$.

Υπάρχει και τρίτο σκεπτικό που θα μπορούσε να ακολουθήσει κανείς. Ποια είναι η πρώτη στήλη των πινάκων $(AB)C$ και $A(BC)$; Είναι το διάνυσμα στο οποίο απεικονίζεται το e_1. Αλλά και στις δύο περιπτώσεις αυτό είναι το $A(B(C(e_1)))$, άρα οι πίνακες έχουν την ίδια πρώτη στήλη. Ομοίως και για τις υπόλοιπες στήλες. Τώρα αν κανείς έχει τη διάθεση να κάνει πράξεις με τον τύπο (2.2) μπορεί να το κάνει ως Άσκηση ...αντοχής.

2.3 Η «ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ» ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Στο εξής αντί να γράφουμε $A(u)$ για το διάνυσμα στο οποίο ο A απεικονίζει το u θα γράφουμε απλά Au.

Πρόταση 2.3.1 *Για κάθε πίνακα A κάθε $u, v \in \mathbb{R}^2$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $A(u + v) = Au + Av$,

(ii) $A(\lambda v) = \lambda(Av)$.

Απόδειξη: (i) Αν $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ τότε

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} = (u_1 + v_1)e_1 + (u_2 + v_2)e_2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} A(u + v) &= (u_1 + v_1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (u_2 + v_2)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= u_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + v_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= A(u_1e_1 + u_2e_2) + A(v_1e_1 + v_2e_2) \\ &= A(u) + A(v). \end{aligned}$$

(ii) $\lambda v = (\lambda v_1)e_1 + (\lambda v_2)e_2$ οπότε

$$A(\lambda v) = (\lambda v_1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (\lambda v_2)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda\left(v_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \lambda(Av)$$

□

Πρόταση 2.3.2 *Για οποιουσδήποτε πίνακες A, B, C και οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ιδιότητες*

(i) $A(B + C) = AB + AC$,

(ii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Απόδειξη: (i) Για κάθε διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\begin{aligned}(A(B+C))(v) &= A((B+C)(v)) = A(B(v) + C(v)) \\ &= A(B(v)) + A(C(v)) = (AB)(v) + (AC)(v) \\ &= (AB + AC)(v).\end{aligned}$$

Άρα $A(B + C) = AB + AC$.

(ii) Ομοίως. □

Πρόταση 2.3.3 *Ένας πίνακας μετασχηματίζει γραμμικά το επίπεδο στο επίπεδο, δηλαδή*

(i) *απεικονίζει το μηδέν στο μηδέν*

(ii) *απεικονίζει ευθείες γραμμές σε ευθείες γραμμές, και*

(iii) *ευθείες γραμμές που έχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους απεικονίζονται σε ευθείες γραμμές που έχουν πάλι ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.*

Απόδειξη: (i) Αυτό είναι φανερό, αφού $0 = 0e_1 + \cdots + 0e_n$, οπότε $A0 = 0(Ae_1) + \cdots + 0(Ae_n) = 0$.

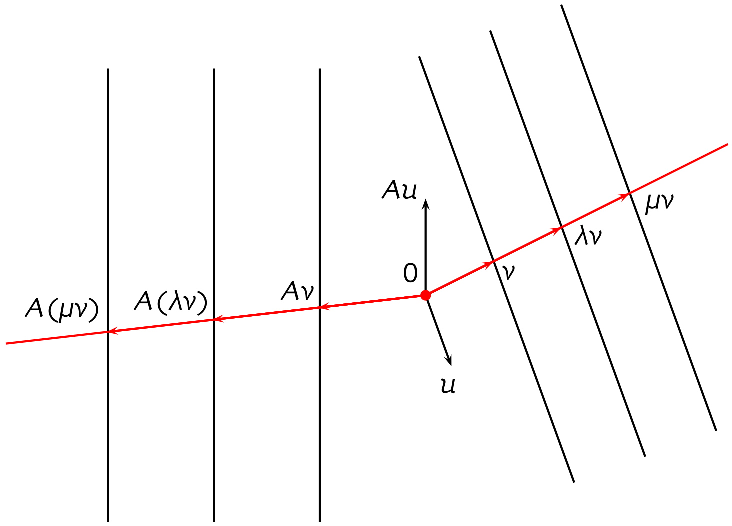
(ii) Ευθεία γραμμή που διέρχεται από το σημείο τερματισμού του διανύσματος v και είναι παράλληλη στο διάνυσμα u είναι (εξ' ορισμού) το σύνολο

$$E_{v,u} = \{v + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Κάθε στοιχείο $v + \lambda u$ της $E_{v,u}$ απεικονίζεται (λόγω της Πρότασης 2.3.1) στο $A(v + \lambda u) = Av + \lambda Au$. Άρα η ευθεία $E_{v,u}$ απεικονίζεται στο σύνολο

$$\{Av + \lambda Au : \lambda \in \mathbb{R}\} = E_{Av,Au},$$

δηλαδή μια ευθεία γραμμή (που περνάει από το σημείο τερματισμού του Av και είναι παράλληλη στο Au).



(iii) Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες $E_{v,u}$, $E_{\lambda v,u}$ και $E_{\mu v,u}$ είναι ευθείες παράλληλες (στο u) που περνάνε από τα σημεία τερματισμού των v, λv και μv (δηλαδή η ευθεία $\mathrm{E}_{0,v}$ είναι οποιαδήποτε τέμνουσα ευθεία των τριών ευθειών). Αν υποθέσουμε ότι οι τρεις αυτές ευθείες δεν περνάνε όλες από το μηδέν (αλλιώς ως παράλληλες θα ταυτίζονται) και ισαπέχουν, τότε ισχύει $\|\lambda v - v\|_2 = \|\mu v - \lambda v\|_2$ ισοδύναμα $|\lambda - 1| = |\mu - \lambda|$. Όταν εφαρμοστεί ο πίνακας A θα προκύψουν οι ευθείες $E_{Av,Au}$, $E_{\lambda Av,Au}$, και $E_{\mu Av,Au}$. Η τέμνουσα ευθεία $E_{0,v}$ θα απεικονιστεί στην ευθεία $E_{0,Av}$ η οποία τέμνει τις μετασχηματισμένες ευθείες στα Av, λAv και μAv. Αλλά

$$\|\lambda Av - Av\|_2 = |\lambda - 1|\,\|Av\|_2 = |\mu - \lambda|\,\|Av\|_2 = \|\lambda Av - \mu Av\|_2,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

2.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και στον $\mathbb{R}^n$. Τώρα έχουμε n βασικά διανύσματα, τα

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

και κάθε διάνυσμα έχει n συντεταγμένες. Ο γραμμικός μετασχηματισμός ορίζεται από το σε ποια διανύσματα απεικονίζει τα $e_1, \ldots, e_n$. Αν ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ απεικονίζει το e_i στο

$$v_i = Ae_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{pmatrix}$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$, ορίζουμε το σύμβολο

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

το οποίο ονομάζουμε $n \times n$ πίνακα. Αυτό το σύμβολο περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία για το που απεικονίζεται οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Αν

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots x_ne_n \in \mathbb{R}^n,$$

τότε

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1v_{11} + \cdots + x_nv_{n1} \\ x_1v_{12} + \cdots + x_nv_{n2} \\ \vdots \\ x_1v_{1n} + \cdots + x_nv_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Και πάλι ο τύπος αυτού του ονομαζόμενου «πολλαπλασιασμού» πίνακα επί διάνυσμα είναι περίπλοκος και απαιτείτε να βρείτε ένα μνημονικό κανόνα.

Εργαζόμενοι ομοίως με πριν για τη σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων, δηλαδή για τον «πολλαπλασιασμό» πινάκων βρίσκουμε τον εξής τύπο:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n u_{i1}v_{1i} & \sum_{i=1}^n u_{i1}v_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n u_{i1}v_{ni} \\ \sum_{i=1}^n u_{i2}v_{1i} & \sum_{i=1}^n u_{i2}v_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n u_{i2}v_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n u_{in}v_{1i} & \sum_{i=1}^n u_{in}v_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n u_{in}v_{ni} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Όλες οι ιδιότητες των πινάκων ισχύουν με τις ίδιες ακριβώς αποδείξεις όπως και στο $\mathbb{R}^2$ (βεβαίως αν κάποιος θέλει μπορεί να κάνει πράξεις με...τη σχέση (2.4) αλλά αυτό δεν χρειάζεται).

Ο πίνακας που δεν αλλάζει κανένα διάνυσμα, δηλαδή που απεικονίζει το e_1 στο e_1, το e_2 στο e_2 κλπ, δηλαδή ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ονομάζεται ταυτοτικός πίνακας και τον συμβολίζουμε με I_n ή με Id_n, ή όταν εννοείται ότι μιλάμε για $n \times n$ πίνακες παραλείπουμε το n και γράφουμε I ή Id. Εύκολα ελέγχουμε ότι $IA = AI = A$ για κάθε $n \times n$ πίνακα (είναι προφανές (δεν χρειάζονται πράξεις), αφού ο I δεν αλλάζει κανένα διάνυσμα).

2.5 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΑΠΟ ΤΟΝ $\mathbb{R}^n$ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^m$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τους μετασχηματισμούς από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$. Πάλι ορίζουμε το σύμβολο του (τώρα $m \times n$) πίνακα

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1m} & v_{2m} & v_{3m} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}$$

του οποίου κάθε στήλη μας δείχνει που απεικονίζονται τα βασικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Παρατηρούμε μόνο ότι ο $m \times n$ πίνακας είναι γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ άρα εφαρμόζεται σε διανύσματα n συντεταγμένων. Τέλος η σύνθεση (άρα ο «πολλαπλασιασμός» πινάκων) έχει νόημα όταν ο πρώτος μετασχηματισμός έχει πεδίο τιμών τον $\mathbb{R}^m$ και ο δεύτερος έχει πεδίο ορισμού του $\mathbb{R}^m$ δηλαδή το γινόμενο πινάκων AB έχει νόημα μόνο αν ο B είναι $m \times n$ και ο A είναι $k \times m$. Πρέπει δηλαδή όσες στήλες έχει ο A τόσες γραμμές να έχει ο B.

2.6 ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $x^t = (x_1, \ldots, x_n)$ το σημείο τερματισμού του διανύσματος x τότε με τη βοήθεια του γινομένου πινάκων ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$ με τη σχέση

$$x^t \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{2.5}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $x^t \cdot x = \|x\|_2^2$.

Ορισμός 2.6.1 Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ απεικόνιση $x^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$x^t(y) = x^t \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{2.6}$$

ονομάζεται *εσωτερικό γινόμενο* του x με το y και γράφουμε

$$\langle x, y \rangle = x^t \cdot y.$$

Ας δούμε τώρα τι πραγματικά σημαίνει το εσωτερικό γινόμενο που ορίζει με τον παραπάνω τρόπο το τυχόν διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$. Ποιο είναι το νόημα δηλαδή της παράστασης $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$.

Πρόταση 2.6.2 *Η τιμή του εσωτερικού γινομένου του x με το y, δηλαδή η τιμή $\langle x, y \rangle$ ισούται με το μήκος της προβολής του y στο x επί το μήκος του x. Επειδή η παράσταση $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ είναι ίδια με την $y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n$, το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, δηλαδή $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, και άρα ισούται και με το προσημασμένο μήκος της* *προβολής του* x *στη διεύθυνση του* y *(θετικό αν η προβολή είναι ομόρροπη με το* y *και αρνητικό αλλιώς) επί το μήκος του* y*. Ειδικότερα ισχύει*

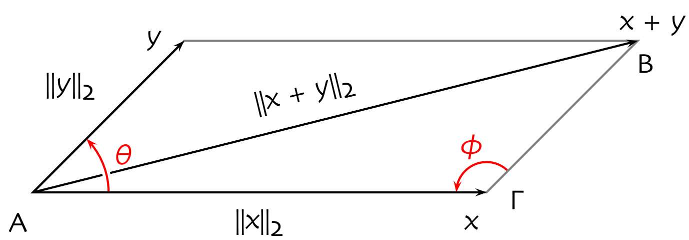
$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cos\theta,$$

όπου θ *η κυρτή γωνία του* x *με το* y *στο επίπεδο* $\operatorname{span}\{x, y\}$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα ότι

$$\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cos\theta = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

όπου θ η κυρτή γωνία του x με το y στο επίπεδο $\operatorname{span}\{x, y\}$. Το διάνυσμα $x + y$ ανήκει και αυτό στο $\operatorname{span}\{x, y\}$ και άρα κοιτώντας το σχήμα στο δισδιάστατο επίπεδο $\operatorname{span}\{x, y\}$ βλέπουμε την εξής γεωμετρική εικόνα:



Από τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων $\phi = \pi - \theta$ οπότε $\cos\theta = -\cos\phi$. Αλλά στο τρίγωνο $\widehat{AB\Gamma}$ ο νόμος των συνημιτόνων μας δίνει ότι

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 \cos\phi.$$

Άρα

$$\begin{aligned} 2\|x\|_2\|y\|_2 \cos\phi &= \|x + y\|_2^2 - \|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 2\langle x, y\rangle, \end{aligned} \tag{2.7}$$

αποδεικνύοντας τον τύπο.

Επιπλέον, το ότι η τιμή αυτή ισούται με το προσημασμένο μήκος της προβολής του x στη διεύθυνση του y επί το μήκος του y μπορεί να κατανοηθεί είτε από το ότι το $\|x\|_2 \cos\theta$ είναι το μήκος της προβολής πάνω στη διεύθυνση του y, είτε εφαρμόζοντας το γενικευμένο Πυθαγόρειο θεώρημα (που είναι ισοδύναμο βεβαίως με τον νόμο των συνημιτόνων) στο τρίγωνο $\widehat{AB\Gamma}$. □

Παρατήρηση 2.6.3 Αν $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ δηλαδή αν τα διανύσματα x και y ανήκουν στη σφαίρα $\mathbb{S}^{n-1}$ ακτίνας 1 στον $\mathbb{R}^n$, τότε το $\langle x, y\rangle$ είναι ίσο ακριβώς με το προσημασμένο μήκος της προβολής του x στη διεύθυνση του y, αλλά και με το προσημασμένο μήκος της προβολής του y στη διεύθυνση του x.

Πρόταση 2.6.4 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz) *Για κάθε x, $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\|y\|_2.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι προφανής αφού

$$|\langle x, y\rangle| = \Big|\|x\|_2\|y\|_2\cos\theta\Big| \leq \|x\|_2\|y\|_2.$$

□

Πόρισμα 2.6.5 *Η απεικόνιση $\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως προς και τις δύο μεταβλητές της.*

Απόδειξη: Αν $x_m \to x$ και $y_m \to y$, δηλαδή αν $\|x_m - x\|_2 \to 0$ και $\|y_m - y\|_2 \to 0$ καθώς $m \to \infty$, οι $\|x_m\|_2$ και $\|y_m\|_2$ είναι φραγμένες πραγματικές ακολουθίες, αφού είναι συγκλίνουσες. Πράγματι από την τριγωνική ανισότητα ισχύει

$$\big|\|x_m\|_2 - \|x\|_2\big| \leq \|x_m - x\|_2 \to 0,$$

άρα $\|x_m\|_2 \to \|x\|_2$ καθώς $m \to \infty$. Ομοίως για την $\|y_m\|_2$. Έστω ότι $\|x_m\|_2 \leq M$ και $\|y_m\|_2 \leq M$, για κατάλληλο $M \in \mathbb{R}$. Τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwartz θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\big|\langle x_m, y_m\rangle - \langle x, y\rangle\big| &= \big|\langle x_m, y_m\rangle - \langle x_m y\rangle + \langle x_m, y\rangle - \langle x, y\rangle\big| \\
&= \big|\langle x_m, y_m - y\rangle + \langle x_m - x, y\rangle\big| \\
&\leq \big|\langle x_m, y_m - y\rangle\big| + \big|\langle x_m - x, y\rangle\big| \\
&\leq \|x_m\|_2\|y_m - y\|_2 + \|x_m - x\|_2\|y\|_2 \\
&\leq M\|y_m - y\|_2 + M\|x_m - x\|_2,
\end{aligned}$$

άρα συγκλίνει στο μηδέν. □

Στα παρακάτω θα χρειαστούμε και τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου στον $\mathbb{C}^n$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μια διαφοροποίηση. Επειδή πάλι θα θέλουμε να ισχύει $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$ αναγκαζόμαστε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο αντί να είναι

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j},$$

ώστε να προκύψει $\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2$. Οπότε τώρα ως συνέπεια αυτής της μεταβολής ισχύει

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \overline{y_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \overline{x_j}} = \overline{\langle y, x\rangle}.$$

Δηλαδή το μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο δεν είναι συμμετρικό. Το ονομάζουμε «αντισυμμετρικό» για αυτή του την ιδιότητα. Πολύ εύκολα ελέγχουμε ότι όλες οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ισχύουν και στο μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο με τις προφανείς τροποποιήσεις λόγω της αντισυμμετρίας. Για παράδειγμα, συνεχίζει να ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz αλλά η απόδειξη πρέπει να τροποποιηθεί, αφού στην (2.7) θα πάρουμε

$$2\|x\|_2\|y\|_2 \cos\theta = \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Αν $\langle x, y\rangle = 0$ τότε η ανισότητα Cauchy-Schwartz ισχύει τετριμμένα. Αν $\langle x, y\rangle \neq 0$ αντικαθιστούμε το x με το $e^{i\phi}x$ όπου $e^{i\phi} = |\langle x, y\rangle|/\langle x, y\rangle$. Οπότε από τα προηγούμενα, και επειδή $|e^{i\phi}| = 1$ θα έχουμε

$$|\langle x, y\rangle| = e^{i\phi}\langle x, y\rangle = \langle e^{i\phi}x, y\rangle.$$

Δηλαδή η τελευταία παράσταση είναι πραγματικός αριθμός. Οπότε συνεχίζουμε:

$$|\langle x, y\rangle| = \mathrm{Re}\langle e^{i\phi}x, y\rangle = \|e^{i\phi}x\|_2\|y\|_2 \cos\theta \leq \|e^{i\phi}x\|_2\|y\|_2 = \|x\|_2\|y\|_2.$$

Εδώ πιθανώς να εγερθούν ενστάσεις ως προς το τι είναι η γωνία θ και αν είναι η ίδια όταν χρησιμοποιούμε το x ή το $e^{i\phi}x$. Για αυτό, συνήθως ακολουθείται μια άλλη, αλλά λιγότερο διαισθητική απόδειξη: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x + \lambda y\|_2^2 \geq 0.$$

Άρα

$$0 \le \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = (\langle y, y\rangle)\lambda^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)\lambda + \langle x, x\rangle.$$

Επειδή αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η διακρίνουσα του προηγουμένου τριωνύμου (ως προς λ) πρέπει να μη θετική, δηλαδή

$$|\mathrm{Re}\langle x, y\rangle| \le \|x\|_2\|y\|_2.$$

Τώρα επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα με το $e^{i\Phi}x$ όπως και πριν.

2.7 ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ, ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΡΟΒΟΛΗ

Δύο διανύσματα x, $y \in \mathbb{R}^n$ είναι κάθετα όταν $\cos\theta = 0$, όπου θ η γωνία των x και y (στο επίπεδο που παράγουν), ισοδύναμα, από την Πρόταση 2.6.2, όταν $\langle x, y\rangle = 0$.

Αν u, $v \in \mathbb{R}^n$ και $\|u\|_2 = 1$, ορίζουμε την ορθογώνια προβολή του v στο υπερεπίπεδο $u^\perp$ να είναι το διάνυσμα $P_{u^\perp}(v) = v - \langle v, u\rangle u$. Το διάνυσμα αυτό είναι πράγματι στο $u^\perp$, αφού χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned}\langle u, P_{u^\perp}(v)\rangle &= \big\langle u, (v - \langle v, u\rangle u)\big\rangle \\ &= \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle\langle u, u\rangle \\ &= \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle\|u\|_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ομοίως ορίζουμε την ορθογώνια προβολή σε επίπεδο διάστασης k. Αν $u_1, \dots, u_{n-k}$ ορθογώνια και μήκους 1 διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την προβολή του v στον υπόχωρο $F = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_{n-k}\}^\perp$ διάστασης k να είναι το διάνυσμα

$$P_F(v) = v - \sum_{i=1}^{n-k}\langle v, u_i\rangle u_i.$$

Εύκολα ελέγχεται όπως και πριν ότι $P_F(v) \in F$ δείχνοντας ότι το $P_F(v)$ είναι κάθετο σε όλα τα $u_1, \dots, u_{n-k}$ υπολογίζοντας τα $\langle u_j, P_F(v)\rangle$ για $j = 1, 2, \dots, n-k$.

2.7.1 *Τανυστικά γινόμενα*

Η πιο απλή προβολή είναι η προβολή στη διεύθυνση ενός διανύσματος. Αν το e είναι ένα διάνυσμα *μήκους* 1 στου οποίου τη διεύθυνση θα προβάλουμε, τότε η προβολή αυτή είναι η απεικόνιση

$$P_{[e]}x = \langle x, e\rangle e.$$

Συχνά η προβολή αυτή συμβολίζεται με $e \otimes e$ και ονομάζεται τανυστικό γινόμενο του e με τον εαυτό του. Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί σε οποιαδήποτε δύο διανύσματα θέτοντας

$$(u \otimes v)(x) = \langle x, v\rangle u,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ για κάθε u, $v \in \mathbb{R}^n$. Φανερά το τανυστικό γινόμενο $u \otimes v$ δεν είναι τίποτα άλλο από μια γραμμική απεικόνηση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή μπορεί να περιγραφεί από τον πίνακα με στήλες τις εικόνες της συνήθους βάσης. Άρα

$$u \otimes v = \big((u \otimes v)(e_1), \dots, (u \otimes v)(e_n)\big).$$

Ή αλλιώς στη j στήλη αυτός ο πίνακας έχει το διάνυσμα $(u \otimes v)(e_j)$ άρα στην j στήλη στην i γραμμή έχει την i συντεταγμένη του $(u \otimes v)(e_j)$, δηλαδή την τιμή $\langle (u \otimes v)(e_j), e_i\rangle$. Έτσι ισχύει

$$(u \otimes v)_{ji} = \langle (u \otimes v)(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, v\rangle\langle u, e_i\rangle = v_j u_i.$$

Ως εκ τούτου, αν $e_1, \dots, e_n$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$(e_k \otimes e_m)_{ji} = e_{mj} e_{ki},$$

το οποίο κάνει πάντα μηδέν εκτός από την περίπτωση που $j = m$ και $i = k$ που ισούται με 1. Δηλαδή ο πίνακας $e_k \otimes e_m$ έχει παντού μηδενικά εκτός από τη m στήλη και k γραμμή που έχει το στοιχείο 1. Άρα κάθε $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ji})$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $e_k \otimes e_m$ με συντελεστές τα στοιχεία του a_{ij}:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_i \otimes e_j.$$

Για ένα παράδειγμα στον $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot e_1 \otimes e_1 + 2 \cdot e_2 \otimes e_1 + 3 \cdot e_1 \otimes e_2 + 4 \cdot e_2 \otimes e_2.\end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε τα τανυστικά γινόμενα $u \otimes v$ ως στοιχεία του $\mathbb{R}^{n^2}$. Κάθε $n \times n$ πίνακας είναι και αυτός στοιχείο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και μια βάση του χώρου αυτού είναι τα $e_i \otimes e_j$ για $i, j = 1, \dots, n$.

Το τανυστικό γινόμενο είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο και μπορεί να οριστεί σε γενικούς, αφηρημένους διανυσματικούς χώρους V, και όχι μόνο στον $\mathbb{R}^n$ όπως έγινε εδώ.

2.8 ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΒΑΣΕΙΣ

Μια βάση $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ορθοκανονική αν τα διανύσματα v_j είναι όλα μήκους 1 και μεταξύ τους κάθετα. Φανερά, η συνήθης βάση $e_1, \dots, e_n$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Πολύ χρήσιμη είναι η παρατήρηση ότι από κάθε βάση $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να παράγουμε μια ορθοκανονική βάση. Η διαδικασία που περιγράφουμε ονομάζεται ορθοκανονικοποίηση Grahm-Schmidt. Θέτουμε $u_1 = v_1/\|v_1\|_2$ (το v_1 δεν ισούται με μηδέν, αφού τα $v_1, \dots, v_n$ είναι βάση, άρα γραμμικά ανεξάρτητα). Φανερά $\|u_1\|_2 = 1$. Για να βρούμε το u_2 αφαιρούμε από το u_1 την προβολή του v_2 στη διεύθυνση του v_1 και «διορθώνουμε» το μήκος του να είναι ίσο με 1. Δηλαδή θέτουμε

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1\|_2}$$

(ο παρονομαστής δεν είναι ίσος με το μηδέν διότι αν ήταν τα v_2 και u_1 θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα, άρα και τα v_2 και v_1). Φανερά $\|u_2\|_2 = 1$ και

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{\langle u_1, v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1 \rangle}{\|v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1\|_2} = \frac{\langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_1, v_2 \rangle \|u_1\|_2^2}{\|v_2 - \langle u_1, v_2 \rangle u_1\|_2} = 0,$$

δηλαδή τα u_1 και u_2 είναι ορθογώνια. Συνεχίζουμε επαγωγικά με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή θέτουμε u_3 να είναι το v_3 πλην την προβολή του στο επίπεδο $\operatorname{span}\{u_1, u_2\}$ ώστε να είναι κάθετο στα u_1 και u_2 και στη συνέχεια «διορθώνουμε» το μήκος του να είναι ίσο με 1:

$$u_3 = \frac{v_3 - \big(\langle u_1, v_3\rangle u_1 + \langle u_2, v_3\rangle u_2\big)}{\Big\| v_3 - \big(\langle u_1, v_3\rangle u_1 + \langle u_2, v_3\rangle u_2\big)\Big\|_2}$$

(ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν πάλι από τη γραμμική ανεξαρτησία των v_j). Και πάλι από τον ορισμό του u_3 ισχύει $\|u_3\|_2 = 1$ και εύκολα ελέγχουμε όπως και πριν ότι $u_3 \perp u_1$ και $u_3 \perp u_2$. Συνεχίζουμε επαγωγικά με όλα τα v_j. Φανερά από την κατασκευή τους τα u_j έχουν μήκος ίσο με 1 και είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Μένει να δείξουμε ότι παράγουν τον $\mathbb{R}^n$. Αυτό είναι φανερό, αφού οι ορισμοί των u_j μπορούν διαδοχικά να λυθούν ως προς v_j (δηλαδή $v_1 = u_2\|v_1\|_2$, $v_2 = \|v_2 - \langle u_1, v_2\rangle u_1\|_2 u_2 + \langle u_1, v_2\rangle u_1$ κλπ) οπότε $v_j \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$, άρα $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\} = \mathbb{R}^n$.

2.9 ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΤΡΟΦΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

2.9.1 *Στροφές*

Ξεκινάμε πρώτα στις 2 διαστάσεις. Στον $\mathbb{R}^2$ είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ στρέφει κάθε διάνυσμα κατά γωνία θ (αριστερόστροφα αν $\theta \geq 0$). Πράγματι, ο R_θ απεικονίζει τα e_1 και e_2 στα $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ και $\left(\begin{smallmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$, και λόγω γραμμικότητας κάνει ακριβώς το ίδιο σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου. Μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι κάθε διάνυσμα $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ σχηματίζει γωνία θ με το

$$R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

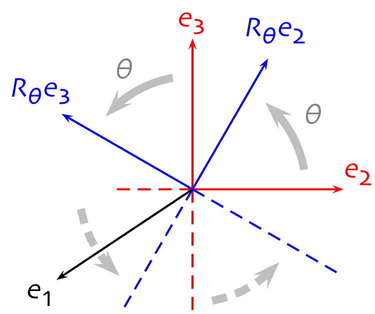
Αυτό αφήνεται ως άσκηση. Η άσκηση δηλαδή είναι να υπολογιστεί το συνημίτονο της γωνίας των $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ και $R_\theta\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ με τη βοήθεια του εσωτερικού τους γινομένου και των μηκών τους.

Αν θέλουμε να εκτελέσουμε την ίδια στροφή στον $\mathbb{R}^3$ κρατώντας τον τρίτο άξονα σταθερό, δεν έχουμε παρά να αφήσουμε αμετάβλητες τις τρίτες συντεταγμένες κάθε διανύσματος. Συνεπώς ένας πίνακας που κρατάει σταθερό το e_3 και στρέφει το επίπεδο $\operatorname{span}\{e_1, e_2\}$

κατά γωνία θ είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βεβαίως αν η στροφή θα γίνει στο επίπεδο $\text{span}\{e_2, e_3\}$ τότε επειδή η πρώτη συντεταγμένη δεν αλλάζει ο πίνακας θα είναι ο



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

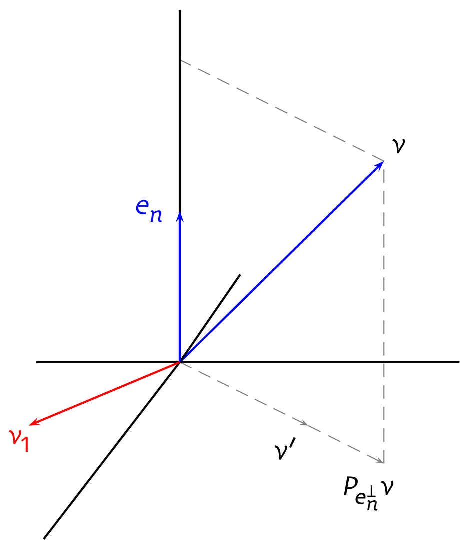
Ενώ αν η στροφή γίνει στο επίπεδο $\text{span}\{e_1, e_3\}$ επειδή η δεύτερη συντεταγμένη δεν αλλάζει ο πίνακας θα είναι ο

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Εντελώς ανάλογα είναι τα πράγματα στον $\mathbb{R}^n$. Για παράδειγμα, στροφή κατά θ στο επίπεδο $\text{span}\{e_{n-1}, e_n\}$ κάνει ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στον $\mathbb{R}^n$ θέλουμε να στρέψουμε το τυχόν διάνυσμα $v \neq e_n$ στη διεύθυνση του e_n ώστε να γίνει ομόρροπο με το e_n, και η στροφή να γίνει πάνω στο επίπεδο $F = \text{span}\{v, e_n\}$. Πρώτα βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση του F την οποία επεκτείνουμε σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα θέτουμε



$$v' = \frac{P_{e_n^\perp} v}{\|P_{e_n^\perp} v\|_2} = \frac{v - \langle e_n, v\rangle e_n}{\|v - \langle e_n, v\rangle e_n\|_2}.$$

Φανερά τα v' και e_n είναι ορθοκανονική βάση του επιπέδου F. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 1.4.6 για να επεκτείνουμε τη βάση αυτή του F σε μια ορθοκανονική βάση του χώρου (στο προηγούμενο σχήμα προσθέτουμε το διάνυσμα v_1). Έτσι τα $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v', e_n$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε U να είναι ο πίνακας με στήλες τα $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v', e_n$:

$$U = (v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v', e_n).$$

Έτσι ο U απεικονίζει τη συνήθη βάση $e_1, e_2, \dots, e_n$ στη νέα βάση $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v', e_n$, και η αντίστροφη απεικόνιση (ας τη συμβολίσουμε με U^{-1}) απεικονίζει τη βάση $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v', e_n$ στη συνήθη βάση. Άρα στέλνει e_n στο e_n και το v' στο e_{n-1}. Τώρα έχουμε όλα τα στοιχεία για να περιγράψουμε την επιθυμητή στροφή. Έστω ότι θ είναι η γωνία που σχηματίζει το $U^{-1}v$ με το e_n στο επίπεδο $\mathrm{span}\{e_{n-1}, e_n\}$. Τότε οποιαδήποτε στροφή στο F μπορεί να γίνει ως εξής. Απεικονίζουμε το F στο $\mathrm{span}\{e_{n-1}, e_n\}$ με την U^{-1}, μετά στρέφουμε εκεί το $U^{-1}v$ στο e_n και επιστρέφουμε το $\mathrm{span}\{e_{n-1}, e_n\}$ στο F.

Συνεπώς η στροφή που αναζητάμε δεν είναι παρά η σύνθεση

$$U\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}U^{-1}.$$

Αυτή η στροφή προφανώς αφήνει αναλλοίωτα τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$, αφού αυτά απεικονίζονται από τον U^{-1} στα $e_1, e_2, \dots, e_{n-2}$, στη συνέχεια η στροφή στο $\operatorname{span}\{e_{n-1}, e_n\}$ επίπεδο τα αφήνει αναλλοίωτα και τέλος ο U τα ξαναεπιστρέφει στα $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$.

Είναι φανερό ότι αν η R_1 στρέφει το v στο e_n και η R_2 το u στο e_n, τότε η σύνθεση $R_2^{-1}R_1$ στρέφει το v στο u στο επίπεδο $\operatorname{span}\{v, u\}$ (γιατί;). Έτσι μπορούμε να στρέψουμε τον χώρο ώστε οποιοδήποτε διάνυσμα να απεικονιστεί σε διάνυσμα ομόρροπο με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα.

Επίσης μπορεί κανείς να πάρει πολύ πιο περίπλοκες στροφές στον $\mathbb{R}^n$ αν συνθέσει οσεσδήποτε τέτοιες απεικονίσεις.

Τέλος είναι φανερό ότι οι στροφές αυτές είναι ισομετρίες. Δηλαδή δεν αλλάζουν τα μήκη των διανυσμάτων ούτε τις μεταξύ τους γωνίες. Δηλαδή αν R οποιαδήποτε στροφή στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\|Rx\|_2 = \|x\|_2$ και $\langle Rx, Ry\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.9.2 Ανακλάσεις

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετήσουμε τις ανακλάσεις ως προς επίπεδο/ευθεία του χώρου. Το κύριο βήμα είναι η ανάκλαση ως προς ένα από τα υπερεπίπεδα των βασικών διανυσμάτων, για παράδειγμα το $e_n^{\perp}$. Σε αυτή την περίπτωση απλώς πρέπει να αλλάξουμε το πρόσημο της n-στης συντεταγμένης. Συνεπώς η συγκεκριμμένη ανάκλαση περιγράφεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ανάλογα είναι οι πίνακες ανάκλασης ως προς τα άλλα υπερεπίπεδα της συνήθους βάσης. Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

ανακλά τα διανύσματα του χώρου ως προς το υπερεπίπεδο $e_2^\perp$.

Τώρα η ανάκλαση ως προς οποιοδήποτε υπερεπίπεδο είναι εύκολη. Αν θέλουμε να βρούμε τον πίνακα ανάκλασης ως προς το υπερεπίπεδο $v^\perp$ θα στρέψουμε πρώτα το v ώστε να γίνει ομόρροπο με το e_n, οπότε το $v^\perp$ θα ταυτιστεί με το $e_n^\perp$, θα εκτελέσουμε την ανάκλαση ως προς το $e_n^\perp$ και στη συνέχεια θα αντιστρέψουμε την αρχική στροφή. Άρα αν ο πίνακας στροφής του v ώστε να είναι ομόρροπο με το e_n είναι ο R, τότε ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $v^\perp$ κάνει ο πίνακας

$$R^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}R.$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι τώρα μπορούμε να ορίσουμε ανακλάσεις ως προς οποιοδήποτε επίπεδο. Διότι με απλή γεωμετρία βλέπουμε ότι η ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο $v^\perp$ και μετά ως προς το υπερεπίπεδο $u^\perp$ είναι ανάκλαση ως προς το επίπεδο $n-2$ διαστάσεων $v^\perp \cap u^\perp$. Επειδή φανερά οποιοδήποτε επίπεδο F διάστασης k είναι τομή υπερεπιπέδων, οπότε η ανάκλαση ως προς το F είναι η διαδοχική ανάκλαση ως προς τα υπερεπίπεδα που έχουν τομή το F.

Τέλος είναι φανερό ότι οι ανακλάσεις διατηρούν τόσο τα μήκη των διανυσμάτων όσο και τις μεταξύ τους γωνίες.

2.10 Η ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΟΜΑΔΑ

Ορισμός 2.10.1 Το σύνολο όλων πολλαπλασιασμών πεπερασμένου πλήθους στροφών και ανακλάσεων στον $\mathbb{R}^n$ συνιστά την ομάδα γνωστή ως ορθογώνια ομάδα, που τη συμβολίζουμε με $O(n)$.

Κάθε στοιχείο της $O(n)$ είναι φανερά ισομετρία, δηλαδή διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων. Επίσης διατηρεί και τις γωνίες μεταξύ διανυσμάτων. Συνεπώς αν $U \in O(n)$ ισχύει $\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ και $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Αυτές οι ιδιότητες σημαίνουν ότι οι μετασχηματισμοί της ορθογώνιας ομάδας είναι «άκαμπτοι» (rigid) μετασχηματισμοί. Δηλαδή *δεν* παραμορφώνουν τα αντικείμενα του χώρου. Στροφή και ανάκλαση οποιουδήποτε αντικειμένου στον χώρο δεν το αλλάζει ουσιαστικά, απλά το τοποθετεί με άλλο τρόπο στον χώρο. Για παράδειγμα, η εφαρμογή ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού στον πλανήτη θα τον στρέψει ή θα του κάνει μια ανάκλαση αλλά ακριβώς επειδή διατηρούνται και τα μήκη και οι γωνίες δεν θα δημιουργηθεί κάποια παραμόρφωση του πλανήτη. Δεν θα συμπιεστεί για παράδειγμα, σε κάποια διεύθυνση ή θα μεγεθυνθεί σε κάποια άλλη.

Ισχύει όμως και αντίστροφα:

Πρόταση 2.10.2 *Κάθε $n \times n$ πίνακας $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι ισομετρία, δηλαδή $\|Vx\|_2 = \|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, είναι στοιχείο της $O(n)$.*

Απόδειξη: Επειδή ο V είναι ισομετρία, συμπεραίνουμε ότι οι στήλες του είναι διανύσματα μήκους 1. Πράγματι η πρώτη στήλη του είναι το διάνυσμα Ve_1 οπότε έχει μήκος ίσο με το μήκος του e_1. Ομοίως για κάθε άλλη στήλη. Τώρα το τρίγωνο που σχηματίζουν ως πλευρές του τα διανύσματα Ve_1, Ve_2 έχει μήκος της τρίτης πλευράς ίσο με

$$\|Ve_1 - Ve_2\|_2 = \|V(e_1 - e_2)\|_2 = \|e_1 - e_2\|_2 = \sqrt{2},$$

δηλαδή από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι ορθογώνιο, με ορθή τη γωνία των Ve_1 και Ve_2. Ομοίως όλες οι στήλες του V είναι ορθογώνια διανύσματα, δηλαδή συνιστούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή ο V στρέφει/ανακλά τη συνήθη βάση στην ορθοκανονική βάση των διανυσμάτων των στηλών του. Άρα $V \in O(n)$. □

Πόρισμα 2.10.3 *Κάθε ισομετρία $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διατηρεί τη γωνία οποιωνδήποτε διανυσμάτων.*

Απόδειξη: Αυτό είναι φανερό εφαρμόζοντας τη διαδικασία της παραπάνω απόδειξης σε οποιαδήποτε δύο διανύσματα. Αν x, y δυο οποιαδήποτε διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ το τρίγωνο που φτιάχνουν απεικονίζεται από την V σε ένα τρίγωνο με όλες τις πλευρές του ίσες, άρα και όλες τις γωνίες του ίσες. □

Κεφάλαιο 3

Ορίζουσες

3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένας πίνακας παραμορφώνει τον χώρο με συγκεκριμένο τρόπο. Διατηρεί το μηδέν, απεικονίζει ευθείες σε ευθείες και μεταφέρει παράλληλες ευθείες που είχαν ίση απόσταση μεταξύ τους σε ευθείες που πάλι έχουν μεταξύ τους ίσες αποστάσεις. Πώς όμως μπορούμε να «μετρήσουμε» την παραμόρφωση που κάνει ένας πίνακας στον χώρο; Ας δούμε πρώτα το παράδειγμα του $\mathbb{R}$. Πώς θα περιγράφαμε την παραμόρφωση που κάνει στο $\mathbb{R}$ ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το $e_1 = 1$ στο -2; Αν απλά μετρήσουμε τη μεγέθυνση που κάνει στο $\mathbb{R}$ θα λέγαμε ότι απλώς μεγεθύνει «επί 2». Το πλάτος του $[0, 1]$ γίνεται 2 αφού αυτό απεικονίζεται στο $[-2, 0]$. Αν όμως κάνουμε αυτή την επιλογή, φαίνεται ότι έχουμε χάσει μια πληροφορία. Διότι και ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το $e_1 = 1$ στο $+2$ και αυτός μεγεθύνει τον χώρο «επί 2» και δεν υπάρχει τρόπος να τους ξεχωρίσουμε.

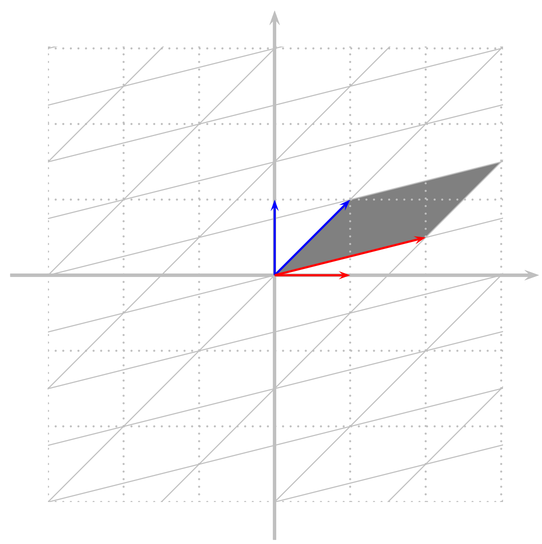
Φαίνεται λοιπόν λογικότερο να πούμε ότι ο πρώτος μετασχηματισμός μεγεθύνει τον χώρο κατά ένα παράγοντα «-2». Τι εκφράζει τώρα το πρόσημο; Δεν εκφράζει τη μεγέθυνση ενός διαστήματος. Αυτή είναι ίση με 2. Εκφράζει το γεγονός ότι ο πολλαπλασιασμός με αρνητικό αντιστρέφει τη φορά του άξονα! Τα διανύσματα του $\mathbb{R}$ που είχαν φορά προς τα δεξιά, μετά τον πολλαπλασιασμό με -2 αποκτούν φορά προς τα αριστερά.

Λέμε ότι «ο πολλαπλασιασμός με -2 αλλάζει τον *προσανατολισμό* του $\mathbb{R}$».

Ένας άλλος τρόπος να πούμε το ίδιο πράγμα, που θα είναι όμως τώρα χρήσιμος για να καταλάβουμε την ίδια έννοια στο $\mathbb{R}^2$ παρακάτω, είναι να πούμε ότι ο μετασχηματισμός του $\mathbb{R}$ «επί -2» είναι ίδιος με το να μετασχηματίσουμε το $\mathbb{R}$ «επί 2» και στη συνέχεια γυρίσουμε τον άξονα ανάποδα. Ή ισοδύναμα να δούμε τον άξονα από την πίσω μεριά του χαρτιού!

Η ποσότητα μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης του $\mathbb{R}$ μαζί με το πρόσημο που δείχνει αν άλλαξε ή όχι ο προσανατολισμός του ονομάζεται *ορίζουσα* του μετασχηματισμού. Έτσι $\det(2) = 2$ και $\det(-2) = -2$. Θα δούμε ότι στο $\mathbb{R}^2$ αυτό δεν είναι τόσο απλό όσο εδώ.

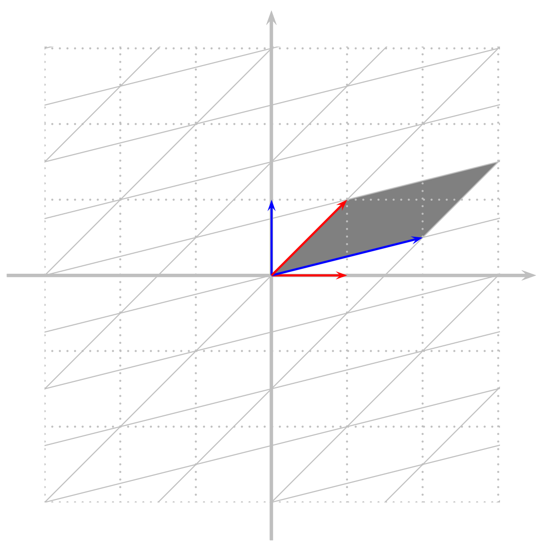
Κοιτώντας το επόμενο σχήμα, που δείχνει την παραμόρφωση που κάνει ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$,



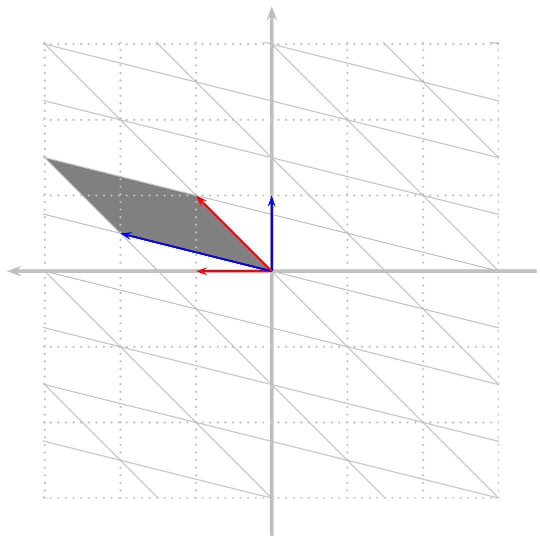
θα μπορούσε κανείς να ορίσει ένα μέτρο για αυτή την παραμόρφωση να είναι η μεταβολή του εμβαδού από το εμβαδόν του τετραγώνου που ορίζουν τα e_1 και e_2 στο εμβαδόν που ορίζουν οι εικόνες τους μέσω του πίνακα. Το εμβαδόν του τετραγώνου που ορίζουν τα e_1 και e_2 είναι ίσο με 1 και το εμβαδόν του σκιασμένου παραλληλογράμμου υπολογίζεται εύκολα ότι ισούται με 1,5. Η ορίζουσα λοιπόν του πίνακα A θα οριστεί να είναι το 1,5 αλλά θα πρέπει να αποφασίσουμε αν θα είναι $+1{,}5$ ή $-1{,}5$ ανάλογα με το αν αλλάζει ή όχι ο προσανατολισμός του επιπέδου. Προσανατολισμός τώρα σημαίνει ότι το ίδιο σχήμα έχουμε τη δυνατότητα να το δούμε από δύο μεριές. Η δυνατότητα δηλαδή να τοποθετήσουμε τον παρατηρητή μπροστά από τη σελίδα ή πίσω από αυτή *δεν* οδηγεί στην ίδια όψη του σχήματος. Όταν βλέπουμε το προηγούμενο σχήμα από μπροστά το κόκκινο διάνυσμα πρέπει να στραφεί αριστερόστροφα κατά γωνία μικρότερη των 180 μοιρών για να βρεθεί στην ευθεία του μπλε διανύσματος. Όμως αν δούμε το ίδιο σχήμα από την πίσω όψη της σελίδας τότε το κόκκινο διάνυσμα θα πρέπει να στραφεί *δεξιόστροφα* κατά γωνία μικρότερη των 180 μοιρών για να βρεθεί στην ευθεία του μπλε διανύσματος.

Ο προσανατολισμός λοιπόν καθορίζεται από το αν το Ae_1 θα πρέπει να στραφεί αριστερόστροφα κατά μια γωνία μικρότερη των 180 μοιρών για να βρεθεί στην ευθεία του Ae_2. Σε αυτό το παράδειγμα, αυτό είναι αληθές, άρα θέτουμε $\det(A) = +1{,}5$.

Ας δούμε όμως και το παράδειγμα του πίνακα $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$. Στο παρακάτω σχήμα που δείχνει την παραμόρφωση που κάνει ο πίνακας B βλέπουμε ότι και πάλι το παραλληλόγραμμο που παίρνουμε όταν μετασχηματίσουμε τα e_1 και e_2 είναι το ίδιο. Τώρα όμως για να έρθει το διάνυσμα Be_1 στην ευθεία του Be_2 στρεφόμενο κατά γωνία μικρότερη των 180 μοιρών, πρέπει να στραφεί *δεξιόστροφα* και όχι αριστερόστροφα.



Ή ισοδύναμα πρέπει να στραφεί αριστερόστροφα, αν γυρίσουμε ανάποδα το χαρτί μας και δούμε το σχήμα από την πίσω μεριά του χαρτιού. Το επόμενο σχήμα είναι το ίδιο με το προηγούμενο αλλά μας το δείχνει όπως το βλέπουμε από την πίσω μεριά του χαρτιού!

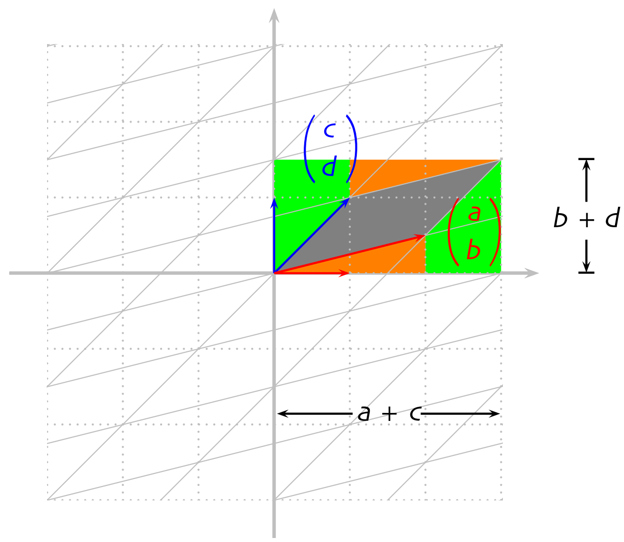


Έτσι ο πίνακας B λέμε ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^2$ και για αυτό θέτουμε $\det(B) = -1{,}5$.

Για το αν υπάρχει τύπος που υπολογίζει την ορίζουσα είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{3.1}$$

Πράγματι, είναι πολύ εύκολο να υπολογίσουμε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου στο σχήμα που ακολουθεί (όπου δεν αντιστρέφεται ο προσανατολισμός).

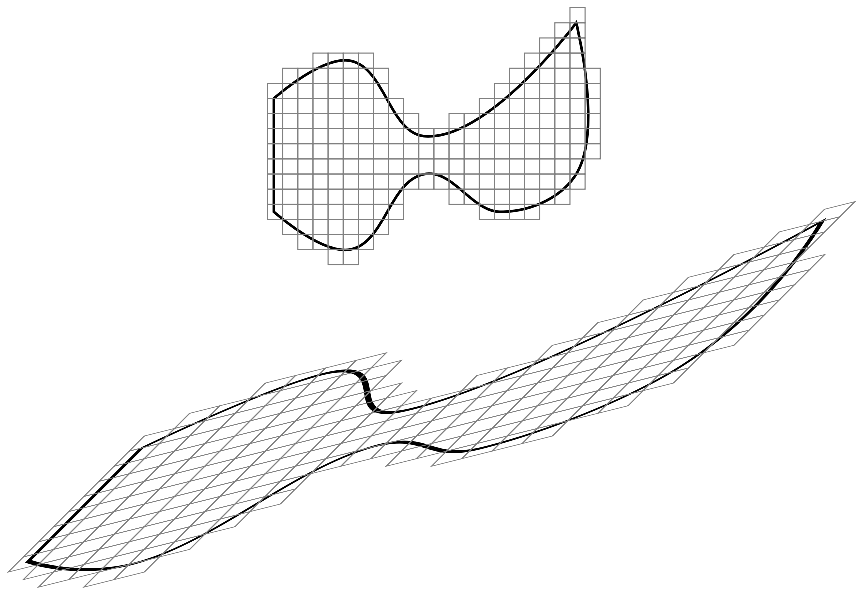


Από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $a+c$ και $b+d$ πρέπει να αφαιρέσουμε τα εμβαδά δύο ίσων τραπεζίων και δύο ίσων τριγώνων καταλήγοντας στην ποσότητα

$$(a+c)(b+d)-\big(b+(b+d)\big)c-ab=ad-bc.$$

Αν ο προσανατολισμός αντιστρέφεται, τότε τα a, b πρέπει να ανταλλαχθούν με τα c, d, αφού το κόκκινο διάνυσμα θα είναι στη θέση του μπλε και το μπλε στη θέση του κόκκινου, δίνοντας την ποσότητα $cb-da$. Αλλά λόγω της αλλαγής του προσανατολισμού θα πρέπει να αλλάξουμε και το πρόσημο της παράστασης καταλήγοντας πάλι στο $ad-bc$.

Έτσι λοιπόν το τετράγωνο $[0,1]\times[0,1]$ που έχει εμβαδόν ίσο με 1 μετασχηματίζεται σε ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού $|\det A|$ (ή $\det A$ αν συνυπολογίσουμε και τον προσανατολισμό). Όμως φανερά, επειδή οι γραμμικοί μετασχηματισμοί απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες και κρατάνε σταθερές τις αποστάσεις ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες που είχαν σταθερή απόσταση μεταξύ τους, αυτή η ιδιότητα ισχύει και για κάθε τετράγωνο $[t,s]\times[t,s]$ πλευράς $s-t$ για κάθε t, $s\in\mathbb{R}$ με $t<s$. Άρα επειδή κάθε χωρίο μπορούμε να το προσεγγίσουμε οσοδήποτε καλά με ξένα τετράγωνα όπως βλέπουμε στο επόμενο σχήμα,



συμπεραίνουμε ότι κάθε χωρίο που έχει εμβαδόν E μετασχηματίζεται σε ένα χωρίο που έχει εμβαδόν $|\det A| \cdot E$ (ή $(\det A) \cdot E$ αν λάβουμε υπόψιν και τον προσανατολισμό). Στο σχήμα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε για A τον $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Αυτή η απόδειξη (της προσέγγισης με τετράγωνα) δεν είναι αυστηρή αλλά είναι πειστική και θα διδαχθεί στα μαθήματα της Ανάλυσης και της Θεωρίας Μέτρου.

Συνεπώς, η ορίζουσα ενός γραμμικού μετασχηματισμού A είναι εκείνη η ποσότητα $\det A$ *με την οποία πολλαπλασιάζεται το εμβαδόν κάθε χωρίου όταν εφαρμόζεται ο μετασχηματισμός A*. Αυτό έχει άμεση συνέπεια της εξής πρόταση:

Πρόταση 3.1.1 *Αν A και B δύο γραμμικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου ισχύει*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

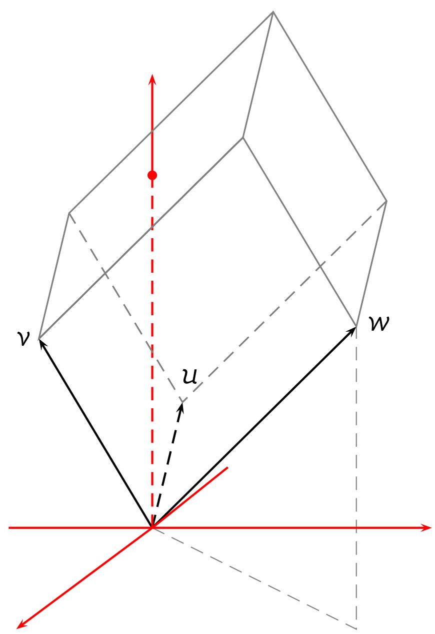
Απόδειξη: Η απόδειξη είναι φανερή, αφού για να εφαρμοστεί ο AB πρέπει πρώτα να εφαρμοστεί ο B παραμορφώνοντας κατά $\det B$ και μετά ο A παραμορφώνοντας περαιτέρω κατά $\det A$. □

Βεβαίως αν κανείς θέλει να κάνει την απόδειξη αλγεβρικά, δηλαδή κάνοντας πράξεις με τον τύπο (3.1), μπορεί να το κάνει ως άλλη μια άσκηση …αντοχής.

Ας παρατηρήσουμε κλείνοντας αυτή την ενότητα ότι αν ο γραμμικός μετασχηματισμός παραμορφώνει υπερβολικά τον χώρο και τον «συνθλίβει» σε μια ευθεία τότε βεβαίως το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ θα απεικονιστεί πάνω σε αυτή την ευθεία, δηλαδή θα μετασχηματιστεί σε σύνολο μηδενικού εμβαδού, και συνεπώς η ορίζουσά του είναι μηδέν.

3.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

Στον τρισδιάστατο χώρο η ορίζουσα έχει ακριβώς την ίδια έννοια με το $\mathbb{R}^2$ με τη διαφορά ότι τώρα αφορά στην επίδραση που έχουν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί στον όγκο. Έτσι η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 υπολογίζει τον προσημασμένο όγκο του παραλληλεπιπέδου στο οποίο απεικονίζεται ο μοναδιαίος κύβος $[0,1]^3$.



Και πάλι έχουμε την έννοια της αλλαγής του προσανατολισμού του χώρου όπου αν ο μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό η ορίζουσα είναι θετική ενώ αν τον αντιστρέφει αρνητική. Βεβαίως τίθεται το θέμα τι σημαίνει «προσανατολισμός» στον $\mathbb{R}^3$. Θα περιγράψουμε και θα ορίσουμε αυτή την έννοια στην επόμενη υποενότητα αλλά για να ολοκληρώσουμε το θέμα του ορισμού της ορίζουσας ενός πίνακα A εκτός από το πρόσημό της που δηλώνει τον προσανατολισμό, θα πούμε ότι η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα δεν είναι τίποτα άλλο από ο όγκος του παραλληλεπιπέδου στις n διαστάσεις που έχει ακμές τα διανύσματα Ae_1, $Ae_2, \dots, Ae_n$, σε πλήρη αναλογία με τις 2 και 3 διαστάσεις.

Παρατήρηση 3.2.1 Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο όγκος ενός παραλληλεπιπέδου μπορεί να υπολογιστεί με τον κανόνα «εμβαδόν βάσης επί ύψος». Αυτό πιθανώς να φαίνεται όχι τόσο αυστηρό υπό την έννοια του ότι για να είναι καλός ο ορισμός θα πρέπει να αποδειχθεί ότι δεν έχει σημασία ποια θεωρούμε βάση και ποιο ύψος, και με κάθε επιλογή βάσης και του αντίστοιχου ύψους το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Αυτό είναι αληθές και προκύπτει αμέσως από το θεώρημα Tonelli από τη Θεωρία Μέτρου και δεν θα ασχοληθούμε εδώ με αυτό το θέμα. Προτιμούμε να μείνουμε με αυτή την προσωρινή «ασάφεια», μέχρι ο αναγνώστης να μελετήσει Θεωρία Μέτρου, παρά να θυσιάσουμε την ομορφιά αυτής της παρουσίασης επιλέγοντας άλλο δρόμο.

Χωρίς καμία μεταβολή στην απόδειξη της Πρότασης 3.1.1 ισχύει η εξής πρόταση:

Πρόταση 3.2.2 *Για οποιουσδήποτε $n \times n$ πίνακες A και B ισχύει*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

□

Παρατηρούμε επίσης ότι από τον ορισμό της ορίζουσας του πίνακα A, αν αυτός «συνθλίβει» τον χώρο σε χαμηλότερη διάσταση, δηλαδή αν τα Ae_1, $Ae_2, \dots, Ae_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές αυτά τα διανύσματα είναι μηδέν. Αλλά φανερά το ίδιο ισχύει και αντιστρόφως. Δηλαδή αν $\det(A) = 0$ το παραλληλεπίπεδο με ακμές τα Ae_1, $Ae_2, \dots, Ae_n$ έχει όγκο μηδέν, συνεπώς οι ακμές του βρίσκονται σε υπόχωρο διάστασης μικρότερης του n, άρα είναι γραμμικά εξαρτημένα. Καταλήξαμε έτσι στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.2.3 *Τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_n$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα με στήλες τα u_1, $u_2, \dots, u_n$ είναι ίση με μηδέν.* □

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\binom{1}{2}$ και $\binom{1}{3}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \neq 0.$$

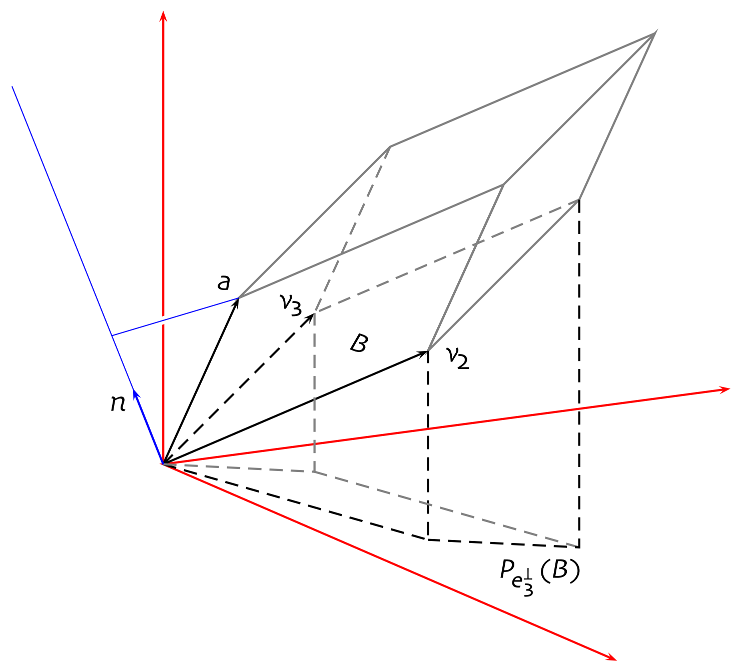
Στο παραπάνω σχήμα αν υποθέσουμε ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει το e_1 στο u το e_2 στο w και το e_3 στο v, τότε η ορίζουσά του ορίζεται να είναι ίση με τον όγκο του εικονιζόμενου παραλληλεπιπέδου με θετικό ή αρνητικό πρόσημο. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου και συνεπώς η ορίζουσά του είναι αρνητική.

3.2.1 Προσανατολισμός του μετασχηματισμένου χώρου

Έστω ότι ο A είναι ένας πίνακας που μετασχηματίζει τον χώρο $\mathbb{R}^n$, ώστε τα $Ae_1, \dots, Ae_n$ να είναι βάση του χώρου. Για να δούμε αν ο A διατηρεί ή αντιστρέφει τον προσανατολισμό του χώρου σκεφτόμαστε επαγωγικά: όταν $n = 2$ τότε ο θετικός ή αρνητικός προσανατολισμός έχει οριστεί. Ας υποθέσουμε ότι έχει οριστεί ο προσανατολισμός για $n-1$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Αφού τα $Ae_1, \dots, Ae_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ ισχύει $Ae_n \neq 0$. Έτσι μπορούμε να στρέψουμε το διάνυσμα Ae_n στο επίπεδο $\mathrm{span}\{Ae_n, e_n\}$ (δείτε Ενότητα 2.9) έως ότου το Ae_n να γίνει συνευθειακό και ομόρροπο με το e_n. Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας που κάνει αυτή τη στροφή είναι ο U. Προβάλουμε τώρα τα $UAe_1, UAe_2, \dots, UAe_{n-1}$ στον $\mathbb{R}^{n-1} = [e_n]^\perp$. Ορίζουμε τον προσανατολισμό του A να είναι ο προσανατολισμός των προβολών των $UAe_1, UAe_2, \dots, UAe_{n-1}$ στον $\mathbb{R}^{n-1} = [e_n]^\perp$.

3.2.2 Υπολογισμός ορίζουσας

Όπως είδαμε στους 2×2 πίνακες η ορίζουσα του $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ είναι ίση με $ad - bc$. Για να βρούμε τον τύπο για 3×3 πίνακες, αλλά και για τους $n \times n$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3.1: Υπολογισμός ορίζουσας ως προσημασμένος όγκος παραλληλεπιπέδου.

Στο επιχείρημα που θα ακολουθήσει δεν θα χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι σχεδιάζουμε στον $\mathbb{R}^3$. Η απόδειξη θα ισχύει για κάθε πίνακα $n \times n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n$. Για απλοποίηση της παρουσίασης θα μετονομάσουμε το v_1 σε a. Έτσι θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα

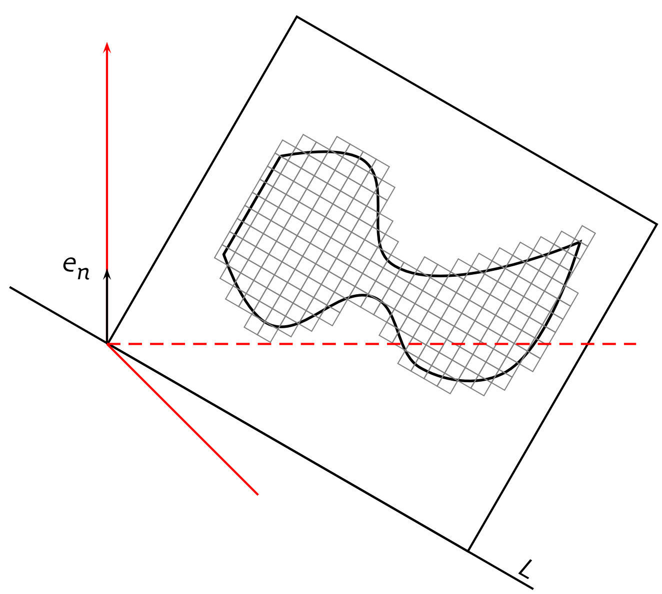
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & v_{21} & v_{31} & \cdots & v_{n1} \\ a_2 & v_{22} & v_{32} & \cdots & v_{n2} \\ a_3 & v_{23} & v_{33} & \cdots & v_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & v_{2n} & v_{3n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}.$$

Θα χρειαστούμε πρώτα ένα απλό λήμμα. Ονομάζουμε «υπερεπίπεδο» τον χώρο διάστασης $n-1$ που παράγουν οποιαδήποτε $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.

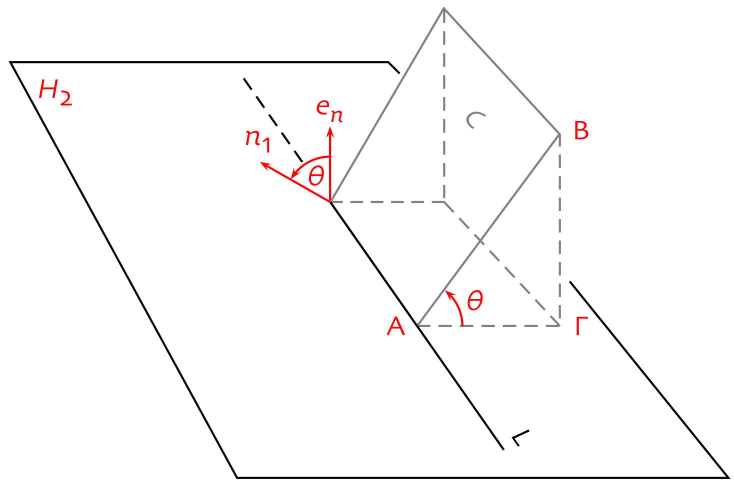
Λήμμα 3.2.4 *Έστω ότι n_1 και n_2 είναι δύο μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, H_1, H_2 τα κάθετα σε αυτά υπερεπίπεδα, δηλαδή $H_1 = n_1^\perp$ και $H_2 = n_2^\perp$, και P_2 η προβολή στο H_2. Αν C υποσύνολο του H_1 που έχει εμβαδόν ($n-1$-διάστατο όγκο) τότε ισχύει*

$$\mathrm{vol}_{n-1}\big(P_2(C)\big) = |\langle n_1, n_2\rangle|\,\mathrm{vol}_{n-1}(C).$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_2 = e_n$ οπότε $H_2 = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Αν τα υπερεπίπεδα είναι παράλληλα (οπότε ταυτίζονται) το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Αν όχι, τότε επειδή μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν του B με ορθογώνια παραλληλεπίπεδα υποσύνολα του H_1 (ορθογώνια παραλληλόγραμμα στον $\mathbb{R}^3$) που έχουν τις $n-2$ από τις ακμές τους παράλληλες με το $e_n^\perp$ επίπεδο (δείτε το επόμενο σχήμα), αρκεί να γίνει η απόδειξη για τέτοια παραλληλεπίπεδα.



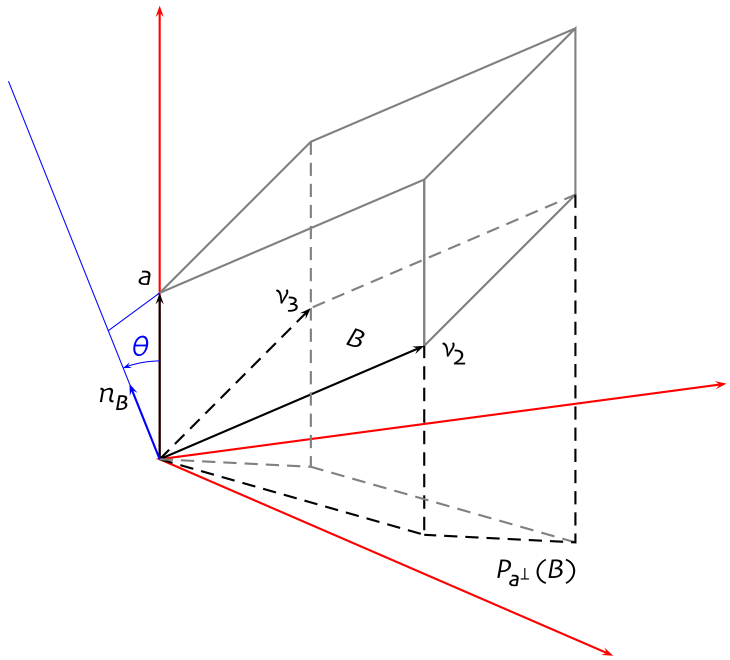
Μεταφέρουμε ένα τέτοιο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ώστε να έχει τις $n-2$ ακμές του στον υπόχωρο $L = e_n^\perp \cap H_1$ και η εικόνα είναι αυτή του επόμενου σχήματος.



Φανερά, το εμβαδόν του C ισούται με $\mathrm{vol}_{n-1}(C \cap L) \cdot \mathrm{AB}$. Αλλά $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AB}|\cos\theta|$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ισχυρισμός 3.2.5 *Υποθέτουμε ότι $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$. Τότε*

$$\det A = a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} v_{22} & v_{32} & \cdots & v_{n2} \\ v_{23} & v_{33} & \cdots & v_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2n} & v_{3n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}.$$



Απόδειξη: Φανερά (στο παραπάνω σχήμα έχουμε στρέψει το σύστημα αξόνων ώστε ο πρώτος άξονας με το διάνυσμα a να είναι ο κάθετος) ο προσημασμένος όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα a, $\nu_2, \dots, \nu_n$ είναι ίσος με το προσημασμένο εμβαδόν ($n-1$-διάστατος προσημασμένος όγκος) της βάσης Β επί το ύψος, το οποίο ισούται με $\langle n_B, a\rangle$ (αφού το n_B είναι κάθετο στη βάση B στον ίδιο ημίχωρο με το a). Αλλά η βάση B έχει προσημασμένο εμβαδόν το οποίο επί το συνημίτονο της γωνίας θ ισούται με το προσημασμένο εμβαδόν της προβολής στο επίπεδο $[a]^\perp$. Άρα, γράφοντας $\mathrm{vol}^{\pm}_{n-1}$ για τον προσημασμένο όγκο, ισχύει

$$\begin{aligned}
\det A &= \langle n, a\rangle \mathrm{vol}^{\pm}_{n-1}(B) \\
&= (a_1 \cos\theta)\mathrm{vol}^{\pm}_{n-1}(B) = a_1\big(\cos\theta \mathrm{vol}^{\pm}_{n-1}(B)\big) \\
&= a_1 \det \begin{pmatrix} \nu_{22} & \nu_{32} & \cdots & \nu_{n2} \\ \nu_{23} & \nu_{33} & \cdots & \nu_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{2n} & \nu_{3n} & \cdots & \nu_{nn} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Ισχυρισμός 3.2.6 *Αν ανταλλάξουμε δυο γραμμές του A η ορίζουσα αλλάζει κατά ένα παράγοντα (-1). Δηλαδή αλλάζει πρόσημο.*

Απόδειξη: Αυτό είναι φανερό, αφού η ανταλλαγή της i γραμμής με τη j σημαίνει ότι θα γράψουμε τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ ανταλλάσσοντας την i με την j συντεταγμένη, δηλαδή θα αλλάξουμε τη βάση να είναι παντού η ίδια εκτός από το ότι το e_i θα πάρει τη θέση του e_j και το e_j τη θέση του e_i. Συνεπώς έχουμε παραλληλεπίπεδο ίδιου όγκου αλλά διαφορετικού προσανατολισμού. Άρα η ορίζουσα θα αλλάξει πρόσημο.

Αν το παραπάνω φαίνεται δυσνόητο, μπορούμε να το δούμε και ως εξής: ο πίνακάς μας θα ανταλλάξει τις i και j γραμμές του αν πολλαπλασιαστεί με τον πίνακα

$$C = (e_1, \ldots, e_{i-1}, e_j, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_i, e_{j+1}, \ldots, e_n).$$

Αυτό το επιβεβαιώνετε είτε από το γεγονός ότι ο C αλλάζει τη σειρά των διανυσμάτων της βάσης κάνοντας την επιθυμητή ανταλλαγή είτε κάνοντας τις πράξεις του πολλαπλασιασμού $C \cdot A$. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστικότητα της ορίζουσας (Πρόταση 3.2.2), αρκεί να αποδείξουμε ότι ο C έχει ορίζουσα ίση με -1. Αλλά ο C απεικονίζει τον κύβο με ακμές τα βασικά διανύσματα στον εαυτό του με τη διαφορά ότι αλλάζει τον προσανατολισμό, αφού κάνει απλώς μια αλλαγή προσανατολισμού στο επίπεδο $\mathrm{span}\{e_i, e_j\}$. Άρα $\det C = -1$. □

Πόρισμα 3.2.7 *Θέτουμε u_j να είναι το διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες μηδέν εκτός από την j στην οποία ισούται με a_j. Θέτουμε επίσης A_j να είναι ο $n \times n$ πίνακας που στην πρώτη στήλη του έχει το διάνυσμα u_j και οι υπόλοιπες στήλες είναι τα $v_2, \ldots, v_n$, και $\tilde{A}_j$ να είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας με στήλες τα $v_1, \ldots, v_n$ από τα οποία έχει διαγραφεί η j συντεταγμένη. Τότε*

$$\det A_j = \begin{cases} a_j \cdot \det \tilde{A}_j & \text{αν } j \text{ περιττός,} \\ -a_j \det \tilde{A}_j & \text{αν } j \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Απόδειξη: Ανταλλάσσουμε την j γραμμή με την $j-1$, και επαναλαμβάνουμε μέχρι η j γραμμή να έρθει στην κορυφή, δηλαδή να καταλάβει την πρώτη γραμμή. Έτσι, μετά την πρώτη γραμμή που έχει καταληφθεί από τα στοιχεία της j γραμμής ακολουθούν οι γραμμές $1, 2, \ldots, j-1, j+1, j+2, \ldots, n$ με αυτή τη σειρά. Άρα για να γίνει αυτό θα χρειαστούν $j-1$ ανταλλαγές γραμμών. Συνεπώς η ορίζουσα θα αλλάξει πρόσημο $j-1$ φορές, και το αποτέλεσμα έπεται, ανάλογα με το αν ο $j-1$ είναι άρτιος ή περιττός. □

Το τελευταίο βήμα είναι ο ακόλουθος συλλογισμός:

Φανερά, ο προσημασμένος όγκος που θέλουμε είναι το προσημασμένο εμβαδόν της βάσης B επί το ύψος του παραλληλεπιπέδου (δείτε το Σχήμα 3.1). Ας ονομάσουμε n το κάθετο διάνυσμα στο B μήκους 1 (υπάρχουν δύο τέτοια διανύσματα, επιλέγουμε εκείνο που είναι στον ίδιο ημίχωρο που δημιουργούν τα $v_2, \dots, v_n$ με το a), τότε φανερά το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι η ποσότητα $\langle n, a\rangle$. Έτσι, αν όπως πριν συμβολίζουμε με u_j το διάνυσμα με όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός από την j η οποία ισούται με a_j, θα ισχύει

$$\det A = \langle n, a\rangle \mathrm{vol}^{\pm}_{n-1}(B) = \sum_{j=1}^{n} \big(\langle n, u_j\rangle\big) \mathrm{vol}^{\pm}_{n-1}(B)$$

(από τον Ισχυρισμό 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7)

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \det \begin{pmatrix} a_j & v_{2j} & v_{3j} & \cdots & v_{nj} \\ 0 & v_{21} & v_{31} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{2(j-1)} & v_{3(j-1)} & \cdots & v_{n(j-1)} \\ 0 & v_{2(j+1)} & v_{3(j+1)} & \cdots & v_{n(j+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & v_{2n} & v_{3n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

(από τον Ισχυρισμό 3.2.5)

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j \det \tilde{A}_j. \tag{3.2}$$

Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2 & 3 \\ a_2 & 4 & 9 \\ a_3 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} \det A &= a_1 \det\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 27 \end{pmatrix} - a_2 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 27 \end{pmatrix} + a_3 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \\ &= a_1(4\cdot 27 - 8\cdot 9) - a_2(2\cdot 27 - 8\cdot 3) + a_3(2\cdot 9 - 4\cdot 3) \\ &= 36a_1 - 30a_2 + 6a_3. \end{aligned}$$

3.2.3 Ιδιότητες οριζουσών

Πρόταση 3.2.8 *Αν πολλαπλασιάσουμε μία από τις στήλες του πίνακα επί τον αριθμό c τότε η ορίζουσα θα πολλαπλασιαστεί επί c*:

$$\det(v_1, \ldots, cv_j, \ldots, v_n) = c \cdot \det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n).$$

Απόδειξη: Στο Σχήμα 3.1 αν πολλαπλασιάσουμε το a (ή το v_1 ή το v_2) με c θα πολλαπλασιαστεί με $|c|$ και το ύψος του νέου παραλληλεπιπέδου. Αν $c \geq 0$ ο προσανατολισμός είναι παραμένει ο ίδιος, οπότε η ορίζουσα αλλάζει κατά τον παράγοντα $|c| = c$. Αν $c < 0$ τότε επειδή αλλάζει ο προσανατολισμός η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με $-|c| = c$. □

Πρόταση 3.2.9 *Αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές ενός πίνακα ή δύο στήλες η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο*:

$$\det(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j \ldots, v_n).$$

Απόδειξη: Στο Σχήμα 3.1 αν ανταλλάξουμε τις θέσεις του v_2 με το v_3 φανερά αλλάζει ο προσανατολισμός ενώ το εμβαδόν βάσης και το ύψος παραμένουν τα ίδια. Άρα η ορίζουσα απλώς αλλάζει πρόσημο. □

Πρόταση 3.2.10 *Αν μια στήλη είναι άθροισμα δύο διανυσμάτων ισχύει*

$$\det(v_1, \ldots, x + y, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, x, \ldots, v_n) + \det(v_1, \ldots, y, \ldots, v_n).$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας $j = 1$ (αλλιώς ανταλλάσσουμε στήλες μέχρι η j να έρθει στην θέση της πρώτης στήλης πιθανώς αλλάζοντας πρόσημο στην ορίζουσα). Τώρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\det(x+y, v_2, \dots, v_n) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (x_j + y_j) \det \tilde{A}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \det \tilde{A}_j + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} y_j \det \tilde{A}_j \\
&= \det(v_1, \dots, x, \dots, v_n) + \det(v_1, \dots, y, \dots, v_n).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2.11 *Αν σε μια στήλη του πίνακα προσθέσουμε οποιαδήποτε άλλη στήλη πολλαπλασιασμένη με οποιοδήποτε αριθμό, η οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των άλλων στηλών, η ορίζουσα δεν αλλάζει:*

$$\det(v_1, \dots, v_i + c v_j, \dots, v_j \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j \dots, v_n).$$

Απόδειξη: Στο Σχήμα 3.1 αν προσθέσουμε στο a οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του v_2 ή και οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των v_1 και v_2 το σημείο τερματισμού του a θα μετατοπιστεί παράλληλα με βάση του παραλληλεπιπέδου. Συνεπώς ούτε η βάση αλλάζει, ούτε το ύψος του, ούτε ο προσανατολισμός του. Άρα η ορίζουσα παραμένει η ίδια.

□

Κεφάλαιο 4

Αντίστροφος πίνακα

4.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο αντίστροφος ενός $n \times n$ πίνακα A θα πρέπει να απεικονίζει τα διανύσματα των στηλών του A πίσω στα αρχικά βασικά διανύσματα $e_1, \ldots, e_n$. Βεβαίως για να είναι αυτό εφικτό θα πρέπει τα διανύσματα στις στήλες του A να είναι γραμμικά ανεξάρτητα αλλιώς ο A δεν είναι επί του $\mathbb{R}^n$ και τότε δεν αντιστρέφεται. Ισοδύναμα θα πρέπει η ορίζουσά του να μην είναι μηδενική (αν η ορίζουσά του είναι μηδέν το παραλληλεπίπεδο με ακμές τις στήλες του A έχει όγκο μηδέν, άρα οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες). Ας υποθέσουμε ότι $A = (v_1, \ldots, v_n)$ με τα v_j γραμμικά ανεξάρτητα. Αναζητούμε ένα πίνακα, που φυσιολογικά θα τον ονομάσουμε A^{-1} ο οποίος θα απεικονίζει το v_j πίσω στο e_j. Επειδή ο A^{-1} καταργεί την παραμόρφωση που έκανε ο A στον χώρο, αναγκαστικά θα ισχύει $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Θα βρούμε λοιπόν τον A^{-1} αν λύσουμε την εξίσωση $AA^{-1} = I$ ως προς A^{-1}. Αν ονομάσουμε $x_1, \ldots, x_n$ τα διανύσματα που έχει στις στήλες του ο A^{-1} η εξίσωση αυτή οδηγεί στα n συστήματα n εξισώσεων της μορφής: $Ax_i = e_i$, ισοδύναμα

$$\begin{cases} v_{11}x_{i1} + v_{21}x_{i2} + \cdots + v_{n1}x_{in} &= \delta_{i1} \\ v_{12}x_{i1} + v_{22}x_{i2} + \cdots + v_{n2}x_{in} &= \delta_{i2} \\ & \vdots \\ v_{1n}x_{i1} + v_{2n}x_{i2} + \cdots + v_{nn}x_{in} &= \delta_{in}, \end{cases}$$

όπου $\delta_{ij} = 0$ αν $i \neq j$ και $\delta_{ij} = 1$ αν $i = j$ το δέλτα του Kronecker. Αυτή η διαδικασία είναι καθαρά αλγεβρική και θα παρουσιαστεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο του 2ου μέρους. Εδώ θα καταγράψουμε ένα τύπο για τον A^{-1} και θα επιβεβαιώσουμε ότι δεν υπάρχει πρόβλημα με την ύπαρξη αριστερά αντιστρόφου. Με το τελευταίο εννοούμε το εξής: η επίλυση των παραπάνω συστημάτων για κάθε i θα μας δώσει ένα πίνακα A^{-1} για τον οποίο θα ισχύει $AA^{-1} = I$. Μια και έχουμε πει ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ο πίνακας A^{-1} ικανοποιεί και την $A^{-1}A = I$. Αυτό όμως είναι απλό: αν B ο από αριστερά αντίστροφος του A (υπάρχει γιατί ο A είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση εφόσον υποθέσαμε ότι $\det A \neq 0$), θα ισχύει

$$B = BI = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

Τέλος όσον αφορά στον τύπο για τον A ονομάζουμε A_{ij} τον πίνακα που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη του. Ο A_{ij} δηλαδή είναι ένας $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας. Θέτουμε $\mathrm{adj}A = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{ij}$, δηλαδή

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \cdots & (-1)^{1+n} \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \cdots & (-1)^{2+n} \det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n+2} \det A_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n} \det A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ισχύει

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj}A.$$

□

Βεβαίως όταν $\det A = 0$ ο πίνακας σύμφωνα με τα προηγούμενα δεν είναι αντιστρέψιμος. Όμως κάθε πίνακας μπορεί να προσεγγιστεί από αντιστρέψιμους πίνακες. Πρώτα όμως πρέπει να ορίσουμε μια έννοια απόστασης για να έχει νόημα η έννοια της προσέγγισης. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να γίνει αυτό και όλοι είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι. Ίσως ο απλούστερος είναι να θεωρήσουμε κάθε $n \times n$ πίνακα ως στοιχείο του $\mathbb{R}^{n^2}$ και να ορίσουμε την απόσταση δύο πινάκων ως την απόστασή τους ως διανύσματα.

Ορισμός 4.1.1 Αν $A = (a_{ij})_{ij}$ και $B = (b_{ij})_{ij}$ δύο $n \times n$ πίνακες ορίζουμε την Ευκλείδεια απόστασή τους να είναι η ποσότητα

$$\|A - B\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Με τον παραπάνω ορισμό μια ακολουθία πινάκων $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{ij}$ συγκλίνει στον $A = (a_{ij})_{ij}$ καθώς $k \to \infty$ αν και μόνο αν $\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\|_2 = 0$ ισοδύναμα

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = 0,$$

ισοδύναμα $\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$ για κάθε i και για κάθε j. Παρατηρούμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}|^2 = 0$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή αν και μόνο αν κάθε στήλη των πινάκων $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{ij}$ συγκλίνει στην αντίστοιχη στήλη του $A = (a_{ij})_{ij}$. Με άλλα λόγια η ακολουθία $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{ij}$ συγκλίνει στον $A = (a_{ij})_{ij}$ αν και μόνο αν οι εικόνες των διανυσμάτων $e_1, \dots, e_n$ της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ συγκλίνουν στα διανύσματα στα οποία ο A απεικονίζει τα $e_1, \dots, e_n$.

Παρατήρηση 4.1.2 Στους απειροδιάστατους χώρους αυτές οι συγκλίσεις δεν είναι ισοδύναμες όπως εδώ. Η σύγκλιση των A_k στον A με βάση το αν τα $a_{ij}^{(k)}$ συγκλίνουν στα a_{ij} για $k \to \infty$ ονομάζεται *ασθενής σύγκλιση* και γράφουμε $A_k \xrightarrow{w} A$, ενώ η σύγκλιση με βάση το αν $A_k x$ συγκλίνει στο Ax για κάθε x στο πεδίο ορισμού (σε αναλογία με την παραπάνω σύγκλιση των στηλών του A_k, δηλαδή των $A_k e_j$ στο Ae_j) ονομάζεται *ισχυρή σύγκλιση* και γράφουμε $A_k \xrightarrow{s} A$. Αυτές οι συγκλίσεις στους απειροδιάστατους χώρους μελετώνται στα μαθήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Θεώρημα 4.1.3 *Για κάθε πίνακα B με $\det B = 0$ υπάρχει ακολουθία πινάκων A_k, $k \in \mathbb{N}$, ώστε $\det A_k \neq 0$ και $\lim_{k\to\infty} \|A_k - B\|_2 = 0$.*

Απόδειξη: Αφού $\det B = 0$ τα Be_j για $j = 1, 2, \dots, n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή βρίσκονται όλα σε ένα επίπεδο F διάστασης $m < n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας τα $Be_1, \dots, Be_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η απόδειξη τώρα είναι προφανής: απλά θα «βγάλουμε» τα $Be_{m+1}, \dots, Be_n$ από το επίπεδο F ώστε τα νέα διανύσματα μαζί με τα $Be_1, \dots, Be_m$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, θεωρούμε πρώτα μια ορθοκανονική βάση $v_{m+1}, \dots, v_n$ του χώρου $F^{\perp}$, και στη συνέχεια την ακολουθία πινάκων A_k που οι πρώτες m στήλες τους είναι σταθερά τα διανύσματα $Be_1, \dots, Be_m$ και οι επόμενες είναι οι

$$\frac{1}{k}v_{m+1} + Be_{m+1}, \ \frac{1}{k}v_{m+2} + Be_{m+2}, \dots, \frac{1}{k}v_n + Be_n.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι στήλες του A_k είναι γραμμικά ανεξάρτητες, άρα $\det A_k \neq 0$, και όταν $k \to \infty$ οι στήλες του A_k συγκλίνουν στις στήλες του B, άρα $\lim_{k\to\infty} \|A_k - B\|_2 = 0$. □

4.2 Ο ΧΩΡΟΣ ΤΩΝ ΣΤΗΛΩΝ ΚΑΙ Ο ΠΥΡΗΝΑΣ

Έστω ότι ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας. Δηλαδή σύμβολο για μια γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$. Αν οι n στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^m$ τότε με γραμμικούς συνδυασμούς παράγουν ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ διάστασης n. Αν είναι γραμμικά εξαρτημένες τότε παράγουν ένα υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$ διάστασης ίσης με το μεγαλύτερο πλήθος γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών του. Σε κάθε περίπτωση, επειδή ο A είναι μια γραμμική απεικόνιση, οπότε ισχύει

$$\lambda_1 Ax_1 + \cdots + \lambda_n Ax_n = A(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n),$$

ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του είναι ίσος με το σύνολο τιμών του. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Im}A$ το σύνολο τιμών του A στον $\mathbb{R}^m$, που σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελεί τον χώρο που παράγουν οι στήλες του.

Αν $\dim \mathrm{Im}A < n$ αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες άρα υπάρχουν λ_j όχι όλα μηδέν ώστε

$$\lambda_1 Ae_1 + \cdots + \lambda_n Ae_n = 0.$$

Ισοδύναμα, λόγω γραμμικότητας,

$$A(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0.$$

Το διάνυσμα $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ δεν είναι ίσο με το μηδέν αφού τα λ_j δεν είναι όλα μηδέν και τα e_j, η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Συνεπώς ο A απεικονίζει μη μηδενικά διανύσματα, για παράδειγμα το $v_0 := \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$, στο μηδέν. Άρα και όλο τον υπόχωρο span$\{v_0\}$ του $\mathbb{R}^n$ στο μηδέν, αφού $A(\lambda v_0) = \lambda A v_0 = 0$.

Ονομάζουμε *πυρήνα* του A το σύνολο όλων των διανυσμάτων του πεδίου ορισμού του (εδώ του $\mathbb{R}^n$) που απεικονίζονται στο μηδέν, και γράφουμε $\ker A$. Ο πυρήνας είναι φανερά γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διότι αν $v, u \in \ker A$ και λ, $\mu \in \mathbb{R}$ θα ισχύει και $\lambda v + \mu u \in \ker A$, αφού

$$A(\lambda v + \mu u) = \lambda A v + \mu A u = 0.$$

Την παρακάτω πρόταση μπορούμε να τη δούμε ως ένα είδος «αρχής διατήρησης της διάστασης» για τις γραμμικές απεικονίσεις.

Πρόταση 4.2.1 *Για κάθε $m \times n$ πίνακα A ισχύει*

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = n.$$

Απόδειξη: Έστω ότι η $v_1, \dots, v_k$ μια βάση του $\ker A$ την οποία επεκτείνουμε σε βάση του $\mathbb{R}^n$ προσθέτοντας τα διανύσματα $v_{k+1}, \dots, v_n$. Αφού κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \dots, v_n$ οι εικόνες μέσω του A είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_{k+1}, \dots, v_n$, αφού τα $v_1, \dots, v_k$ θα απεικονιστούν στο μηδέν. Συνεπώς ο χώρος $\operatorname{Im} A$ παράγεται από τα διανύσματα $Av_{k+1}, \dots, Av_n$. Άρα μένει να αποδείξουμε ότι αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω ότι

$$\lambda_{k+1} A v_{k+1}, \dots, \lambda_n A v_n = 0. \tag{4.1}$$

Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά $\lambda_j = 0$ για κάθε $j = k + 1, \dots, n$.

Πράγματι, η (4.1) συνεπάγεται ότι

$$A(\lambda_{k+1} v_{k+1}, \dots, \lambda_n v_n) = 0,$$

και συνεπώς

$$\lambda_{k+1} v_{k+1}, \dots, \lambda_n v_n \in \ker A.$$

Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ώστε

$$\lambda_{k+1} v_{k+1}, \dots, \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

οπότε

$$(-\lambda_1) v_1 + \cdots + (-\lambda_k) v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1}, \dots, \lambda_n v_n = 0.$$

Αλλά τα $v_1, \dots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπώς $\lambda_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$. □

Κεφάλαιο 5

Δυϊκός χώρος

5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορίζουμε τον δυϊκό χώρο του $\mathbb{R}^n$ να είναι το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$, και τον συμβολίζουμε με V^* αν έχουμε ήδη θέσει $V = \mathbb{R}^n$. Το παράδειγμα του εσωτερικού γινομένου της (2.5) δείχνει κάθε διάνυσμα x στον $\mathbb{R}^n$ με τερματικό σημείο το x^t ορίζει μια γραμμική απεικόνιση, οπότε υπ' αυτή την έννοια $\mathbb{R}^n \subseteq V^*$.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα εδώ είναι αν το σύνολο V^* περιέχει και στοιχεία που δεν είναι της μορφής (2.5) ισοδύναμα αν ισχύει ότι $\mathbb{R}^n \subsetneq V^*$. Η απάντηση είναι αρνητική. Θα δείξουμε παρακάτω ότι αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση τότε είναι αναγκαστικά της μορφής (2.5).

Παρατήρηση 5.1.1 Αυτό δεν είναι αληθές για κάθε διανυσματικό χώρο. Συγκεκριμένα, δεν είναι αληθές σε απειροδιάστατους χώρους παρά μόνο με την επιπλέον συνθήκη ότι οι γραμμικές μας επεικονίσεις είναι συνεχείς. Αυτό θα αποδειχθεί αργότερα στο βιβλίο. Επειδή αυτό το θεώρημα, για απειροδιάστατους χώρους (δείτε ενότητα ???), έχει μη τετριμμένη απόδειξη, έχει όνομα: «το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz». Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο όνομα και στην απλούστερη περίπτωση των χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 5.1.2 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz) *Για κάθε συνεχή γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}^n$*

ώστε να ισχύει

$$f(y) = \langle x, y \rangle.$$

Απόδειξη: Αφού η f είναι γραμμική, για να βρούμε ένα τύπο για την f, δηλαδή ένα πίνακα, ακολουθούμε τη συνήθη διαδικασία του Κεφαλαίου 2: υπολογίζουμε την f στα διανύσματα της συνήθους βάσης $e_1, \dots, e_n$. Αν $x_j = f(e_j)$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ τότε χρησιμοποιούμε αυτά ως στήλες για να κατασκευάζουμε το σύμβολο/πίνακα $(x_1, \dots, x_n)$. Έτσι, $f(y) = (x_1, \dots, x_n) \cdot y$ όπου η τελεία συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Θέτουμε

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Φανερά

$$f(y) = (x_1, \dots, x_n) \cdot y = x^t \cdot y = \langle x, y \rangle,$$

το οποίο αποδεικνύει το υπαρξιακό μέρος του θεωρήματος. Για τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα άλλο διάνυσμα x' ώστε

$$\langle x', y \rangle = f(x') = \langle x, y \rangle$$

για όλα τα $y \in \mathbb{R}^n$. Έπαιτε ότι $\langle x' - x, y \rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, και χρησιμοποιώντας $y = x' - x$ παίρνουμε ότι $\|x' - x\|_2^2 = 0$ και άρα $x' = x$. □

5.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει δύο ιδιαίτερες γραμμικές απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$. Η μία είναι το εσωτερικό γινόμενο. Η άλλη είναι η ορίζουσα! Πράγματι, η ορίζουσα είναι γραμμική απεικόνιση αν θεωρήσουμε μεταβλητό το διάνυσμα στην πρώτη (ή οποιαδήποτε άλλη) στήλη της. Αν $v_2, v_3, \dots, v_n$ σταθερά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και x οποιοδήποτε διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, η απεικόνιση $f(x) = \det(x, v_2, \dots, v_n)$ είναι γραμμική. Η ιδιότητα $f(cx) = cf(x)$ είναι η Πρόταση 3.2.8, ενώ η ιδιότητα $f(x + y) = f(x) + f(y)$ είναι η Πρόταση 3.2.10. Άρα από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει διάνυσμα w (που θα εξαρτάται προφανώς από τα $v_2, \dots, v_n$) ώστε

$$f(x) = \det(x, v_2, \dots, v_n) = \langle w, x \rangle.$$

Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.2.1 Το διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο ισχύει

$$\det(x, v_2, \dots, v_n) = \langle w, x \rangle,$$

ονομάζεται *εξωτερικό γινόμενο* των $v_2, \dots, v_n$ και γράφουμε $w = v_2 \times v_3 \times \cdots \times v_n$.

Το διάνυσμα αυτό δεν είναι δύσκολο να εντοπιστεί. Πράγματι, η ορίζουσα $\det(x, v_2, \dots, v_n)$ υπολογίζει τον προσημασμένο όγκο του παραλληλεπιπέδου που έχει βάση το παραλληλεπίπεδο με ακμές τα v_2, $\dots, v_n$ και ύψος το (προσημασμένο) μήκος της προβολής του x στη διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος n που είναι κάθετο στο

$$\mathrm{span}\{v_2, \dots, v_n\}$$

και με τέτοια φορά που τα n και $v_2, \dots, v_n$ να έχουν θετικό προσανατολισμό. Άρα αναγκαστικά το w πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του n και συγκεριμένα να έχει μήκος ίσο με το εμβαδόν ($n-1$-διάστατο όγκο) της βάσης. Αλλά από τη σχέση (3.2) φανερά

$$\begin{aligned}\det(x, v_2, \dots, v_n) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \det \tilde{A}_j \\ &= \left\langle \left(\det \tilde{A}_1, -\det \tilde{A}_2, \dots, (-1)^{n-1} \det \tilde{A}_n\right),\ x \right\rangle.\end{aligned}$$

Από τη μοναδικότητα του Θεωρήματος Riesz το εξωτερικό γινόμενο των $v_2, \dots, v_n$ είναι το διάνυσμα

$$\left(\det \tilde{A}_1, -\det \tilde{A}_2, \dots, (-1)^{n-1} \det \tilde{A}_n\right).$$

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε, αναγκαστικά αυτό το διάνυσμα έχει μήκος ίσο με το εμβαδόν ($n-1$-διάστατο όγκο) του παραλληλεπιπέδου της βάσης B που φτιάχνουν τα $v_2, \dots, v_n$. Δηλαδή ισχύει

$$(\det \tilde{A}_1)^2 + (\det \tilde{A}_2) + \cdots + (\det \tilde{A}_n)^2 = \mathrm{vol}_{n-1}(B)^2. \tag{5.1}$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η σχέση (5.1) δεν είναι στην ουσία της μια καινούργια σχέση. Στην πραγματικότητα δεν είναι τίποτα άλλο από τη γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα εμβαδά! Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $|\det \tilde{A}_j|$ είναι το εμβαδόν ($n-1$-διάστατος όγκος) του παραλληλεπιπέδου με ακμές τις προβολές των διανυσμάτων $v_2, \dots, v_n$ στο υπερεπίπεδο $e_j^{\perp}$, αφού ο $\tilde{A}_j$ είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που φτιάχνεται από τα $v_2, \dots, v_n$ αφού διαγραφούν οι j συντεταγμένες. Υπ' αυτή την έννοια η (5.1) είναι ειδική περίπτωση του εξής:

Θεώρημα 5.2.2 (Πυθαγόρειο θεώρημα για εμβαδά) *Αν B υποσύνολο υπερεπιπέδου που έχει $n-1$-διάστατο όγκο και P_j η προβολή στο $e_j^\perp$ υπερεπίπεδο, τότε ισχύει*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(B)^2 = \mathrm{vol}_{n-1}(P_1(B))^2 + \cdots + \mathrm{vol}_{n-1}(P_n(B))^2.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι απλούστατη αν χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.2.4. Αν n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο υπερεπίπεδο που βρίσκεται το B (οποιοδήποτε από τα δύο κάθετα), τότε το λήμμα αυτό μας λέει ότι

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_j(B)) = \mathrm{vol}_{n-1}(B)|\langle n, e_j\rangle|.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και αθροίζοντας τις σχέσεις αυτές για όλα τα $j = 1, 2, \dots, n$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{vol}_{n-1}(P_j(B))^2 &= \mathrm{vol}_{n-1}(B)^2 \sum_{j=1}^{n} |\langle n, e_j\rangle|^2 \\ &= \mathrm{vol}_{n-1}(B)^2 \|n\|_2^2 \\ &= \mathrm{vol}_{n-1}(B)^2,\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Το ότι το παραπάνω είναι γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος φαίνεται αμέσως όταν $n = 2$. Διότι τότε το B είναι μονοδιάστατο, οπότε επιλέγοντάς το να είναι το μήκος ενός διανύσματος, οι παραπάνω προβολές δεν είναι παρά οι προβολές στους άξονες και τα μήκη τους οι απόλυτες τιμές των συντεταγμένων του διανύσματος.

Και πάλι, αυτή δεν είναι η τελευταία γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Το παραπάνω μπορεί να γενικευθεί περαιτέρω στον τύπο που είναι γνωστός ως τύπος Cauchy-Binet (τη γεωμετρική ερμηνεία έδωσε πρώτος ο Binet). Τώρα προβάλουμε το B σε χαμηλότερης διάστασης υποχώρους. Το άθροισμα των τετραγώνων του εμβαδού των προβολών του B σε όλους του k-διάστατους συντεταγμένους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$ ισούται με το τετράγωνο του εμβαδού του B. Και πάλι η απόδειξη δεν είναι δύσκολη αλλά ξεφεύγει από τους σκοπούς του παρόντος και παραλείπεται.

5.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ο ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ/ΣΥΖΥΓΗΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Μια άλλη εφαρμογή του θεωρήματος αναπαράστασης είναι ο ανάστροφος πίνακας. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ και για κάθε $m \times n$ πίνακα

A, δηλαδή γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \langle Ax, y\rangle$. Φανερά η f είναι γραμμική, αφού

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + x_2) &= \big\langle A(\lambda x_1 + x_2), y\big\rangle = \langle \lambda A x_1 + A x_2, y\rangle \\ &= \lambda\langle Ax_1, y\rangle + \langle Ax_2, y\rangle \\ &= \lambda f(x_1) + f(x_2). \end{aligned}$$

Άρα από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει ένα διάνυσμα $g(y) \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\langle Ax, y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έτσι, ορίζεται μια απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^n$ που απεικονίζει το y στο $g(y)$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η g δεν είναι παρά μια γραμμική απεικόνιση, και θα υπολογίσουμε έναν πίνακα που την ορίζει. Η γραμμικότητα προκύπτει από τη μοναδικότητα στο θεώρημα Riesz. Πράγματι, αν y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^m$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} \langle x, \lambda g(y_1) + g(y_2)\rangle &= \lambda\langle Ax, y_1\rangle + \langle Ax, y_2\rangle \\ &= \langle Ax, \lambda y_1 + y_2\rangle, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και από τη μοναδικότητα του θεωρήματος Riesz αναγκαστικά $g(\lambda y_1 + y_2) = \lambda g(y_1) + g(y_2)$. Δηλαδή η g είναι γραμμική. Έτσι η g καθορίζεται από τις τιμές που δίνει στα διανύσματα της συνήθους βάσης δηλαδή η g περιγράφεται με τον $n \times m$ πίνακα $A^t = (g(e_1), g(e_2), \ldots, g(e_m))$.

Με τη βοήθεια του παραπάνω μπορούμε να βρούμε τη σχέση του A^t με τον A. Πράγματι, από τον ορισμό του A^t θα πρέπει να ισχύει $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Άρα ισχύει και για τα διανύσματα της συνήθους βάσης, δηλαδή $\langle Ae_i, e_j\rangle = \langle e_i, A^t e_j\rangle = \langle A^t e_j, e_i\rangle$, όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$. Αλλά φανερά, για κάθε πίνακα το $\langle Ae_i, e_j\rangle$ είναι η τιμή που έχει ο πίνακας στη γραμμή i στη στήλη j. Συνεπώς, η σχέση $\langle Ae_i, e_j\rangle = \langle A^t e_j, e_i\rangle$ μας λέει ότι ο A^t στην j γραμμή στη στήλη i έχει την ίδια τιμή που έχει ο A στην i γραμμή στη στήλη j. Για παράδειγμα, αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ τότε $A^t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Ενώ αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ τότε } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ή αν

$$A = (1, 2, 3) \text{ τότε } A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ή τέλος αν ο πίνακας είναι τετραγωνικός, αν για παράδειγμα,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ τότε } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Στην περίπτωση που εργαζόμαστε με πίνακες από το $\mathbb{C}^n$ στο $\mathbb{C}^m$ θα υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση. Ο πίνακας που μας εγγυάται το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ότι υπάρχει, και τον οποίον τώρα θα τον συμβολίζουμε με A^* αντί για A^t, θα ικανοποιεί την $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ αλλά το τελευταίο εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με $\overline{\langle A^*y, x\rangle}$ (και όχι $\langle A^*y, x\rangle$ όπως στην πραγματική περίπτωση). Οπότε για τα διανύσματα της συνήθους βάσης θα ισχύει

$$\langle Ae_i, e_j\rangle = \overline{\langle A^*e_j, e_i\rangle}$$

Έτσι τώρα ο A^* δεν είναι απλώς ο A^t αλλά αλλάζουν τα στοιχεία του στα μιγαδικά συζυγή τους. Για παράδειγμα, αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2i \\ i & 3i \end{smallmatrix}\right)$ τότε $A^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -2i & -3i \end{smallmatrix}\right)$.

Ο πίνακας A^t ονομάζεται «ανάστροφος του A» και ο A^* ονομάζεται «συζυγής του A». Επειδή αν ο A είναι από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$ τότε φανερά $A^* = A^t$ ονομάζουμε τον ανάστροφο και συζυγή του A ανεξάρτητα αν ο A είναι μιγαδικός ή πραγματικός πίνακας. Για λόγους σαφήνειας όμως θα κρατήσουμε τον συμβολισμό A^t για τους πραγματικούς πίνακες και A^* για τους μιγαδικούς.

Παρατηρούμε εδώ ότι αν $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τότε $A^t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Λόγω του ορισμού του μας επιτρέπει να αλλάζουμε θέση, κατά κάποιο τρόπο, στον A σε ένα εσωτερικό γινόμενο, αφού $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$, ισοδύναμα $\langle A^t y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$.

Στην περίπτωση που ο πίνακας U ανήκει στην ορθογώνια ομάδα $O(n)$ επειδή $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ αλλά και $\langle U^t Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle$, συμπεραίνουμε ότι $\langle U^t Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε x και y στον $\mathbb{R}^n$. Άρα αυτό ισχύει και για τα διανύσματα της συνήθους βάσης. Δηλαδή $\langle U^t U e_i, e_j\rangle = 0$ αν $i \neq j$ και $\langle U^t U e_i, e_j\rangle = 1$ αν $i = j$. Αυτό μας λέει ότι $U^t U = I$. Καταλήγουμε στο ότι για ορθογώνιους πίνακες U ο ανάστροφος είναι και αντίστροφός τους! Αυτό είναι και υπολογιστικά εύκολο διότι κάθε ορθογώνιος U έχει για στήλες του ορθοκανονικά διανύσματα βάσης, έστω τα $v_1, \dots, v_n$. Οπότε όταν υπολογίσουμε το γινόμενο $U^t U$ εύκολα βλέπουμε ότι θα προκύψει ο πίνακας $(\langle v_i, v_j \rangle)$ δηλαδή ο ταυτοτικός. Επίσης παρατηρούμε ότι $\det U^t \det U = \det(U^t U) = \det I = 1$. Αλλά επειδή ο U έχει για στήλες τα διανύσματα μιας ορθοκανονικής βάσης έχει ορίζουσα είτε 1 είτε -1, ανάλογα αν η βάση αυτή έχει τον ίδιο προσανατολισμό ή όχι με τη συνήθη. Άρα αναγκαστικά την ίδια τιμή πρέπει να έχει και η $\det U^t$ ώστε το γινόμενό της με την $\det U$ να ισούται με 1. Δηλαδή $\det U^t = \det U$. Θα δούμε αργότερα ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει για κάθε τετραγωνικό πίνακα. Δηλαδή $\det A = \det A^t$. Αυτή η ιδιότητα δεν είναι καθόλου προφανής (εκτός αν κανείς έχει τη διάθεση να κάνει περίπλοκες πράξεις με τον τύπο που υπολογίζει ορίζουσες).

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι για δύο πίνακες A, B που μπορούν να πολλαπλασιαστούν, ισχύει $(AB)^t = B^t A^t$. Πράγματι, θα ισχύει

$$\begin{aligned} \left\langle (AB)^t e_i, e_j \right\rangle &= \left\langle e_i, (AB) e_j \right\rangle = \left\langle e_i, A(Be_j) \right\rangle \\ &= \langle A^t e_i, B e_j \rangle = \langle B^t A^t e_i, e_j \rangle, \end{aligned}$$

δηλαδή οι πίνακες $(AB)^t$ και $B^t A^t$ έχουν ίδιους αριθμούς στις ίδιες θέσεις ως πίνακες, δηλαδή $(AB)^t = B^t A^t$.

Μια άλλη ιδιότητα είναι ότι $(A^t)^t = A$ για κάθε πίνακα A. Αυτή είναι πολύ εύκολη και αφήνεται ως άσκηση.

Τέλος δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.3.1 Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται αυτοσυζυγής ή ερμιτιανός αν $A = A^t$.

Για ένα παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

είναι φανερά αυτοσυζυγής. Επίσης κάθε διαγώνιος πίνακας είναι αυτοσυζυγής.

Κεφάλαιο 6

Το ίχνος πίνακα

6.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Η ορίζουσα είναι μια συνάρτηση από το σύνολο των $n \times n$ πινάκων στο $\mathbb{R}$. Επειδή οι πίνακες αυτοί περιέχουν n^2 στοιχεία μπορούμε να πούμε ότι η ορίζουσα είναι μια απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^{n^2}$ στο $\mathbb{R}$, ταυτίζοντας κάθε πίνακα με την ακολουθία των στοιχείων του διαβάζοντάς στα τη μία στήλη μετά την άλλη (ή τη μία γραμμή μετά την άλλη). Μάλιστα αν θεωρήσουμε τα στοιχεία του πίνακα σαν μεταβλητές η ορίζουσα είναι μια πολυωνυμική παράσταση των μεταβλητών αυτών. Για παράδειγμα, για τους 2×2 πίνακες, $\det : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ με $\det(x, y, z, w) \equiv \det\left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right) = xw - yz$, ένα πολυώνυμο των συντελεστών της. Ομοίως και σε μεγαλύτερες διαστάσεις με πιο περίπλοκους τύπους. Αφού λοιπόν είναι πολυωνυμική είναι και διαφορίσιμη και μάλιστα όσες φορές επιθυμούμε. Στην κατεύθυνση της μελέτης της παραγώγου της ορίζουσας το πρώτο ίσως που θα σκεφτόταν κανείς, είναι ποια είναι η παράγωγος της det στον πίνακα I. Επειδή όμως είμαστε σε πολυδιάστατους χώρους θα πρέπει να καθορίσουμε και τη διεύθυνση στην οποία παραγωγίζουμε. Έτσι, γράφουμε $\det'(I)(A)$ για την κατευθυνόμενη παράγωγο της det στον πίνακα I στη διεύθυνση του A. Αυτή την ποσότητα την ονομάζουμε ίχνος του A:

Ορισμός 6.1.1 Ίχνος $\mathrm{tr}(A)$ ενός $n \times n$ πίνακα A ονομάζουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο της ορίζουσας στον I στη διεύθυνση του A (ως στοιχεία του $\mathbb{R}^{n^2}$). Ισοδύναμα το ίχνος του A είναι η τιμή του διαφορικού $\det'(I)$ στη θέση I υπολογισμένο στον πίνακα A. Συγκεκριμένα

$$\operatorname{tr}(A) := \det{}'(I)(A) = \lim_{h\to 0} \frac{\det(I + hA) - \det I}{h}.$$

Ο λόγος που «ξεχωρίζουμε» τη συγκεκριμένη παράγωγο είναι ότι λόγω των ιδιοτήτων της ορίζουσας, όταν γνωρίζουμε πώς να βρίσκουμε την παράγωγο στον I μπορούμε να βρούμε την παράγωγο σε κάθε αντιστρέψιμο πίνακα T. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\det{}'(T)(A) &= \lim_{h\to 0} \frac{\det(T + hA) - \det T}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\det\big(T(I + hT^{-1}A)\big) - \det T}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\det(T)\big(\det(I + hT^{-1}A) - \det I\big)}{h}\\ &= \det(T)\operatorname{tr}(T^{-1}A). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Συνεπώς «ακολουθώντας το ίχνος ενός πίνακα» μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της ορίζουσας σε κάθε αντιστρέψιμο πίνακα.

Πρόταση 6.1.2 *Για οποιουσδήποτε $n \times n$ πίνακες A και B ισχύει*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα προκύψει εύκολα από την αντίστοιχη ιδιότητα για τις ορίζουσες. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$A(I + hBA) = A + hABA = (I + hAB)A,$$

άρα

$$\det A \det(I + hBA) = \det(I + hAB) \det A.$$

Συνεπώς, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος οι ορίζουσά του διαγράφεται στην προηγούμενη σχέση και προκύπτει

$$\det(I + hBA) = \det(I + hAB).$$

Όμως κάθε πίνακας είναι όριο αντιστρέψιμων πινάκων, και επειδή η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση η προηγούμενη ισχύει για οποιουσδήποτε πίνακες A και B. Από εδώ και πέρα η απόδειξη είναι προφανής: αφαιρούμε $\det I$ και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης, διαιρούμε με h και αφήνουμε το h να πάει στο μηδέν παίρνοντας $\operatorname{tr}BA = \operatorname{tr}AB$. □

6.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΙΧΝΟΥΣ

Πρόταση 6.2.1 *Για κάθε πίνακα A με $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ ισχύει*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

δηλαδή το ίχνος ενός πίνακα συμπίπτει με το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη παρατηρούμε ότι θα μπορούσαμε να δώσουμε για ορισμό του ίχνους το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του, κάτι πολύ πιο απλό από την κατευθυνόμενη παράγωγο. Αλλά αυτή η επιλογή δεν θα πρόσθετε τίποτα στη διαίσθησή μας, αφού θα παρουσίαζε για ορισμό μια υπολογιστική παρατήρηση χωρίς (εξ' αρχής) ιδιαίτερο νόημα.

Απόδειξη: Παρατηρούμε απλώς ότι η ορίζουσα $\det(I + hA)$ είναι ίση με $1 + h(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) + O(h^2)$ όπου η ποσότητα $O(h^2)$ έχει την ιδιότητα αν διαιρεθεί με το h^2 να παραμένει φραγμένη καθώς $h \to 0$. Πράγματι, αυτό είναι σωστό για $n = 2$, αφού αν $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}
\det(I + hA) &= \det\begin{pmatrix} 1 + ha_{11} & ha_{21} \\ ha_{12} & 1 + ha_{22} \end{pmatrix} \\
&= (1 + ha_{11})(1 + ha_{22}) - ha_{12}ha_{21} \\
&= 1 + h(a_{11} + a_{22}) + h^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).
\end{aligned}$$

Αν έχει αποδειχθεί για $n \times n$ πίνακες, και ο A είναι $(n + 1) \times (n + 1)$ πίνακας, τότε

$$\begin{aligned}
\det(I + hA) = (1 + ha_{11})\det(I + hA)_{11} \\
+ \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{i-1} ha_{1j} \det(I + hA)_{1j}
\end{aligned}$$

από την επαγωγική υπόθεση για τον $(I + hA)_{11}$:

$$
\begin{aligned}
&= (1 + ha_{11})(1 + h(a_{22} + \cdots + a_{(n+1)(n+1)}) + O(h^2)) \\
&\qquad + \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{i-1} h a_{1j} \det(I + hA)_{1j} \\
&= 1 + h\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{jj}\right) + h^2 a_{11}\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{jj}\right) + (1 + ha_{11})O(h^2) \\
&\qquad + \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{i-1} h a_{1j} \det(I + hA)_{1j}.
\end{aligned}
$$

Έτσι αρκεί να ελέγξουμε ότι η κάθε $\det(I + hA)_{1j}$ στο τελευταίο άθροισμα περιέχει ένα παράγοντα h. Αλλά αυτό είναι φανερό αφού αυτοί οι υποπίνακες του A έχουν είτε μια γραμμή είτε μια στήλη πολλαπλασιασμένη με h.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A) &= \lim_{h\to 0} \frac{\det(I + hA) - \det I}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{jj} + \frac{O(h^2)}{h}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{jj},
\end{aligned}
$$

αφού $O(h^2)/h = h(O(h^2)/h^2)$ και η ποσότητα $O(h^2)/h^2$ παραμένει φραγμένη καθώς $h \to 0$. □

Θεώρημα 6.2.2 (Ο τύπος του Jacobi) *Θεωρούμε ένα πίνακα T ο οποίος εξαρτάται από μια μεταβλητή t: $T = T(t)$. Τότε ισχύει ο τύπος:*

$$\frac{d}{dt}\det T = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(T)\frac{dT}{dt}\right).$$

Απόδειξη: Αν ο T είναι αντιστρέψιμος τότε από τον κανόνα της αλυσίδας και τον τύπο (6.1) για $A = dT/dt$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det T &= \det{}'(T)\left(\frac{dT}{dt}\right) = (\det T)\operatorname{tr}\left(T^{-1}\frac{dT}{dt}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left((\det T)T^{-1}\frac{dT}{dt}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(T)\frac{dT}{dt}\right).
\end{aligned}
$$

Άρα ο τύπος αποδείχθηκε για αντιστρέψιμους T. Για τους μη αντιστρέψιμους ο τύπος συνεχίζει να ισχύει, αφού αυτοί είναι όρια αντιστρέψιμων και οι συναρτήσεις det, tr και adj είναι συνεχείς ως πολυωνυμικές. □

Το παρακάτω πόρισμα είναι μια όμορφη εφαρμογή του τύπου του Jacobi.

Πόρισμα 6.2.3 *Το ίχνος κάθε πίνακα B ικανοποιεί τη σχέση*

$$\det e^{B} = e^{\operatorname{tr} B}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $T(t) = e^{tB}$, οπότε από τον τύπο του Jacobi ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det T(t) &= (\det T)\operatorname{tr}\left(T^{-1}\frac{dT}{dt}\right) \\ &= (\det e^{tB})\operatorname{tr}\left(e^{-tB}\frac{d}{dt}e^{tB}\right) \\ &= (\det e^{tB})\operatorname{tr}\left(e^{-tB}Be^{tB}\right) = (\det e^{tB})\operatorname{tr} B. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{d}{dt}\det e^{tB} = (\operatorname{tr} B)\det e^{tB}.$$

Θέτοντας $\phi(t) = \det e^{tB}$ και λύνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση $\phi'(t) = (\operatorname{tr} B)\phi(t)$ παίρνουμε ότι

$$\det e^{tB} = \phi(t) = e^{t(\operatorname{tr} B)}.$$

Συνεπώς για $t = 1$ παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση. □

Κεφάλαιο 7

Αλλαγή βάσης

7.1 Η ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΕΝΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Όπως έχετε πιθανώς προσέξει όλοι οι πίνακες μέχρι στιγμής γράφονται με βάση τη συνήθη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ (ή $\mathbb{C}^n$). Για παράδειγμα, το στοιχείο ενός πίνακα A που βρίσκεται στην j στήλη και στην i γραμμή είναι η i συντεταγμένη του διανύσματος της j στήλης. Η j στήλη είναι το διάνυσμα στο οποίο απεικονίζεται το e_j, δηλαδή το Ae_j. Συνεπώς η i συντεταγμένη του είναι το $\langle Ae_j, e_i \rangle$.

Αυτό θα συνεχιστεί σε όλες τις σημειώσεις. Κάθε πίνακας θα γράφεται ως προς τη συνήθη ορθοκανονική βάση. Στις λίγες περιπτώσεις που θα θελήσουμε να γράψουμε έναν πίνακα ως προς μια άλλη βάση $v_1, \dots, v_n$ θα δεικτοποιούμε τον πίνακα με το γράμμα v.

Τα περισσότερα βιβλία γραμμικής άλγεβρας διαχωρίζουν την έννοια του πίνακα από αυτή της γραμμικής απεικόνισης. Προτιμούν να μιλούν αφηρημένα για μια γραμμική απεικόνιση η οποία αποκτά «τύπο», δηλαδή πίνακα, αφού δηλωθεί η βάση. Αν ακολουθούσαμε τέτοιου τύπου αφαιρέσεις και στην Ανάλυση θα διαχωρίζαμε τον τύπο x από τον τύπο $(x^3 + x)/(x^2 + 1)$ και από την ταυτοτική συνάρτηση. Αυτό ενώ είναι σωστό από την πλευρά της Μαθηματικής Λογικής δεν θεωρούμε ότι είναι απαραίτητο να γίνει διότι σε αυτό το επίπεδο μόνο σύγχυση προκαλεί. Για εμάς εδώ τέτοιος διαχωρισμός δεν υφίσταται. Ο πίνακας είναι ένας «τύπος» για την απεικόνιση που ορίζει. Και όπως η ταυτοτική απεικόνιση στο $\mathbb{R}$ έχει διάφορους ισοδύναμους τύπους, έτσι και κάθε πίνακας, δηλαδή κάθε γραμμική απεικόνιση, έχει διαφορετικούς τύπους, δηλαδή διαφορετικούς πίνακες ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη βάση.

Ας υποθέσουμε, για ένα απλό πρώτο παράδειγμα, ότι ο πίνακας A πολλαπλασιάζει με λ_j το διάνυσμα v_j της βάσης $v_1, \dots, v_n$. Τότε

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}_v .$$

Για να γράψουμε τον A ως προς τη συνήθη ορθοκανονική βάση σκεφτόμαστε ως εξής: για να πολλαπλασιαστεί το v_j με λ_j μπορούμε να απεικονίσουμε τη βάση $v_1, \dots, v_n$ στη συνήθη βάση με τον πίνακα V^{-1} όπου ο V έχει τα v_j στις στήλες του, στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με τον διαγώνιο πίνακα $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και στη συνέχεια επαναφέρουμε τα e_j στα v_j με τον πίνακα V. Δηλαδή

$$VDV^{-1}v_j = VDe_j = V(\lambda_j v_j) = \lambda V e_j = \lambda_j v_j.$$

Συνεπώς $A = VDV^{-1}$. Παρατηρήστε ότι ο V είναι πάντα αντιστρέψιμος αφού τα v_j στα οποία απεικονίζει τα e_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ως βάση του χώρου, και άρα ο V έχει μη μηδενική ορίζουσα.

Το ίδιο βεβαίως ισχύει όταν ο A δεν είναι διαγώνιος ως προς κάποια βάση αλλά οποιοσδήποτε πίνακας. Αν ο A είναι γραμμένος ως προς τη βάση $v_1, \dots, v_n$, αν δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_v ,$$

αυτό σημαίνει ότι

$$Av_j = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix}_v = a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \cdots + a_{jn}v_n.$$

Αν θέλουμε να γράψουμε τον πίνακα A ως προς τη βάση $u_1, \dots, u_n$ δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα V^{-1} που απεικονίζει τα v_j στα e_j, όπου V ο πίνακας με στήλες τα v_j και στη συνέχεια τον U, με στήλες τα u_j, που απεικονίζει τα e_j στα u_j για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$. Έτσι ο $W = UV^{-1}$ απεικονίζει τα v_j στα u_j.

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$A_u = WA_v W^{-1}.$$

Πράγματι, ο W^{-1} μετατρέπει κάθε διάνυσμα γραμμένο ως γραμμικό συνδυασμό των u_j σε γραμμικό συνδυασμό των v_j. Οπότε τώρα εφαρμόζεται ο A στη μορφή του ως A_v, δηλαδή γραμμένος ως προς τη βάση v_j, και τέλος ο W επαναφέρει το αποτέλεσμα στη βάση u_j.

7.2 Η ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΤΗΣ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΙΧΝΟΥΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΗΣ

Είναι φανερό ότι η αλλαγή βάσης δεν επηρεάζει την ορίζουσα ενός πίνακα. Αυτό είναι φανερό γεωμετρικά, αλλά και αλγεβρικά, αφού (χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης ενότητας)

$$\begin{aligned} \det A_u &= \det(WA_v W^{-1}) = \det W \det A_v \det W^{-1} \\ &= \det A_v \det(WW^{-1}) = \det A_v. \end{aligned}$$

Η ανεξαρτησία του ίχνους από την αλλαγή βάσης προκύπτει αμέσως από την ανεξαρτησία της ορίζουσας από την αλλαγή βάσης και τον ορισμό του ίχνους. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr} A_u &= \lim_{h\to 0} \frac{\det(I + hA_u) - \det I}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\det(WIW^{-1} + hWA_v W^{-1}) - \det I}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{\det\big(W(I + hA_v)W^{-1}\big) - \det I}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{\det(I + hA_v) - \det I}{h} = \mathrm{tr} A_v. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 8

Αναπαραστάσεις πινάκων

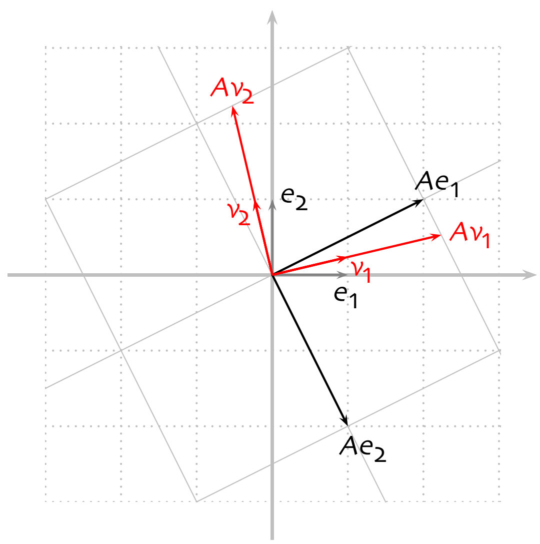
8.1 ΓΕΝΙΚΑ

Ο τρόπος με τον οποίο επιδρούν οι γραμμικοί μετασχηματισμοί στον $\mathbb{R}^n$ είναι συχνά δυσνόητος. Ένας τρόπος να καταλάβουμε ευκολότερα τι ακριβώς κάνουν είναι μέσω των αναπαραστάσεών τους με διαφορετικούς απλοποιημένους πίνακες. Όπως είδαμε στην Ενότητα 7.1 ένας γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί με διάφορους πίνακες, που ονομάζουμε «αναπαραστάσεις» του μετασχηματισμού ή του αρχικού πίνακα. Κάτι σαν τους διαφορετικούς τύπους που είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους για μια πραγματική συνάρτηση. Για παράδειγμα, οι $(2x)/2$, $(x^3 + x)/(x^2 + 1)$ και $\tan(\arctan x)$ είναι όλες αναπαραστάσεις της $f(x) = x$. Συχνά μια από αυτές τις αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα απλή και κατανοητή. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικές από αυτές τις αναπαραστάσεις, ίσως τις πιο χρήσιμες. Εδώ θα δούμε ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός απεικονίζει κύκλους σε ελλείψεις, και σφαίρες σε ελλειψοειδή στις διαστάσεις από 3 και άνω.

Ένα από τα κύρια θέματα είναι η λεγόμενη διαγωνοποίηση πίνακα. Μάλλον ορθότερη είναι η λέξη «διαγωνιοποίηση» και η «διαγωνιοποιήσιμος» για έναν πίνακα αλλά είναι δύσκολο να τις πεις. Τουλάχιστον για τον γράφοντα. Ούτως ή άλλως λέξεις σαν τις «διαγωνοποίηση» ή «διαγωνιοποίηση» είναι πρόσφατα κατασκευασμένες και η πρώτη που προφέρεται ευκολότερα δεν προκαλεί σύγχυση (είναι σαφής). Εξάλλου αυτό συμβαίνει στη σύγχρονη περίοδο των Μαθηματικών. Σωστή είναι και η λέξη «συμπαγότητα» αλλά όλος ο μαθηματικός κόσμος λέει «συμπάγεια». Με άλλα λόγια η «ορθότητα» στη γλώσσα έχει μεν δογματικά στοιχεία (γραμματική) αλλά έχει και ζωντανά στοιχεία που τη μεταβάλλουν.

8.2 ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΑΥΤΟΣΥΖΥΓΟΥΣ ΠΙΝΑΚΑ

Στην περίπτωση του αυτοσυζυγούς πίνακα θα δούμε ότι υπάρχει πάντα μια ορθοκανονική βάση $v_1, \ldots, v_n$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε ως προς αυτή τη βάση ο πίνακας αναπαρίσταται (γράφεται ως) διαγώνιος πίνακας. Άρα αν εργαζόμαστε ως προς αυτή τη βάση στον $\mathbb{R}^n$ τότε είναι πολύ εύκολο να κατανοήσουμε το πώς μετασχηματίζει τον χώρο ο πίνακας: απλώς πολλαπλασιάζει κάθε διεύθυνση της ορθοκανονικής αυτής βάσης με ένα αριθμό. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Αν κοιτάξουμε στο γράφημα που ακολουθεί, το οποίο δείχνει την παραμόρφωση που αυτός κάνει στο επίπεδο, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν διανύσματα, τα v_1 και v_2 τα οποία παραμένουν στην αρχική τους διεύθυνση, δηλαδή απλώς πολλαπλασιάζονται με κάποιον αριθμό.



Πράγματι, αν θέσουμε $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$ και $v_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ τότε εύκολα ελέγχουμε ότι $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, δηλαδή είναι μεταξύ τους ορθογώνια, και $Av_1 = \sqrt{5}v_1$ και $Av_2 = -\sqrt{5}v_2$. Συνεπώς, *ως προς αυτή τη βάση* ο πίνακας A μετασχηματίζει το επίπεδο σύμφωνα με τον πίνακα $\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Ή αν κανονικοποιήσουμε τα v_1 και v_2, αν δηλαδή αντί για τη βάση v_1 και v_2 εργαζόμαστε ως προς την ορθοκανονική βάση $u_1 = v_1/\|v_1\|_2$ και $u_2 = v_2/\|v_2\|_2$ τότε ισχύει $A = UDU^t$ όπου $U = (u_1, u_2)$ και $D = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{smallmatrix}\right)$.

Μια τέτοια διαγώνια αναπαράσταση ισχύει για κάθε αυτοσυζυγή πίνακα:

Θεώρημα 8.2.1 (Φασματικό θεώρημα) *Για κάθε αυτοσυζυγή $n \times n$ πίνακα A υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (όχι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους) και ορθοκανονική βάση $v_1, \dots, v_n$ του $\mathbb{R}^n$ ώστε να ισχύει*

$$A = UDU^t,$$

όπου ο D είναι ο διαγώνιος πίνακας $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και $U \in O(n)$ ο πίνακας αλλαγής βάσης από την συνήθη βάση στην $v_1, \dots, v_n$ (δηλαδή ο U έχει τα v_i στις στήλες του). Το σύνολο $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ονομάζεται φάσμα του πίνακα, τα λ_i ιδιοτιμές του πίνακα και τα v_i ιδιοδιανύσματα του πίνακα.

Παρατηρούμε εδώ ότι τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι μοναδικά, αφού και τα $-v_i$ είναι ιδιοδιανύσματα.

"explain spectrum"

Αυτό που είναι πολύ ενδιαφέρον στην παρακάτω απόδειξη είναι ότι ενώ το θεώρημα αναφέρεται στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{R}$ εντούτοις η απόδειξη δεν μπορεί να γίνει χωρίς τη βοήθεια του $\mathbb{C}^n$ και του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο με *πραγματικούς* συντελεστές βαθμού n (εύκολα ελέγχουμε ότι συντελεστής του λ^n είναι πάντα ίσος με 1). Άρα από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (συνήθως διδάσκεται στο μάθημα της Μιγαδικής Ανάλυσης) έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$. Έστω ότι $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ είναι μια ρίζα του, οπότε (αφού είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές) ρίζα του είναι και ο συζυγής $\overline{\lambda_1}$. Εφόσον ο πίνακας $A - \overline{\lambda_1} I$ έχει ορίζουσα μηδέν απεικονίζει τον $\mathbb{C}^n$ στον χώρο που παράγουν οι στήλες του, δηλαδή σε υπόχωρο διάστασης μικρότερης από n (αφού ορίζουσα μηδέν σημαίνει ότι οι στήλες του είναι γραμμικά εξαρτημένες). Άρα υπάρχει διάνυσμα u_1, με συντεταγμένες στο $\mathbb{C}$, μήκους 1, κάθετο σε αυτόν τον υπόχωρο. Φανερά $(A - \lambda_1 I)u_1 = 0$, διότι για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}\langle (A - \lambda_1 I)u_1, z\rangle &= \langle u_1, (A - \lambda_1 I)^t z\rangle = \langle u_1, (A^t - \overline{\lambda_1} I)z\rangle \\ &= \langle u_1, (A - \overline{\lambda_1} I)z\rangle = 0.\end{aligned}$$

Άρα $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Τώρα θα δείξουμε ότι το λ_1 είναι πραγματικός αριθμός. Πράγματι, αφού το u_1 έχει μήκος 1 ισχύει

$$\begin{aligned}\overline{\lambda_1} &= \overline{\lambda_1}\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1, \lambda_1 v_1\rangle = \langle v_1, Av_1\rangle = \langle A^t v_1, v_1\rangle \\ &= \langle Av_1, v_1\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_1\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_1\rangle \\ &= \lambda_1.\end{aligned}$$

Συνεπώς ο πίνακας $A-\lambda_1 I$ είναι πίνακας με πραγματικούς αριθμούς. Άρα μπορούμε τώρα να τον θεωρήσουμε ως πίνακα από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$. Επαναλαμβάνουμε τώρα το προηγούμενο επιχείρημα. Αφού ο $A-\lambda_1 I$ έχει μηδενική ορίζουσα, οι στήλες του είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και συνεπώς υπάρχει διάνυσμα v_1 μήκους 1, αυτή τη φορά με *πραγματικές* συντεταγμένες, κάθετο στον υπόχωρο $\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I)$. Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο λέξη προς λέξη ισχύει $(A-\lambda_1 I)v_1 = 0$ δηλαδή $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Αν ο $\mathrm{Im}(A-\lambda_1 I)$ έχει διάσταση γνησίως μικρότερη του $n-1$ τότε μπορούμε να βρούμε και επιπλέον διανύσματα $v_2, \ldots, v_{k_1}$, όπου

$$k_1 = n - \dim \mathrm{Im}(A-\lambda_1 I) = \dim \ker(A-\lambda_1 I)$$

το μέγιστο πλήθος διανυσμάτων τα οποία να είναι ορθογώνια μεταξύ τους, μήκους 1 που να ικανοποιούν όλα την $Av_j = \lambda_1 v_j$ για $j = 1, 2, \ldots, k_1$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ιδιοτιμή λ_1 έχει πολλαπλότητα k_1. Θέτουμε $F_1 = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_{k_1}\}^\perp$ και παρατηρούμε ότι $\dim F_1 = n - k_1 < n$.

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη με επαγωγή. Για να γίνει αυτό, θα εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για τον πίνακα A περιορισμένο στον F_1. Για να είναι όμως αυτό εφικτό θα πρέπει να δείξουμε ότι ο A περιορισμένος στο F_1 έχει σύνολο τιμών στον F_1. Έτσι θα έχουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό από χώρο διάστασης $n-k_1 < n$ σε χώρο διάστασης $n-k_1 < n$ οπότε θα μπορέσουμε να επικαλεστούμε την επαγωγική διαδικασία.

Πράγματι, αν $x \in F_1$ τότε για $j = 1, \ldots, k_1$

$$\begin{aligned}\langle Ax, v_j\rangle &= \langle x, A^* v_j\rangle = \langle x, Av_j\rangle = \langle x, \lambda_1 v_j\rangle = \lambda_1\langle x, v_j\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Δηλαδή $Ax \in F_1$. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επικαλεστούμε την επαγωγική διαδικασία ως εξής. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του F_1 η οποία θα έχει $n-k_1 < n$ στοιχεία. Ο πίνακας

A, αφού απεικονίζει τον F_1 στον F_1, θα δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τον $(n-k_1) \times (n-k_1)$ πίνακα A_{F_1} που έχει για στήλες τις εικόνες της ορθοκανονική βάση του F_1 που επιλέξαμε παραπάνω. Επιπλέον ο A_{F_1} είναι αυτοσυζυγής διότι για κάθε $x, y \in F_1$

$$\langle A_{F_1}x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, A_{F_1}y\rangle.$$

Άρα με την προηγούμενη διαδικασία θα βρούμε λ_2 πραγματικό αριθμό και μέγιστο πλήθος ορθοκανονικών διανυσμάτων $v_{k_1+1}, \dots v_{k_2}$ στον F_1 ώστε $A_{F_1}v_j = \lambda_2 v_j$ για $j = k_1+1, \dots, k_2$. Αλλά από τον ορισμό του A_{F_1} ισχύει $Av_j = A_{F_1}v_j$ συνεπώς $Av_j = \lambda_2 v_j$. Παρατηρούμε επίσης ότι το λ_2 είναι και αυτό αναγκαστικά ρίζα του $p(\lambda)$ διότι η $Av_j = \lambda_2 v_j$ συνεπάγεται ότι $(A-\lambda_2 I)v_j = 0$ συνεπώς $\det(A-\lambda_2 I) = 0$.

Επειδή σε κάθε βήμα παράγουμε τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα (μήκους 1) κάθετο στα προηγούμενα, η διαδικασία αυτή θα τερματιστεί έχοντας βρει n ορθοκανονικά διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ δηλαδή μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Θέτουμε

$$D = \operatorname{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{k_1 \text{ φορές}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{k_2 \text{ φορές}}, \dots)$$

και

$$U = (v_1, \dots, v_{k_1}, v_{k_1+1}, \dots, v_{k_2}, \dots, v_n).$$

Φανερά ισχύει $A = UDU^t$, αφού για να μετασχηματιστεί ο $\mathbb{R}^n$ με τον A στρέφουμε τον χώρο ώστε τα $v_1, \dots, v_n$ να απεικονιστούν στη συνήθη βάση, μετά εφαρμόζουμε τον D ώστε να πολλαπλασιαστούν τα διανύσματα της συνήθους βάσης με τις ιδιοτιμές λ_j και τέλος επιστρέφουμε τη συνήθη βάση στη βάση $v_1, \dots, v_n$ με τον U, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές. Για παράδειγμα, μπορούμε με τη βοήθειά του να ορίσουμε τετραγωνικές ρίζες πίνακα αν ο A έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές. Σε αυτή την περίπτωση θα θέσουμε $\sqrt{A} = U\sqrt{D}U^t$ όπου

$$\sqrt{D} = \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_1}}_{k_1 \text{ φορές}}, \underbrace{\sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_2}}_{k_2 \text{ φορές}}, \dots\Big).$$

Επειδή φανερά $\sqrt{D}^2 = D$ και $U^tU = I$ θα έχουμε

$$\sqrt{A}^2 = (U\sqrt{D}U^t)(U\sqrt{D}U^t) = U\sqrt{D}^2U^t = UDU^t = A.$$

Εμάς μας ενδιαφέρει ειδικά η περίπτωση του πίνακα A^tA. Αυτός ο πίνακας είναι φανερά αυτοσυζυγής, αφού $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$ και αν λ και v ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμά του μήκους 1, τότε

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle A^tAv, v\rangle\\ &= \langle Av, Av\rangle = \|Av\|_2^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Έτσι υπάρχει διαγώνιος πίνακας D με μη αρνητικούς αριθμούς στη διαγώνιο και πίνακας αλλαγής βάσης $U \in O(n)$ ώστε να ισχύει

$$A^tA = UDU^t = (U\sqrt{D}U^t)^2.$$

Δηλαδή ο πίνακας $P = U\sqrt{D}U^t$ είναι τετραγωνική ρίζα του A^tA με μη αρνητικές τιμές στη διαγώνιο του $\sqrt{D}$.

8.3 Η ΠΟΛΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε * αντί για το t για να συμβολίσουμε τον συζυγή (και τον ανάστροφο) πίνακα.

Η πιο απλή αναπαράσταση είναι η λεγόμενη «πολική αναπαράσταση». Αυτή την καταλαβαίνουμε ως επέκταση της αναπαράστασης ενός μιγαδικού αριθμού z στη μορφή

$$|z|(cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}|z| = e^{i\theta}\sqrt{z^*z},$$

όπου, επίτηδες, γράψαμε z^* για τον μιγαδικό συζυγή $\bar{z}$. Παρατηρήστε ότι ο πολλαπλασιασμός με το $e^{i\theta}$ εκφράζει μια στροφή κατά γωνία θ της απολύτου τιμής του z, δηλαδή του $\sqrt{z^*z}$. Σε πλήρη αναλογία με αυτό ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 8.3.1 *Για κάθε $n \times n$ πίνακα $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ υπάρχει πίνακας $V \in O(n)$ και πίνακας P με την ιδιότητα $P^2 = A^*A$ ώστε $A = VP$.*

Απόδειξη: Από τα προηγούμενα υπάρχει πίνακας P τετραγωνική ρίζα του A^*A στη μορφή $U\sqrt{D}U^*$, όπου $A^*A = UDU^*$ με τον D να είναι διαγώνιος πίνακας με μη αρνητικούς όρους και $U \in O(n)$. Μένει να δειχθεί η ύπαρξη του V ώστε να ισχύει $V^*V = I$ και $A = VP$. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}\|Px\|_2^2 &= \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle\\ &= \langle Ax, Ax\rangle\\ &= \|Ax\|_2^2.\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|Px\|_2 = \|Ax\|_2$. Ορίζουμε λοιπόν τον V πρώτα στον υπόχωρο $\mathrm{Im}P$ θέτοντας $V(Px) = Ax$. Επεκτείνουμε τον V σε όλο τον $\mathbb{R}^n$ θέτοντας $Vz = z$ για κάθε $z \in (\mathrm{Im}P)^{\perp}$. Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $A = VP$. Μένει να εξηγηθεί γιατί $V \in O(n)$. Αλλά ο V είναι φανερά ισομετρία (είναι ισομετρία στον $\mathrm{Im}P$ και ισομετρία στον $(\mathrm{Im}P)^{\perp}$, άρα ισομετρία στον $\mathbb{R}^n$, οπότε το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 2.10.2. □

8.4 ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Το φασματικό θεώρημα τόσο για αυτοσυζυγείς πίνακες που παρουσιάστηκε παραπάνω όσο και για κανονικούς που θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα έχει ένα ...μικρό πρόβλημα. Δεν ισχύει για όλους τους πίνακες. Πολύ συχνά στις εφαρμογές οι πίνακες δεν είναι ούτε αυτοσυζυγείς ούτε κανονικοί. Αυτό όμως δεν μας εμποδίζει να κατανοήσουμε το πώς μετασχηματίζουν τον χώρο για τον εξής λόγο: στην περίπτωση του αυτοσυζυγούς (και του κανονικού παρακάτω) πίνακα A ισχύει $A = UDU^*$ με τον D διαγώνιο και τον U ορθογώνιο. Δηλαδή ξεκινάμε με τη βάση των στηλών του U, μεταφερόμαστε με τον U^* στη συνήθη βάση, κάνουμε τις μεγεθύνσεις ή σμικρύνσεις με τον D και επιστρέφουμε στη αρχική μας βάση με τον U. Αυτό είναι πολύ ισχυρή απαίτηση (η επιστροφή στην αρχική βάση) και σε τίποτα δεν θα εμπόδιζε την κατανόησή μας αν επιστρέφαμε σε άλλη ορθοκανονική βάση. Αν λοιπόν αρθεί η απαίτηση να επιστρέψουμε στην αρχική βάση και μας επιτραπεί να επιστρέψουμε ενδεχομένως σε μια άλλη βάση, τότε αυτό το θεώρημα ισχύει *για κάθε* πίνακα! Ο λόγος είναι απλός. Στην πολική αναπαράσταση της προηγούμενης ενότητας ο P είναι αυτοσυζυγής. Άρα υπάρχει διαγώνιος D και ορθογώνιος U ώστε $P = UDU^*$. Αντικαθιστώντας στην πολική αναπαράσταση $A = VP$ προκύπτει ότι

$$A = V(UDU^*) = (VU)DU^*.$$

Θεώρημα 8.4.1 (Ιδιάζουσα αναπαράσταση) *Για κάθε $n \times n$ πίνακα A υπάρχει διαγώνιος πίνακας D και ορθογώνιοι πίνακες V και U ώστε $A = VDU^*$.* □

Παρατηρήστε ότι στη διατύπωση του θεωρήματος αντικαταστήσαμε με το σύμβολο V τον ορθογώνιο VU της προηγούμενης συζήτησης.

Αυτό το θεώρημα αν και είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τις εφαρμογές, εν τούτοις απουσιάζει από τα περισσότερα βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας.

Μια εφαρμογή του με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι ότι κάθε πίνακας, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός του χώρου, απεικονίζει σφαίρες σε ελλειψοειδή (Πρόταση 2.1.1).

Ορισμός 8.4.2 Κάθε σύνολο της μορφής

$$\mathbb{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1 \right\}$$

με $a_j > 0$ ονομάζεται ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων και με μήκος ημιαξόνων τα a_j. Ελλειψοειδή είναι και τα σύνολα της μορφής

$$\mathbb{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{j \in J} \frac{x_j^2}{a_j^2} \leq 1, \ x_i = 0 \ \forall i \notin J \right\}$$

για οποιοδήποτε γνήσιο υποσύνολο J του $\{1, 2, \dots, n\}$ με τη διαφορά ότι αυτό βρίσκεται σε υπόχωρο μικρότερης από n διάστασης. Όταν όλα τα a_j είναι μεταξύ τους ίσα, τότε έχουμε τον ορισμό της Ευκλείδειας μπάλας με κέντρο την αρχή των αξόνων. Τέλος ελλειψοειδή είναι και οι μεταφορές των παραπάνω κατά οποιοδήποτε διάνυσμα x_0, αλλά τότε το κέντρο θα είναι το x_0.

Πρόταση 8.4.3 *Αν B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα και A οποιοσδήποτε $n \times n$ πίνακας τότε το σύνολο $A(B_2^n) = \{Ax \ : \ x \in B_2^n\}$ είναι ελλειψοειδές με κέντρο το μηδέν.*

Απόδειξη: Γράφουμε τον πίνακα A στην ιδιάζουσα αναπαράστασή του $A = VDU^*$. Η εφαρμογή του U^* στην Ευκλείδεια μπάλα δε την αλλάζει αφού η στροφή ή ανάκλασή της δίνει πάλι την ευκλείδεια μπάλα. Η εφαρμογή του D όμως θα μετατρέψει την Ευκλείδεια μπάλα σε ένα ελλειψοειδές. Πράγματι, αν $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ τότε το $x = (x_1, \dots, x_n)$ στην Ευκλείδεια μπάλα θα απεικονιστεί στο $Dx = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{j \in J} \frac{(\lambda_j x_j)^2}{\lambda_j^2} = \sum_{j \in J} x_j^2 \leq 1.$$

Άρα το Dx ανήκει στο ελλειψοειδές με κέντρο την αρχή των αξόνων και μήκη ημιαξόνων τα $|\lambda_j|$, $j \in J$. Αυτή η απεικόνιση είναι επί του ελλειψοειδούς, αφού εύκολα βλέπουμε ότι όταν το $y = (y_1, \dots, y_n)$ ανήκει στο ελλειψοειδές τότε το $y_\lambda = (y_1/\lambda_1, \dots, y_n/\lambda_n)$ ανήκει στην Ευκλείδεια μπάλα και $Dy_\lambda = y$.

Στη συνέχεια ακολουθεί η στροφή/ανάκλαση που κάνει ο V και ο οποίος απλώς θα τοποθετήσει το ελλειψοειδές σε άλλη θέση στο χώρο χωρίς να το αλλοιώσει. □

Μια άλλη εφαρμογή της ιδιάζουσας αναπαράστασης είναι το γεγονός ότι ο ανάστροφος A^t και ο A έχουν ίσες ορίζουσες.

Πρόταση 8.4.4 *Για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει* $\det A = \det A^t$.

Απόδειξη: Απλώς παρατηρούμε ότι αν $A = VDU^t$ η ιδιάζουσα αναπαράσταση του A τότε $A^t = UDV^t$ οπότε

$$\det A = \det V \det D \det U^t = \det U \det D \det V^t = \det A^t,$$

αφού οι $\det V = \det V^t$ και $\det U = \det U^t$ (δείτε Ενότητα 5.3). □

Πόρισμα 8.4.5 *Ο υπολογισμός μιας ορίζουσας μπορεί να γίνει κατά γραμμές όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα* 3.2.2.

Απόδειξη: Προφανής από την Πρόταση 8.4.4 αφού ο A^t έχει για στήλες τις γραμμές του A. □

Έτσι για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2 & 3 \\ a_2 & 4 & 9 \\ a_3 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

της σελίδας 74 μπορούμε να υπολογίσουμε αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή, ως εξής:

$$\begin{aligned} \det A &= a_1 \det \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 27 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} a_2 & 9 \\ a_3 & 27 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} a_2 & 4 \\ a_3 & 8 \end{pmatrix} \\ &= a_1(4 \cdot 27 - 8 \cdot 9) - 2(27a_2 - 9a_3) + 3(8a_2 - 4a_3) \\ &= 36a_1 - 30a_2 + 6a_3, \end{aligned}$$

καταλήγοντας πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα.

8.5 Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ SCHUR

Θεώρημα 8.5.1 *Αν ο A είναι ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας τότε ο A μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = UTU^*$ όπου ο U ικανοποιεί την $U^*U = I$ (άρα ορθογώνιος στην πραγματική περίπτωση) και ο T είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, δηλαδή έχει παντού μηδενικά κάτω από τη διαγώνιό του. Φανερά οι ιδιοτιμές του A είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του T.*

Απόδειξη: Στην ουσία απλώς θα επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.1. Το πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ είναι βαθμού n και άρα έχει n μιγαδικές ρίζες. Έστω ότι αυτές είναι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (με κατάλληλες πολλαπλότητες). Η λ_1 ορίζει έναν ιδιόχωρο τον

$$V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda_1 x\}$$

και τον κάθετό του $V_{\lambda_1}^{\perp}$. Παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση $v_1, \ldots, v_{k_1}$ του V_{λ_1} και τη συμπληρώνουμε σε μια ορθοκανονική βάση προσθέτοντας διανύσματα από τον $V_{\lambda_1}^{\perp}$. Αν U_{λ_1} ο πίνακας με στήλες αυτή την ορθοκανονική βάση, τότε φανερά ο $U_{\lambda_1}^* A U_{\lambda_1}$ είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & ? & \cdots & ? \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k_1+1,k_1+1} & \cdots & a_{n,k_1+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k_1+1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Παρατηρήστε ότι οι τιμές στις θέσεις των ερωτηματικών (?) δεν μας ενδιαφέρουν. Το ζητούμενο είναι ο πίνακας να έχει μηδενικά *κάτω* από την κύρια διαγώνιό του. Άρα το θέμα για τη συνέχεια είναι να γίνει άνω τριγωνικός ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} a_{k_1+1,k_1+1} & \cdots & a_{n,k_1+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_1+1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Αλλά αυτός είναι το πολύ $(n-1) \times (n-1)$ (αν $k_1 = 1$) οπότε συνεχίζουμε επαγωγικά με τον πίνακα $U_{\lambda_1}^* A U_{\lambda_1}$ περιορισμένο στον

$V_{\lambda_1}^{\perp}$ μέχρι να εξαντληθεί η διάσταση n. Το μόνο που μένει να επιβεβαιώσουμε ώστε να συνεχίζεται η επαγωγική διαδικασία είναι ότι $U_{\lambda_1}^* AU_{\lambda_1}(V_{\lambda_1}^{\perp}) \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp}$. Αλλά αυτό είναι φανερό, διότι αν $y \perp V_{\lambda_1}$ τότε $y \perp v_j$ για κάθε $j = 1, \dots, k_1$. Συνεπώς αν το y γραφτεί ως προς την ορθοκανονική βάση $v_1, \dots, v_{k_1}, \dots$, θα έχει μηδενικά στις k_1 πρώτες θέσεις. Οπότε και ο πολλαπλασιασμός του με τον πίνακα στην (8.1) θα έχει πάλι μηδενικά σε αυτές τις θέσεις, δηλαδή $U_{\lambda_1}^* AU_{\lambda_1}(y) \perp V_{\lambda_1}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

8.6 ΤΟ ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΓΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

Μια ιδιαίτερη εφαρμογή της αναπαράστασης Schur προκύπτει από το ότι αν ένας άνω τριγωνικός πίνακας $T = (t_{ij})$ ικανοποιεί την $TT^* = T^*T$ τότε είναι αναγκαστικά διαγώνιος. Πράγματι, η πρώτη στήλη του T έχει όλα τα στοιχεία της ίσα με το μηδέν εκτός ίσως από το t_{11}. Αλλά

$$\begin{aligned}\|T^*e_1\|_2^2 &= \langle T^*e_1, T^*e_1\rangle = \langle TT^*e_1, e_1\rangle \\ &= \langle T^*Te_1, e_1\rangle = \langle Te_1, Te_1\rangle = \|Te_1\|_2^2,\end{aligned}$$

άρα $\|T^*e_1\|_2 = \|Te_1\|_2$. Δηλαδή η πρώτη στήλη του T^* έχει νόρμα ίση με την πρώτη στήλη του T, η οποία στήλη του T έχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο, το οποίο έχει στην ίδια θέση και ο T^*: το t_{11}. Άρα αναγκαστικά όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης του T^*, εκτός ίσως από το πρώτο, είναι ίσα με το μηδέν. Αλλά αυτή η στήλη έχει τα ίδια στοιχεία με την πρώτη γραμμή του T, οπότε ο T έχει μηδενικά και στην πρώτη γραμμή του εκτός ίσως από το t_{11}.

Συνεχίζοντας ομοίως με τις υπόλοιπες στήλες προκύπτει ότι ο T είναι διαγώνιος.

Έτσι λοιπόν αν A οποιοσδήποτε μιγαδικός πίνακας και $A = UTU^*$ η αναπαράσταση Schur του A, τότε παρατηρούμε ότι αν $A^*A = AA^*$ τότε

$$\begin{aligned}T^*T &= (U^*AU)(U^*AU) = U^*AA^*U \\ &= U^*AA^*U = (U^*AU)(U^*A^*U) = TT^*.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $A^*A = AA^*$ τότε ο πίνακας T της αναπαράστασης Schur του A είναι διαγώνιος. Τέτοιοι πίνακες A ονομάζονται *κανονικοί*, και έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8.6.1 (Φασματικό για κανονικούς πίνακες) *Για κάθε κανονικό μιγαδικό $n \times n$ πίνακα A, δηλαδή για κάθε A που ικανοποιεί την $A^*A = AA^*$, υπάρχει $n \times n$ πίνακας U με $U^*U = I$ και διαγώνιος πίνακας T ώστε $A = UTU^*$.* □

8.7 ΑΛΛΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι οι αυτοσυζυγείς και οι κανονικοί πίνακες γίνεται να γραφτούν ως διαγώνιοι ως προς μια άλλη από τη συνήθη ορθοκανονική βάση. Υπάρχουν άραγε άλλοι πίνακες με αυτή την ιδιότητα; Και τι θα συμπεράνουμε αν δεχθούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε βάση του χώρου και όχι απαραίτητα ορθοκανονική; Η απάντηση είναι θετική αν και δεν εμπίπτουν αυτοί οι πίνακες σε κάποια ειδική κατηγορία όπως οι παραπάνω. Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 8.7.1 *Ένας $n \times n$ πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Απόδειξη: Φανερά αν $v_1, \dots, v_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τότε φανερά $A = UDU^{-1}$ με $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και ο U έχει για στήλες του τα v_j. Αυτό το ελέγχουμε εύκολα αν γράψουμε το τυχόν διάνυσμα x ως προς τη βάση v_j.

Αντίστροφα, αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε μπορεί να γραφτεί ως διαγώνιος πίνακας $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ως προς κατάλληλη βάση του χώρου. Αν $v_1, \dots, v_n$ τα διανύσματα αυτής της βάσης τότε φανερά είναι ιδιοδιανύσματα του A, αφού αναγκαστικά $Av_i = \lambda_i v_i$.

Παρατηρούμε τέλος ότι αν θέσουμε U να είναι ο πίνακας με στήλες τα v_j τότε φανερά $A = UDU^{-1}$. □

Πόρισμα 8.7.2 *Αν ένας πίνακας A είναι τέτοιος ώστε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ έχει n διακεκριμένες ρίζες τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.*

Απόδειξη: Κάθε ιδιοτιμή έχει τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα. Συνεπώς εφόσον υπάρχουν n διαφορετικές ιδιοτιμές θα υπάρχουν και n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Πράγματι, αν οι ιδιοτιμές είναι οι λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ όλες διαφορετικές και v_i τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα μήκους 1, τότε αν αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα κάποιο από αυτά, έστω το v_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή υπάρχουν $\mu_2, \ldots, \mu_n$ ώστε

$$v_1 = \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$$

με τα μ_i να μην είναι όλα μηδέν, αφού $v_1 \neq 0$. Εφαρμόζοντας τον A προκύπτει ότι

$$\lambda_1 v_1 = \mu_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \mu_n \lambda_n v_n,$$

οπότε

$$v_1 = \mu_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + \mu_n \frac{\lambda_n}{\lambda_2} v_n.$$

Άρα

$$\mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n = \mu_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + \mu_n \frac{\lambda_n}{\lambda_2} v_n,$$

συνεπώς

$$\mu_2 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \cdots + \mu_n \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) v_n = 0.$$

Αλλά ούτε τα μ_i είναι όλα μηδέν ούτε τα $1 - \lambda_i/\lambda_1$ είναι μηδέν, οπότε τα $v_2, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Συνεχίζοντας επαγωγικά θα καταλήξουμε αλλάζοντας ενδεχομένως τη σειρά των v_i ότι όλα τα σύνολα $\{v_i, \ldots, v_n\}$ είναι σύνολα γραμμικών εξαρτημένων διανυσμάτων για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Άρα το v_{n-1} είναι πολλαπλάσιο του v_n. Αλλά τα v_i έχουν μήκος ίσο με 1 άρα $v_{n-1} = \pm v_n$, συνεπώς $\lambda_{n-1} = \lambda_n$ το οποίο είναι άτοπο. □

Πόρισμα 8.7.3 *Κάθε πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή του έχει τόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα όσα η πολλαπλότητά της.*

Απόδειξη: Πρόκειται για απλή απόδειξη στα βήματα του Πορίσματος 8.7.2, και αφήνεται ως άσκηση. □

8.8 ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ

Συχνά στις εφαρμογές χρειάζεται να ελέγξουμε αν δύο ή περισσότεροι πίνακες διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα. Δηλαδή αν υπάρχει βάση ως προς την οποία όλοι οι πίνακες που μας ενδιαφέρουν είναι διαγώνιοι.

Όταν συμβαίνει αυτό τότε οι πίνακές μας μπορούν να έχουν όλοι τα ίδια ιδιοδιανύσματα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια οικογένεια $n \times n$ διαγωνοποιήσιμων πινάκων $\digamma$. Αν όλοι οι πίνακες της $\digamma$ είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι, τότε υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $v_1, \dots, v_n$ ώστε αν θέσουμε U τον πίνακα με στήλες τα v_j τότε για κάθε $A \in \digamma$ υπάρχει διαγώνιος πίνακας D_A ώστε $A = UD_AU^{-1}$. Αυτό έχει ως απλή συνέπεια το γεγονός ότι αν $A, B \in \digamma$ τότε

$$\begin{aligned} AB &= (UD_AU^{-1})(UD_BU^{-1}) = UD_A(U^{-1}U)D_BU^{-1} = UD_AD_BU^{-1} \\ &= UD_BD_AU^{-1} = (UD_BU^{-1})(UD_AU^{-1}) \\ &= BA, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι διαγώνιοι πίνακες αντιμετατίθενται. Συνεπώς όλοι οι πίνακες σε μια οικογένεια ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμων πινάκων αντιμετατίθενται. Το επόμενο θεώρημα λέει ότι αυτό εκτός από αναγκαία είναι και ικανή συνθήκη.

Θεώρημα 8.8.1 *Αν $\digamma$ είναι μια οικογένεια $n \times n$ διαγωνοποιήσιμων πινάκων οι οποίοι αντιμετατίθενται, δηλαδή αν $AB = BA$ για κάθε $A, B \in \digamma$ τότε υπάρχει μια βάση του χώρου ώστε όλοι οι πίνακες της $\digamma$ να είναι διαγώνιοι ως προς αυτήν.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο V_{A_1} είναι κάποιος ιδιόχωρος του $A_1 \in \digamma$ για την ιδιοτιμή λ_1, δηλαδή $A_1 v = \lambda_1 v$ για κάθε $v \in V_{A_1}$. Θέτουμε $\digamma_1$ για την υποοικογένεια της $\digamma$ για την οποία κάθε στοιχείο περιορισμένο στους ιδιόχωρους του A_1 είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. Αν $\digamma_1 = \digamma$ τότε έχουμε τελειώσει αφού οποιαδήποτε βάση ιδιοδιανυσμάτων του A_1 είναι ιδιοδιανύσματα και για τους υπόλοιπους πίνακες της $\digamma_1$.

Αν $\digamma_1 \neq \digamma$ θεωρούμε ένα $A_2 \in \digamma \setminus \digamma_1$. Έτσι θα ισχύει

$$A_1(A_2v) = (A_1A_2)v = (A_2A_1)v = A_2(A_1v) = A_2(\lambda v) = \lambda A_2 v.$$

Άρα $A_2 v \in V_{A_1}$. Συνεπώς ο A_2 αφήνει αναλλοίωτο τον V_{A_1}. Αλλά αφού $A_2 \notin \digamma_1$ κάποιος V_{A_1} δεν είναι ιδιόχωρος του $A_2 : V_{A_1} \to V_{A_1}$. Συνεπώς για αυτόν τον V_{A_1} ο $A_2 : V_{A_1} \to V_{A_1}$ έχει τουλάχιστον *δύο* ιδιόχωρους μέσα στον V_{A_1}, δηλαδή με διάσταση γνησίως μικρότερη του $\dim V_{A_1}$. Γράφουμε V_{A_2} για τον τυχόν ιδιόχωρο του A_2 ως πίνακα περιορισμένο στον τυχόντα ιδιόχωρο V_{A_1}. Άρα από το παραπάνω

$$\left\{\begin{array}{l}\text{κάποιος τέτοιος ιδιόχωρος } V_{A_2} \text{ έχει διάσταση γνησίως} \\ \text{μικρότερη από τον } V_{A_1} \text{ του οποίου είναι υποσύνολο.}\end{array}\right\} \tag{8.2}$$

Βεβαίως τα ιδιοδιανύσματα του A_2 σε κάθε V_{A_2} είναι και ιδιοδιανύσματα του A_1 αφού ανήκουν στον V_{A_1}. Άρα οι A_1 και A_2 είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι. Θέτουμε $\digamma_2$ για όλους τους πίνακες στην $\digamma$ που σε κάθε ιδιόχωρο της μορφής V_{A_2} είναι πολλαπλάσια του ταυτοτικού. Αν $\digamma_2 = \digamma$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Αλλιώς επιλέγουμε $A_3 \in \digamma \setminus \digamma_2$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στους ιδιόχωρους του $A_2 : V_{A_1} \to V_{A_1}$. Επειδή σε κάθε βήμα μειώνουμε τη διάσταση σε κάποιο ιδιόχωρο στο βήμα που περιγράφει η (8.2), και ο χώρος μας είναι πεπερασμένης διάστασης, σε κάποιο βήμα k από αυτή την επαγωγική διαδικασία, σε όλους τους ιδιόχωρους του $A_k : V_{A_{k-1}} \to V_{A_{k-1}}$ όλοι οι πίνακες της $\digamma$ είναι πολλαπλάσια του ταυτοτικού. Δηλαδή αναγκαστικά $\digamma_k = \digamma$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

*8.9 Υπολογισμος ιδιοδιανυσματων απο ιδιοτιμες

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε ένα νέα τύπο (που αποδείχθηκε το 2019 από τον Terence Tao με τους φυσικούς Stephen Parke, Xining Zhang και Peter Denton) ο οποίος καθορίζει τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα από ιδιοτιμές. Αυτό έχει μεγάλο ενδιαφέρον γιατί αριθμητικά ο υπολογισμός ιδιοτιμών είναι εύκολος αλλά ο υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων είναι ιδιαίτερα δύσκολος ακόμα και με σύγχρονους ισχυρούς υπολογιστές, για εφαρμογές σε κλάδους όπως στην Φυσική. Αυτός το τύπος κάνει τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων (εκτός από το πρόσημο) ουσιαστικά «τετριμμένο» για κάθε αυτοσυζυγή πίνακα.

Χρειαζόμαστε πρώτα νέο συμβολισμό. Αν A και B είναι δύο πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών, θα γράφουμε $(A|B)$ για τον πίνακα που ξεκινάει με τις στήλες του A και συνεχίζει με τις στήλες του B. Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$ τότε

$$(A|B) = \begin{pmatrix} a & c & e & g \\ b & d & f & h \end{pmatrix}.$$

Αν ο B είναι απλά ένα διάνυσμα v με το πλήθος συντεταγμένων ίσο με τον αριθμό των γραμμών του A θα γράφουμε απλώς $(A|v)$. Για παράδειγμα

$$(A|0) = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως, αν οι A και B είναι δύο πίνακες με τον ίδιο αριθμό στηλών, θα γράφουμε $(\frac{A}{B})$ για τον πίνακα που ξεκινάει με τις γραμμές του A και συνεχίζει με τις γραμμές του B, και το ίδιο αν ένας από τους πίνακες είναι διάνυσμα γραμμένο σε πίνακα μιας γραμμής. Για παράδειγμα,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hline B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & g \\ f & h \end{pmatrix}.$$

Για ένα πίνακα A με n ιδιοτιμές θα τις γράφουμε ως $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots,$ $\lambda_n(A)$. Ξεκινάμε με ένα λήμμα.

Λήμμα 8.9.2 *Αν ο B είναι ένας $n \times (n-1)$ πίνακας και*

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0)$$

τότε έχουμε

$$\det(B^* D B) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j\right) \left|\det\Big((I_{n-1}|0) \cdot B\Big)\right|^2 \tag{8.3}$$

Απόδειξη: Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = (I_{n-1}|0)B,$$

και ότι

$$\begin{aligned} B^*DB &= B^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n-1} & \cdots & b_{n,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots & \lambda_1 b_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} b_{n-1,1} & \cdots & \lambda_{n-1} b_{n-1,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n-1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1,n-1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \cdots & \lambda_1 b_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} b_{n-1,1} & \cdots & \lambda_{n-1} b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \\ &= \Big((I_{n-1}|0)B\Big)^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \Big((I_{n-1}|0)B\Big) \end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από το ότι η ορίζουσα είναι πολλαπλασιαστική και δίνει ίδια τιμή σε κάθε πίνακα και στον ανάστροφό του. □

Αν ο A είναι ένας αυτοσυζυγής $n \times n$ πίνακας τότε υπάρχει V με $V^*V = VV^* = I_n$ ώστε $A = VDV^*$ και $D = V^*AV$. Παρατηρήστε ότι $\lambda_j(D) = \lambda_j(A)$. Οπότε αν $\lambda_n(A) = 0$ τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον D στην (8.3) και παίρνουμε

$$\det\big((VB)^*A(VB)\big) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A)\big|\det\big((I_{n-1}|0)B\big)\big|^2.$$

Αντικαθιστώντας τον $n \times (n-1)$ πίνακα VB με τον B παίρνουμε τον ακόλουθο τύπο.

Λήμμα 8.9.3 *Αν ο B είναι ένας $n \times (n-1)$ πίνακας και A είναι αυτοσυζυγής πίνακας με $\lambda_n(A) = 0$, τότε ισχύει*

$$\det(B^*AB) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A)\right) \left|\det\big((I_{n-1}|0)V^* \cdot B)\big)\right|^2, \qquad (8.4)$$

όπου V είναι ο ορθογώνιος πίνακας που διαγωνοποιεί τον A, δηλαδή ο V έχει στις στήλες του τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A. □

Συμβολίζουμε με A_j τον υποπίνακα του A που προκύπτει αν διαγράψουμε την j γραμμή και την j στήλη του A. Με αυτόν τον συμβολισμό το κύριο θεώρημα αυτή sτης ενότητας είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 8.9.4 *Έστω ότι τα $v_i = (v_{ij})_{j=1}^n$ είναι ορθοκανονικά διανύσματα του αυτοσυζυγούς $n \times n$ πίνακα A. Τότε*

$$|v_{ij}|^2 \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \big(\lambda_i(A) - \lambda_k(A)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_i(A) - \lambda_k(A_j)\big). \qquad (8.5)$$

Πριν προχωρήσουμε με την απόδειξη, παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων του A θα υπολογίσει n^2 στοιχεία (τις συντεταγμένες τους). Υπάρχουν n πίνακες A_j που ο καθένας έχει $n-1$ ιδιοτιμές. Έτσι, συνολικά πρέπει να υπολογιστούν $n(n-1)$ ιδιοτιμές συν τις n ιδιοτιμές του A, που είναι και πάλι n^2 αριθμοί. Όμως ο υπολογισμός ιδιοδιανυσμάτων είναι πολύ πιο απαιτητικός από τον υπολογισμό ιδιοτιμών. Αυτό είναι που κάνει το παραπάνω θεώρημα πολύ χρήσιμο στις εφαρμογές.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $j = 1$ και $i = n$, οπότε θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$|v_{n1}|^2 \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_n(A) - \lambda_k(A)\big) = \prod_{k=1}^{n-1} \big(\lambda_n(A) - \lambda_k(A_1)\big).$$

Σε αυτόν τον τύπο, αλλάζουμε τον A σε $\tilde{A} = A - \lambda_n(A) I_n$. Αυτό είναι εφικτό διότι, αν το v_k είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A τότε

$$\tilde{A}(v_k) = A v_k - \lambda_n(A) v_k = \big(\lambda_k(A) - \lambda_n(A)\big) v_k,$$

και άρα ο $\tilde{A}$ και ο A έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα. Επιπλέον, οι ιδιοτιμές του $\tilde{A}_1$ είναι $\lambda_k(A_1) - \lambda_n(A)$, αφού αν το $x_k = (x_{kj})_{j=2}^{n}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A_1 με ιδιοτιμή $\lambda_k(A_1)$ τότε

$$\tilde{A}_1 x_k = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_n(A) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_n(A) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_k(A_1) x_k - \lambda_n(A) x_k = \big(\lambda_K(A_1) - \lambda_n(A)\big) x_k$$

όπου η γραμμή και η στήλη που διαγράψαμε την εμφανίζουμε παραπάνω διαγραμμένη για να είναι απλούστερη η παρακολούθηση του επιχειρήματος.

Παρατηρώντας ότι $\lambda_n(\tilde{A}) = 0$, έχουμε αναγάγει την απόδειξη στο να δείξουμε ότι

$$|v_{n1}|^2 \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(A) = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(A_1), \tag{8.6}$$

με την επιπλέον υπόθεση ότι $\lambda_n(A) = 0$.

Θέτουμε τώρα $B = (\frac{0}{I_{n-1}})$ στην (8.4) που είναι ένας $n \times (n-1)$ πίνακας με μηδενικά στην πρώτη γραμμή του. Έτσι παίρνουμε ότι

$$\det(B^* A B) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j(A) \left|\det\big((I_{n-1}|0) V^* B\big)\right|^2.$$

Στα αριστερά έχουμε την ορίζουσα του A_1 διότι ο πολλαπλασιασμός B^*A διαγράφει την πρώτη γραμμή του A και ο πολλαπλασιασμός

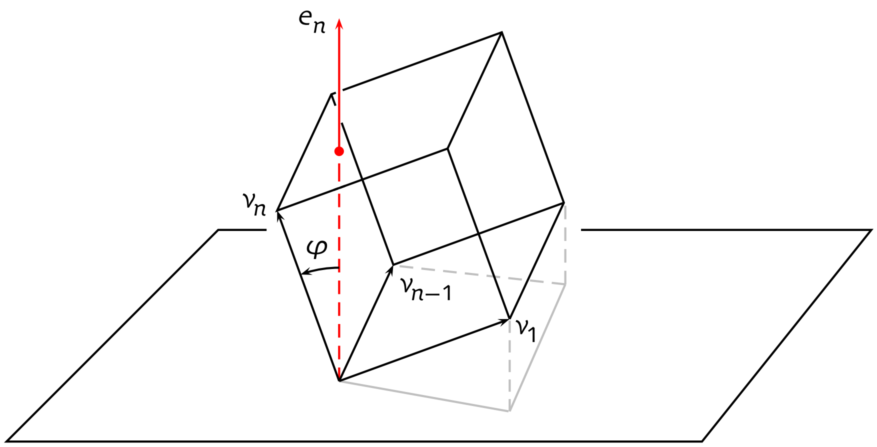
$(B^*A)B$ διαγράφει την πρώτη στήλη του B^*A. Οπότε αυτή η ορίζουσα είναι το γινόμενο $\prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(A_1)$.

Μένει να δείξουμε ότι $|\det((I_{n-1}|0)V^*B)| = |v_{n1}|$. Αλλά είναι στοιχειώδες να ελέγξουμε (ελέγχοντας την ισότητα των πινάκων που εμφανίζονται) ότι

$$\det\big((I_{n-1}|0)V^*B\big) = \det\begin{pmatrix} v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n} \\ v_{n,1} & v_{n-1,2} & & v_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Αλλά είναι ορίζουσα αυτού του ελάσσονα πίνακα ισούται απολύτως με $|v_{n,1}|$, αφού οι στήλες του τελευταίου πίνακα (μαζί με τη διαγραμμένη στήλη και γραμμή) είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε τον κύβο που ορίζουν τα διανύσματα v_i που έχει ακμές ίσες με 1. οπότε η απόλυτη τιμή ης παραπάνω ορίζουσας



ισούται με την απόλυτη τιμή του εμβαδού (όγκου) της έδρας που ορίζεται από τα $e_1, \dots, e_{n-1}$ και σχεδιάστηκε εδώ με τις γκρίζες γραμμές. Αυτή η έδρα έχει εμβαδόν (όγκο) ίσο με 1 και άρα η προβολή έχει όγκο $|\cos\varphi|$. Αλλά το μήκος του διανύσματος v_n είναι επίσης 1, οπότε η πρώτη συντεταγμένη του ισούται με $|\cos\varphi|$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Μέρος II

Αλγεβρικοί υπολογισμοί

Κεφάλαιο 1

Διανύσματα

Κεφάλαιο 2

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Κεφάλαιο 3

Ορίζουσες

Ο τύπος του Leibniz:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} v_{i\sigma_i} \right).$$

Ο τύπος των Levi-Civita:

$$\det A = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n} v_{1i_1} v_{2i_2} \cdots v_{ni_n},$$

όπου $\epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ (ισούται με μηδέν αν $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \neq \{1, 2, \ldots, n\}$).

Ο κανόνας του Sarrus.

Το θεώρημα του Sylvester $\det(I + AB) = \det(I + BA)$.

Κεφάλαιο 4

Αντίστροφος πίνακα

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους $Ax = b$, ισοδύναμα το,

$$\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{21}x_2 + \cdots + v_{n1}x_n &= b_1 \\ v_{12}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{n2}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ v_{1n}x_1 + v_{2n}x_2 + \cdots + v_{nn}x_n &= b_n, \end{cases}$$

Το αλγεβρικό τέχνασμα που δίνει τη λύση είναι το εξής Θέτουμε B_j να είναι ο πίνακας A αφού του αντικαταστήσουμε τη j στήλη με το διάνυσμα b. Τώρα υπολογίζουμε την ορίζουσά του:

$$\begin{aligned} \det B_j &= \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, b, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, Ax, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= \det\left(v_1, \ldots, v_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n\right) \end{aligned}$$

Αλλά η ορίζουσα είναι γραμμική ως προς την πρόσθεση κατά στήλες, οπότε

$$\begin{aligned} \det B_j &= \sum_{i=1}^{n} \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, x_i v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

Αλλά όλες οι παραπάνω ορίζουσες για $i \neq j$ είναι ίσες με το μηδέν, αφού όταν $i \neq j$ έχουν δύο ίδιες στήλες (το παραλληλεπίπεδο που ορίζουν οι στήλες τους είναι όγκου μηδέν, αφού αυτές είναι γραμμικά εξαρτημένες). Όταν τώρα $i = j$ φανερά η παραπάνω ορίζουσα είναι η ορίζουσα του A. Άρα $\det B_j = x_j \det A$, από όπου προκύπτει

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}. \tag{4.1}$$

Αυτά βέβαια υπό την προϋπόθεση ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\det A \neq 0$. Οι τύποι (4.1) ονομάζονται τύποι του Cramer.

Για να υπολογίσουμε τώρα τον αντίστροφο πίνακα, αν θέσουμε

$$A^{-1} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $AA^{-1} = I$, ισοδύναμα τις n στο πλήθος εξισώσεις $Ax_i = e_i$. Κάθε τέτοια εξίσωση είναι ένα $n \times n$ σύστημα με αγνώστους τις συντεταγμένες του x_i, δηλαδή τα x_{ij} για $j = 1, 2, \dots, n$. Όπως και πριν, για να λύσουμε την $Ax_i = e_i$ φτιάχνουμε τον πίνακα E_j ο οποίος είναι ο ίδιος με τον A εκτός του ότι αντικαταστήσαμε την j στήλη με το e_i. Συνεπώς, από τους τύπους του Cramer, θα ισχύει

$$x_{ij} = \frac{\det E_j}{\det A}.$$

Αλλά αναπτύσσοντας την ορίζουσα του E_j ως προς τη j στήλη (η οποία j στήλη περιέχει το e_i, άρα έχει μια μονάδα στην i γραμμή) βρίσκουμε ότι $\det E_j = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ (θυμίζουμε ότι ο A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε την i γραμμή και τη j στήλη). Συνεπώς

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{i+1} \det A_{i1} \\ (-1)^{i+2} \det A_{i2} \\ \vdots \\ (-1)^{i+n} \det A_{in} \end{pmatrix},$$

οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj} A.$$

Κεφάλαιο 5

Δυϊκός χώρος

Κεφάλαιο 6

Το ίχνος πίνακα

Κεφάλαιο 7

Αλλαγή βάσης

Κεφάλαιο 8

Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές

Μέρος III

Αφηρημένη Γραμμική Άλγεβρα

Κεφάλαιο 9

Αφηρημένοι γραμμικοί χώροι ...ο δρόμος προς τη Συναρτησιακή Ανάλυση

9.1 ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΧΙ ΩΣ ΛΙΣΤΕΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

9.2 ΧΩΡΟΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

9.3 ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

9.4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

9.4.1 Η παράγωγος στον χώρο των πολυωνύμων

$$\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
(3 - 2x + 4x^3 + x^5)
$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&\equiv -2 + 0x + 12x^2 + 0x^3 + 5x^4 \\
&= \frac{d}{dx}(3 - 2x + 4x^3 + x^5).
\end{aligned}
$$

Στοιχειοθεσία: XeLaTeX
Postscript producer: dvips
PDF distiller: Ghostscript
Γραμματοσειρές: NeoKadmus
Γραφικά: PStricks