Μάθημα 1ο

(X, d) $\qquad f, f_n : X \to \mathbb{R}$ 1

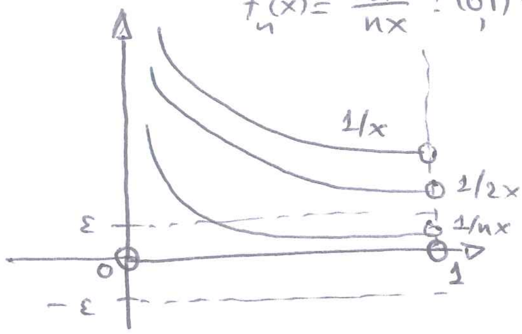
Ορισμός $f_n \to f$ κατά σημείο ή απλά αν 2

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall \quad \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 3

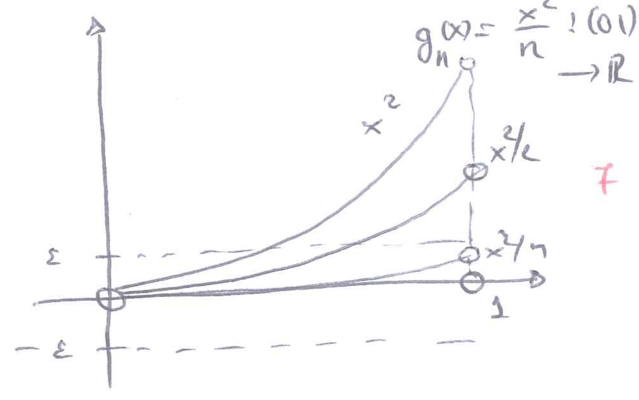
Ορισμός $f_n \rightrightarrows f$ αν 4

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ωστε $\forall \quad \geq \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$ 5

$f_n(x) = \frac{1}{nx} : (0,1) \to \mathbb{R}$



6



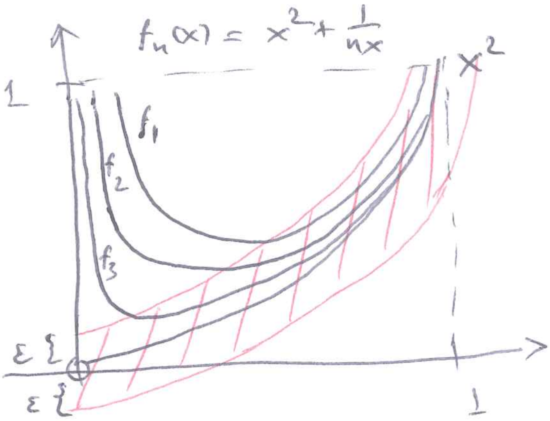
7

Πρόταση Αν $f_n \rightrightarrows f$ τότε $f_n \to f$. 8

Απόδειξη Προφανής 9

Παρατήρηση Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ τότε 10

Παράδειγμα $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{nx}$



11

Θεώρημα $f_n \rightrightarrows f \iff$ Η $\qquad a_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - \quad| \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ 12

είναι μηδενική, δηλαδή a_n 13

Απόδειξη "$\Longrightarrow$" Εφαρμόζουμε τον ορισμό της σύγκλισης

για $\varepsilon/2$ κι έχουμε ότι $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε αν $n \geq n_0$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall$

Άρα $\sup\limits_{x\in X} | \qquad\qquad | \leq \varepsilon/2$ δηλ a_n.

$\Longleftarrow$ Αν $a_n \longrightarrow 0$ $\forall$ $\quad\exists\quad$ ώστε $\forall$ $\quad |a_n| < \varepsilon$

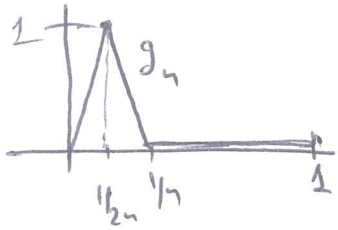
δηλαδή $\sup\limits_{x\in X} | \qquad\qquad | < \varepsilon$ δηλαδή $|f_n(x) - \qquad | < \varepsilon \ \forall x\in X$

Άρα $\forall \quad \exists \quad$ ώστε $\forall \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

δηλαδή $f_n \rightrightarrows f$ ■

Παράδειγμα

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx+2 & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$g_n(x) \longrightarrow 0$ αλλά $g_n \not\rightrightarrows 0$ διότι $\sup\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x) - 0| = g(\frac{1}{2n}) = 1 \not\to 0$

Ορισμός Η f_n λέγεται ομοιόμορφα Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall \quad \geq n_0 \quad \forall \quad \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

Θεώρημα $f_n \rightrightarrows f \iff f_n$ ομοιόμορφα Cauchy

Απόδειξη "$\Longrightarrow$"

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X$

Αρα αν $\quad \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq$

$$\leq |f_n(x) - f(x)| + | \quad - f_m(x)| < \quad + \quad < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

"$\Leftarrow$" Αφού f_n ομοιομορφα Cauchy, αν $x \in X$ η $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία $\quad$ στο $\mathbb{R}$ οπότε συγκλίνει

Θέτω $f(x) = \lim \quad$. Θα δείξουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$.

Αφού f_n ομ. Cauchy $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in X$. Αρα

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - \quad | \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση Θέτουμε $B(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ φραγμένη} \}$

Η $\|f\|_\infty = \quad |f(x)|$ είναι νόρμα στον $B(X)$

Αν f_n ομ. Cauchy τότε στον $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ η f_n είναι Cauchy $\Leftrightarrow$ f_n συγκλίνει στον $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$

Άσκηση Γιατί ο $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι μετρικός χώρος;

Άσκηση 4.1.5 $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{1 - x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(i) f_n συγκλίνει απλά στο $(1, \infty)$ (ii) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(1, \infty)$;

(iii) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$ για $\alpha > 1$;

Λύση (i) $\forall x > \quad x^n \to +\infty$ Αρα $f_n(x) \longrightarrow$

(ii) Υπολογίζουμε το $\alpha_n = \sup\limits_{x > 1} \left| \dfrac{1}{1 - x^n} - 0 \right|$

$= \sup_{x>1} \frac{1}{} \geq \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{} = +\infty$ 1

αρα $f_n \not\rightrightarrows$ στο 2

(iii) $a_n = \sup_{x \geq \alpha} \left| \frac{1}{1-x^n} - 0 \right| = \frac{1}{\alpha} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ αγιο $\alpha >$ 3

$\blacksquare$