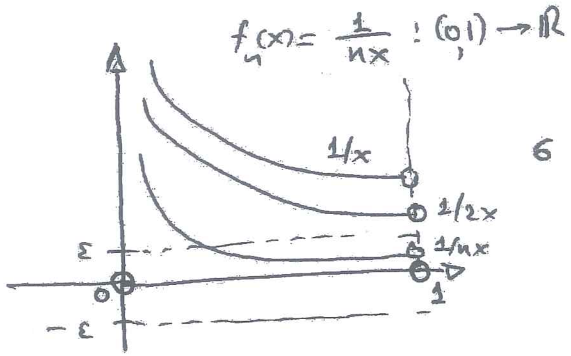
(X,d) $\qquad$ $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ 1

Ορισμός $f_n \to f$ συγκλίνει κατά σημείο ή απλά αν 2

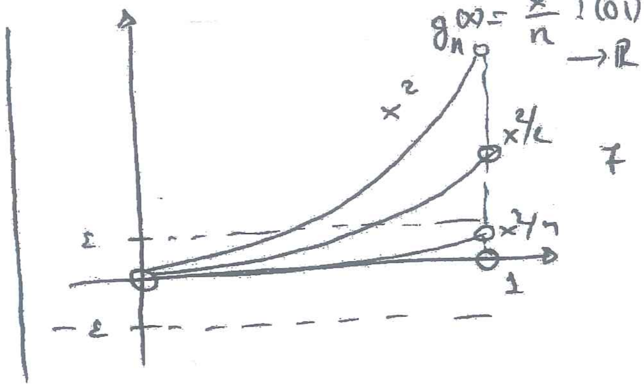
$\forall x\in X \quad \forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\ge n_0$ $\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 3

Ορισμός $f_n \rightrightarrows f$ συγκλίνει ομοιόμορφα αν 4

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\ge n_0$ $\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in X$ 5



6



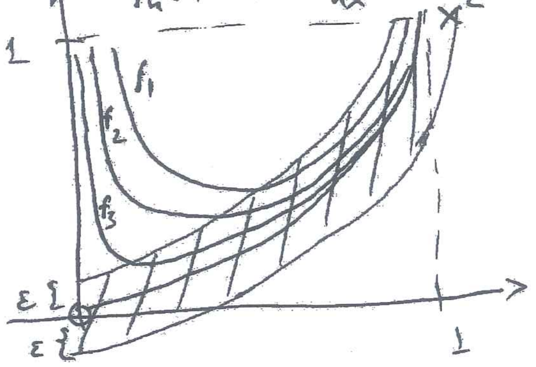
7

Πρόταση Αν $f_n\rightrightarrows f$ τότε $f_n\to f$. 8

Απόδειξη Προφανής 9

Παρατήρηση Αν $f_n\to f$ και $f_n\to g$ τότε $f=g$ 10

Παράδειγμα $f_n(x)=x^2+\frac{1}{nx}$



11

Θεώρημα $f_n\rightrightarrows f \iff$ Η ακολουθία $a_n=\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 12

είναι μηδενική, δηλαδή $a_n\longrightarrow 0$ 13

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$" Εφαρμόζουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης για $\varepsilon/2$ και έχουμε ότι $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε αν $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall\, x \in X$$

Άρα $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ δηλ. $a_n \longrightarrow 0$

$\Longleftarrow$ Αν $a_n \longrightarrow 0$ $\forall\, \varepsilon>0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n \geq n_0$ $|a_n| < \varepsilon$

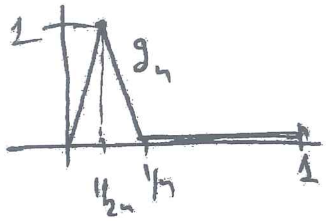
δηλαδή $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ δηλαδή $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$

Άρα $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$

δηλαδή $f_n \rightrightarrows f$ ■

<u>Παράδειγμα</u>

$$g_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx + 2 & \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$g_n(x) \longrightarrow 0$ αλλά $g_n \not\rightrightarrows 0$ διότι $\sup\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x) - 0| = g(\frac{1}{2n}) = 1 \not\to 0$

<u>Ορισμός</u> Η f_n λέγεται ομοιόμορφα Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\, n \geq n_0$ $\cancel{\forall\, n \geq n_0}$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$

<u>Θεώρημα</u> $f_n \rightrightarrows f \iff f_n$ ομοιόμορφα Cauchy

<u>Απόδειξη</u> "$\Longrightarrow$"

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ $\forall\, x \in X$

Άρα αν $n,m \ge n_0$ ισχύει $|f_n(x)-f_m(x)| \le$

$\le |f_n(x)-f(x)| + |f(x)-f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall x\in X$

"$\Leftarrow$" Αφού f_n ομοιόμορφα Cauchy, αν $x\in X$ η $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ οπότε συγκλίνει.

Θέτω $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Θα δείξουμε ότι $f_n \rightrightarrows f$.

Αφού f_n ομ. Cauchy $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n,m \ge n_0$

$|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x\in X$. Άρα

$|f_n(x)-f(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x)-f_m(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ ■

__Παρατήρηση__ Θέτουμε $B(X) = \{ f: X \to \mathbb{R} \text{ φραγμένη} \}$

Η $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$ είναι νόρμα στον $B(X)$

Αν f_n ομ. Cauchy τότε στον $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ η f_n είναι Cauchy $\Leftrightarrow$ f_n συγκλίνει στον $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$

__Άσκηση__ Γιατί ο $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι μετρικός χώρος;

__Άσκηση 4.1.5__ $f_n(x) = \dfrac{1}{1-x^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(i) f_n συγκλίνει απλά στο $(1,\infty)$ (ii) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(1,\infty)$;

(iii) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha,\infty)$ για $\alpha > 1$;

__Λύση__ (i) $\forall x > 1$ $x^n \to +\infty$ Άρα $f_n(x) \to 0$

(ii) Υπολογίζουμε το $a_n = \sup\limits_{x>1} \left| \dfrac{1}{1-x^n} - 0 \right|$

$$= \sup_{x>1} \frac{1}{x^n - 1} \geq \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^n - 1} = +\infty$$ 1

άρα $f_n \not\rightrightarrows 0$ ~~στο~~ 2

(iii) $a_n = \sup_{x \geq \alpha} \left| \frac{1}{1-x^n} - 0 \right| = \frac{1}{\alpha^n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ αφού $\alpha > 1$ 3

■