συμ. 30

Μάθημα 4ο

Σειρές συναρτήσεων

Για κάθε $f_n:(X,d)\longrightarrow \mathbb{R}$ θέτουμε $s_k(x)=\sum_{n=1}^{k} f_n(x)$. (1)

Η ακολουθία $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ ονομάζεται σειρά της f_n και συμβολίζεται (2)

(3)

ή με το $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Ορισμός Λέμε ότι η σειρά της f_n συγκλίνει κατά σημείο (4)

αν η $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει κατά σημείο ή το όριο το γράφουμε (5)

πάλι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. (6)

Λέμε ότι η σύγκλιση αυτή είναι ομοιόμορφη ή ότι (7)

συγκλίνει ομοιόμορφα αν η $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (8)

Θεώρημα (Weierstrass) (M-test) (9)

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n:X\longrightarrow\mathbb{R}$ και (10)

υποθέτουμε ότι $\forall n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $M_n\in\mathbb{R}$ ώστε $|f_n(x)|\le M_n$ $\forall x\in X$ (11)

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει (12)

(13)

ομοιόμορφα σε μια $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$.

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι η $s_k=\sum_{n=1}^{k} f_n$ είναι ομοιόμορφα (14)

Cauchy. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$, $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ (15)

ώστε αν $k>m\ge n_0$ τότε $\sum_{n=m+1}^{k} M_n<\varepsilon/2$. (16)

$\left|\sum_{n=1}^{k} M_n-\sum_{n=1}^{m} M_n\right|$

Τώρα

$$|s_k(x)-s_m(x)|\le\sum_{n=m+1}^{k}|f_n(x)|\le\sum_{n=m+1}^{k}M_n<\varepsilon \quad (17)$$

$=\left|\sum_{n=1}^{k} f_n-\sum_{n=1}^{m} f_n\right|=\left|\sum_{n=m+1}^{k} f_n\right|\le$

Άρα s_k ομ. Cauchy άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια $f:X\to\mathbb{R}$ ∎ (18)

Ορισμός Ειδικά αν $f_n(x) = a_n x^n$ τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ονομάζεται δυναμοσειρά.

Θεώρημα Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε

(i) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $s(x)$ σε κάθε διάστημα της μορφής $[-R, R]$ με $R < |x_0|$ και η οριακή $s(x)$ είναι συνεχής στο $(-|x_0|, |x_0|)$

(ii) $\int_a^b s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n$ σε κάθε $[a\ b] \subseteq (-|x_0|, |x_0|)$

(iii) $s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-|x_0|, |x_0|)$

Απόδειξη (i) Αφού $\sum_0^{\infty} a_n x_0^n < \infty \Rightarrow a_n x_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ άρα $a_n x_0^n$ φραγμένη, οπότε υπάρχει $c > 0$ ώστε $|a_n x_0^n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Αν $0 < R < |x_0|$ τότε $r = \frac{R}{|x_0|} < 1$ οπότε $\forall x \in [-R, R]$ ισχύει

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n| \leq |c\, r^n|.$$ Αλλά

$$\sum c r^n = c \sum r^n < \infty$$ αφού $r < 1$

Οπότε από το Θ. Weierstrass (M-test) η $\sum a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-R\ R]$ στην $s(x)$

κάθε $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ είναι συνεχής, άρα το ομοιόμορφο όριο $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι συνεχής στο $[-R, R]$ αλλά $\forall\, R < |x_0|$

Άρα συνεχής στο $(-|x_0|, |x_0|)$

(ii) Αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[a\ b] \subseteq (-|x_0|, |x_0|)$

(γιατί αν θέσω $R = \max\{|a|, |b|\} \in (-|x_0|, |x_0|)$

τότε $[a\ b] \subseteq [-R\ R]$)

ισχύει

$$\int_a^b s(x) = \int_a^b \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \overset{\text{ομ.}}{\underset{\text{συγκλ}}{=}} \lim_{k\to\infty} \int_a^b \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_a^b a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b (a_n x^n)\,dx$$

(iii) (παραλείπεται)

Άσκηση 4.7.2 Δείξτε ότι η $f_n(x) = 1 + \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ M]$ $\forall M > 0$ αλλά όχι στο $\mathbb{R}$.

Λύση

~~Είναι~~ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ διότι $\left| \dfrac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

άρα $\frac{x^n}{n!} \longrightarrow 0$ οπότε $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Στο $[0\ M]$ $a_n = \sup_{x\in[0M]} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in[0M]} \frac{|x^n|}{n!} \le \frac{M^n}{n!} \longrightarrow 0$

Άρα $f_n \rightrightarrows 1$ στο $[0\ M]$

όμως στο $\mathbb{R}$, $a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 1| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x^n|}{n!} = \infty \not\to 0$

άρα $f_n \not\rightrightarrows 1$ στο $\mathbb{R}$ ∎

Ασκηση 4.7.8

Δείξτε ότι αν $f_n, f: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ και $f_n \rightrightarrows f$ (1)

τότε $|f_n| \rightrightarrows |f|$ (2)

Λύση $\big| |f_n| - |f| \big| \leq |f_n - f|$ οπότε (3)

$\alpha_n(|f_n|) \leq \alpha_n(f) \to 0$ (4)

Ασκηση 4.7.9

Η $f_n : [0\ 1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ (5)

συγκλίνει απολύτως ομοιόμορφα αλλά όχι ομοιόμορφα (6)

Λύση Φανερά $|f_n| = 1 + \frac{x}{n} \longrightarrow 1$ $\forall x$ (7)

& $\big| |f_n| - 1 \big| = \frac{|x|}{n} \Rightarrow \alpha_n(|f_n|) = \sup \big| |f_n| - 1 \big|$ (8)

$\leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ άρα $|f_n| \rightrightarrows 1$. (9)

Αλλά η f_n δεν συγκλίνει καν. Το $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ (10)

δεν υπάρχει για κανένα $x \in \mathbb{R}$. (11)

Ασκηση 4.6.3

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ (12)

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ \alpha]$ $\forall \alpha > 0$ (13)

Λύση $0 \leq \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \overset{x \in [0\ \alpha]}{\leq} \frac{1}{n(n+1)}$ (14)

Αλλά $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει. Άρα από M-test (15)

η δεδομένη συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ \alpha]$ (16)

$\left(\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \text{ Τηλεσκοπική} \right)$