Μάθημα 5ο

Άσκηση 4.7.18 $f_n(x)=x^n \quad x\in[0\ 1] \qquad g:[0\ 1]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $g(1)=0$

Δείξτε ότι η $g\cdot f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Λύση Θυμηθείτε ότι $f_n(x)\longrightarrow \left.\begin{cases} 0 \ ...... & x\in[0\ 1) \\ 1 \ ...... & x=1 \end{cases}\right\} =: f(x)$ (1) (2)

(αλλά όχι ομοιόμορφα) (3)

$(g\cdot f_n)(x)=g(x)\,f_n(x)\longrightarrow \left.\begin{cases} g(x)\cdot ...... & \\ ...... & \end{cases}\right\} = ...$ (4)

Έστω ότι $\varepsilon>0$. Η g είναι ...... στο 1 άρα $\exists$ ...... (5)

ώστε αν $x\in(......,......] \Rightarrow |g(x)-......|<\frac{\varepsilon}{3} \iff |g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ (6)

Επίσης g φραγμένη (ως συνεχής ορισμένη σε ...... σύνολο) (7)

άρα $\exists\, M>0 : \quad |g(x)|\le M \quad \forall x\in[0\,1]$.

Στο διάστημα $[0\,,1-\frac{\delta}{2}]$ η $f_n \rightrightarrows$ ...... διότι (8)

$$\sup_{x\in[0,1-\frac{\delta}{2}]} |f_n(x)-0| = ... = (......)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ (9)

Άρα $\exists\, n_0\in\mathbb{N}: \ \forall$ ...... $|f_n(x)|\le \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall\, x\in$ ...... (10)

Συνεπώς $\sup\limits_{x\in[0\ 1]} |(gf_n)(x)-0| = \max\left\{ ......\ ,\ ...... \right\}$ (11)

$\le \max\left\{ M\frac{\varepsilon}{3M}\ ,\ ...... \right\}$ (αφού $|f_n(x)|\le 1$.) (12)

$\le \max\left\{ \frac{\varepsilon}{3}\ ,\ \frac{\varepsilon}{3} \right\} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ (13)

Δηλαδή $|(gf_n)(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in[0\,1] \quad \forall\, n\ge n_0$. Άρα $gf_n \rightrightarrows 0$

∎

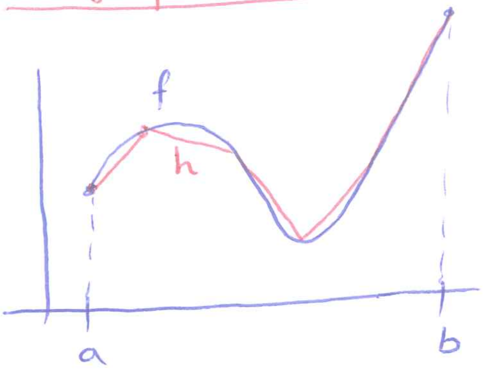
Το Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass

Θεώρημα Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

Ισοδύναμα υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε $p_n\rightrightarrows f$.

Ισοδύναμα το σύνολο $\mathbb{P}[x]$ των πολυωνύμων είναι πυκνό στον $(C[a,b],\ \|\cdot\|_\infty)$

Περιγραφή της απόδειξης



Όπως βλέπουμε στο σχήμα κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από μια τεθλασμένη γραμμή. Οι τεθλασμένες γραμμές έχουν τύπο της μορφής

$$h(x)=Ax+B+\sum_{i=1}^{n-1}c_i|x-x_i| \quad \text{όπου}$$

x_i τα σημεία στα οποία η τεθλασμένη έχει κορυφή. ~~Επειδή~~ Άρα, αφού η h μπορεί να είναι οσοδήποτε κοντά στην f πληθαίνοντας τα σημεία κορυφών της, αρκεί να δείξουμε ότι η h προσεγγίζεται από πολυώνυμα ομοιόμορφα. Επειδή το $Ax+B$ είναι ήδη πολυώνυμο και το άθροισμα πολυωνύμων είναι πολυώνυμο, αρκεί να προσεγγίσουμε ομοιόμορφα με πολυώνυμα τις $|x-x_i|$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων q_n ώστε $q_n(x)\rightrightarrows|x|$ στο $[-1,1]$, διότι το $q_n(x-x_i)$ είναι πάλι πολυώνυμο και φανερά αν $q_n(x)\rightrightarrows|x|$ τότε $q_n(x-x_i)\rightrightarrows|x-x_i|$.

Για να το κάνουμε αυτό θέτουμε $p_0(x)=0$ και $p_{n+1}(x)=\dfrac{p_n(x)^2+(1-x^2)}{2}$ (*)

για $x\in[-1,1]$

και παρατηρούμε τα εξής

Βήμα 1 $\quad 0 \le p_n(x) \le 1$

Αφού $x\in[-1,1]$ φανερά $p_n(x) \ge 0$. Επίσης $p_0(x)=0\le 1$ (1)

και αν $p_n(x)\le 1$ τότε $p_{n+1}(x) = \dfrac{p_n^2(x)+(1-x^2)}{2} \le$ ...... (2)

$=$ ...... $=$ ...... ≤ 1 (3)

Βήμα 2 $\quad p_n(x) \le p_{n+1}(x)$ (4)

Για $n=0$ $\quad p_1(x) = \dfrac{p_0^2(x)+1-x^2}{2} = \dfrac{1-x^2}{2} \ge 0 = p_0(x)$ αφού $x\in[-1,1]$ (5)

Αν $p_{n+1}(x)\ge p_n(x) \xRightarrow{(\text{γιατί;})} p_{n+1}^2(x) \ge p_n^2(x) \Longrightarrow$ (6)

$\Rightarrow$ ...... $\ge$ ...... $\Rightarrow p_{n+2}(x)\ge p_n(x)$ (7)

Αφού $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα για κάθε $x\in[-1,1]$, συγκλίνει έστω (8)

στο $p(x)$. Παίρνοντας όριο $n\to\infty$ στην ⊛ [σελ 2] (9)

παίρνουμε $\quad p(x) = \dfrac{p^2(x)+1-x^2}{2} \Rightarrow p^2(x)-2p(x)+1-x^2=0$ (10)

$\Rightarrow p(x) = \dfrac{2\pm\sqrt{4-4(1-x^2)}}{2} =$ ...... $=$ (11)

$=$ ...... $= 1\pm|x|$. (12)

Η $1+|x|$ απορρίπτεται διότι ......

Άρα $p_n(x)\longrightarrow 1-|x|$. Από Θ. Dini $p_n \rightrightarrows 1-|x|$ άρα (13)

η $q_n(x)= 1-p_n(x) \rightrightarrows |x|$ ls είναι πολυώνυμο ☒ (14)

Άσκηση 5.2.1 Εστω ότι $f \in C[0\ 1]$ και εχει την ιδιοτητα (1)

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall\ n = 0, 1, 2, \dots \qquad (2)$$

Δείξτε ότι αναγκαστικά $f = 0$ (3)

Λύση Για καθε πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ (4)

θα ισχυει

$$\int_0^1 p(x) f(x)\,dx = \int \qquad (5)$$

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_ \qquad (6)$$

$$= \int_{---} \_\_\_\_ + \int_{---} \_\_\_\_ + \dots + \int_{--} \_\_\_\_ = \_\_ \qquad (7)$$

Αλλά υπάρχει $p_n(x) \rightrightarrows f$ οπου p_n πολυώνυμα (8)

$$\text{Αρα} \quad \int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \_\_\_\_\_ = \_\_\_ \int_0^1 \_\_\_\_ = \qquad (9)$$

Αρα f^2 συνεχής ≥ 0 \& $\int_0^1 f^2 =$ (10)

Από απειροστικό λογισμό $\Rightarrow$ $f = 0$ (11)