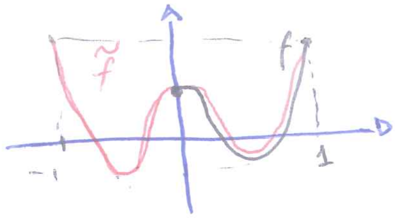
Μαθημα 6ο

Άσκηση 5.2.2 Δείξτε ότι αν $f \in C[0\ 1]$ και $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$
$\forall\ n = 0, 1, \dots$ τότε $f = 0$

Λύση Ορίζουμε την $\tilde{f} : [-1\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ με



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,1] \\ \dots & x \in [-1,0] \end{cases}$$

η οποία είναι η ..... επέκταση της f στο $[-1,1]$

Η $\tilde{f}$ παραμένει συνεχής διότι $\lim\limits_{x \to 0^-} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(-x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
$= f(0)$ αφού f συνεχής στο $[0\ 1]$.

Επιπλέον $\int_{-1}^{1} x^{2n} \tilde{f}(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^{2n} f(-x)\,dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$

$$\overset{-x=t}{=\!=} \int_1^0 (-t)^{2n} f(t)(-dt) + 0 = \int_0^1 t^{2n} f(t)\,dt = 0$$

και

$\int_{-1}^{1} x^{2n-1} \tilde{f}(x)\,dx = 0$ διότι η $x^{2n-1} \tilde{f}(x)$ είναι .....
και το $[-1, 1]$ .... ως προς το 0.

Συνεπώς $\int_{-1}^{1} x^n \tilde{f}(x)\,dx = \dots$ $\forall n \in \mathbb{N}$ οπότε από την
προηγούμενη άσκηση $\tilde{f} = 0$ άρα $f = 0$. ☒

Άσκηση 5.2.5 Υπό τις προϋποθέσεις του Θ. προσέγγισης του Weierstrass
~~υπάρχει~~ για κάθε συνεχή $f : [a\ b] \to \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία
πολυωνύμων p_n ώστε $p_n \rightrightarrows f$ και $p_n(x) < p_{n+1}(x)$ $\forall x \in [ab]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

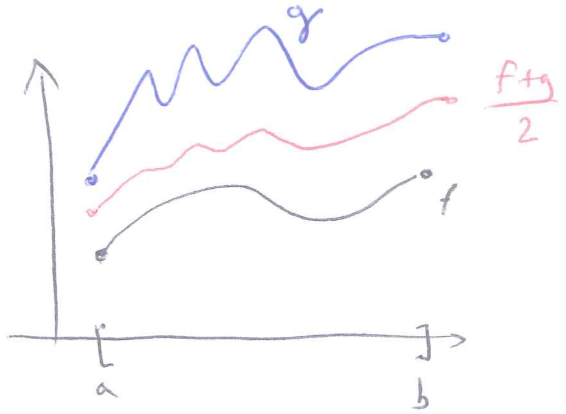
(Υποδ. Δείξτε πρώτα ότι αν $f, g \in C[ab]$ & $f < g$ τότε υπάρχει
πολυώνυμο p ώστε $f < p < g$)

Λύση $g-f$ ______ και $(g-f)(x) >$ ____ $\forall x \in$ ____ (1)

άρα η $g-f$ έχει ελάχιστη τιμή στο $[a\ b]$ δηλ. (2)

$\exists\, x_0 \in$ _____ ώστε $(g-f)(x) \geq$ _____ > 0. (3)

Θέτουμε $\varepsilon = \dfrac{\quad\quad}{2} > 0 \Rightarrow 2\varepsilon =$ ____ $\leq g-f$ (4)



Φανερά $\frac{1}{2}(f+g)$ συνεχής (5)

και

____ $< \frac{1}{2}(f+g) <$ ____ (6)

Από το Θ. Weierstrass υπάρχει (7)

_______ p ώστε $\left|\frac{1}{2}(f+g)(x) - p(x)\right| < \varepsilon \quad \forall x \in [ab]$ (8)

$\Rightarrow$ _______ $< \frac{1}{2}(f+g) <$ _______ (9)

Άρα $p > \frac{1}{2}(f+g) - \varepsilon \geq \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}($ _____ $) =$ ___ (10)

$\Rightarrow \quad f < p$

και $p < \varepsilon + \frac{1}{2}(f+g) \leq \frac{1}{2}($ _____ $) + \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g =$ ___ (11)

$\Rightarrow \quad p < g$ (12)

Τώρα επειδή φανερά $f(x) - \frac{1}{n} < f(x) - \frac{1}{n+1} \quad \forall x\ \forall n$ (13)

υπάρχει p_n πολυώνυμο ώστε $f(x) - \frac{1}{n} < p_n(x) < f(x) - \frac{1}{n+1} \quad \forall x\ \forall n$ (14)

$\Rightarrow \quad |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ άρα $p_n \rightrightarrows f$ (15)

και $p_n < f - \frac{1}{n+1} < p_{n+1} \Rightarrow p_n \uparrow$ (16)

Παλιό θέμα

Ελέγξτε αν η $f_n(x) = \sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα (1)
στο $[0\,1]$ (2)

Λύση Αν $x=0$ $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (3)

αν $x \in (0,1]$ $|1-x^2| < 1 \Rightarrow (1-x^2)^n \longrightarrow 0$ (4)

αλλά $\sqrt[3]{n} \longrightarrow$ ___ (5)

Κριτήριο λόγου ακολουθιών: Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell < 1 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (6)

$$\frac{\sqrt[3]{n+1} \times (1-x^2)^{n+1}}{\sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n} = \sqrt[3]{} \; |\qquad| \longrightarrow \qquad < 1$$ (7)

άρα $\sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{}$ (8)

Συνεπώς $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall x \in [0\,1]$ (9)

Για την ομ. σύγκλιση: $a_n = \sup\limits_{x\in[0\,1]} \sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n$ (10)

$f_n'(x) = \sqrt[3]{n}\,[$ (11)

$= 0 \Leftrightarrow (\qquad)^{n-1}\,[\,1-x^2 - \qquad] = 0$ (12)

$\Leftrightarrow$ $x=1$ ή $x=$ (13)

$f_n(1) = 0$ $f_n(0) = 0$ άρα (14)

$a_n = f_n(\qquad)$ (15)

(16)

Παλαιό θέμα

Ελέγξτε αν η σειρά $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} x(1-x^2)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ 1]$

Λύση (M-test) Η $f_n(x) = \frac{1}{n} x(1-x^2)^n$ έχει μέγιστο στο $x = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ άρα $\sup f_n = \qquad \leq \frac{1}{n^{\boxed{}}}$

και $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{\boxed{}}} < \infty$ ■

Παλαιό θέμα Χρησιμοποιήστε την $\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$ για να αποδείξετε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^n}{n!}\right)$ είναι συνεχής στο $x = e$

Λύση $e \in [0\ 3]$ άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ 3]$ αφού το μερικό άθροισμα $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{x^n}{n!}\right)$ είναι συνεχές.

M-test: $\log\left(1 + \frac{x^n}{n!}\right) \leq \qquad \leq$

$\sum_{n=1}^{\infty} \qquad < \infty$ γιατί $\left| \frac{\quad}{\quad} \right| = \qquad \longrightarrow 0 < 1$ ■

Παλαιό θέμα Εξηγήστε γιατί η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $x = 15e$.