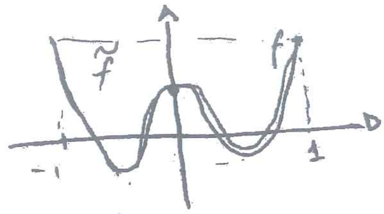
Μάθημα 6ο

Άσκηση 5.2.2 Δείξτε ότι αν $f \in C[0,1]$ και $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ $\forall\, n = 0, 1, \dots$ τότε $f = 0$

Λύση Ορίζουμε την $\tilde{f} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,1] \\ f(-x) & x \in [-1,0] \end{cases}$$

η οποία είναι η άρτια επέκταση της f στο $[-1,1]$

Η $\tilde{f}$ παραμένει συνεχής διότι $\lim_{x\to 0^-} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0^-} f(-x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ αφού f συνεχής στο $[0,1]$.

Επιπλέον
$$\int_{-1}^{1} x^{2n} \tilde{f}(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^{2n} f(-x)\,dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx \overset{-x=t}{=} \int_1^0 (-t)^{2n} f(t)\,(-dt) + 0 = \int_0^1 t^{2n} f(t)\,dt = 0$$

και
$$\int_{-1}^{1} x^{2n-1} \tilde{f}(x)\,dx = 0$$
διότι η $x^{2n-1} \cdot \tilde{f}(x)$ είναι περιττή και το $[-1,1]$ είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Συνεπώς $\int_{-1}^{1} x^n \tilde{f}(x)\,dx = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ οπότε από την προηγούμενη άσκηση $\tilde{f} = 0$ άρα $f = 0$. ∎

Άσκηση 5.2.5 Υπό τις προϋποθέσεις του Θ. προσέγγισης του Weierstrass ~~υπάρχει~~ για κάθε συνεχή $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε $p_n \rightrightarrows f$ και $p_n(x) < p_{n+1}(x)$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

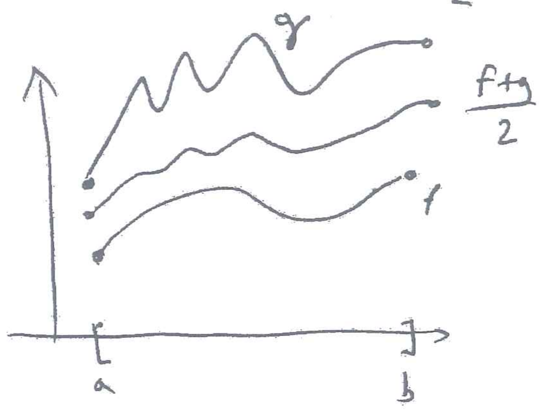
(Υποδ. Δείξτε πρώτα ότι αν $f, g \in C[a,b]$ & $f < g$ τότε υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $f < p < g$)

Λύση $\quad g-f$ συνεχής και $(g-f)(x)>0 \quad \forall x\in[a\ b]$ (1)

άρα η $g-f$ έχει ελάχιστη τιμή στο $[a\ b]$ δηλ. (2)

$\exists\, x_0\in[a\ b]$ ώστε $(g-f)(x)\geq(g-f)(x_0)>0.$ (3)

Θεωρούμε $\varepsilon=\dfrac{(g-f)(x_0)}{2}>0 \Rightarrow 2\varepsilon=(g-f)(x_0)\leq g-f$ (4)



Φανερά $\frac{1}{2}(f+g)$ συνεχής (5)

και

$$f<\tfrac{1}{2}(f+g)<g \quad (6)$$

Από το Θ. Weierstrass υπάρχει (7)

πολυώνυμο p ώστε $\left|\frac{1}{2}(f+g)(x)-p(x)\right|<\varepsilon \quad \forall x\in[ab]$ (8)

$$\Rightarrow -\varepsilon+p(x)<\tfrac{1}{2}(f+g)<+\varepsilon+p(x) \quad (9)$$

Άρα $p>\frac{1}{2}(f+g)-\varepsilon\geq\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}(g-f)=f$ (10)

$$\Rightarrow f<p$$

και $p<\varepsilon+\frac{1}{2}(f+g)\leq\frac{1}{2}(g-f)+\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}g=g$ (11)

$$\Rightarrow p<g \quad (12)$$

Τώρα επειδή φανερά $f(x)-\frac{1}{n}<f(x)-\frac{1}{n+1} \quad \forall x\ \forall n$ (13)

υπάρχει p_n πολυώνυμο ώστε $f(x)-\frac{1}{n}<p_n(x)<f(x)-\frac{1}{n+1} \quad \forall x\ \forall n$ (14)

$\Rightarrow |f(x)-p_n(x)|\leq\frac{1}{n}$ άρα $p_n\rightrightarrows f$ (15)

και $p_n<f-\frac{1}{n+1}<p_{n+1} \Rightarrow p_n\uparrow$ $\boxed{}$ (16)

Παλιό θέμα

Ελέγξτε αν η $f_n(x) = \sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα (1)

στο $[0,1]$ (2)

Λύση: Αν $x=0$ $\quad f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (3)

αν $x \in (0,1]$ $\quad |1-x^2| < 1 \Rightarrow (1-x^2)^n \longrightarrow 0$ (4)

αλλά $\sqrt[3]{n} \longrightarrow \infty$ (5)

Κριτήριο λόγου ακολουθιών: Αν $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell < 1 \Rightarrow \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (6)

$$\frac{\sqrt[3]{n+1} \times (1-x^2)^{n+1}}{\sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n} = \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} \cdot |1-x^2| \longrightarrow |1-x^2| < 1 \quad (7)$$

άρα $\sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (8)

Συνεπώς $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in [0,1]$ (9)

Για την ομ. σύγκλιση: $\alpha_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} \sqrt[3]{n} \times (1-x^2)^n$ (10)

$$f_n'(x) = \sqrt[3]{n}\left[(1-x^2)^n + x\, n\, (1-x^2)^{n-1}(-2x)\right] \quad (11)$$

$$= 0 \Leftrightarrow (1-x^2)^{n-1}\left[1-x^2-2nx^2\right] = 0 \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \acute{\eta} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (13)$$

$f_n(1) = 0 \quad f_n(0) = 0$ άρα (14)

$$\alpha_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = \sqrt[3]{n}\,\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n = \quad (15)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}\right)^{1/2} \longrightarrow 0 \cdot \left(\frac{e^{-1}}{1}\right)^{1/2} = 0 \quad (16)$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$$

$$\left(\quad \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x \xrightarrow[x\to\infty]{} e^\alpha \quad \right)$$

Παλαιό θέμα

Ελέγξτε αν η σειρά $\sum_1^\infty \frac{1}{n} x(1-x^2)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ 1]$

Λύση (M-test) Η $f_n(x)=\frac{1}{n} x(1-x^2)^n$ έχει μέγιστο στο

$x=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ άρα $\sup f_n = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^n \le \frac{1}{n^{\boxed{3/2}}}$

και $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{\boxed{3/2}}} < \infty$ ∎

Παλαιό θέμα Χρησιμοποιήστε την $\log(1+x)\le x \quad \forall x\ge 0$ για να αποδείξετε ότι η $f(x)=\sum_{n=1}^\infty \log\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)$ είναι συνεχής στο $x=e$

Λύση $e\in[0\ 3]$ άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0\ 3]$ αφού τα μερικά αθροίσματα $f_N(x)=\sum_{n=1}^N \log\left(1+\frac{x^n}{n!}\right)$ είναι συνεχή.

M-test: $\log\left(1+\frac{x^n}{n!}\right) \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{3^n}{n!}$

$\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{n!} < \infty$ γιατί $\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}\right| = \frac{3}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$ ∎

Παλαιό θέμα Εξηγήστε γιατί η $f(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n \sin(n^2 x)}{n!}$ είναι συνεχής στο $x=15e$.