Μάθημα 8

Ορισμός (Καραθεοδωρή)

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ______________ (1)

αν-ν $\mu^*(E) =$ ______________ + ______________ $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ (2)

Η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με (3)
$\mathcal{M}$ και ο περιορισμός του μ^* στην οικογένεια $\mathcal{M}$ (4)
λέγεται ______________________ κ το συμβολίζουμε με μ. (5)

(6)

$\mu =$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $A, B \in \mathcal{M}$ ξένα τότε ισχύει το $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (7)
διότι αν θέσω $E =$ __________ τότε, αφού το A είναι (8)
μετρήσιμο ισχύει (9)

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap \qquad) + \mu^*((A \cup B) \cap \qquad) \quad (10)$$

(11)

$$= \qquad\qquad + $$

Ιδιότητες εξωτερικού μέτρου

(i) λόγω κατασκευής $\mu^*(A) \geq 0$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ (12)

(ii) Το μ^* είναι μονότονο δηλ. αν $\quad \subseteq \quad$ τότε $\mu^* \quad \leq \mu^*$ (13)

<u>Απόδειξη</u> κάθε κάλυμμα του B είναι και κάλυμμα του A (14)

άρα

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \quad (15)$$

άρα $\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$ ----- $\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

(iii) (Υποπροσθετικότητα) $\forall (A_n)_{n=1}^{\infty}$ $A_n \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon > 0$ κ $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$, $I_{n,j}$ της μορφής $[a,b)$

ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

(θυμηθείτε $\mu^*(A_n) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) : A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}\right\}$)

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup \bigcup \quad \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum \sum \ell(I_{n,j})$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \quad\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon \quad \blacksquare$$

(iv) $\mu^*([a\, b]) = \mu^*((a\, b)) = \mu^*((a\, b]) = \mu^*([a\, b)) = b-a.$

<u>Λήμμα</u> Αν $a_j < b_j$ $\forall j = 1 \ldots N$ ώστε $[a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} [a_j\, b_j)$

τότε $\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) \geq b-a$

<u>Αποδ.</u> Έστω τα $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{2N}$ όλα τα σημεία a_n κ b_n για $n = 1 \ldots N$. (Βάζουμε τα a_n b_n στη σειρά κ τα μετονομάζουμε)

Με τη σύμβαση $[x,x) = \emptyset$, τα $[c_n\, c_{n+1})$ είναι ξένα μεταξύ τους (αφού τα $c_1, c_2, \ldots$ είναι αύξουσα) και καλύπτουν το $[a\, b)$. Άρα (1)

$$\sum_{n=1}^{2N-1} \ell([c_n\, c_{n+1})) \geq b-a$$ (2)

Αλλά επιπλέον ισχύει $\sum_{n=1}^{N} \ell([a_n\, b_n)) \geq \sum_{n=1}^{2N-1} \ell([c_n\, c_{n+1}))$ (3)

διότι κάθε $[c_n\, c_{n+1})$ είναι υποσύνολο κάποιου απ' τα $[a_n\, b_n)$ (4)

Δείχνουμε πρώτα ότι $\mu^*([a\, b)) = b-a$. (5)

Επειδή $[a\, b) \subseteq [a\, b)$ (6)

$$\inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j\, b_j)) : [a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j) \right\} \leq \ell([a\, b)) = b-a$$ (7)

Για το αντίστροφο για κάθε $0 < \varepsilon < b-a$ αν $[a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j)$ (8)

(9)

θα έχουμε (10)

$$[a, b-\varepsilon] \subseteq [a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j},\, b_j \right)$$

Από τη συμπάγεια του $[a, b-\varepsilon]$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε (11)

$$[a, b-\varepsilon) \subseteq [a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \qquad \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} [$$ (12)

Από το προηγούμενο λήμμα $\sum_{j=1}^{N} \qquad \geq$ (13)

Οπότε $\sum_{j=1}^{\infty} (\qquad) \geq \sum_{j=1}^{N} (\qquad) \geq b-\varepsilon-a$ (14)

δηλαδή $\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon \geq b-a-\varepsilon$ (15)

$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \geq b-a \Rightarrow$ (16)

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) : [a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j) \right\} \geq b-a$$ (17)

Άρα $\mu^*([a b)) = b-a$ (1)

Τέλος

$$[a+\varepsilon, b) \subseteq (a b) \subseteq (a b] \subseteq [a b] \subseteq [a, b+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon>0. \qquad (2)$$

Από την μονοτονία του μ^* $\Rightarrow$ (3)

$$b-a-\varepsilon \le \mu^*(a b) \le \mu^*(a b] \le \mu^*[a b] \le b+\varepsilon-a \qquad (4)$$

$$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \quad \mu^*(a b) = \mu^*[a b] = \mu^*(a b] = \mu^*[a b) = b-a \qquad (5)$$

$\blacksquare$