Μάθημα 8

Ορισμός (Καραθεοδωρή)

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται __________ (1)

αν-ν $\mu^*(E) =$ ________ + ________ $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ (2)

Η οικογένεια των μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με (3)
$\mathcal{M}$ και ο περιορισμός του μ^* στην οικογένεια $\mathcal{M}$ (4)
λέγεται ________________ και το συμβολίζουμε με μ. (5)

(6)

$\mu =$

Παρατήρηση Αν $A, B \in \mathcal{M}$ ξένα τότε ισχύει το $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (7)
διότι αν θέσω $E =$ ________ τότε, αφού το A είναι (8)
μετρήσιμο ισχύει (9)

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap \quad) + \mu^*((A \cup B) \cap \quad) \qquad (10)$$

(11)

$$= \qquad\qquad + $$

Ιδιότητες εξωτερικού μέτρου

(i) λόγω κατασκευής $\mu^*(A) \geq 0$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ (12)

(ii) Το μ^* είναι μονότονο δηλ. αν $\quad \subseteq \quad$ τότε $\mu^* \quad \leq \mu^*$ (13)

Απόδειξη κάθε κάλυμμα του B είναι και κάλυμμα του A (14)

άρα

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \qquad (15)$$

άρα $\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_j) : A\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\right\}$ ----- $\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_j) : B\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j\right\}$ (1)

$\Rightarrow \mu^*(A)\le\mu^*(B)$ (2)

(iii) (Υποπροσθετικότητα) $\forall\, (A_n)_{n=1}^{\infty}$, $A_n\subseteq\mathbb{R}$ ισχύει (3)

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$$ (4)

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$ & $A_n\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{n,j}$, $I_{n,j}$ της μορφής $[a,b)$ (5)

ώστε $\sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_{n,j})\le\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}$ (6)

(θυμηθείτε $\mu^*(A_n)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ell(I_{n,j}) : A_n\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{n,j}\right\}$) (7)

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup\bigcup \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum\sum\ell(I_{n,j})$ (8)

$\le\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)+\quad\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)\right)+\varepsilon$ (9)

(iv) $\mu^*([a\,b])=\mu^*((a\,b))=\mu^*((a\,b])=\mu^*([a\,b))=b-a.$ (10)

Λήμμα Αν $a_j<b_j$ $\forall j=1\dots N$ ώστε $[a\,b)\subseteq\bigcup_{j=1}^{N}[a_j\,b_j)$ (11)

τότε $\sum_{j=1}^{N}(b_j-a_j)\ge b-a$ (12)

Απόδ. Έστω τα $c_1\le c_2\le\dots\le c_{2N}$ όλα τα σημεία a_n & b_n (13)

για $n=1\dots N$. (Βάζουμε τα a_n b_n στη σειρά & τα μετονομάζουμε) (14)

Με τη σύμβαση $[x,x)=\emptyset$, τα $[c_n\,c_{n+1})$ είναι ξένα (15)

μεταξύ τους (αφού τα $c_1,c_2,\dots$ είναι αύξουσα) (16) και καλύπτουν το $[a\, b)$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{2N-1} \ell([c_n\; c_{n+1})) \geq b-a$$

Αλλά επιπλέον ισχύει $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ell([a_n\; b_n)) \geq \sum_{n=1}^{2N-1} \ell([c_n\; c_{n+1}))$

διότι κάθε $[c_n\; c_{n+1})$ είναι υποσύνολο κάποιου από τα $[a_n\; b_n)$

Δείχνουμε πρώτα ότι $\mu^*([a\,b)) = b-a$.

Επειδή $[a\,b) \subseteq [a\,b)$

$$\inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j\; b_j)) : [a\,b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\; b_j) \right\} \leq \ell([a\,b)) = b-a$$

$\boxed{\text{Για το αντίστροφο}}$ για κάθε $0<\varepsilon<b-a$ αν $[a\,b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\; b_j)$

θα έχουμε

$$[a, b-\varepsilon] \subseteq [a\,b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\; b_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j\right)$$

Από τη συμπάγεια του $[a, b-\varepsilon]$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$[a, b-\varepsilon) \subseteq [a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \qquad \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} [$$

Από το προηγούμενο λήμμα $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \qquad \geq$

Οπότε $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (\qquad) \geq \sum_{j=1}^{N} (\qquad) \geq b-\varepsilon-a$

δηλαδή $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \varepsilon \geq b-a-\varepsilon$

$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \geq b-a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) : [a\,b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\; b_j) \right\} \geq b-a$$

Άρα $\mu^*([a,b)) = b-a$ (1)

Τέλος

$$[a+\varepsilon, b) \subseteq (a,b) \subseteq (a,b] \subseteq [a,b] \subseteq [a, b+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon>0 \quad (2)$$

(3)

Από την μονοτονία του μ^* $\Rightarrow$

$$b-a-\varepsilon \le \mu^*(a,b) \le \mu^*(a,b] \le \mu^*[a,b] \le b+\varepsilon-a \quad (4)$$

$$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \quad \mu^*(a,b) = \mu^*[a,b] = \mu^*(a,b] = \mu^*[a,b) = b-a \quad (5)$$

$\blacksquare$