Μάθημα 8

Ορισμός (Καραθεοδωρή)

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **μετρήσιμο** αν-ν $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subseteq \mathbb{R}$

Η οικογένεια των μετρησίμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathfrak{M}$ και ο περιορισμός του μ^* στην οικογένεια $\mathfrak{M}$ λέγεται **μέτρο Lebesgue** & το συμβολίζουμε με μ.

$$\mu = \mu^*|_{\mathfrak{M}}$$

Παρατήρηση Αν $A, B \in \mathfrak{M}$ ξένα τότε ισχύει το $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ διότι αν θέσω $E = A \cup B$ τότε, αφού το A είναι μετρήσιμο ισχύει

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Ιδιότητες εξωτερικού μέτρου

(i) λόγω κατασκευής $\mu^*(A) \geq 0 \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}$

(ii) Το μ^* είναι μονότονο δηλ. αν $A \subseteq B$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Απόδειξη κάθε κάλυμμα του B είναι και κάλυμμα του A

άρα

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\} \supseteq \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

άρα $\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\} \leq \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\}$ (1)

(2)

$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iii) (Υποπροσθετικότητα) $\forall (A_n)_{n=1}^{\infty}$, $A_n \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει (3)

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$ (4)

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\varepsilon > 0$ και $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$, $I_{n,j}$ της μορφής $[a, b)$ (5)

(6)

ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

(θυμηθείτε $\mu^*(A_n) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j}) : A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}\right\}$) (7)

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_{n,j})$ (8)

$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon$ (9)

(10)

(iv) $\mu^*([a\ b]) = \mu^*((a\ b)) = \mu^*((a\ b]) = \mu^*([a\ b)) = b - a.$

<u>Λήμμα</u> Αν $a_j < b_j$ $\forall j = 1 \ldots N$ ώστε $[a\ b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} [a_j\ b_j)$

τότε $\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) \geq b - a$ (1

<u>Απόδ</u> Έστω τα $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_{2N}$ όλα τα σημεία a_n και b_n (1

για $n = 1 \ldots N$. (Βάζουμε τα a_n b_n στη σειρά και τα μετονομάζουμε) (1

Με τη σύμβαση $[x, x) = \emptyset$, τα $[c_n\ c_{n+1})$ είναι ξένα (1

μεταξύ τους (αφού τα $c_1, c_2, \ldots$ είναι αύξουσα) (1

6ε] 3

και καλύπτουν το $[a\, b)$. Άρα (1)

$$\sum_{n=1}^{2N-1} \ell([c_n\, c_{n+1})) \geq b-a$$ (2)

Αλλά επιπλέον ισχύει $\sum_{n=1}^{N} \ell([a_n\, b_n)) \geq \sum_{n=1}^{2N-1} \ell([c_n\, c_{n+1}))$ (3)

διότι κάθε $[c_n\, c_{n+1})$ είναι υποσύνολο κάποιου από τα $[a_n\, b_n)$ (4)

Δείχνουμε πρώτα ότι $\mu^*([a\, b)) = b-a$. (5)

(6)

Επειδή $[a\, b) \subseteq [a\, b)$

$$\mu^*([a,b)) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell([a_j\, b_j)) : [a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j) \right\} \leq \ell([a\, b)) = b-a$$ (7)

$\boxed{\text{Για το αντίστροφο}}$ για κάθε $0 < \varepsilon < b-a$ αν $[a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j)$ (8)

(9)

θα έχουμε (10)

$$[a, b-\varepsilon] \subseteq [a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j\right)$$

Από τη συμπάγεια του $[a, b-\varepsilon]$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε (11)

(12)

$$[a, b-\varepsilon) \subseteq [a, b-\varepsilon] \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \left[a_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, b_j\right)$$

Από το προηγούμενο λήμμα $\sum_{j=1}^{N} \left(b_j - a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \geq b - \varepsilon - a$ (13)

Οπότε $$\sum_{j=1}^{\infty} \left(b_j - a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \geq \sum_{j=1}^{N} \left(b_j - a_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \geq b - \varepsilon - a$$ (14)

(15)

δηλαδή $$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon \geq b - a - \varepsilon$$

(16)

$$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \geq b - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) : [a\, b) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j\, b_j) \right\} \geq b-a$$ (17)

Άρα $\mu^*([ab)) = b-a$ (1)

Τέλος

$[a+\varepsilon, b) \subseteq (a b) \subseteq (a b] \subseteq [a b] \subseteq [a, b+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$ (2)

(3)

Από την μονοτονία του μ^* $\Rightarrow$

$b-a-\varepsilon \leq \mu^*(a b) \leq \mu^*(a b] \leq \mu^*[a b] \leq b+\varepsilon-a$ (4)

$\varepsilon \to 0^+ \Rightarrow \mu^*(a b) = \mu^*[a b] = \mu^*(a b] = \mu^*[a b) = b-a$ (5)

$\blacksquare$