

Μάθημα 10

Η \mathcal{M} έχει «κλειστά» σύνολα

Ορισμός (άλγεβρα συνόλων) Μια μη κενή οικογένεια συνόλων \mathcal{A} (1)

υποσυνόλων του \mathbb{R} ονομάζεται άλγεβρα αν (2)

(i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (3)

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ (4)

Παρατήρηση Η (ii) με επαγωγή $\Rightarrow \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ (5)

[$n=2$ ισχύει — είναι η (ii)
 αν ισχύει για η σύνολα τότε αν έχουμε $n+1$ σύνολα (6)

$A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \text{ (από επαγ. υποθ)} \\ A_{n+1} \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \xrightarrow{(ii)} \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \in \mathcal{A}$ (7) (8) (9)

$\Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup A_{n+1} \in \mathcal{A}$ (10)

Επίσης αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \xrightarrow{(i)} A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{A}$ (11)

$\xrightarrow{(ii)} \bigcup_{k=1}^n A_k^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{(i)} \left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c \right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow$ (12)

$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$ (13)

Πρόταση Αν $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ (δηλ. (14)

Απόδειξη $\forall E \in \mathbb{R} \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ αφού $A \in \mathcal{M}$ (15)

$= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap A)$ (16)

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{M} \quad \square$ (17)

Πρόταση Αν $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$ (1)

Απόδειξη $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \forall E \subseteq \mathbb{R} \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ (2)

$B \in \mathcal{M}$ $\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)$ (3)

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap (A \setminus B)) + \mu^*(E \cap (B \setminus A)) \quad (4)$$

υποπροσδετ.

$$\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap ((A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \quad (5)$$

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap ((A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A))) \quad (6)$$

$$= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap (A \cup B)) \quad (7)$$

Διλαδή καταλήξαμε στην

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \quad (8)$$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M} \quad \blacksquare \quad (9)$$

Πόρισμα Η \mathcal{M} είναι σ -άλγεβρα. (10)

Ορισμός (σ -άλγεβρα) Μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του \mathbb{R} (11)

λεχεται σ -άλγεβρα αν (12)

$$(i) \text{ Η } A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \quad (ii) \forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}. \quad (13)$$

Πρόταση Μια αλγεβρα \mathcal{A} είναι σ -άλγεβρα αν (1)

$\forall (A_n)_{n=1}^{\infty}$ ζεύγος ανά δύο στοιχεία της \mathcal{A} (2)

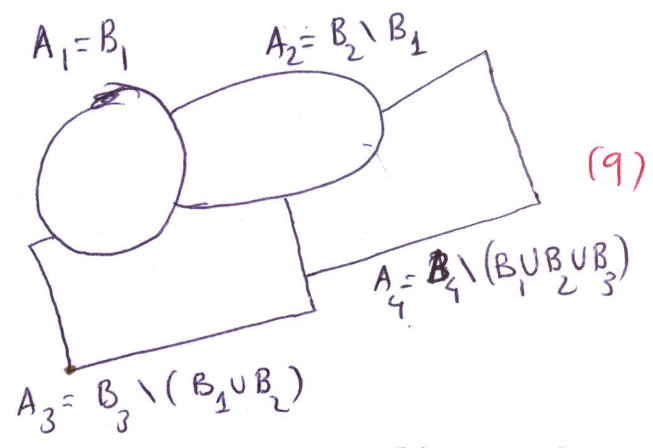
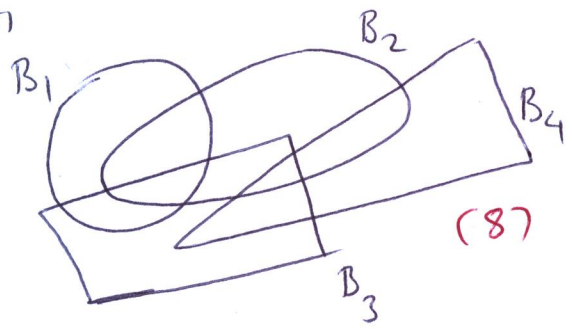
συνεπώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (3) \circledast

Απόδειξη Έστω ότι η \mathcal{A} είναι αλγεβρα η έχει (4)

η την ιδιότητα \circledast . Θα δείξουμε ότι είναι σ -άλγεβρα. (5)

Έστω $B_n \in \mathcal{A}$ (όχι απαραίτητα ζεύγος). Πρέπει να δείξουμε (6)

ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. (7)



Θετούμε $A_1 = B_1$ και $A_n = B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j$. Τα A_n είναι ζεύγος (10)

μεταξύ τους διότι αν $m > n$ (11)

(12) $A_n \subseteq B_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j$ αλλά $A_m = B_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j$ (14)

(13) \uparrow αφού $n \in \{1, \dots, m-1\}$ $\rightarrow \bigcup_{n=1}^m A_n$ (15)

$A_n \in \mathcal{A}$ διότι $A_n = B_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_j\right)^c \in \mathcal{A}$ αφού \mathcal{A} αλγεβρα. (16)

(ιδιότητα: $A \setminus B = A \cap B^c$) (17)

Αρα ανόρθω υποθέσμε \circledast $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, αλλά $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ (18)

διότι η $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ είναι προφανής γιατί $A_n \subseteq B_n$ (19)

η $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ~~είναι~~ \Rightarrow το x ανήκει σε τουλάχιστον (20)

Ένα από τα B_n . Έστω n_0 ο πρώτος δείκτης ώστε (1)

$x \in B_{n_0}$ $\Leftrightarrow x \notin B_j \quad \forall j < n_0$. Συνεπώς (2)

$$x \in B_{n_0} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0-1} B_j = A_{n_0} \subseteq \bigcup_1^{\infty} A_n \quad (3)$$

Διότι $\bigcup_1^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_1^{\infty} A_n \quad \Leftrightarrow \bigcup_1^{\infty} B_n = \bigcup_1^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \quad \square \quad (4)$