Μάθημα 10

Η $\mathcal{M}$ έχει «πολλά» σύνολα

Ορισμός (άλγεβρα συνόλων) Μια μη κενή οικογένεια συνόλων $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ονομάζεται άλγεβρα αν

(i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Παρατήρηση Η (ii) με επαγωγή $\Rightarrow \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$

[$n=2$ ισχύει — είναι η (ii). Τότε αν έχουμε $n+1$ σύνολα αν ισχύει για n σύνολα

$$A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \quad (\text{από επαγ. υποθ}) \\ A_{n+1} \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \xRightarrow{(ii)}$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \cup A_{n+1} \in \mathcal{A}.$$]

Επίσης αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \xrightarrow{(i)} A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{A}$

$$\xRightarrow{(ii)} \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \in \mathcal{A} \xRightarrow{(i)} \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c \right)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}.$$

Πρόταση Αν $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ (δηλ.)

Απόδειξη $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ αφού $A \in \mathcal{M}$

$$= \mu^*(E \cap \qquad) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap \qquad)$$

$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{M} \qquad \blacksquare$$

Πρόταση Αν $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$ (1)

Απόδειξη $A \in \mathcal{M}$ άρα $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \mu^*(E) = \overset{\boxed{1}}{\mu^*(E\cap A)} + \overset{\boxed{2}}{\mu^*(E\cap A^c)}$ (2)

$B \in \mathcal{M}$ $\quad \underbrace{\mu^*(E\cap A\cap B) + \mu^*(E\cap A\cap B^c)}_{\boxed{1}} + \underbrace{\mu^*(E\cap A^c\cap B) + \mu^*(E\cap A^c\cap B^c)}_{\boxed{2}}$ (3)

$$= \mu^*(E\cap (A\cup B)^c) + \mu^*(E\cap (A\cap B)) + \mu^*(E\cap (A\setminus B)) + \mu^*(E\cap (B\setminus A)) \quad (4)$$

υποπροσθετ.
$$\geq \mu^*(E\cap (A\cup B)^c) + \mu^*\Big((E\cap(A\cap B)) \cup (E\cap (A\setminus B)) \cup (E\cap (B\setminus A))\Big) \quad (5)$$

$$= \mu^*(E\cap (A\cup B)^c) + \mu^*\Big(E\cap \underbrace{\big((A\cap B)\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\big)}_{=A\cup B}\Big) \quad (6)$$

$$= \mu^*(E\cap (A\cup B)^c) + \mu^*(E\cap (A\cup B)) \quad (7)$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap (A\cup B)) + \mu^*(E\cap (A\cup B)^c) \quad (8)$$

$$\Rightarrow A\cup B \in \mathcal{M} \quad \blacksquare \quad (9)$$

Πόρισμα Η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα. (10)

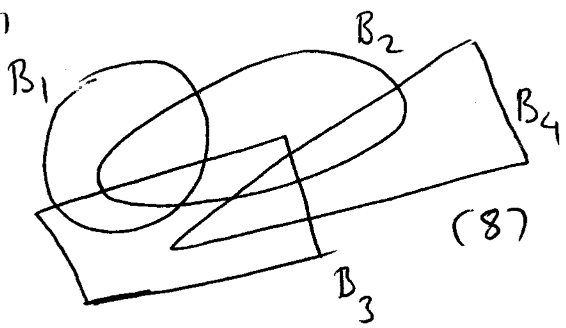
Ορισμός (σ-άλγεβρα) Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (11)
λέγεται σ-άλγεβρα αν (12)

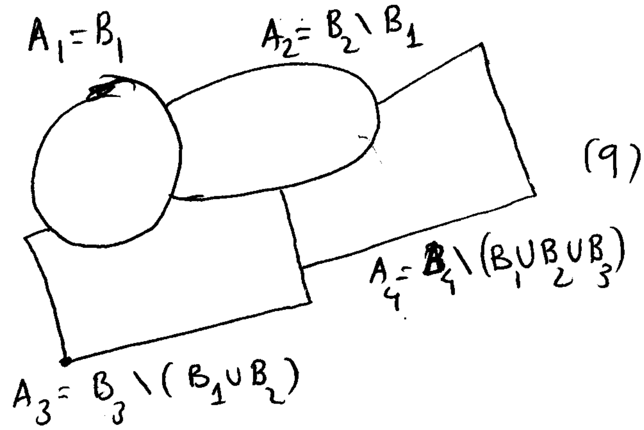
(i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ $\quad$ (ii) $\forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (13)

Πρόταση Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι κ σ-άλγεβρα αν

$$\left.\begin{array}{l} \forall (A_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ξένα ανά δύο στοιχεία της } \mathcal{A} \\ \text{συνεπάγεται } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{array}\right\} (*)$$

Απόδειξη Έστω ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα κ έχει κ την ιδιότητα (*). Θα δείξουμε ότι είναι κ σ-άλγεβρα. Έστω $B_n \in \mathcal{A}$ (όχι απαραίτητα ξένα). Πρέπει να δείξουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$.





Θέτουμε $A_1 = B_1$ και $A_n = B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j$. Τα A_n είναι ξένα μεταξύ τους διότι αν $m > n$

$$A_n \subseteq B_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j \qquad \text{αλλά} \qquad A_m = B_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} B_j$$

αφού $n \in \{1, \dots, m-1\}$; $\bigcup_{j=1}^{m-1} B_j \supseteq A_n$, άρα $A_m \cap A_n = \emptyset$

$A_n \in \mathcal{A}$ διότι $A_n = B_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} B_j \right)^c \in \mathcal{A}$ αφού $\mathcal{A}$ άλγεβρα.

(άσκηση: $A \setminus B = A \cap B^c$)

Άρα από την υπόθεση (*) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Αλλά $\bigcup_{1}^{\infty} A_n = \bigcup_{1}^{\infty} B_n$ διότι η $\bigcup_{1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} B_n$ είναι προφανής γιατί $A_n \subseteq B_n$

κ αν $x \in \bigcup_{1}^{\infty} B_n \Rightarrow$ το x ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα B_n. Έστω n_0 ο πρώτος δείκτης ώστε (1)

$x \in B_{n_0}$ άρα $x \notin B_j$ $\forall j < n_0$. Συνεπώς (2)

$$x \in B_{n_0} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0-1} B_j = A_{n_0} \subseteq \bigcup_1^{\infty} A_n \qquad (3)$$

Δηλαδή $\bigcup_1^{\infty} B_n \subseteq \bigcup_1^{\infty} A_n$ άρα $\bigcup_1^{\infty} B_n = \bigcup_1^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ $\blacksquare$ (4)