Μάθημα 11

Θεώρημα (Καραθεοδωρή) Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα και το μέτρο Lebesgue μ είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Δηλ. αν A_n ξένα & μετρήσιμα τότε $\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) = \Sigma$

Απόδειξη Ήδη γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα. Έτσι από την προηγούμενη πρόταση αρκεί να αποδείξουμε ότι αν A_n ____ ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{M}$ τότε ______

Θέτουμε $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ και $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Φανερά $B_n \in$ ____ αφού $\mathcal{M}$ ______. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ______. Παρατηρήστε ότι $B_n \uparrow$, $B_n \subseteq B \Rightarrow B_n^c$ ____

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq$ ____ $+$ ____

Όμως $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*($ ______ $) =$

$= \mu^*(E \cap$ ___ $) + \mu^*(E \cap B$ __ $)$

$\overset{\text{επαγωγή}}{=} \mu^*(E \cap$ __ $) + \dots + \mu^*(E \cap A_1)$

Δηλαδή $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j)$

Άρα $\mu^*(E)$ ====== $\mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^{n}$ ______ $+ \mu^*(E \cap B^c)$

$n \to \infty \Rightarrow$

$\mu^*(E) \geq \Sigma$ ______ $+ \mu^*(E \cap B^c)$ (*)

$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E\cap A_j)\right) + \mu^*(E\cap B^c) =$$

$$= \mu^*\left(E\cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \mu^*(E\cap B^c)$$

$$= \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E\cap B^c) \geq \mu^*(E)$$

Άρα $B \in \mathfrak{M}$. Τέλος, στην $\circledast$ της σελ. 1 ισχύει ισότητα οπότε θέτοντας εκεί $E = B$ παίρνουμε

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B\cap A_j) + \mu^*(B\cap B^c)$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad \blacksquare$$

<u>Πρόταση</u> Κάθε διάστημα είναι μετρήσιμο.

<u>Απόδειξη</u> Αρκεί να δείξουμε ότι $[a,b) \in \mathfrak{M}$ (αφού π.χ. $(a,b) = [a,b) \cap \{a\}^c$, $[a,b] = [a,b) \cup \{b\}$ κλπ)

Θεωρούμε $E \subseteq \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap [a,b)) + \mu^*(E\cap [a,b)^c)$

Από τον ορισμό του μ^*, $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $[a_n, b_n) = I_n$: $E \subseteq$ ____

και $\sum$ ____ $\leq$ ____

Όμως $\forall n$ τα $I_n \cap [a,b)$ και $I_n \cap [a,b)^c$ είναι ____

κ εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\ell(I_n) = \mu^*(I_n) = \mu^*(I_n \cap [a,b)) + \mu^*(I_n \cap [a,b)^c)$$

διακρίνοντας περιπτώσεις. Π.χ.

αν $a_n < a < b_n < b$ τότε $\mu^*(I_n \cap [a b)) = \mu^*[a \;\_\_\_) =$ --- (1)

$\mu^*(I_n \cap [a b)^c) = \mu^*[\;\_\_\_\;) =$ ------ $\Rightarrow$ (2)

$\Rightarrow \mu^*(I_n \cap [a b)) + \mu^*(I_n \cap [a b)^c) =$ ---- $= \ell(I_n) = \mu^*(I_n)$ (3)

ομοίως αν $a < a_n < b_n < b$, $a < a_n < b < b_n$, κλπ. (4)

Αρα

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum \qquad = \sum_{1}^{\infty} \left(\mu^*(I_n \cap [a b)) + \mu^*(I_n \cap [a b)^c)\right) \quad (5)$$

$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{1}^{\infty} \qquad \right) + \mu^*\left(\qquad \right) \quad (6)$$

$$\geq \mu^*(E \cap [a b)) + \mu^*(E \cap [a b)^c) \Rightarrow [a, b) \in \mathcal{M} \quad \blacksquare \;(7)$$

Άρα η $\mathcal{M}$ περιέχει τα διαστήματα, τα σύνολα μέτρου 0 και με αυτά μέσα στην $\mathcal{M}$ μπορούμε να κάνουμε οποιεσδήποτε αριθμήσιμες συνολοθεωρητικές πράξεις.

Πρόταση Αν $A \supseteq B$ μετρήσιμα με $\mu(B) < \infty$ τότε $\mu(A \setminus B) =$ (8)

Απόδειξη $A = B \cup (\qquad) \Rightarrow \mu(A) =$ $\qquad \Rightarrow$ (9)

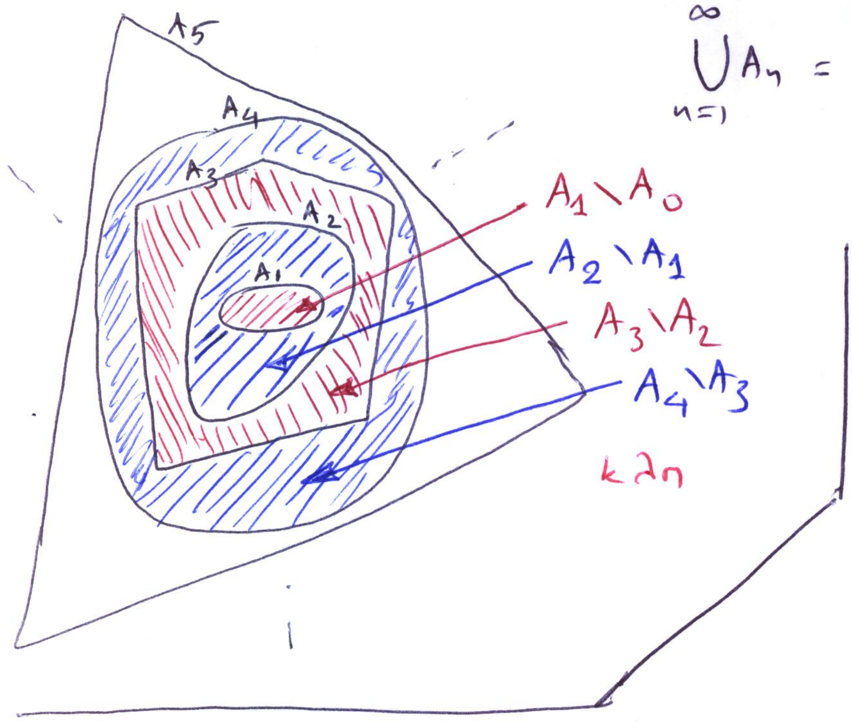
$\Longrightarrow \mu(A \setminus B) =$ $\blacksquare$ (10)

Πρόταση Αν A_n μετρήσιμα και $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$ τότε (11)

$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$ (12)

<u>Απόδειξη</u> Θέτουμε $A_0 = \emptyset$. Τότε (1)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(A_j \setminus A_{j-1})}_{\text{ξένα μεταξύ τους}} \quad (2)$$



Άρα $\mu\left(\bigcup_1^{\infty} A_n\right) =$ (3)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j-1})\right) \underset{\text{ξένα}}{\overset{A_j \setminus A_{j-1}}{=\!=}} \quad (4)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \text{--- ---} \quad (5)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \setminus A_{j-1})\right) = \quad (6)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(\qquad) \quad \blacksquare \ (7)$$