

Θεώρημα (Καραθεοδωρή) Η \mathcal{M} είναι σ -άλγεβρα (1)

και το μέτρο Lebesgue μ είναι αριθμητικά προσδετικό. (2)

Δηλ. αν A_n είναι & μετρήσιμα τότε $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n) = \sum$ (3)

Απόδειξη Ήδη γνωρίζουμε ότι η \mathcal{M} είναι άλγεβρα. Έτσι (4)

από την προηγούμενη πρόταση αρκεί να αποδείξουμε ότι (5)

αν A_n ... ανά δύο στοιχεία της \mathcal{M} τότε (6)

θετούμε $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ και $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Φανερά $B_n \in$ (7)

από \mathcal{M} ... Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι (8)

Παρατηρούμε ότι $B_n \uparrow, B_n \subseteq B \Rightarrow B_n^c$ (9)

Έστω $E \in \mathcal{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq$ + (10)

Όπως $\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(\dots) =$ (11)

$= \mu^*(E \cap \dots) + \mu^*(E \cap B \dots)$ (12)

επαγωγή $\mu^*(E \cap \dots) + \dots + \mu^*(E \cap A_1)$ (13)

Δηλαδή $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$ (14)

Άρα $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \dots + \mu^*(E \cap B_n^c)$ (15)

$n \rightarrow \infty \Rightarrow$

$\mu^*(E) \geq \sum \dots + \mu^*(E \cap B^c)$ (*) (17)

$$\geq \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j) \right) + \mu^*(E \cap B^c) = \tag{1}$$

$$= \mu^* \left(E \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) + \mu^*(E \cap B^c) \tag{2}$$

$$= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E) \tag{3}$$

Άρα $B \in \mathcal{M}$. Τέλος, στην $\textcircled{\ast}$ της σελ. 1 ισχύει $\tag{4}$

ισότητα οπότε θεωρώντας εκεί $E = B$ παίρνουμε $\tag{5}$

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_j) + \mu^*(B \cap B^c) \tag{6}$$

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \Rightarrow \mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \tag{7}$$

Πρόταση Κάθε διάστημα είναι μετρήσιμο. $\tag{8}$

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι $[a, b) \in \mathcal{M}$ (αφού π.χ. $\tag{9}$

$$[a, b) = [a, b) \cap \{a\}^c, \quad [a, b] = [a, b) \cup \{b\} \text{ κ.λπ.} \tag{10}$$

θεωρούμε $E \subseteq \mathbb{R}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap [a, b)) + \mu^*(E \cap [a, b]^c)$ $\tag{11}$

Από τον ορισμό του μ^* , $\forall \epsilon > 0 \exists [a_n, b_n) = I_n: E \subseteq \dots$ $\tag{12}$

$$\text{και } \sum \dots \leq \dots \tag{13}$$

Όμως $\forall n$ τα $I_n \cap [a, b)$ και $I_n \cap [a, b)^c$ είναι \dots $\tag{14}$

ευκόλα ελέγχουμε ότι $\tag{15}$

$$\mu(I_n) = \mu^*(I_n) = \mu^*(I_n \cap [a, b)) + \mu^*(I_n \cap [a, b)^c) \tag{16}$$

διακρίνοντας περίπτωση. π.χ. $\tag{17}$

αν $a_n < a < b_n < b$ τότε $\mu^*(I_n \cap [a,b]) = \mu^*[a, \dots] = \dots$ (1)

$\mu^*(I_n \cap [a,b]^c) = \mu^*[\dots] = \dots \Rightarrow$ (2)

$\Rightarrow \mu^*(I_n \cap [a,b]) + \mu^*(I_n \cap [a,b]^c) = \dots = \mu(I_n) = \mu^*(I_n)$ (3)

ομοίως αν $a < a_n < b_n < b$, $a < a_n < b < b_n$, κλπ. (4)

Άρα

$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum = \sum_1^\infty (\mu^*(I_n \cap [a,b]) + \mu^*(I_n \cap [a,b]^c))$ (5)

$\geq \mu^*(\bigcup_1^\infty \dots) + \mu^*(\dots)$ (6)

$\geq \mu^*(E \cap [a,b]) + \mu^*(E \cap [a,b]^c) \Rightarrow [a,b] \in \mathcal{M}$ (7)

Άρα η \mathcal{M} περιέχει τα διαστήματα, τα σύνολα μέτρου 0 και με αυτά μέσα στην \mathcal{M} μπορούμε να κάνουμε οποιαδήποτε αριθμητικές συνολοθεωρητικές πράξεις.

Πρόταση Αν $A \supseteq B$ μετρήσιμα με $\mu(B) < \infty$ τότε $\mu(A \setminus B) = \dots$ (8)

Απόδειξη $A = B \cup (\dots) \Rightarrow \mu(A) = \dots \Rightarrow$ (9)

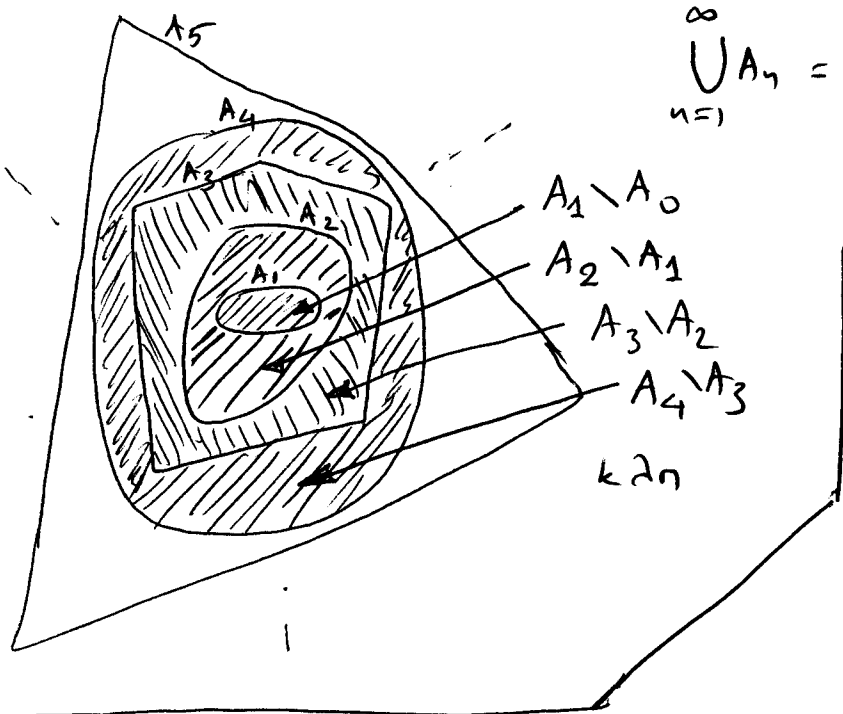
$\Rightarrow \mu(A \setminus B) = \dots$ (10)

Πρόταση Αν A_n μετρήσιμα και $A_n \subseteq A_{n+1} \forall n$ τότε (11)

$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (12)

Απόδειξη Θεώρημα $A_0 = \emptyset$. Τότε

(1)



$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j-1}) \quad (2)$$

ζεύγος μεταξύτερος

Άρα $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) =$ (3)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j-1})\right) \frac{A_j \setminus A_{j-1}}{\text{ζεύγος}} \quad (4)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \dots \quad (5)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j \setminus A_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \setminus A_{j-1})\right) = \quad (6)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\quad) \quad (7)$$