Μάθημα 12

<u>Πρόταση</u> Αν $A_n \in \mathcal{M}$ και $A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n$ και $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$\mu(A_{n_0}) < \infty$ τότε $\mu\left(\bigcap_1^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

<u>Απόδειξη</u> $\forall j > n_0$ θέτουμε $F_j = A_{n_0} \setminus A_j \uparrow$

άρα $\mu\left(\bigcup_{j=n_0+1}^{\infty} F_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$ (*)

$\mu(A_j) \le \mu(A_{n_0}) < \infty$ $\forall j > n_0$ Άρα $\mu(F_j) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_j)$ $\forall j > n$

και $\bigcup_{j=n_0+1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=n_0+1}^{\infty} (A_{n_0} \setminus A_j) \underset{\text{De Morgan}}{=} A_{n_0} \setminus \bigcap_{j=n_0+1}^{\infty} A_j \underset{A_j \text{ φθίνουσα}}{=} A_{n_0} \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$

$\Big[\bigcup_{j=n_0+1}^{\infty} (A_{n_0} \setminus A_j) = \bigcup_{n_0+1}^{\infty} (A_{n_0} \cap A_j^c) = A_{n_0} \cap \bigcup_{n_0+1}^{\infty} A_j^c \overset{DM}{=} A_{n_0} \cap \left(\bigcap_{n=n_0+1}^{\infty} A_n\right)^c$

$= A_{n_0} \setminus \bigcap_{j=n_0+1}^{\infty} A_j \Big]$

$\Big[\bigcap_1^\infty A_j \subseteq \bigcap_{n_0+1}^{\infty} A_j$ φανερό. Αν $x \in \bigcap_{n_0+1}^{\infty} A_j \Rightarrow x \in A_{n_0+1} \subseteq A_{n_0} \subseteq A_{n_0-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1$

αφού $A_n \downarrow$ άρα $x \in A_n$ $\forall n \Rightarrow x \in \bigcap_1^\infty A_n \Big]$

Συνεπώς η (*) γράφεται

$$\mu\left(A_{n_0} \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)\right)$$

$$\Rightarrow \mu(A_{n_0}) - \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\xRightarrow{\mu(A_{n_0})<\infty} \quad \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \blacksquare$$

<u>Παρατήρηση</u> Η προηγούμενη δεν ισχύει αν $\mu(A_n) = \infty$ $\forall n$ π.χ.

$A_n = (n, \infty) \downarrow$ $\lim_n \mu(A_n) = \lim_n \infty = \infty$ αλλά $\mu(\bigcap A_n) = \mu(\emptyset) = 0$

<u>Άσκηση 6.4.1</u> Η $\mathcal{A} = \{ F \subseteq \mathbb{N} : |F| < \infty$ ή $|F^c| < \infty \}$

είναι άλγεβρα αλλά όχι σ-άλγεβρα

$\Big[\ \{2n\} \in \mathcal{A} \ \forall n$ αλλά $\bigcup\limits_{1}^{\infty} \{2n\} = \{$άρτιοι$\} \notin \mathcal{A}$

άρα $\mathcal{A}$ όχι σ-άλγεβρα $\Big]$

<u>Άσκ 6.4.4</u> Έστω ότι $f : X \to Y$ ανάρτηση.

(i) Αν $\mathcal{B}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Y τότε

η $\mathcal{A} = \{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων

του X

(ii) Αν $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X τότε η

$\mathcal{B} = \{ B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$ είναι σ-άλγεβρα

υποσυνόλων του Y.

<u>Λύση</u> <u>Υπενθύμιση</u> $\forall B_n \subseteq Y$ ισχύει $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup\limits_{1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$

$f^{-1}\left(\bigcap\limits_{1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap\limits_{1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$, $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(i) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A = f^{-1}(B)$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$

$= f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$ γιατί $B^c \in \mathcal{B}$

και αν $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_n = f^{-1}(B_n)$ για κάποια $B_n \in \mathcal{B}$

αλλά η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα άρα

$\bigcup\limits_{1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup\limits_{1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{A}$

αφού $\bigcup\limits_{1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Άρα $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα

Ομοίως το (ii) (άσκηση) (1)

Άσκηση 6.4.5 Αν η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα, τα (2)
ακόλουθα είναι ισοδύναμα (3)

(i) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (4)

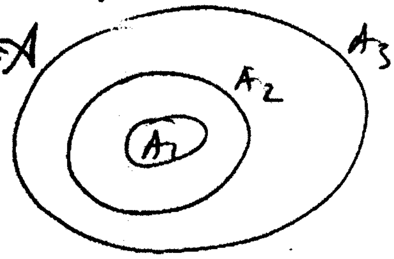
(ii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και ξένα μεταξύ τους τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (5)

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (6)

Λύση (i) $\Rightarrow$ (ii) προφανές (7)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω ότι $A_n \uparrow$ στην $\mathcal{A}$ πρέπει να δείξουμε (8)
ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Θέτουμε $B_1 = A_1$ $B_2 = A_2 \setminus A_1$ $B_3 = A_3 \setminus A_2$ ... (9)

Αυτά είναι ξένα μεταξύ τους, και ανήκουν στην $\mathcal{A}$ (10)



άρα αφού ισχύει το (ii) $\Rightarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$ (11)

Αλλά $\bigcup_{1}^{\infty} B_n = \bigcup_{1}^{\infty} A_n$. Οπότε $\bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (12)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Αν $A_n \in \mathcal{A}$ θέτουμε $B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$, $B_n \uparrow$ (13)

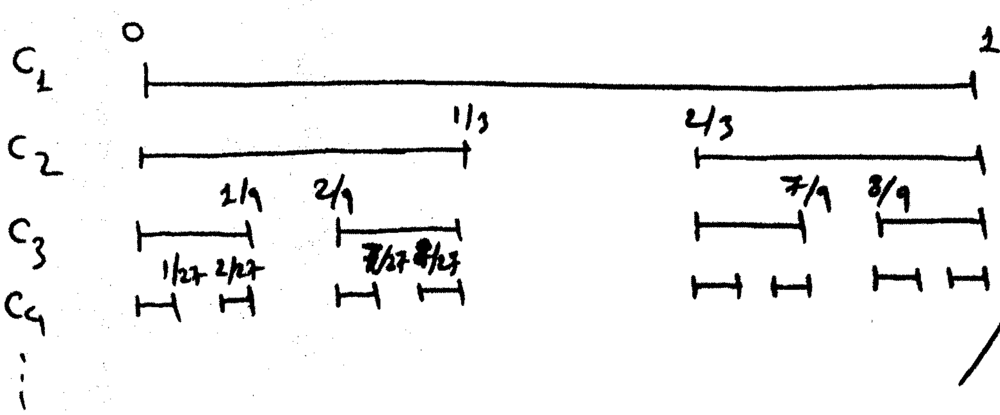
άρα αφού ισχύει το (iii) $\Rightarrow$ $\bigcup B_n \in \mathcal{A}$. Αλλά $\bigcup_{1}^{\infty} B_n = \bigcup_{1}^{\infty} A_n$ (14)

άρα $\bigcup_{1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ (15)

Το σύνολο [redacted] Cantor

Το σύνολο Cantor είναι το σύνολο C που προκύπτει ως εξής (16)

Θέτουμε $C_1 = [0, 1]$, $C_2 = C_1 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $C_3 = C_2 \setminus \left((\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}) \cup (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}) \right)$ (17)
κλπ



Θέτουμε $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ (18)

Άσκηση 6.4.9 Δείξτε ότι το σύνολο Cantor C είναι μετρήσιμο και $\mu(C)=0$

Λύση

Κάθε C_n αποτελείται από 2^{n-1} διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n-1}}$ το καθένα. Άρα $\mu(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. Τα C_n φθίνουν, $\mu(C_1)=1<\infty$

άρα $\mu(C) = \mu\left(\bigcap_1^\infty C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(Τα C_n είναι στην $\mathcal{M}$ ως πεπερασμένη ένωση διαστημάτων. Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα άρα $C = \bigcap_1^\infty C_n \in \mathcal{M}$)

Εναλλακτικά μπορούμε να προσθέσουμε τα μήκη διαστημάτων που αφαιρούμε. Να πούμε δηλαδή ότι $\mu(C) = \mu\left([0,1] \setminus \left(\left(\frac13, \frac23\right) \cup \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right) \cup \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right) \cup \dots\right)\right)$

$$= 1 - \left(\frac13 + 2\cdot\frac{1}{3^2} + 2^2\cdot\frac{1}{3^3} + \dots\right) =$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\frac{1}{3^n} = 1 - \frac12 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac23\right)^n =$$

$$= 1 - \frac12 \frac{2/3}{1-2/3} = 1 - \frac12 \frac{2/3}{1/3} = 1 - 1 = 0 \quad \blacksquare$$