Μάθημα 13ο

Άσκηση 6.4.2 $X \neq \emptyset$

Αν $\mathcal{A}$ οικογένεια αλγεβρών υποσυνόλων του X τότε η $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ είναι άλγεβρα. Ομοίως για σ-άλγεβρες

Λύση Λύνουμε την άσκηση για σ-άλγεβρες: Έστω ότι $\mathcal{A}$ οικογένεια σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X και

$$\mathcal{B} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A .$$

Αν $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B \in A \quad \forall A \in \mathcal{A} \\ \text{Αλλα } A \text{ σ-άλγεβρα} \end{array}\right\} \Rightarrow B^c \in A \quad \forall A$

άρα $B^c \in \mathcal{B}$

Αν $B_n \in \mathcal{B}$ για $n = 1, 2, \ldots$ $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_n \in A \quad \forall A \in \mathcal{A} \\ A \text{ σ-άλγεβρα} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in A \quad \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$$

Άρα $\mathcal{B}$ σ-άλγεβρα.

Ορισμός Αν S οικογένεια υποσυνόλων του X.

Η $\sigma(S) = \bigcap \{A : A \text{ σ-άλγεβρα} \supseteq S\}$ είναι μια σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια S και μάλιστα είναι η ελάχιστη με αυτή την ιδιότητα

Η $\sigma(S)$ λέγεται η σ-άλγεβρα που παράγει η S

Αν (X, d) μετρικός χώρος και $\mathcal{O}$ το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X η $\sigma(\mathcal{O})$, δηλαδή η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα ονομάζεται Borel σ-άλγεβρα και συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$.

<u>Ασκηση 6.4.13</u> (Λήμμα Borel–Cantelli)

Αν $E_n \in \mathcal{M}$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty \Longrightarrow \mu(\limsup E_n) = 0$

όπου $\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m \right)$

<u>Λύση</u> Αν θέσουμε $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m$ τότε $A_n \downarrow$ και

$$\mu(A_1) = \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_m\right) \overset{\text{υποπρ.}}{\leq} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) < \infty$$

Άρα $$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \overset{\text{υποπρ.}}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(E_m)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) - \sum_{m=1}^{n-1} \mu(E_m) \right) = 0 \quad ■$$

<u>Ασκηση 6.1.5</u> Δίνονται ανοικτά διαστήματα $I_1, \dots, I_n$. Δείξτε ότι αν το $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$ περιέχει το $\mathbb{Q} \cap [0\ 1]$ τότε $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) \geq 1$

<u>Λύση</u> Αν $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \ell(\overline{I}_i) < 1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \mu(\overline{I}_i) < 1 \xRightarrow{\text{υποπροσθ}} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i\right) < 1$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (\overline{I}_i \cap [0\ 1])\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i\right) < 1.$$ Άρα

$\mu\left([0\ 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{I}_i \cap [0\ 1])\right) > 0$. Συνεπώς το

$[0\ 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{I}_i \cap [0\ 1])$ είναι μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του $[0\ 1]$. Άρα περιέχει ρητό, άτοπο ■

Άσκηση (α) Το εξωτερικό μέτρο μ^* είναι αναλλοίωτο στις μετατοπίσεις. Δηλαδή $\forall E \subseteq \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ αν $E+x = \{y+x : y \in E\}$ τότε $\mu^*(E+x)=\mu^*(E)$

(β) $\forall A \in \mathfrak{M}$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A+x \in \mathfrak{M}$ & $\mu(A+x)=\mu(A)$

Λύση (α) $\mu^*(E+x) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : I_j = [a_j, b_j) \ \& \ E+x \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$

$$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) : I_j = [a_j, b_j) \ \& \ E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j - x) \right\}$$

$$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j - x) : I_j - x = [a_j - x, b_j - x) \ \& \ E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j - x) \right\}$$

$$= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j') : I_j' = [a_j', b_j') \ \& \ E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j' \right\}$$

$A^c + x = (A+x)^c$

$$= \mu^*(E)$$

(β) $\mu^*(E \cap (A+x)) + \mu^*(E \cap (A+x)^c) = \mu^*(((E-x) \cap A)+x) + \mu^*(((E-x) \cap A^c)+x)$

$$\overset{(\alpha)}{=} \mu^*((E-x) \cap A) + \mu^*((E-x) \cap A^c) \overset{A \in \mathfrak{M}}{=} \mu^*(E-x) = \mu^*(E)$$

$\Rightarrow A+x \in \mathfrak{M}$

Πρόταση Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) A μετρήσιμο (ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ G ανοικτό $\supseteq A$ με $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$

(iii) $\exists$ G_δ σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\mu^*(G \setminus A) = 0$

Απόδειξη (i)⇒(ii) Δείξαμε στην Ασκ. 6.2.2 ότι $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό} \supseteq A\}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ U ανοικτό $\supseteq A$ ώστε $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$

Αν $\mu(A) < \infty$ τότε $\mu(U) - \mu(A) < \varepsilon \Rightarrow \mu(U \setminus A) < \varepsilon$

Αν $\mu(A) = \infty$ θέτω $A_n = A \cap [-n, n]$ και βρίσκω όπως πριν ανοικτό U_n ώστε $U_n \supseteq A_n$ & $\mu(U_n) < \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

Θέτουμε $U=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supseteq A$, U ανοικτό και $\mu(U\setminus A) =$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} (U_n\setminus A_n)\right) \le$$

$$\bigcup_{1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{1}^{\infty} (U_n\setminus A_n)$$ (άσκηση)

$$\le \sum_{1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Έστω G_n ανοικτό $\supseteq A$ και $\mu(G_n\setminus A) < \frac{1}{n}$

Θέτω $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ G_δ-σύνολο $\supseteq A$ και

$$\mu(G\setminus A) \le \mu(G_n\setminus A) \le \frac{1}{n} \Longrightarrow \mu(G\setminus A)=0$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Το $G\setminus A$ είναι μετρήσιμο ως σύνολο μηδενικού εξ. μέτρου

και το G είναι μετρήσιμο ως τομή ανοικτών (G_δ)

Άρα $A\in\mathcal{M}$ γιατί $A = G\setminus(G\setminus A)$ διότι $G\supseteq A$ ■

(άσκηση)