

Μάθημα 14

Πρόταση $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα (1)

(i) $A \in \mathcal{M}$ (ii) $\forall \epsilon > 0 \exists F \subseteq A, F$ κλειστό με $\mu^*(A \setminus F) < \epsilon$ (2)

(iii) υπάρχει F_σ σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\mu^*(A \setminus F) = 0$ (3)

Απόδειξη (i) \Rightarrow (ii) Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση (4)

για το \dots . Άρα \exists ανοικτό $G \supseteq A^c$ με $\mu(G \setminus A^c) < \epsilon$ (5)

Άλλα $G \supseteq A^c \Rightarrow F := \dots \subseteq A$ και (6)

$$A \setminus F = A \cap F^c = A \cap \dots = G \cap (A^c)^c = G \setminus A^c. \quad (7)$$

$$\text{Άρα } \mu^*(A \setminus F) = \dots < \epsilon \quad (8)$$

(ii) \Rightarrow (iii) Έστω ότι $F_n \in \mathcal{M}, F_n$ κλειστό με $\mu^*(A \setminus F_n) < \frac{1}{n}$ (9)

Θετίζουμε $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq A$, F είναι F_σ -σύνολο και (10)

$$\mu^*(A \setminus F) \leq \mu^*(\dots) < \frac{1}{n} \quad \forall n \Rightarrow \mu^*(A \setminus F) = 0. \quad (11)$$

(iii) \Rightarrow (i) Το $A \setminus F$ είναι μετρήσιμο ως σύνολο \dots (12)

το F είναι μετρήσιμο ως \dots (13)

Άλλα $A = F \cup (A \setminus F)$ διότι $F \subseteq A$. (14)

Άρα $A \in \mathcal{M}$. (15)

Άσκηση 6.4.14 | Δεν υπάρχει $\mu: \mathcal{P}([0,1]) \rightarrow [0, \infty]$ ώστε (16)

(i) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για $A_n \} \text{ένα } \in [0,1]$ (17)

(ii) $\mu(A+x) = \mu(A) \quad \forall A \subseteq [0,1] \quad \forall x \in [0,1]$ ώστε $A+x \subseteq [0,1]$. (18)

(iii) $\mu([0,1]) = 1$. (19)

Λύση Στο $[0,1]$ ορίζουμε τη σχέση $x \sim y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$ (20)

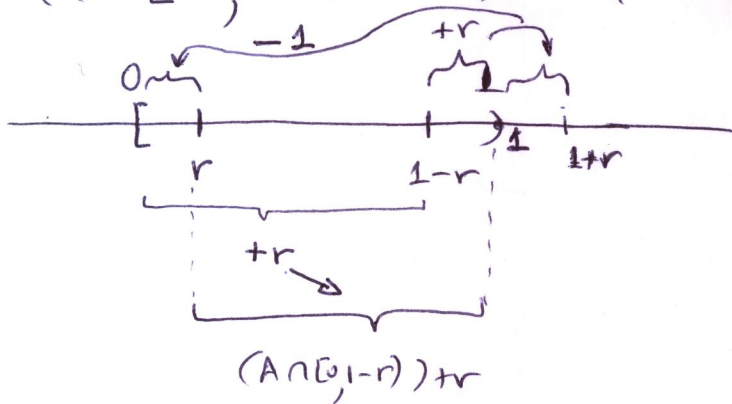
Η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας (άσκηση) (21)

Από κάθε κλάση ισοδυναμίας επιλέγουμε ένα στοιχείο και (22)

σχηματίζουμε το σύνολο $A \subseteq [0, 1)$.

$\forall r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ ορίζουμε τη μετατόπιση του A κατά $r \pmod 1$: (2)

$$A_r = ((A \cap [0, 1-r)) + r) \cup ((A \cap [1-r, 1)) + r - 1) \quad (3)$$



Άρα $A \cap [0, 1-r) + r \subseteq A_r$ & $A \cap [1-r, 1) + r - 1 \subseteq A_r$ (4)

Ισχυρισμός $\forall x \in [0, 1)$ υπάρχει ακριβώς ένα $r \in \mathbb{Q}$: $x \in A_r$. (5)

[Έστω α_x το στοιχείο της κλάσης ισοδυναμίας $[x]$ του x που περιέχεται στο A . Δηλαδή $\{\alpha_x\} = A \cap [x]$. (6)

Άρα $\alpha_x \in [x] \Rightarrow \alpha_x - r \in \mathbb{Q}$ (7)

Περίπτωση 1 Αν $x \geq \alpha_x$ θεωρ $r = x - \alpha_x \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (8)

$\Rightarrow \alpha_x = x - r \leq 1 - r \Rightarrow \alpha_x \in A \cap [0, 1-r)$ (9)

$\Rightarrow x - r = \alpha_x \in A \cap [0, 1-r) \Rightarrow x \in (A \cap [0, 1-r)) + r \subseteq A_r$ (10)

Περίπτωση 2 Αν $x < \alpha_x \Rightarrow \alpha_x - x > 0$ & $\alpha_x - x < \alpha_x < 1$ (11)

$\Rightarrow \alpha_x - x \in (0, 1) \Rightarrow x - \alpha_x \in (-1, 0) \Rightarrow x - \alpha_x + 1 \in (0, 1)$ (12)

Θεωρ $r = x - \alpha_x + 1 \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ (13)

$\Rightarrow \alpha_x = x - r + 1 \geq 1 - r \Rightarrow \alpha_x \in A \cap [1-r, 1)$ (14)

$\Rightarrow x - r + 1 \in A \cap [1-r, 1) \Rightarrow$ (15)

$\Rightarrow x \in (A \cap [1-r, 1)) + 1 - r \subseteq A_r$ (16)

To r αυτό είναι μοναδικό : Αν $\exists r' \in \mathbb{Q}$ ώστε $x \in A_{r'}$ (1)

Τότε είτε $x = \alpha'_x + r'$ με $0 \leq \alpha'_x < 1 - r'$ (2)

είτε $x = \alpha'_x + r' - 1$ με $1 - r' \leq \alpha'_x < 1$ (3)

Ενώ έχουμε ήδη για το r ότι είτε $x = \alpha_x + r$ με $0 \leq \alpha_x < 1 - r$ (4)

είτε $x = \alpha_x + r - 1$ με $1 - r \leq \alpha_x < 1$ (5)

Ο περίπτωσης $x = \alpha_x + r = \alpha'_x + r' - 1$ ή $x = \alpha_x + r - 1 = \alpha'_x + r'$ (6)

οδηγούν σε άτοπο : πχ αν $x = \alpha_x + r = \alpha'_x + r' - 1$ (7)

$\Rightarrow \alpha_x \sim x \sim \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x = \alpha'_x$ (γιατί το A ----- (8)

-----) (9)

Αν $r = r' - 1 \Rightarrow 1 = r' - r < 1$ άτοπο, γιατί (10)

$r, r' \in [0, 1)$ (δύο διακεκομμένες η η 24, του σελ. 2) (11)

Αν $x = r + \alpha_x = r' + \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x \sim x \sim \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x = \alpha'_x$ (12)

$\Rightarrow r = r'$ (13)

Αν $x = r + \alpha_x - 1 = r' + \alpha'_x - 1 \Rightarrow r + \alpha_x = r' + \alpha'_x$ (14)

$\Rightarrow r = r'$ (15)

$\mu(A_r) = \mu(A)$ διότι (16)

$\mu(A_r) = \mu((A \cap [0, 1-r)) + r \cup (A \cap [1-r, 1)) + r - 1)$ (17)

$\stackrel{(i)}{=} \mu((A \cap [0, 1-r)) + r) + \mu((A \cap [1-r, 1)) + r - 1)$ (18)

$\stackrel{(ii)}{=} \mu(A \cap [0, 1-r)) + \mu(A \cap [1-r, 1)) \stackrel{(i)}{=} \mu(A)$ (19)

(iii) $1 = \mu([0, 1]) = \mu\left(\bigcup_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} A_r\right) = \sum_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \mu(A_r)$ (1)

$$= \sum_{r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \mu(A) = \begin{cases} \infty & \text{αν } \mu(A) > 0 \\ 0 & \text{αν } \mu(A) = 0 \end{cases}$$
 (2)

(3)

σε κάθε περίπτωση έχουμε άτοπο □ (4)

Άσκηση 6.4.15 Υπάρχει μη τελερικό υποσύνολο του \mathbb{R} . (5)

Το A ως προηγούμενος άξιος δεν είναι τελερικό. (6)

Διότι αν $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{M}$ & $\mu(A \cap \mathbb{R}) = \mu(A)$ (7)

ενώ το μ είναι προσδετικό στο \mathcal{M} & ισχύει $\mu([0, 1]) = 1$ (8)

Αυτί όπως είδατε ότι δεν μπορεί να συμβαίνει (9)

από $A \notin \mathcal{M}$ (10)

Συνεπώς $\exists E \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\mu^*(E) < \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ (11)

Θετουμε $C = E \cap A$ $D = E \cap A^c \Rightarrow E = C \cup D$ (12)

οπότε ισχύει C, D ξ εν \mathcal{M} (13)

$$\mu^*(C \cup D) < \mu^*(C) + \mu^*(D)$$
 □ (14)