

# Μάθημα 16

Θεώρημα Η  $f$  είναι μετρήσιμη αν  $-v$  μια από τις ακόλουθες (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, +\infty) = \dots$  (6)

και  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty] = \dots$  . Οπότε (7)

$$\{x : f(x) \geq a\} = f^{-1}(\dots) = f^{-1}(\dots) \quad (8)$$

$$= \bigcap f^{-1}(\dots) = \bigcap \{x : f(x) > a - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M} \quad (9)$$

Αυτός αποδεικνύει το «μετρήσιμη  $\Rightarrow$  (i)». (10)

$$(i) \Rightarrow (ii) \quad \{x : f(x) < a\} = \{x : f(x) \geq a\}^c \in \mathcal{M} \quad (11)$$

$$(ii) \Rightarrow (iii) \quad \{x : f(x) \leq a\} = f^{-1}(\dots) = \dots \quad (12)$$

$$= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, a + \frac{1}{n})\right) = \dots \quad \text{(αόρατα όρια (13) με το προηγούμενο)}$$

$$(iii) \Rightarrow f \text{ μετρήσιμη} : \quad \{x : f(x) > a\} = \{x : f(x) \leq a\}^c \in \mathcal{M} \quad (14)$$



Ορισμός Στο  $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  κάνουμε τη σύμβαση (15)

$$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0 \quad (16)$$

Οι πράξεις  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$ ,  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $(-\infty) + (+\infty)$  (17)

παραμένουν απροσδιόριστες, καθώς και η διαίρεση με το μηδέν (18)

Έτσι οι  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f/g$  δεν ορίζονται πάντα (19)

$o.c \quad f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \quad f_+ = \max\{f, 0\} \quad f_- = \min\{f, 0\} \quad (1)$

$|f|$  ορίζεται πάντα.

Λήμμα  
Αν  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  μετρήσιμη τότε  $\forall a \in \mathbb{R}$  το  $f^{-1}(\{a\}) =$  (2)

$= \{x : f(x) = a\}$  είναι μετρήσιμο (3)

Απόδειξη Αν  $a \in \mathbb{R}$ , τα  $\{x : f(x) \geq a\}$  &  $\{x : f(x) \leq a\}$  (4)

είναι μετρήσιμα άρα  $\{x : f(x) = a\} = \cap \in \mathcal{M}$  (5)

Αν  $a = +\infty$  τότε  $\{x : f(x) = a\} = \{x : f(x) = +\infty\}$  (6)

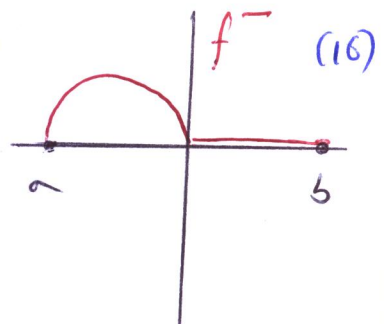
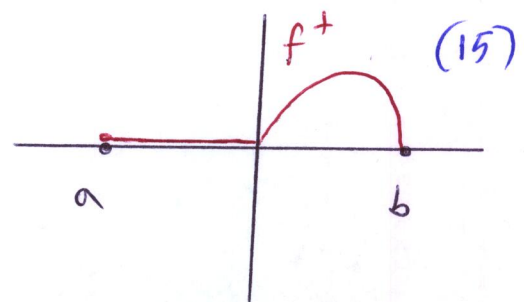
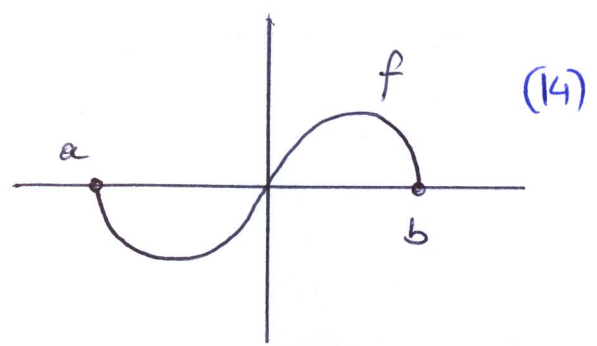
$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq n\} \in \mathcal{M}$  (7)

Αν  $a = -\infty$  τότε  $\{x : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \leq -n\} \in \mathcal{M}$  (8)

Ορισμός  $\forall f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζουμε τις  $f^+, f^- : A \rightarrow [0, \infty)$  (9)

$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$  (10)

$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} -f(x) & \text{αν } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{αν } f(x) > 0 \end{cases}$  (11)



Φανερά  $f = f^+ - f^-$  &  $|f| = f^+ + f^-$  (12)

$f^+$  «δεξιά μέρος» της  $f$  &  $f^-$  «αριστερά μέρος» της  $f$  (13)

Επιπλέον  $\frac{f+|f|}{2} = f^+$   $\hookrightarrow$   $\frac{|f|-f}{2} = f^-$  (1)

Θεώρημα Αν  $f, g$  μετρήσιμες  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  τότε οι συναρτήσεις (2)

(i)  $f+g$  (ii)  $\lambda f$  (iii)  $f^2, |f|$  (iv)  $f \cdot g$  (v)  $\max\{f, g\}$  (3)

(vi)  $\min\{f, g\}$  (vii)  $f^+, f^-$  (4)

είναι όλες μετρήσιμες (5)

Απόδειξη (i) Ισχυρισμός  $f(x)+g(x) > a \iff \exists r \in \mathbb{Q}$  ώστε (6)

$f(x) > r, g(x) > a-r$  (7)

[ $\Leftarrow$ ] προφανώς από  $f(x)+g(x) > r+(a-r) = a$  (8)

$\Rightarrow$  Αν  $f(x)+g(x) > a \Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq -\infty \\ g(x) \neq -\infty \end{cases}$  (9)

Αρα  $f(x) > a - g(x) \Rightarrow \exists$  πρώτος  $r$  ανάμεσα: (11)

$f(x) > r > a - g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > r \\ g(x) > a-r \end{cases}$  (12) (13)

Συνεπώς  $\{x: (f+g)(x) > a\} = \left( \{x: f(x) > r\} \cap \{x: g(x) > a-r\} \right) \in \mathcal{M}$  (14) (15)

(ii) Αν  $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0$  μετρήσιμη (16)

Αν  $\lambda > 0 \Rightarrow \{x: (\lambda f)(x) > a\} = \dots \in \mathcal{M}$  (17)

Αν  $\lambda < 0 \Rightarrow \{x: (\lambda f)(x) > a\} \dots \in \mathcal{M}$  (18)

(iii)  $\{x: (f(x))^2 > a\} = \begin{cases} \text{αν } a < 0 \\ \text{αν } a = 0 \end{cases} \dots \in \mathcal{M}$  (19) (20) (21)

οποίως για την  $|f|$  αν  $a > 0$  (22) (23)



(iv) Θερω  $B_1 = \{x : f(x) = +\infty\} \cap \{x : g(x) = -\infty\}$  (1)

$B_2 = \{x : f(x) = -\infty\} \cap \{x : g(x) = +\infty\}$  (2)

$B_3 = \{x : f(x) = +\infty\} \cap \{x : g(x) = +\infty\}$  (3)

$B_4 = \{x : f(x) = -\infty\} \cap \{x : g(x) = -\infty\}$  (4)

$B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathcal{M} \implies B := B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \in \mathcal{M} \implies A \setminus B \in \mathcal{M}$  (5)

Θερω  $f_1 = f|_{A \setminus B}$   $g_1 = g|_{A \setminus B}$  τότε  $f_1, g_1$  μετρήσιμα (6)

$f_1 g_1 = \frac{1}{2} ((f_1 + g_1)^2 - f_1^2 - g_1^2)$  (7)

[⊕  $\{x \in A \setminus B : f_1(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \setminus B \in \mathcal{M}$ ] (8)

(9)

Αρα  $f_1, g_1$  μετρήσιμα

Τέλος  $\{x \in A : (fg)(x) > a\} = \{x \in A \setminus B : (f_1 g_1)(x) > a\} \cup B_3 \cup B_4 \in \mathcal{M}$  (10)

(11)

Αρα  $fg$  μετρήσιμα

(v)  $\{x : \max\{f, g\}(x) > a\} = \{ \} \cup \{ \}$  (12)

$\in \mathcal{M}$  (13)

$\{x : \min\{f, g\}(x) > a\} = \{ \} \cap \{ \}$  (14)

$\in \mathcal{M}$  (15)

(vi) ομοίως με το (v).

(16)