Μάθημα 16

Θεώρημα Η f είναι μετρήσιμη αν-ν μια από τις ακόλουθες ισχύει

(i) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, +\infty] = \_\_\_\_$

και $\bigcap_{n=1}^{\infty} (a-\frac{1}{n}, +\infty] = \_\_\_\_$. Οπότε

$$\{x : f(x) \geq a\} = f^{-1}(\_\_\_\_) = f^{-1}(\_\_\_\_)$$

$$= \bigcap f^{-1}(\_\_\_\_) = \bigcap \{x : f(x) > a - \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{M}$$

Αυτό αποδεικνύει το «μετρήσιμη $\Rightarrow$ (i)».

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\{x : f(x) < a\} = \{x : f(x) \geq a\}^c \in \mathcal{M}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\{x : f(x) \leq a\} = f^{-1}(\_\_\_\_) =$

$$= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, a+\tfrac{1}{n})\right) = \ldots\ldots$$ (άσκηση όμοια με το προηγούμενο)

(iii) $\Rightarrow$ f μετρήσιμη : $\{x : f(x) > a\} = \{x : f(x) \leq a\}^c \in \mathcal{M}$ ■

Ορισμός Στο $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ κάνουμε τη σύμβαση

$$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$$

Οι πράξεις $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$ παραμένουν απροσδιόριστες, καθώς και η διαίρεση με το μηδέν. Έτσι οι $f+g$, $f-g$, f/g δεν ορίζονται πάντα.

οι $f\cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ $\quad f_+=\max\{f,0\}$ $\quad f_-=\min\{f,0\}$ (1)

κ $|f|$ ορίζονται πάντα. (2)

~~Λήμμα~~

Αν $f: A\longrightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη τότε $\forall a\in\tilde{\mathbb{R}}$ το $f^{-1}(\{a\})=$ (3)

$=\{x : f(x)=a\}$ είναι μετρήσιμο (4)

Απόδειξη Αν $a\in\mathbb{R}$, τα $\{x: f(x)\geq a\}$ κ $\{x: f(x)\leq a\}$ (5)

είναι μετρήσιμα άρα $\{x: f(x)=a\}= \qquad \cap \qquad \in\mathcal{M}$ (6)

Αν $a=+\infty$ τότε $\{x: f(x)=a\}=$ $\in$? (7)

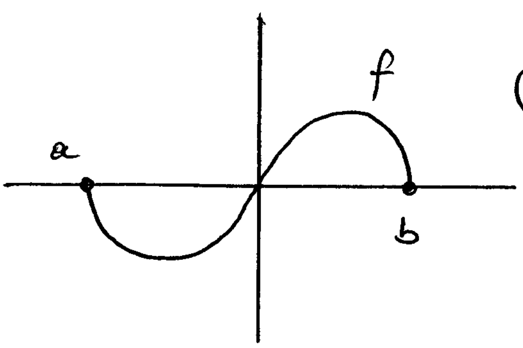
$=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \qquad \in\mathcal{M}$

Αν $a=-\infty$ τότε $\{x: f(x)=-\infty\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \qquad \in\mathcal{M}$ (8)

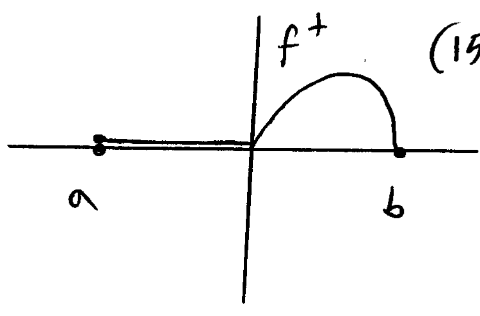
Ορισμός $\forall f: A\longrightarrow\mathbb{R}$ ορίζουμε τις $f^+, f^- : A\longrightarrow[0,\infty)$ (9)

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x)\geq 0 \quad (10)\\ 0 & \text{αν } f(x)<0 \quad (11)\end{cases}$$

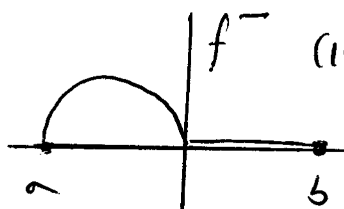
$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}=\begin{cases} -f(x) & \text{αν } f(x)\leq 0 \quad (12)\\ 0 & \text{αν } f(x)>0 \quad (13)\end{cases}$$



(14)



(15)



(16)

Φανερά $f=f^+-f^-$ κ $|f|=f^++f^-$ (17)

f^+ «θετικό μέρος» της f κ f^- «αρνητικό μέρος» της f (18)

Επιπλέον $\dfrac{f+|f|}{2} = f^+$ και $\dfrac{|f|-f}{2} = f^-$ (1)

Θεώρημα Αν f, g μετρήσιμες ($f,g: A \to \mathbb{R}$) και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις (2)

(i) $f+g$ (ii) λf (iii) f^2, $|f|$ (iv) fg (v) $\max\{f,g\}$ (3)
(4)
(vi) $\min\{f,g\}$ (vii) f^+, f^-

είναι όλες μετρήσιμες (5)

Απόδειξη (i) Ισχυρισμός $f(x)+g(x) > a \iff \exists\, r \in \mathbb{Q}$ ώστε (6)

$f(x) > r,\ g(x) > a-r$ (7)

["$\Leftarrow$" προφανώς αφού $f(x)+g(x) > r + (a-r) = a$ (8)

"$\Rightarrow$" Αφού $f(x)+g(x) > a \Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq -\infty \\ g(x) \neq -\infty \end{cases}$ (9) (10)

Άρα $f(x) > a - g(x) \Rightarrow \exists$ ρητός r ανάμεσα: (11)

(12)

$f(x) > r > a - g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > r \\ g(x) > a-r \end{cases}$] (13)

Συνεπώς $\{x : (f+g)(x) > a\} = \left(\{x: f(x)>r\} \cap \{x: g(x) > a-r\}\right)$ (14)

$\in \mathcal{M}$ (15)

(ii) Αν $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda f = 0$ μετρήσιμη (16)

Αν $\lambda > 0 \Rightarrow \{x : (\lambda f)(x) > a\} =$ $\in \mathcal{M}$ (17)

Αν $\lambda < 0 \Rightarrow \{x : (\lambda f)(x) > a\}$ $\in \mathcal{M}$ (18)

(iii) $\{x : (f(x))^2 > a\} = \begin{cases} & \text{αν } a < 0 \\ & \text{αν } a = 0 \\ & \\ & \text{αν } a > 0 \end{cases}$ $\in \mathcal{M}$ (19) (20) (21) (22)

Ομοίως για την $|f|$ (23)

(iv) Θέτω $B_1=\{x : f(x)=+\infty\}\cap\{x: g(x)=-\infty\}$

$B_2=\{x: f(x)=-\infty\}\cap\{x: g(x)=+\infty\}$

$B_3=\{x: f(x)=+\infty\}\cap\{x: g(x)=+\infty\}$

$B_4=\{x: f(x)=-\infty\}\cap\{x: g(x)=-\infty\}$

$B_1, B_2, B_3, B_4\in\mathcal{M}$ ↳ $B:=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\in\mathcal{M} \Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{M}$

Θέτω $f_1=f|_{A\setminus B}$ $g_1=g|_{A\setminus B}$ τότε f_1, g_1 μετρήσιμες (⊛)

$$f_1 g_1=\frac{1}{2}\left((f_1+g_1)^2-f_1^2-g_1^2\right)$$

[⊛ $\{x\in A\setminus B: f_1(x)>a\}=\{x\in A: f(x)>a\}\setminus B \in\mathcal{M}$]

Άρα $f_1\cdot g_1$ μετρήσιμη

Τέλος $\{x\in A: (fg)(x)>a\}=\{x\in A\setminus B: (f_1 g_1)(x)>a\}\cup B_3\cup B_4\in\mathcal{M}$

Άρα fg μετρήσιμη

(v) $\{x: \max\{f,g\}(x)>a\}=\{\quad\}\cup\{\quad\}$

$\in\mathcal{M}$

$\{x: \min\{f,g\}(x)>a\}=\quad\cap$

$\in\mathcal{M}$

(vi) όμοια με το (v).