Μάθημα 17

<u>Θεώρημα</u> Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού κ τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$ τότε και οι $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες

<u>Απόδειξη</u> $\{x : \sup_n f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \qquad \in \mathcal{M}$

$\{x : \inf_n f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \qquad \in \mathcal{M}$

$$\liminf_n f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{n\geq m} f_n\right) \quad \underline{\underline{\left(\inf_{n\geq m} f_n\right)_{m=1}^{\infty} \uparrow}} \quad \text{μετρ.}$$

$$\text{Ομοίως } \limsup_n f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} f_n\right) \quad \underline{\underline{\left(\sup_{n\geq m} f_n\right) \downarrow}} \quad \text{μετρ.}$$

<u>Ορισμός</u> Θα λέμε ότι μιά ιδιότητα $p(x)$ για $x\in A$, $A\in\mathcal{M}$ ισχύει **σχεδόν παντού** και θα γράφουμε «$p(x)$ σ.π.» αν

$\mu\{x : \neg p(x)\} = 0$.

Πχ. Αν $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες τότε η φράση «$f=g$ σ.π.» σημαίνει $\mu\{x\in A : f(x)\neq g(x)\} = 0$. Λέμε ότι η f κ g είναι σχεδόν παντού ίσες

Πχ. $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες, τότε η φράση «$f>g$ σ.π.» σημαίνει

$\mu \qquad\qquad = 0$.

<u>Πρόταση</u> Αν $f=g$ σ.π. και f μετρήσιμη τότε g μετρήσιμη

<u>Απόδειξη</u> (απλούστερη από το βιβλίο). Θέτουμε $E=\{x : f(x)=g(x)\}$.
$\mu(E^c) = 0$ αφού $f=g$ σ.π. άρα $E\in\mathcal{M}$.

$$\{x : g(x) > a\} = \underbrace{\{x\in E : g(x) > a\}}_{\|} \cup \underbrace{\{\qquad\qquad\qquad\}}_{\subseteq E^c \text{ άρα εξ. μέτρου } 0 \text{ άρα ανήκει στην } \mathfrak{M}}$$

$$\{x\in E : f(x)>a\} = \{x : f(x)>a\}\cap E \in \mathfrak{M} \quad \blacksquare$$

<u>Πόρισμα</u> Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού & τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$, και η f έχει το ίδιο πεδίο ορισμού & $f_n \longrightarrow f$ σ.π. Τότε και η f είναι μετρήσιμη

<u>Απόδειξη</u> Το $\limsup_n f_n(x)$ υπάρχει πάντα στο $\tilde{\mathbb{R}}$ και ορίζει μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αλλά $\limsup_n f_n(x) = f(x)$ σ.π. Άρα f μετρήσιμη.

<u>Άσκηση 7.2.1</u> $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη & $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g\circ f$ μετρήσιμη

<u>Λύση</u> $(g\circ f)^{-1}(a\ \infty) = \quad (\quad (a\ \infty))$. Αφού

g συνεχής $\Rightarrow g^{-1}(a\ \infty)$ ____ Άρα υπάρχουν ξένα (a_n, b_n) διαστήματα $n=1,2,\dots$ ώστε $g^{-1}(a\ \infty) = \bigcup_1^{\infty}(a_n\ b_n)$

Άρα $f^{-1}(g^{-1}(a\ b)) = \qquad\qquad = \bigcup_{n=1}^{\infty}$

$$= \bigcup_1^{\infty} f^{-1}(\qquad \infty]\setminus \qquad \infty]) = \bigcup_1^{\infty}(\qquad\qquad)$$

$\in \mathfrak{M}$ $\quad (f^{-1}(a_n\ \infty]\setminus f^{-1}[b_n\ \infty] = \{x\ f(x)>a_n\}\setminus\{x : f(x)\geq b_n\})$

<u>Παρατήρηση</u> Η σύνθεση μετρησίμων <u>ΔΕΝ</u> είναι απαραίτητα μετρήσιμη διότι ο ορισμός της μετρησιμότητας είναι $f^{-1}(a\ \infty]\in\mathfrak{M}$ και άρα $f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})\subseteq\mathfrak{M}$. Όμως δεν ξέρουμε ότι $g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})\subseteq\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ για να συμπεράνουμε $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}))\subseteq\mathfrak{M}$

Άσκηση 7.2.2 Αν $f:\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$ & $f^{-1}((r,\infty])\in\mathcal{M}$ $\forall r\in\mathbb{Q}$
τότε f μετρήσιμη

Λύση Έστω $r_n \to a^+$ $r_n\in\mathbb{Q}$ (π.χ. $r_n =$ ———) $\blacksquare$

Τότε $(a,\infty] =$

Άσκηση 7.2.3 Το $\sup f_i$, $i\in I$, με I υπεραριθμήσιμο ΔΕΝ είναι απαραίτητα μετρήσιμη ακόμα & αν όλες οι f_i είναι.

Λύση Έστω ότι το A είναι ένα ΜΗ-μετρήσιμο $\subseteq [0,1]$

$\forall i\in A$ θέτουμε $f_i(x)=\chi_{\{i\}}(x) = \begin{cases}1 & \text{αν } x=i\\ 0 & \text{αν } x\neq i\end{cases}$

Η f_i είναι μετρήσιμη (γιατί;) Αλλά

$$\sup_{i\in A} f_i(x) = \chi_A(x)$$ όχι μετρήσιμη (αφού $\{x:\chi_A(x)>\frac{1}{2}\}=A\notin\mathcal{M}$) $\blacksquare$

Άσκηση 7.2.4 Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς & $f=g$ σ.π.
$\Rightarrow f=g$

Λύση $\mu\{x: f(x)\neq g(x)\} =$ άρα αν $x\in A$

$\forall\varepsilon>0$ $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ A. Συνεπώς για $\varepsilon=\frac{1}{n}$

$\exists\ x_n\in(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n})\setminus A$. Οπότε $x_n\to$ και αφού f,g

συνεχείς $f(x)=\lim_{n\to\infty}$ $\xlongequal{x_n\notin A}$ $\lim_{n\to\infty}$ $=$ άτοπο

Άρα $A=\emptyset$ $\blacksquare$

Ασκ 7.2.5 Δώστε παράδειγμα $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ασυνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$ ώστε $f=g$ σ.π.

Λύση $f(x)=1$ $g(x)=$ $\blacksquare$

Άσκηση 7.2.6 Δείξτε ότι αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα τότε f μετρήσιμη

Λύση Αρκεί να δείξω ότι το $f^{-1}((a, \infty))$ είναι διάστημα (οπότε $\in \mathcal{M}$)

Ισχυρισμός Το $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα αν-ν $\forall x, y \in I$ αν $z \in \mathbb{R}$ με $x < z < y \Rightarrow z \in I$

["$\Rightarrow$" προφανές.
"$\Leftarrow$" Από την υπόθεση $\forall x, y \in I \Rightarrow [x, y] \subseteq I$. Θέτω $x_0 = \inf I$ και $y_0 = \sup I$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του inf & sup βρίσκουμε $x_n \downarrow x_0$ και $y_n \uparrow y_0$ με $x_n, y_n \in I$.
Άρα $[x_n, y_n] \subseteq I$ $\forall n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n] \subseteq I \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_0, y_0) \subseteq I \subseteq [x_0, y_0]$ Άρα I διάστημα]

Αν τώρα $x, y \in f^{-1}((a, \infty))$ και $x < y$ και $x < z < y$
τότε $f(x) < f(z)$ διότι
άρα $f(z) > a \Rightarrow z \in f^{-1}((a, \infty))$

Συνεπώς, από τον ισχυρισμό, το $f^{-1}((a, \infty))$ είναι διάστημα. ∎