Μάθημα 17

Θεώρημα Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού και τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$ τότε και οι $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες

Απόδειξη $\{x : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}$

$$\{x : \inf_n f_n(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$$

$$\liminf_n f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\inf_{n\geq m} f_n\right) \xlongequal{\left(\inf_{n\geq m} f_n\right)_{m=1}^{\infty} \uparrow} \sup_m \left(\inf_{n\geq m} f_n\right) \text{ μετρ.}$$

Ομοίως $\limsup_n f_n = \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{n\geq m} f_n\right) \xlongequal{\left(\sup_{n\geq m} f_n\right) \downarrow} \inf_m \left(\sup_{n\geq m} f_n\right)$ μετρ.

Ορισμός Θα λέμε ότι μία ιδιότητα $p(x)$ για $x\in A$, $A\in\mathcal{M}$ ισχύει **σχεδόν παντού** και θα γράφουμε «$p(x)$ σ.π.» αν

$$\mu\{x : \neg p(x)\} = 0.$$

Πχ. Αν $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες τότε η φράση «$f=g$ σ.π.» σημαίνει $\mu\{x\in A : f(x)\neq g(x)\} = 0$. Λέμε ότι η f και g είναι σχεδόν παντού ίσες

Πχ. $f, g : A \to \tilde{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες, τότε η φράση «$f>g$ σ.π.» σημαίνει

$$\mu\{x : f(x) \leq g(x)\} = 0.$$

Πρόταση Αν $f=g$ σ.π. και f μετρήσιμη τότε g μετρήσιμη

Απόδειξη (απλούστερη από το βιβλίο). Θέτουμε $E = \{x : f(x) = g(x)\}$. $\mu(E^c) = 0$ αφού $f=g$ σ.π. άρα $E\in\mathcal{M}$.

$$\{x : g(x) > a\} = \underbrace{\{x\in E : g(x) > a\}}_{\shortparallel} \cup \underbrace{\{x\in E^c : g(x) > a\}}_{\subseteq E^c \text{ άρα εξ. μέτρου } 0}$$

άρα ανήκει στην $\mathcal{M}$

$$\{x\in E : f(x) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap E \in \mathcal{M}$$

Πόρισμα Αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμες με κοινό πεδίο ορισμού & τιμές στο $\tilde{\mathbb{R}}$, και η f έχει το ίδιο πεδίο ορισμού & $f_n \longrightarrow f$ σ.π. Τότε και η f είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη Το $\limsup_n f_n(x)$ υπάρχει πάντα στο $\tilde{\mathbb{R}}$ και ορίζει μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αλλά $\limsup_n f_n(x) = f(x)$ σ.π. Άρα f μετρήσιμη.

Άσκηση 7.2.1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη & $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g\circ f$ μετρήσιμη.

Λύση $(g\circ f)^{-1}(a\ \infty) = \{x : (g\circ f)(x) > a\} = f^{-1}(g^{-1}(a\ \infty))$. Αφού g συνεχής $\Rightarrow$ $g^{-1}(a\ \infty)$ ανοικτό. Άρα υπάρχουν ξένα (a_n, b_n) διαστήματα $n=1,2,\dots$ ώστε $g^{-1}(a\ \infty) = \bigcup_{1}^{\infty}(a_n\ b_n)$

Άρα $f^{-1}(g^{-1}(a\ \infty)) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n\ b_n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n\ b_n)$

$$= \bigcup_{1}^{\infty} f^{-1}\left((a_n, \infty] \setminus [b_n, \infty]\right) = \bigcup_{1}^{\infty}\left(f^{-1}(a_n, \infty] \setminus f^{-1}[b_n, \infty]\right)$$

$\in \mathcal{M}$ $\quad$ ($f^{-1}(a_n\ \infty] \setminus f^{-1}[b_n\ \infty] = \{x : f(x) > a_n\} \setminus \{x : f(x) \geq b_n\}$

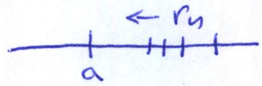
Παρατήρηση Η σύνθεση μετρησίμων **ΔΕΝ** είναι απαραίτητα μετρήσιμη διότι ο ορισμός της μετρησιμότητας είναι $f^{-1}(a\ \infty] \in \mathcal{M}$ θα άρα $f^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}$. Όμως δεν ξέρουμε ότι $g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ για να συμπεράνουμε $f^{-1}(g^{-1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}$

Άσκηση 7.2.2 Αν $f:\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}((r\ \infty])\in\mathcal{M}$ $\forall r\in\mathbb{Q}$

τότε f μετρήσιμη

Λύση Έστω $r_n \longrightarrow a^+$ $\quad r_n\in\mathbb{Q}$ $\quad$ (π.χ. $r_n=\frac{[na]+1}{n}\longrightarrow a$)

Τότε $(a\ \infty]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n,\infty]$ ■



$na-1<[na]\leq na$

Άσκηση 7.2.3 Το $\sup f_i$, $i\in I$, με I υπεραριθμήσιμο ΔΕΝ

είναι απαραίτητα μετρήσιμη ακόμα και αν όλες οι f_i είναι.

Λύση Έστω ότι το A είναι ένα ΜΗ-μετρήσιμο $\subseteq[0,1]$

$\forall\, i\in A$ θέτουμε $\quad f_i(x)=\chi_{\{i\}}(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x=i\\ 0 & \text{αν } x\neq i\end{cases}$

Η f_i είναι μετρήσιμη (γιατί;) Αλλά

$$\sup_{i\in A} f_i(x)=\chi_A(x) \quad \text{όχι μετρήσιμη (αφού } \{x:\chi_A(x)>\tfrac{1}{2}\}=A\notin\mathcal{M})$$ ■

Άσκηση 7.2.4 Αν $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχείς και $f=g$ σ.π.

$\Rightarrow f=g$

Λύση $\mu\overbrace{\{x: f(x)\neq g(x)\}}^{A}=0$ $\quad$ άρα αν $x\in A$

$\forall\varepsilon>0$ $\quad(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)\not\subseteq A$. Συνεπώς για $\varepsilon=\frac{1}{n}$ ~~...~~

$\exists\ x_n\in(x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n})\setminus A$. Οπότε $x_n\longrightarrow x$ και αφού f,g

συνεχείς $\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\overset{x_n\notin A}{=\!=}\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$ $\quad$ άτοπο

Άρα $A=\emptyset$ ■

Ασκ 7.2.5 Δώστε παράδειγμα $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνεχής $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

ασυνεχής $\forall x\in\mathbb{R}$ ώστε $f=g$ σ.π.

Λύση $f(x)=1 \qquad g(x)=\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ ■

σελ 4

Άσκηση 7.26 Δείξτε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα τότε f μετρήσιμη (1)

Λύση Αρκεί να δείξω ότι το $f^{-1}((a,\infty))$ είναι διάστημα (2)

(οπότε $\in \mathcal{M}$) (3)

Ισχυρισμός Το $I\subseteq\mathbb{R}$ είναι διάστημα αν-ν $\forall x,y\in I$ (4)

αν $z\in\mathbb{R}$ με $x<z<y \Longrightarrow z\in I$ (5)

["$\Longrightarrow$" προφανές. (6)

"$\Longleftarrow$" Από την υπόθεση $\forall x,y\in I \Longrightarrow [x,y]\subseteq I$. Θέτω (7)

$x_0=\inf I$ ή $y_0=\sup I$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του 8

inf & sup βρίσκουμε $x_n\downarrow x_0$ ή $y_n\uparrow y_0$ με $x_n, y_n\in I$ (9)

Άρα $[x_n, y_n]\subseteq I$ $\forall n \Longrightarrow \bigcup_{n\geq 1}^{\infty}[x_n, y_n]\subseteq I \Longrightarrow$ (10)

$\Longrightarrow (x_0, y_0)\subseteq I\subseteq [x_0, y_0]$ Άρα I διάστημα] (11)

Αν τώρα $x,y\in f^{-1}((a,\infty))$ ή $x<y$ ή $x<z<y$ (12)

Τότε $f(x)<f(z)$ διότι f αύξουσα (13)

άρα $f(z)>a \Longrightarrow z\in f^{-1}((a,\infty))$ (14)

Συνεπώς, από τον ισχυρισμό, το $f^{-1}((a,\infty))$ είναι διάστημα. ■ (15)