

Μάθημα 18

Ορισμός Μια συνάρτηση λέγεται απλή αν παίρνει πεπερασμένο πλήθος πεπερασμένων τιμών.

(1)
(2)

Ειδικά για τις απλές συναρτήσεις δεν επιτρέπεται να παίρνουν τις τιμές $\pm \infty$

(3)
(4)

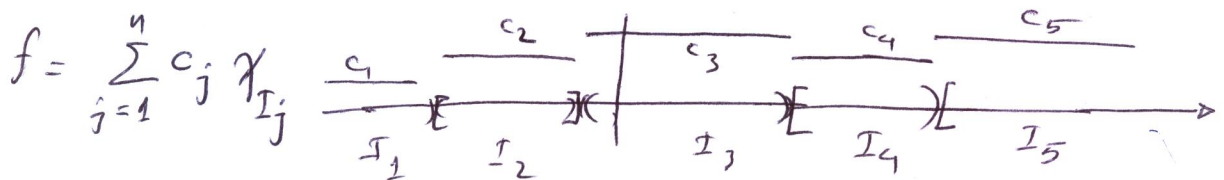
Π.χ. Η χ_A για $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι απλή $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

(5)
(6)

Π.χ. Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται κλιμακωτή αν υπάρχουν ξ ένα διαστήματα

(7)
(8)

I_1, I_2, \dots, I_n στο \mathbb{R} ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^n I_j$ και $c_j \in \mathbb{R}$ ώστε



(9)

Λήμμα (αξίωμα) $\forall A, B \subseteq \mathbb{R} \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

(10)
(11)

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

Πρόταση Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι απλή ή μετρίσιμη αν

(12)
(13)

μόνο αν γραφτεί στη μορφή $f := \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}$ όπως A_1, \dots, A_m

ξένα ανά δύο, μετρίσιμα, μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R} με

(14)

$\bigcup_{j=1}^m A_j = \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad c_1 < c_2 < \dots < c_m$. Επιπλέον η αναπαράσταση

(15)

είναι μοναδική.

Απόδειξη " \Leftarrow " προφανές: η f παίρνει μόνο τις τιμές c_1, \dots, c_m .

(17)
(18)

Η f είναι μετρίσιμη διού αν $a \in \mathbb{R}$ είτε

(19)

$$a < c_1 \text{ οπότε } f^{-1}(a, \infty) = \emptyset, \text{ είτε}$$

(20)

$$c_m \leq a \text{ οπότε } f^{-1}(a, \infty) = \mathbb{R}, \text{ είτε}$$

$\exists j$ ώστε $c_j \leq a < c_{j+1}$ οπότε

(21)

$$f^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{k=j}^m I_k \in \mathcal{M}. \text{ Άρα } f \text{ μετρίσιμη}$$

(22)

"=>" Έστω c_1, \dots, c_n οι τιμές της f σε γνήσια αξίωςα διάταξη

Θεωρούμε $A_i = f^{-1}(\{c_i\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = c_i\}$ ζεύγη μετρήσιμα (2)

την κενά με $\bigcup_{i=1}^n A_i = \mathbb{R}$ (καθώς c_1, c_2, \dots, c_n όλες οι τιμές) (3)

και γάρνη $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ (4)

Μοναδικότητα Έστω ότι $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}$ (5)

με $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_m$ A_i ζεύγη μετρήσιμα $\cup A_i = \mathbb{R}$ (6)

B_j ζεύγη μετρήσιμα με $\bigcup_{j=1}^m B_j = \mathbb{R}$ (7)

Παρατηρούμε ότι $f(x) = b_j \Leftrightarrow x \in B_j$. Επειδή τα B_j είναι ζεύγη (8)

η f έχει m τιμές. Αλλά η f έχει n τιμές. Άρα $n=m$ (9)

Η μικρότερη τιμή της f είναι η c_1 αλλά η b_1 . Άρα $c_1 = b_1$ (10)

Η 2^η ————— c_2 αλλά η b_2 . Άρα $c_2 = b_2$ (11)

κ.λ.π. Τέλος $A_i = f^{-1}(\{c_i\}) = f^{-1}(\{b_i\}) = B_i$ (12)

Ορισμός Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκει μετρήσιμη συνάρτηση, η αναπαράσταση (13)

της f στη μορφή $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$ με A_j ζεύγη ανά δύο μετρήσιμα (14)

την κενά με $\bigcup_{j=1}^n A_j = \mathbb{R}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ (15)

λέγεται κανονική αναπαράσταση της f . (16)

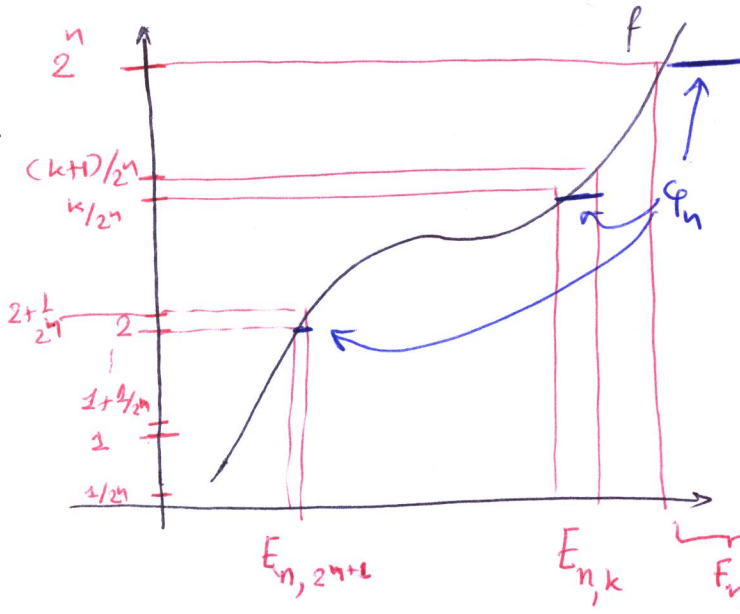
Η $f(x) = 2 \chi_{[0,2]} + 3 \chi_{[1,4]}$ δεν είναι κανονική. Η (17)

κανονική αναπαράσταση της f είναι (18)

$f(x) =$ (19)

- Θεώρημα κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ είναι (1)
- όριο μιας αλυσδας ακολουθιας μη αρνητικων μετρησιμων ανων (2)
- συναρτισεων. Ειναι δειον σε οποιοδινοσε τιποτα του νεδιου οριου (3)
- που η f ειναι φραγμενη η συστημα ειναι οποιοδιποση. (4)

Απόδειξη



- κόβαμε το νεδιο τιπων $[0, \infty]$ (5)
- σε τιποτα τιποτα $\frac{1}{2^n}$ μεχρι το 2^n . (6)
- $(0, \frac{1}{2^n}]$, $(\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}]$ --- $(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ (7)
- δηλαδι διαστηματα της μορφης (8)
- (\quad) δια (9)
- $k=0, 1, 2, \dots, 2^n-1$ (συνολικη ε διαστηματα) (10)

Θεωρουε $E_{n,k} = f^{-1} \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ (11)

$F_n = f^{-1} (2^n, \infty]$. Σε καθε $E_{n,k}$ οι τιμες της f (12)

κυμαινονται ανω εως ανω $f(E_{n,k}) \subseteq$ (13)

Θεωρουε $q_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + 2^n \chi_{F_n}$. (14)

αν $f(t) = +\infty \Rightarrow t \in F_n \Rightarrow q_n(t) = 2^n \rightarrow +\infty = f(t)$. (15)

$\forall t \in \mathbb{R}$ αν $f(t) < \infty$: $f(t) < 2^n$ αρα υπαρχει $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n-1\}$ (15)

ωστε $f(t) \in (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \Rightarrow t \in E_{n,k} \Rightarrow q_n(t) = \frac{k}{2^n}$ (16)

$\left. \begin{matrix} q_n(t) = \frac{k}{2^n} \\ f(t) \in (\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \end{matrix} \right\} \Rightarrow |q_n(t) - f(t)| \leq$ (17)

Μαθημα $\boxed{0 \leq f(t) - q_n(t) \leq \frac{1}{2^n}}$ δηλ $\boxed{q_n(t) \leq f(t)}$ (18)

Αρα $q_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$ (19)

Δείχνουμε $q_n \leq q_{n+1}$ κοιτώντας σε κάθε $E_{n,k}$ τι τιμές (1)

(2)

παίρνει q_{n+1} :

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] \subset \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] \quad (3)$$

Άρα

$$f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] = f^{-1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right] \cup f^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] \quad (4)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{A = E_{n,k}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{B = E_{n+1, 2k}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{C = E_{n+1, 2k+1}} \quad (5)$$

$$q_{n+1}|_B = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = q_n|_A \quad \left. \vphantom{q_{n+1}|_B} \right\} \Rightarrow q_{n+1} \geq q_n \quad (6)$$

$$q_{n+1}|_C = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = q_n|_A \quad (7)$$

Τέλος αν f γραμμική από το M σε κάποιο σύνολο $E \in \mathcal{M}$ (8)

τότε $\exists n \in \mathbb{N}$: $2^n > M$ οπότε από τα προηγούμενα (9)

$$0 \leq f(A) - q_n(t) \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall t \in E \Rightarrow q_n \Rightarrow f \quad (10)$$



(Θεώρημα Luzin (εκτός ύλης) : Έστω f πραγματικής μεταβλητής (11)

συνάρτησης ορισμένη στο μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ (12)

υπάρχει συνάρτηση g στο \mathbb{R} ή κάποιο $F \subseteq E$ (13)

τε $f = g$ στο F ή $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$) (14)