Μάθημα 18

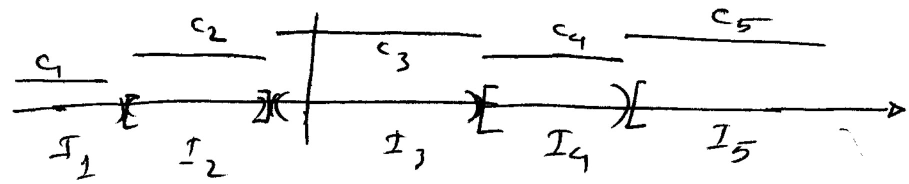
<u>Ορισμός</u> Μια συνάρτηση λέγεται απλή αν παίρνει πεπερασμένο πλήθος πεπερασμένων τιμών.

Ειδικά για τις απλές συναρτήσεις δεν ~~μη~~ επιτρέπουμε να παίρνουν τις τιμές $\pm\infty$

Πχ Η χ_A για $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι απλή $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ $\chi_A(x) = \begin{cases} \quad & x \in A \\ \quad & x \notin A \end{cases}$

Πχ Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται κλιμακωτή αν υπάρχουν ξένα διαστήματα $I_1, I_2, \dots, I_n$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ και $c_j \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}$$



<u>Λήμμα (άσκηση)</u> $\forall\, A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$

<u>Πρόταση</u> Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι απλή και μετρήσιμη αν και μόνο αν γράφεται στη μορφή $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$ (*) όπου $A_1, \dots, A_n$ ξένα ανά δύο, μετρήσιμα, μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Επιπλέον η αναπαράσταση (*) είναι μοναδική.

<u>Απόδειξη</u> "$\Longleftarrow$" προφανές: η f παίρνει μόνο τις τιμές $c_1, \dots, c_n$.

Η f είναι μετρήσιμη διότι αν $a \in \mathbb{R}$ είτε

$a < c_1$ οπότε $f^{-1}(a, \infty) = \qquad \in \mathcal{M}$, είτε

$c_n \leq a$ οπότε $f^{-1}(a, \infty) = \qquad \in \mathcal{M}$, είτε

$\exists\, j$ ώστε $c_j \leq a < c_{j+1}$ οπότε

$f^{-1}(a, \infty) = \qquad \in \mathcal{M}$. Άρα f μετρήσιμη

"$\Rightarrow$" Έστω $c_1,\dots,c_n$ οι τιμές της f σε γνήσια αύξουσα διάταξη

Θέτουμε $A_i = f^{-1}(\{c_i\}) = \{x\in\mathbb{R} : f(x)=c_i\}$ ξένα μετρήσιμα μη κενά με $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\mathbb{R}$ (αφού $c_1,c_2,\dots,c_n$ <u>όλες</u> οι τιμές)

και φανερά $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}$.

<u>Μοναδικότητα</u> Έστω ότι $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ με $c_1<c_2<\dots<c_n$, $b_1<b_2<\dots<b_m$ A_i ξένα μετρήσιμα $\bigcup A_i=\mathbb{R}$ B_j ξένα μετρήσιμα με $\bigcup_{j=1}^{m} B_j=\mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $f(x)=b_j \Leftrightarrow x\in B_j$. Επειδή τα B_j είναι ξένα η f έχει m τιμές. Αλλά η f έχει n τιμές. Άρα $n=m$

Η μικρότερη τιμή της f είναι η c_1 αλλά και η b_1. Άρα $c_1=b_1$

Η $2^{η}$ —//— c_2 αλλά και η b_2. Άρα $c_2=b_2$

κλπ. Τέλος $A_i = f^{-1}(\{c_i\}) = f^{-1}(\{b_i\}) = B_i$ ■

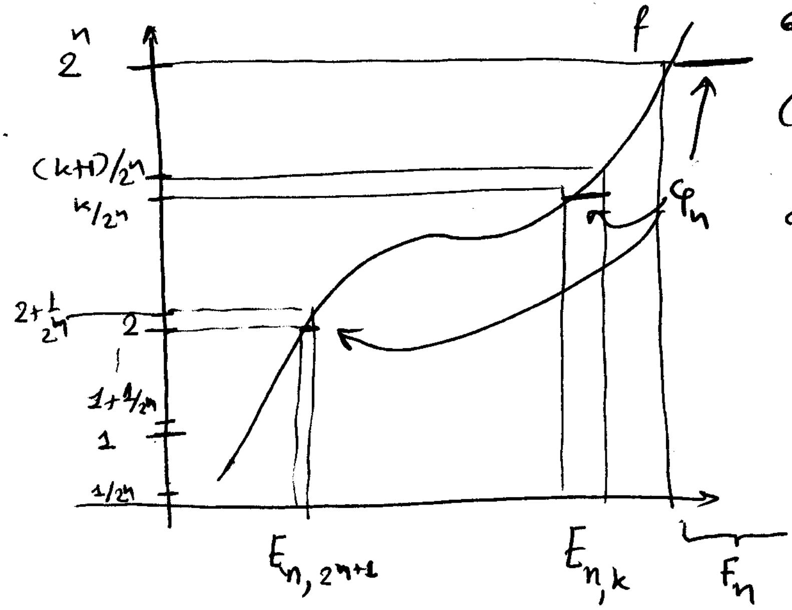
<u>Ορισμός</u> Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση, η αναπαράσταση της f στη μορφή $f=\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{A_j}$ με A_j ξένα ανά δύο μετρήσιμα μη κενά με $\bigcup_{1}^{n} A_j=\mathbb{R}$, $c_i\in\mathbb{R}$, $c_1<c_2<\dots<c_n$ λέγεται κανονική αναπαράσταση της f.

Η $f(x)=2\chi_{[0,2]}+3\chi_{[1,4]}$ δεν είναι κανονική. Η κανονική αναπαράσταση της f είναι

$f(x)=$

<u>Θεώρημα</u> Κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$ είναι όριο μιας αύξουσας ακολουθίας μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων. Επιπλέον σε οποιοδήποτε τμήμα του πεδίου ορισμού που η f είναι φραγμένη η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

<u>Απόδειξη</u>



Κόβουμε το πεδίο τιμών $[0\ \infty]$ σε τμήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$ μέχρι το 2^n.
$(0\ \frac{1}{2^n}], (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}] - (2^n-\frac{1}{2^n}, 2^n]$
δηλαδή διαστήματα της μορφής

$($ $]$ για

$k=0,1,2,\dots,2^{2n}-1$ (συνολικά 2^{2n} διαστήματα)

Θέτουμε $E_{n,k}=f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ και $F_n=f^{-1}(2^n,\infty]$. Σε κάθε E_{nk} οι τιμές της f κυμαίνονται από έως άρα $f(E_{nk})\subseteq$

Θέτουμε $\varphi_n=\sum_{k=0}^{2^{2n}-1}\frac{k}{2^n}\chi_{E_{nk}}+2^n\chi_{F_n}$.

αν $f(t)=+\infty \Rightarrow t\in F_n\ \forall n \Rightarrow \varphi_n(t)=2^n\longrightarrow+\infty=f(t)$.

$\forall\ t\in\mathbb{R}$, αν $f(t)<\infty$ $\exists\, n\in\mathbb{N}:\ f(t)<2^n$ άρα υπάρχει $k\in\{0,1,2,\dots,2^{2n}-1\}$

ώστε $f(t)\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right] \Rightarrow t\in E_{n,k} \Rightarrow \varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}\\ f(t)\in\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]\end{array}\right\} \Rightarrow |\varphi_n(t)-f(t)|\leq$$

Μάλιστα $\boxed{0\leq f(t)-\varphi_n(t)\leq}$ δηλ $\boxed{\varphi_n(t)\leq f(t)}$

$\downarrow$

Άρα $\varphi_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$

Δείχνουμε $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ κοιτώντας σε κάθε $E_{n,k}$ τι τιμές (1)

παίρνει η φ_{n+1} : (2)

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] \quad (3)$$

Άρα

$$\underbrace{f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}_{A = E_{n,k}} = \underbrace{f^{-1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]}_{B = E_{n+1,2k}} \cup \underbrace{f^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]}_{C = E_{n+1,2k+1}} \quad (4)$$

(5)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{n+1}\big|_B = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n} = \varphi_n\big|_A \\[2ex] \varphi_{n+1}\big|_C = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} > \dfrac{k}{2^n} = \varphi_n\big|_A \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_{n+1} \geq \varphi_n \quad (6)$$

(7)

Τέλος αν f φραγμένη από το M σε κάποιο σύνολο $E \in \mathcal{M}$ (8)

τότε $\exists\, n \in \mathbb{N}: 2^n > M$ οπότε από τα προηγούμενα (9)

$$0 \leq f(t) - \varphi_n(t) \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall t \in E \implies \varphi_n \rightrightarrows f \quad (10)$$

■

(<u>Θεώρημα Lusin (εκτός ύλης)</u>: Έστω f πραγματική μετρήσιμη (11)

συνάρτηση ορισμένη στο μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ (12)

υπάρχει συνεχής συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ & κλειστό $F \subseteq E$ (13)

με $f = g$ στο F & $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$) (14)