# Μάθημα 18

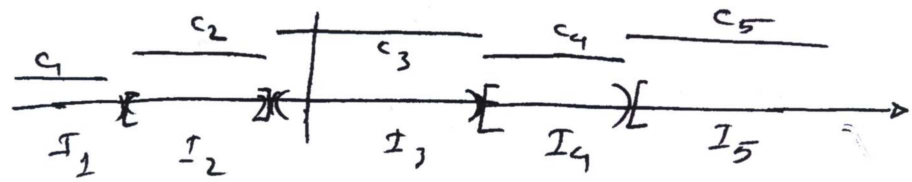
Ορισμός Μια συνάρτηση λέγεται απλή αν παίρνει πεπερασμένο πλήθος πεπερασμένων τιμών.

Ειδικά για τις απλές συναρτήσεις δεν επιτρέπουμε να παίρνουν τις τιμές $\pm\infty$

Π.χ. Η $\chi_A$ για $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι απλή $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

Π.χ. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται κλιμακωτή αν υπάρχουν ξένα διαστήματα $I_1, I_2, \dots, I_n$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ και $c_j \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{I_j}$$




Λήμμα (άσκηση) $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$

Πρόταση Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι απλή & μετρήσιμη αν & μόνο αν γράφεται στη μορφή $f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i}$ ⊛ όπου $A_1, \dots, A_m$ ξένα ανά δύο, μετρήσιμα, μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \mathbb{R}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Επιπλέον η αναπαράσταση ⊛ είναι μοναδική.

Απόδειξη "$\Longleftarrow$" προφανές: η $f$ παίρνει μόνο τις τιμές $c_1, \dots, c_n$.
Η $f$ είναι μετρήσιμη διότι αν $a \in \mathbb{R}$ είτε

$a < c_1$ οπότε $f^{-1}(a, \infty) = \mathbb{R} \in \mathcal{M}$, είτε

$c_n \leq a$ οπότε $f^{-1}(a, \infty) = \emptyset \in \mathcal{M}$, είτε

$\exists\, j$ ώστε $c_j \leq a < c_{j+1}$ οπότε

$$f^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{i=j+1}^{m} A_i \in \mathcal{M}.$$ Άρα $f$ μετρήσιμη

"$\Rightarrow$" Έστω $c_1,\dots,c_n$ οι τιμές της $f$ σε γνήσια αύξουσα διάταξη.

Θέτουμε $A_i = f^{-1}(\{c_i\}) = \{x\in\mathbb{R} : f(x)=c_i\}$ ξένα μετρήσιμα μη κενά με $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\mathbb{R}$ (αφού $c_1, c_2,\dots,c_n$ <u>όλες</u> οι τιμές)

και φανερά $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i}$

<u>Μοναδικότητα</u> Έστω ότι $f=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$

με $c_1<c_2<\dots<c_n$, $b_1<b_2<\dots<b_m$ $A_i$ ξένα μετρήσιμα $\bigcup A_i=\mathbb{R}$

$B_j$ ξένα μετρήσιμα με $\bigcup_{j=1}^{m} B_j=\mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $f(x)=b_j \iff x\in B_j$. Επειδή τα $B_j$ είναι ξένα η $f$ έχει $m$ τιμές. Αλλά η $f$ έχει $n$ τιμές. Άρα $n=m$

Η μικρότερη τιμή της $f$ είναι η $c_1$ αλλά και η $b_1$. Άρα $c_1=b_1$

Η $2^{\eta}$ —//— $c_2$ αλλά και η $b_2$. Άρα $c_2=b_2$

κ.λπ. Τέλος $A_i=f^{-1}(\{c_i\})=f^{-1}(\{b_i\})=B_i$ ■

<u>Ορισμός</u> Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση, η αναπαράσταση της $f$ στη μορφή $f=\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{A_j}$ με $A_j$ ξένα ανά δύο μετρήσιμα μη κενά με $\bigcup A_j=\mathbb{R}$, $c_i\in\mathbb{R}$, $c_1<c_2<\dots<c_n$ λέγεται κανονική αναπαράσταση της $f$.

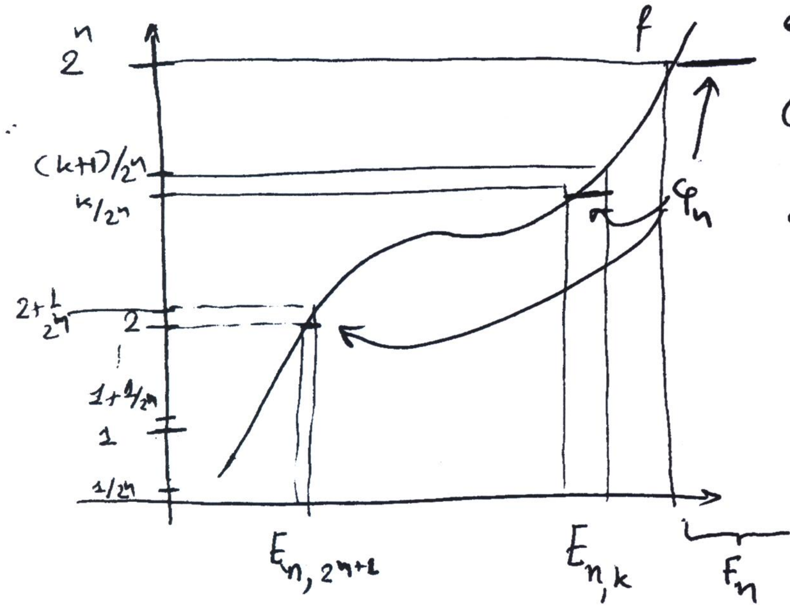
Η $f(x)=2\chi_{[0,2]}+3\chi_{[1,4]}$ δεν είναι κανονική. Η κανονική αναπαράσταση της $f$ είναι

$$f(x)=0\cdot\chi_{[-\infty,0)\cup(4,+\infty]}+2\cdot\chi_{[0,1)}+3\chi_{(2,4]}+5\chi_{[1,2]}$$

Λύσεις

**Θεώρημα** Κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι όριο μιας αύξουσας ακολουθίας μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων. Επιπλέον σε οποιοδήποτε τμήμα του πεδίου ορισμού που η $f$ είναι φραγμένη η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

**Απόδειξη**




Κόβουμε το πεδίο τιμών $[0\ \infty]$ σε τμήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$ μέχρι το $2^n$.

$(0\ \frac{1}{2^n}],\ (\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n}] \dots (2^n-\frac{1}{2^n},\ 2^n]$

δηλαδή διαστήματα της μορφής

$(\frac{k}{2^n}\quad \frac{k+1}{2^n}]$ για

$k=0,1,2,\dots,2^{2n}-1$ (συνολικά $2^{2n}$ διαστήματα)

Θέτουμε $E_{n,k}=f^{-1}(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$ και $F_n=f^{-1}(2^n,\infty]$. Σε κάθε $E_{nk}$, οι τιμές της $f$ κυμαίνονται από $k/2^n$ έως $\frac{k+1}{2^n}$ άρα $f(E_{nk})\subseteq(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]$

Θέτουμε $\varphi_n=\sum_{k=0}^{2^{2n}-1}\frac{k}{2^n}\chi_{E_{nk}}+2^n\chi_{F_n}$.

αν $f(t)=+\infty \Rightarrow t\in F_n \Rightarrow \varphi_n(t)=2^n\longrightarrow\infty=f(t)$

αν $f(t)<\infty$

$\forall t\in\mathbb{R}\ \exists n\in\mathbb{N}: f(t)<2^n$ άρα υπάρχει $k\in\{0,1,2,\dots,2^{2n}-1\}$ ώστε $f(t)\in(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}] \Rightarrow t\in E_{n,k}\Rightarrow \varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_n(t)=\frac{k}{2^n}\\ f(t)\in(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}]\end{array}\right\}\Rightarrow |\varphi_n(t)-f(t)|\le\frac{1}{2^n}$$

Μάλιστα $\boxed{0\le f(t)-\varphi_n(t)\le\frac{1}{2^n}}$ δηλ $\boxed{\varphi_n(t)\le f(t)}$

Άρα $\varphi_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$

Δείχνουμε $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ κοιτάζοντας σε κάθε $E_{n,k}$ τι τιμές παίρνει η $\varphi_{n+1}$:

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]$$

Άρα

$$\underbrace{f^{-1}\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}_{A = E_{n,k}} = \underbrace{f^{-1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]}_{B = E_{n+1,2k}} \cup \underbrace{f^{-1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]}_{C = E_{n+1,2k+2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{n+1}\big|_B = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = \dfrac{k}{2^n} = \varphi_n\big|_A \\[2ex] \varphi_{n+1}\big|_C = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} > \dfrac{k}{2^n} = \varphi_n\big|_A \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_{n+1} \ge \varphi_n$$

Τέλος αν $f$ φραγμένη από το $M$ σε κάποιο σύνολο $E \in \mathfrak{M}$ τότε $\exists n \in \mathbb{N}: 2^n > M$ οπότε από τα προηγούμενα

$$0 \le f(t) - \varphi_n(t) \le \frac{1}{2^n} \quad \forall t \in E \Rightarrow \varphi_n \rightrightarrows f$$

∎

( Θεώρημα Lusin (εκτός ύλης): Έστω $f$ πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη στο μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g$ στο $\mathbb{R}$ και κλειστό $F \subseteq E$ με $f = g$ στο $F$ και $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ )