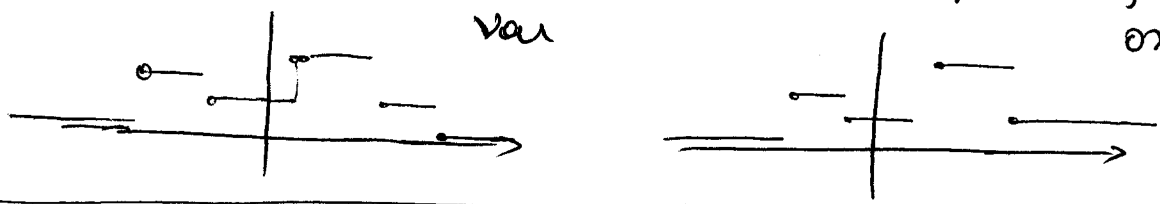
Μάθημα 19

Ολοκλήρωμα απλών συναρτήσεων

Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι (για φ απλή) $\mu\{x : \varphi(x) \neq 0\} < \infty$ (1)



Ορισμός (i) Θεωρούμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (2)

και έστω ότι $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ η κανονική αναπαράσταση της φ (3)

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της φ να είναι ο αριθμός (4)

$\int \varphi \in \mathbb{R}$ με $\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ (όπου $0 \cdot \infty = 0$) (5)

(ii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη ορίζουμε $\int \varphi = \int \tilde{\varphi}$ (6)

$$\text{με } \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } x \in A \quad (7) \\ 0 & \text{αν } x \notin A. \quad (8) \end{cases}$$

(iii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη, ~~ορίζουμε~~ και $E \subseteq \mathbb{R}$ (9)

E μετρήσιμο, ορίζουμε $\int_E \varphi = \int \tilde{\varphi} \chi_E$ (10)

Πρόταση Αν φ, ψ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις και $s, t \in \mathbb{R}$ (11)

(i) $\int (s\varphi + t\psi) = s\int \varphi + t \int \psi$ (ii) Αν $\varphi \leq \psi$ σπ $\Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$ (12)

Απόδειξη (i) Έστω ότι $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ & $\psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ κανονικές (13)

αναπαραστάσεις των φ, ψ. Για $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ (14)

θέτουμε $C_{ij} = A_i \cap B_j$ ($m \times n$ σύνολα) (15)

C_{ij} ξένα ανά δύο: Αν $(i,j)\neq(k,\ell)$ είτε (1)

(2)

$$i\neq k \text{ οπότε } \left.\begin{array}{l} C_{ij}\subseteq A_i \\ C_{k\ell}\subseteq A_k \\ A_i, A_k \text{ ξένα} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_{ij}, C_{k\ell} \text{ ξένα}$$ (3) (4)

(5)

$$\text{είτε } i=k \text{ και } j\neq \ell \text{ οπότε } \left.\begin{array}{l} C_{ij}\subseteq B_j \\ C_{k\ell}\subseteq B_\ell \\ B_j, B_\ell \text{ ξένα} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_{ij}, C_{k\ell} \text{ ξένα}$$ (6) (7)

Επειδή $A_i = A_i\cap\mathbb{R} = A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n}(A_i\cap B_j) = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}$ (8)

και $B_j = \qquad = \qquad = \qquad = \bigcup_i$ (9)

Από την προσθετικότητα του μέτρου $s\int\varphi + t\int\psi =$ (10)

$= \qquad\qquad =$ (11)

$= \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\mu(C_{ij})$. Ενώ $s\varphi+t\psi = \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\chi_{C_{ij}}$ (12)

$\Rightarrow \int(s\varphi+t\psi) = \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\mu(C_{ij}) = s\int\varphi+t\int\psi.$ (13)

(ii) $\varphi\le\psi \Rightarrow 0\le\psi-\varphi = \sum_j b_j\chi_{B_j} - \sum_i a_i\chi_{A_i} \overset{(8),(9)}{=}$ (14)

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j\,\chi_{\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}} - \sum_{i=1}^{m} a_i\,\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}} =$$ (15)

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} \chi_{C_{ij}} - \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{n} \chi_{C_{ij}} =$$ (16)

$$= \sum_{i,j}(b_j-a_i)\,\chi_{C_{ij}}$$ (17)

Αφού $\psi-\varphi \geq 0$ σ.π. αν τύχουν $b_j - a_i < 0 \Rightarrow \mu(C_{ij}) = 0$ (1)

Άρα $\displaystyle\int(\psi-\varphi) = \sum_{i,j}(b_j-a_i)\,\mu(C_{ij}) = \sum_{\{i,j\,:\,b_j-a_i \geq 0\}}(b_j-a_i)\,\mu(C_{ij}) \geq 0$ (2)

$\Rightarrow \int\psi - \int\varphi \geq 0 \Rightarrow \int\varphi \leq \int\psi$ ■ (3)

<u>Πόρισμα</u> Αν φ, ψ απλές μετρήσιμες και $\varphi = \psi$ σ.π. $\Rightarrow \int\varphi = \int\psi$ (4)

<u>Απόδειξη</u>

$$\left.\begin{aligned} \varphi=\psi \text{ σπ} &\Rightarrow \varphi \leq \psi \text{ σπ} \Rightarrow \int\varphi \leq \int\psi \quad (5)\\ \varphi=\psi \text{ σπ} &\Rightarrow \varphi \geq \psi \text{ σπ} \Rightarrow \int\varphi \geq \int\psi \quad (6)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\varphi = \int\psi$$ ■ (7)

Ορισμός ολοκληρώματος για φραγμένες & μετρήσιμες συναρτήσεις

<u>Ορισμός</u> Έστω ότι $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{\text{φραγμένη}}$ μετρήσιμη με $\mu(A) < \infty$ (8)

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f στο A να είναι ο αριθμός (9)

$$\int_A f = \sup\left\{ \int_A \varphi \ : \ \varphi \text{ απλή, μετρήσιμη με } \varphi \leq f \right\} \quad (10)$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\varphi \leq f$ σπ θέτουμε

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } \varphi(x) \leq f(x) \quad (11)\\ \underbrace{\inf f(x)}_{\in\mathbb{R} \text{ αφού } f \text{ φραγμένη}} & \text{αν } \varphi(x) > f(x) \quad (12) \end{cases}$$ (13)

Η ψ είναι απλή μετρήσιμη, $\psi \leq f$ (παντού) (14)

και $\int\varphi = \int\psi$ γιατί $\varphi = \psi$ σπ. Άρα (15)

$$\int_A f = \sup\left\{ \int_A \varphi \ : \ \varphi \text{ απλή, μετρήσιμη με } \varphi \leq f \text{ σπ} \right\} \quad (16)$$

Το παρακάτω μας λέει ότι θα μπορούσαμε να έχουμε θέσει $\int_A f = \inf\left\{ \int_A \psi \ : \ \psi \text{ απλή μετρήσιμη}, \ \psi \geq f \right\}$

Θεώρημα Έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη $\mu(A) < \infty$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) f μετρήσιμη

(ii) $\sup\limits_{\varphi \leq f} \int_A \varphi = \inf\limits_{\psi \geq f} \int_A \psi$ $\quad \varphi, \psi$ μετρήσιμες απλές

Απόδειξη (ii) $\Rightarrow$ (i) παραλείπεται

(i) $\Rightarrow$ (ii) Αν $|f| \leq M$ θέτω $A_k = \left\{ x : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}$

Αυτά είναι ξένα με ένωση το A.

Θέτω $\varphi_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \chi_{A_k}$ & $\psi_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{A_k}$

Οπότε φ_n, ψ_n απλές κ $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ $\forall n$

Έτσι $\inf\limits_{\psi \geq f} \int \psi \leq \int \psi_n = \frac{M}{n} \sum\limits_{k=-n}^{n} k\, \mu(A_k)$

$$\sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \geq \int \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1) \mu(A_k)$$

Άρα

$$0 \leq \inf_{\psi \geq f} \int \psi - \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \leq \int \psi_n - \int \varphi_n =$$

$$= \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\mu(A_k) - (k-1)\mu(A_k) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \mu(A_k)$$

$$= \frac{M}{n} \mu(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$ αφού $\mu(A) < \infty$

Άρα $\inf\limits_{\psi \geq f} \psi = \sup\limits_{\varphi \leq f} \int \varphi$ ■