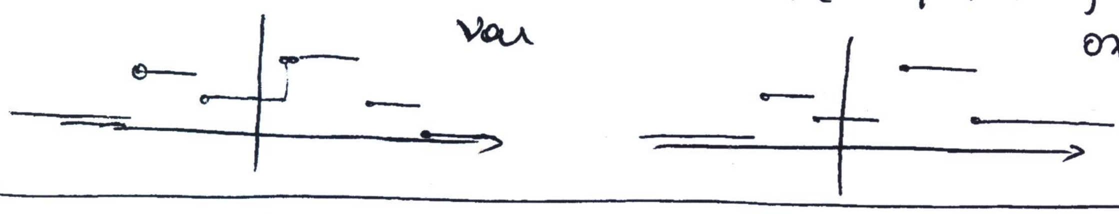
Μάθημα 19

Ολοκλήρωμα απλών συναρτήσεων

Στα παρακάτω θα θεωρούμε ότι $\overbrace{\text{για } \varphi \text{ απλή}}$ $\mu\{x : \varphi(x) \neq 0\} < \infty$ (1)

ναι ... όχι



<u>Ορισμός</u> (i) Θεωρούμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (2)

και έστω ότι $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ η κανονική αναπαράσταση της φ (3)

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της φ να είναι ο αριθμός (4)

$\int \varphi \in \mathbb{R}$ με $\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$ (όπου $0 \cdot \infty = 0$) (5)

(ii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη ορίζουμε $\int \varphi = \int \tilde{\varphi}$ (6)

$$\text{με } \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } x \in A \quad (7) \\ 0 & \text{αν } x \notin A. \quad (8) \end{cases}$$

(iii) Αν $\varphi : A \to \mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη, ~~[illegible]~~ και $E \subseteq \mathbb{R}$ (9)

E μετρήσιμο, ορίζουμε $\int_E \varphi = \int \tilde{\varphi} \chi_E$ (10)

<u>Πρόταση</u> Αν φ, ψ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις & $s, t \in \mathbb{R}$ (11)

(i) $\int (s\varphi + t\psi) = s \int \varphi + t \int \psi$ (ii) Αν $\varphi \leq \psi$ σπ $\Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$ (12)

<u>Απόδειξη</u> (i) Έστω ότι $\varphi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ & $\psi = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ κανονικές (13)

αναπαραστάσεις των φ, ψ. Για $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ (14)

θέτουμε $C_{ij} = A_i \cap B_j$ ($m \times n$ σύνολα) (15)

C_{ij} ξένα ανά δύο: Αν $(i,j)\neq(k,\ell)$ είτε

$i\neq k$ οπότε
$$\left.\begin{array}{l} C_{ij}\subseteq A_i \\ C_{k\ell}\subseteq A_k \\ A_i, A_k \text{ ξένα}\end{array}\right\} \Longrightarrow C_{ij}, C_{k\ell} \text{ ξένα}$$

είτε $i=k$ και $j\neq\ell$ οπότε
$$\left.\begin{array}{l} C_{ij}\subseteq B_j \\ C_{k\ell}\subseteq B_\ell \\ B_j, B_\ell \text{ ξένα}\end{array}\right\} \Longrightarrow C_{ij}, C_{k\ell} \text{ ξένα.}$$

Επιπλέον $A_i = A_i\cap\mathbb{R} = A_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n}(A_i\cap B_j) = \bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}$

και $B_j = B_j\cap\mathbb{R} = B_j\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{m}(A_i\cap B_j) = \bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}$

Από την προσθετικότητα του μέτρου $s\int\varphi + t\int\psi =$
$= s\cdot\sum_{i=1}^{m} a_i\,\mu(A_i) + t\sum_{j=1}^{n} b_j\,\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{m} sa_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\mu(C_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} tb_j\sum_{i=1}^{m}\mu(C_{ij})$

$= \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\mu(C_{ij})$. Ενώ $s\varphi+t\psi = \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\chi_{C_{ij}}$

$\Rightarrow \int(s\varphi+t\psi) = \sum_{i,j}(sa_i+tb_j)\,\mu(C_{ij}) = s\int\varphi + t\int\psi.$

(ii) $\varphi\le\psi \Rightarrow 0\le\psi-\varphi = \sum_j b_j\chi_{B_j} - \sum_i a_i\chi_{A_i} \overset{(8),(9)}{=\!=}$

$= \sum_{j=1}^{n} b_j\,\chi_{\bigcup_{i=1}^{m} C_{ij}} - \sum_{i=1}^{m} a_i\,\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}} =$

$= \sum_{j=1}^{n} b_j\sum_{i=1}^{m}\chi_{C_{ij}} - \sum_{i=1}^{m} a_i\sum_{j=1}^{n}\chi_{C_{ij}} =$

$= \sum_{i,j}(b_j-a_i)\,\chi_{C_{ij}}$

$s\varphi = s\cdot\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} sa_i\,\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} C_{ij}} =$
$= \sum_{i=1}^{m} sa_i\cdot\sum_{j=1}^{n}\chi_{C_{ij}} = \sum_{i,j} sa_i\,\chi_{C_{ij}}$
Ομοίως $t\psi = \sum_{i,j} tb_j\,\chi_{C_{ij}}$

Αφού $\psi - \varphi \geq 0$ σ.π. αν τύχουν $b_j - a_i < 0 \Rightarrow \mu(C_{ij}) = 0$ (1)

Άρα $\int (\psi - \varphi) = \sum_{i,j} (b_j - a_i)\mu(C_{ij}) = \sum_{\{i,j \,:\, b_j - a_i \geq 0\}} (b_j - a_i)\mu(C_{ij}) \geq 0$ (2)

$\Rightarrow \int \psi - \int \varphi \geq 0 \Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$ ■ (3)

Πόρισμα Αν φ, ψ απλές μετρήσιμες και $\varphi = \psi$ σ.π. $\Rightarrow \int \varphi = \int \psi$ (4)

Απόδειξη $\varphi = \psi$ σπ $\Rightarrow \varphi \leq \psi$ σπ $\Rightarrow \int \varphi \leq \int \psi$ (5)
$\varphi = \psi$ σπ $\Rightarrow \varphi \geq \psi$ σπ $\Rightarrow \int \varphi \geq \int \psi$ (6)
$\Rightarrow \int \varphi = \int \psi$ ■ (7)

Ορισμός ολοκληρώματος για φραγμένες & μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός Έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{φραγμένη}}$ μετρήσιμη με $\mu(A) < \infty$ (8)

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f στο A να είναι ο αριθμός (9)

$$\int_A f = \sup\left\{ \int_A \varphi \;:\; \varphi \text{ απλή, μετρήσιμη με } \varphi \leq f \right\} \quad (10)$$

Παρατήρηση Αν $\varphi \leq f$ σπ θέτουμε $\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{αν } \varphi(x) \leq f(x) \quad (11) \\ \underbrace{\inf f(x)}_{\in \mathbb{R} \text{ αφού } f \text{ φραγμένη}} & \text{αν } \varphi(x) > f(x) \quad (12) \end{cases}$ (13)

Η ψ είναι απλή μετρήσιμη, $\psi \leq f$ (παντού) (14)
και $\int \varphi = \int \psi$ γιατί $\varphi = \psi$ σπ. Άρα (15)

$$\int_A f = \sup\left\{ \int_A \varphi \;:\; \varphi \text{ απλή, μετρήσιμη με } \varphi \leq f \text{ σπ} \right\} \quad (16)$$

Το παρακάτω μας λέει ότι θα μπορούσαμε να έχουμε θέσει $\int_A f = \inf\left\{ \int_A \psi \;:\; \psi \text{ απλή μετρήσιμη},\ \psi \geq f \right\}$

<u>Θεώρημα</u> Έστω ότι $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη [redacted] $\mu(A) < \infty$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) f μετρήσιμη

(ii) $\sup\limits_{\varphi \leq f} \int_A \varphi = \inf\limits_{\psi \geq f} \int_A \psi$ $\quad \varphi, \psi$ μετρήσιμες απλές

<u>Απόδειξη</u> [redacted] (ii) $\Rightarrow$ (i) παραλείπεται

[redacted] (i) $\Rightarrow$ (ii) Αν $|f| \leq M$ θέτω $A_k = \left\{ x : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\} = f^{-1}\left(\frac{(k-1)M}{n}, \frac{kM}{n} \right]$.

Αυτά είναι ξένα με ένωση το A.

Θέτω $\varphi_n =$ [redacted] $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{(k-1)M}{n} \chi_{A_k}$ & $\psi_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{kM}{n} \chi_{A_k}$

Οπότε φ_n, ψ_n απλές & $\varphi_n \leq f \leq \psi_n \quad \forall n$

Έτσι

$$\inf_{\psi \geq f} \int \psi \leq \int \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\, \mu(A_k)$$

$$\sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \geq \int \varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\, \mu(A_k)$$

Άρα

$$0 \leq \inf_{\psi \geq f} \int \psi - \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi \leq \int \psi_n - \int \varphi_n =$$

$$= \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\, \mu(A_k) - (k-1)\, \mu(A_k) = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} \mu(A_k)$$

$$= \frac{M}{n} \mu(A) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{αφού } \mu(A) < \infty$$

Άρα $\inf\limits_{\psi \geq f} \psi = \sup\limits_{\varphi \leq f} \int \varphi$ ∎