Μάθημα 21

Το ολοκλήρωμα μιας μη-αρνητικής συνάρτησης

(όχι απαραίτητα φραγμένης ούτε ορισμένης σε σύνολο με πεπερασμένο μέτρο)

<u>Ορισμός</u> Αν $f \geq 0$ μετρήσιμη & ορισμένη στο μετρήσιμο E

Ορίζουμε

$$\int_E f = \sup \Big\{ \int_E h \ : \ h \leq f, \ h \text{ φραγμένη μετρήσιμη με } \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty \Big\}$$

$$= \sup \Big\{ \int_E h \ : \ h \leq f \text{ σ.π. } h \text{ φραγμένη μετρήσιμη με } \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty \Big\}$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν $F \subseteq E$ μετρήσιμο, τότε $\int_E f\chi_F = \int_F f$ διότι

$$\int_F f \overset{\text{ορσ}}{=\!=\!=} \sup_{h \leq f|_F} \int_F h = \sup_{h \leq f\chi_F} \int_F h \quad \text{γιατί}$$

(i) αν $h \leq f|_F \Rightarrow h\chi_F \leq f\chi_F$ & η $h\chi_F$ είναι φάλ, μετρήσιμη, φραγμένη με $\mu\{(h\chi_F)(x) \neq 0\} < \infty$

(ii) αν h ορισμένη στο E & $h \leq f\chi_F \Rightarrow h \leq f|_F$.

Άρα $$\int_F f = \sup_{h \leq f\chi_F} \int_F h = \sup_{\substack{h \leq f\chi_F \\ \& \ h|_{F^c} = 0}} \int_E h = \int_E f\chi_F$$

<u>Πρόταση</u> Αν f, g μη αρνητικές μετρήσιμες ορισμένες στο μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τότε

(i) $\int_E cf = c\int_E f \quad \forall c > 0$ (ii) $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

(iii) αν $f \leq g$ σ.π. $\Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$ (iv) αν $\int_E f = 0 \Rightarrow f = 0$ σ.π. στο E

Απόδειξη (i) $\int_E (cf) = \sup_{h \le cf} \int_E h = \sup_{\frac{1}{c}h \le f} \int_E h$ (1)

h μετρήσιμη φραγμένη με $\mu\{x: h(x) \neq 0\} < \infty$ ⟺ (2)

$\frac{1}{c}h$ —〃— —〃— —〃— $\mu\{\frac{1}{c}h(x) \neq 0\} < \infty$ (3)

άρα αντικαθιστώντας με H την $\frac{1}{c}h$ παίρνουμε ότι (4)

$\int_E (cf) = \sup_{H \le f} \int_E cH = c \sup_{H \le f} \int_E H = c \int_E f.$ (5)

από ορσ

(ii) Αν $h \le f$ και $k \le g \Rightarrow h+k \le f+g \Rightarrow \int_E (h+k) \le \int_E (f+g)$ (6)

$\Rightarrow \int_E h + \int_E k \le \int_E (f+g) \Rightarrow$ (7)

$\Rightarrow \sup_{h \le f} \int_E h + \sup_{k \le g} \int_E k \le \int_E (f+g)$ (8)

$\Rightarrow \int_E f + \int_E g \le \int_E (f+g)$. Έστω τώρα $\ell(x)$ φρ. μετρήσιμη (9)

με $\ell(x) \le (f+g)(x)$ και $\mu\{x: \ell(x) \neq 0\} < \infty$ (10)

Θέτουμε $h(x) = \min\{f(x), \ell(x)\}$ μετρήσιμη και φραγμένη γιατί (11)

$-\infty < \min\{0, \inf \ell\} \le h(x) \le \ell(x) \le \sup \ell(x) < \infty$ (12)

Επιπλέον $\mu\{x: h(x) \neq 0\} \le \mu\{x: \ell(x) \neq 0\} < \infty$ (13)

διότι αν $h(x) \neq 0 \xRightarrow{f \ge 0} \ell(x) \neq 0$ άρα $\{x: h(x) \neq 0\} \subseteq \{x: \ell(x) \neq 0\}$. (14)

Συνεπώς $\int_E h \le \int_E f$ από τον ορισμό του $\int_E f$. (15)

Θέτουμε $k(x) = \ell(x) - h(x)$ φραγμένη ως διαφορά φραγμένων (16)

Αν $h(x) = f(x) \Rightarrow k(x) \le f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$ (17)

Αν $h(x) = \ell(x) \Rightarrow k(x) = 0 \le g(x)$ (18)

Επιπλέον αν $\ell(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow k(x) = 0$ Άρα (19)

$\{x: k(x) \neq 0\} \subseteq \{x: \ell(x) \neq 0\} \Rightarrow \mu\{x: k(x) \neq 0\} < \infty$ (20)

Συνεπώς $\int_E k \le \int_E g$ από τον ορισμό του $\int_E g$

Έχουμε $\int_E \ell = \int_E (h+k) = \int_E h + \int_E k \le \int_E f + \int_E g$

$$\Longrightarrow \sup_{\ell \le (f+g)} \int_E \ell \le \int_E f + \int_E g \Rightarrow \int_E (f+g) \le \int_E f + \int_E g .$$

(iii) Αν $f \le g$ σπ και $h \le f \Rightarrow h \le g$ σπ. Άρα

$$\{h : \text{φρ. μετρ.} \le f \text{ σπ} \ \&\ \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty\} \subseteq \{h : h \text{ φρ. μετρ.} \le g \text{ σπ}, \ \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty\}$$

$$\Rightarrow \{\textstyle\int h \ \text{——//——}\} \subseteq \{\textstyle\int h \ \text{——//——}\}$$

$$\Rightarrow \sup\{\textstyle\int h \ \text{——//——}\} \le \sup\{\textstyle\int h \ \text{——//——}\}$$

$$\int_E f \le \int_E g$$

(iv) Θέτουμε $A_n = \{x \in E : f(x) > \frac{1}{n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ τότε

$f \ge f\chi_{A_n}$

$$\int_E f \ge \int_{A_n} f \ge \int_{A_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0 \quad \text{άτοπο}$$

άρα $\mu(A_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Φανερά $\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\Rightarrow \mu\{x \in E : f(x) > 0\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0 \quad \blacksquare$$

<u>Παράδειγμα</u> Υπολογίστε με τον ορισμό το $\int_{[0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

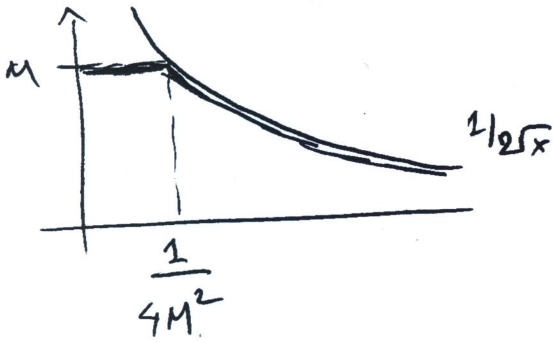
<u>ορσ</u> $\sup_{h \le \frac{1}{2\sqrt{x}}} \left\{ \int_{[0,1]} h \ \ h \text{ φρ. μετρ.} \le \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \&\ \mu\{x : h(x) \neq 0\} < \infty \right\}$

$\{x : h \neq 0\} \subseteq [0,1]$

$$= \sup \left\{ \int_{[0,1]} h \ \ h \text{ φρ. μετρ.} \le \frac{1}{2\sqrt{x}} \right\}$$

$$\geq \int_{(0\,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \chi_{[\frac{1}{n}\ 1]}(x) = \int_{1/n}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,\Big|_{1/n}^{1} = \sqrt{1} - \sqrt{1/n} \qquad (1)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 1 \implies \boxed{\int_{(0\,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 1} \qquad (2)$$



Αν h οποιαδήποτε απλ. μετρ. $\leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (3)

τότε αν $h \leq M \in \mathbb{R} \implies$ (4)

$$h(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \chi_{[\frac{1}{4M^2},\, 1]}(x) + M\,\chi_{(0\ \frac{1}{4M^2})} \qquad (5)$$

$$\implies \int_{(0\,1]} h \leq \sqrt{x}\,\Big|_{1/4M^2}^{1} + M \cdot \frac{1}{4M^2} = 1 - \frac{1}{2M} + \frac{1}{4M} \qquad (6)$$

$$= 1 - \frac{1}{4M} \leq 1 \implies \sup_{h \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}} \int_{(0\,1]} h \leq 1 \qquad (7)$$

$$\implies \boxed{\int_{(0\,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq 1.}$$

∎