Μάθημα 22

Θεώρημα (Λήμμα Fatou) Θεωρούμε μια ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n \geq 0$ μετρήσιμων συναρτήσεων και μια μετρήσιμη f ορισμένες στο μετρήσιμο E. Υποθέτουμε ότι $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ σ.π. στο E.

Τότε $\int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n$

Απόδειξη: Επειδή τα ολοκληρώματα δεν αλλάζουν αν μεταβάλουμε τις f_n και f σε σύνολο μηδενικού μέτρου, θέτοντας π.χ. $f_n(x)=f(x)=0$ στα σημεία που $f_n(x) \not\to f(x)$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x\in E$.

Έστω ότι h φραγμένη, μετρήσιμη με $h(x)\leq f(x)$ και $\mu\{x: h(x)\neq 0\}<\infty$

Θα δείξουμε ότι $\int h \leq \liminf_n \int f_n$ και μετά θα πάρουμε $\sup_{h\leq f}$

φορέας ή φέρον σύνολο

Θέτουμε $E'=\{x\in E : h(x)\neq 0\}$ και $h_n(x)=\min\{f_n(x), h(x)\}\leq f_n(x)$

Η h_n είναι ομ. φραγμένη γιατί $h_n(x)\leq h(x)$ και η h φραγμένη και $h_n(x)\geq \min\{0, h(x)\}$ και $h(x)$ φραγμένη.

Φανερά είναι μετρήσιμη και ορίζεται το $\int_{E'} h_n$

Επιπλέον $\mu\{x\in E : h_n(x)\neq 0\}\leq \mu\{x\in E: h(x)\neq 0\}$ γιατί $\{x\in E : h_n(x)\neq 0\} \subseteq \{x\in E : h(x)\neq 0\}$ αφού αν $h(x)=0 \Rightarrow h_n(x)=0$

$\forall x\in E'$ $h_n(x) \longrightarrow \min\{f(x), h(x)\} = h(x)$ h_n φρ. μετρ. ορισμένη στο σύνολο πεπερασμένου μέτρου E', από την 1η μορφή του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης $\Rightarrow \int_{E'} h_n \longrightarrow \int_{E'} h$

$$\int_E h \overset{h|_{E\setminus E'}=0}{=\!=} \int_{E'} h = \lim_{n\to\infty}\int_{E'} h_n = \liminf_{n\to\infty}\int_{E'} h_n \le$$ (1)

$$\overset{h_n\le f_n}{\le} \liminf_n \int_{E'} f_n \overset{f_n\ge 0}{\le} \liminf_n\left(\int_{E'} f_n + \int_{E\setminus E'} f_n\right) =$$ (2)

$= \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n$. Άρα $\int_E h \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n \Longrightarrow$ (3)

$$\overset{\sup h\le f}{\Longrightarrow} \int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$ (4)

(5)

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης Αν $f_n\ge 0$ και $f_n\le f_{n+1}$ μετρήσιμες

και $f_n\longrightarrow f$ σ.π. Τότε $\int f = \lim\int f_n = \int \lim f_n$ (6)

Απόδειξη Από το Λήμμα Fatou $\int f\le \liminf_n \int f_n$ (7)

Αλλά $f_n \le f_{n+k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f \Rightarrow f_n\le f \Rightarrow \int f_n\le\int f$ (8)

Άρα

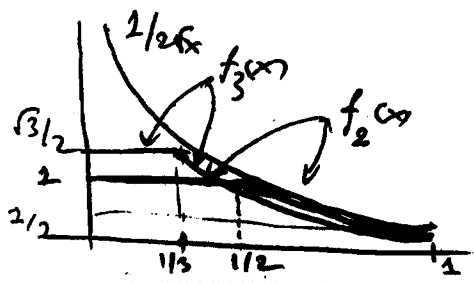
$$\int f \le \liminf\int f_n \le \limsup\int f_n \le \limsup_n \int f = \int f$$ (9)

Άρα $\limsup\int f_n = \liminf\int f_n = \int f$ ∎ (10)

Εφαρμογή $\int_{(0,1]} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$ διότι η $f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\chi_{[\frac1n,1)}(x) +$ (11)

$+\frac{\sqrt{n}}{2}\chi_{(0,\frac1n]}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και $f_n\uparrow$ (12)

Άρα από ΘΜΣ $\int f = \lim\int f_n =$ (13)



$$= \lim\left(\int_{1/n}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx + \int_0^{1/n}\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \lim\left(\sqrt{x}\Big|_{1/n}^{1} + \frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{n}\right)$$ (14)

$$= \lim_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 1$$

Πόρισμα (Beppo–Levi) Αν $u_n \ge 0$ μετρήσιμες και $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Τότε $\int f = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n$

Απόδειξη Επειδή $u_n \ge 0$ τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=1}^{N} u_n$ είναι αύξουσα ακολουθία $\sum_{n=1}^{N} u_n \xrightarrow[N\to\infty]{} f$

Άρα από ΘΜΣ $\int f = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N} \sum_{n=1}^{N} \int u_n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n \qquad \blacksquare$$

Πρόταση (★) Αν $f \ge 0$ μετρήσιμη E_n ξένα και $E = \cup E_n$

Τότε $\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$

Απόδειξη Θέτουμε $u_n = f\chi_{E_n}$ οπότε $f\chi_E = f\chi_{\cup E_n} =$

$= f \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f \cdot \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ άρα

$$\int_E f = \int f\chi_E = \int \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f \qquad \blacksquare$$

Ορισμός Μια $f \ge 0$ μετρήσιμη λέγεται ολοκληρώσιμη σε ένα μετρήσιμο σύνολο E αν $\int_E f < \infty$.

Πρόταση Αν $f, g \ge 0$ στο E και $g \le f$ και f ολοκληρώσιμη τότε g ολοκληρώσιμη στο E και $\int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g$

Απόδειξη $f = \underbrace{(f-g)}_{\ge 0} + \underbrace{g}_{\ge 0} \Rightarrow \int_E f = \int_E (f-g) + \int_E g$.

Επειδή $0 \le g \le f \Rightarrow 0 \le \int g \le \int f < \infty \Rightarrow g$ ολοκληρώσιμη

και $\int_E f - \int_E g = \int_E (f-g) \qquad \blacksquare$

Πρόταση Έστω $f \geq 0$ ολοκληρώσιμη στο E. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall A \subseteq E$ με $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A f < \varepsilon$.

Απόδειξη

Θέτουμε $f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \leq n \\ n & \text{αν } f(x) > n \end{cases}$. Φανερά $|f_n(x)| \leq n$

$\Rightarrow f_n$ φραγμένη $\forall n$. Επίσης $f_n \leq f_{n+1}$ διότι

$$\left.\begin{cases} \text{αν } f(x) \leq n \leq n+1 \Rightarrow f_n(x) = f(x) = f_{n+1}(x) \\ \text{αν } n < f(x) \leq n+1 \Rightarrow f_n(x) = n < f(x) = f_{n+1}(x) \\ \text{αν } n < n+1 < f(x) \Rightarrow f_n(x) = n < n+1 = f_{n+1}(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow f_n \leq f_{n+1}$$

$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ $\forall x \in E$ διότι είτε $f(x) = \infty$ οπότε $f_n(x) = n \longrightarrow \infty = f(x)$

είτε $f(x) < \infty$ οπότε $\exists n_0 > f(x)$

και άρα $\forall n \geq n_0$ $f_n(x) = f(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$

Από ΘΜΣ $\int f_n \longrightarrow \int f$ οπότε $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $\left| \int f_n - \int f \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left| \int (f_n - f) \right| < \varepsilon/2$. Θέτουμε $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4 n_0} > 0$. Αν

$A \subseteq E$ και $\mu(A) < \delta$ τότε

$$\int_A f = \int_A (f - f_{n_0}) + \int_A f_{n_0} \leq \int_E (f - f_{n_0}) + \int_A f_{n_0}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \cdot \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \frac{\varepsilon}{4 n_0} < \varepsilon \quad \blacksquare$$