Μάθημα 23

ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ LEBESGUE

<u>Ορισμός</u> (γενικός ορισμός) Μια μετρήσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη στο E αν οι συναρτήσεις f^+ κ f^- είναι ολοκληρώσιμες στο E. Το ολοκλήρωμα της f ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\int_E f =$$

<u>Πρόταση</u> Έστω ότι οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$

(i) $\forall c \in \mathbb{R}$ η cf είναι ολοκληρώσιμη κ $\int_E (cf) = c \cdot \int_E f$

(ii) Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη κ $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

(iii) Αν $f \leq g$ σπ τότε $\int_E f \leq \int_E g$

(iv) Αν A, B ξένα μετρήσιμα υποσύνολα του E τότε $\int_{A \cup B} f =$

$=$

<u>Απόδειξη</u> (i) Αν $c \geq 0$ τότε $(cf)^+ = c.f^+$ κ $(cf)^- = c.f^-$ άρα είναι ολοκληρώσιμες κ $\int (cf)^+ =$ $\quad =$ $\quad$ και

$\int (cf)^- =$ $\quad =$ $\quad$. Άρα

$$\int cf = \quad = \quad =$$

$=$

Αν $c<0$ τότε $(cf)^+ = |c| \cdot f^-$ και $(cf)^- = |c| f^+$

(π.χ. $(cf)^- = \max\{-cf, 0\} \xlongequal{-c>0} -c \cdot \max\{f, 0\}$
$= |c| \cdot f^+$)

(ii) $(f+g)^{\pm} \leq |f+g| \leq |f| + |g| =$

Άρα $\int (f+g)^{\pm} \leq$ $<\infty$ συνεπώς

η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον

$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int (f+g) = \int f + \int g.$

$\Longrightarrow$

(iii) $f \leq g \Rightarrow g - f \geq 0 \Longrightarrow \int (g-f) \geq 0 \longrightarrow \int g - \int f \geq 0$

$\Longrightarrow$

. - - - -

(iv) $\int_{A\cup B} f = \int f \chi_{A\cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f \chi_A + \int f \chi_B =$

$=$

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (ΘΚΣ)

Αν g ολοκληρώσιμη στο μετρήσιμο E & f_n μετρήσιμες με $|f_n| \leq g$ και $f_n \longrightarrow f$ σ.π. τότε

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n, \quad \left(\text{δηλαδή } \lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n\right)$$

Απόδειξη

$f_n \le |f_n| \le g \Rightarrow \qquad \ge 0 \xrightarrow{\text{Fatou}}$

$\Rightarrow \int (g-f) \le \liminf \qquad \Rightarrow \int g - \int f \le \int g - \ldots$

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \int f_n \le \int f.$

$-f_n \le |f_n| \le g \Rightarrow \qquad \ge 0 \xrightarrow{\text{Fatou}}$

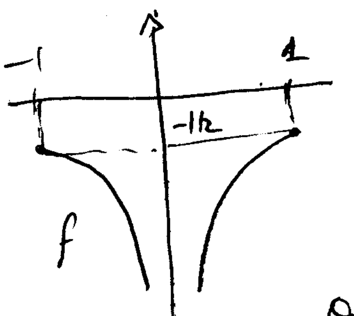
$\Rightarrow \int(g+f) \le \qquad \Rightarrow \int g + \int f \le \int g + \liminf \int f_n$

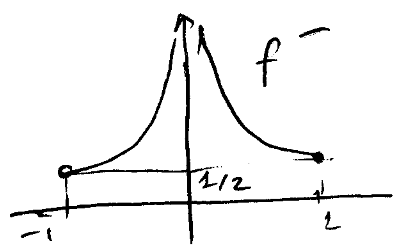
$\Rightarrow$

Άρα ∎

Παράδειγμα ~~Άσκηση~~ Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f:[-1,1]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

με $f(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{αν } x>0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{αν } x<0. \end{cases}$

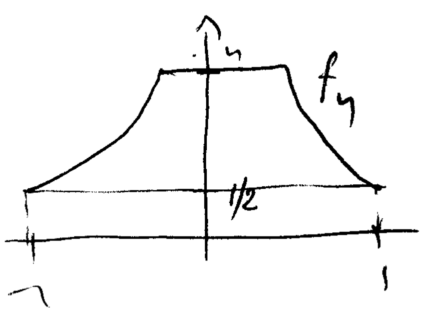




$f^+ = 0 \qquad f^- = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$

Είναι η f^- ολοκληρώσιμη;

Θεωρούμε την $f_n(x) = \begin{cases} f^-(x) & \text{αν } f^-(x) \le n \\ n & \text{αν } f^-(x) > n \end{cases}$



$f_n \uparrow$ και $f_n(x) \to f^-(x)$. Άρα από το

ΘΜΣ $\int f^- = \lim \int f_n$

Πόσο είναι όμως το $\int f_n$; (ολοκλήρωμα Lebesgue)

Θεώρημα (Lebesgue) Έστω ότι η f είναι φραγμένη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a\ b]$

(i) Αν f R-ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ f L-μετρήσιμη και άρα ολοκληρώσιμη

Επίσης $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[ab]} f(x)\,d\mu(x)$

(ii) Η f είναι R-ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $\mu(\{x\in[a b] : f$ ασυνεχής στο $x\}) = 0$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα η f_n είναι R-ολοκληρώσιμη

άρα $\int_{[-1 1]} f_n(x)\,d\mu(x) = \int_{-1}^{1} f_n(x) =$

$= 2 - \frac{2}{n} \to 2$ Άρα $\int_{[-1 1]} f(x)\,d\mu(x) = -2$ $\blacksquare$