Μάθημα 23

Το ολοκλήρωμα Lebesgue

<u>Ορισμός</u> (γενικός ορισμός) Μια μετρήσιμη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ολοκληρώσιμη στο E αν οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες στο E. Το ολοκλήρωμα της f ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

<u>Πρόταση</u> Έστω ότι οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $E \subseteq \mathbb{R}$

(i) $\forall c \in \mathbb{R}$ η cf είναι ολοκληρώσιμη και $\int_E (cf) = c \cdot \int_E f$

(ii) Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$

(iii) Αν $f \leq g$ σ.π. τότε $\int_E f \leq \int_E g$

(iv) Αν A, B ξένα μετρήσιμα υποσύνολα του E τότε $\int_{A \cup B} f =$
$= \int_A f + \int_B f$

<u>Απόδειξη</u> (i) Αν $c \geq 0$ τότε $(cf)^+ = c \cdot f^+$ και $(cf)^- = c \cdot f^-$ άρα είναι ολοκληρώσιμες και $\int (cf)^+ = \int c \cdot f^+ = c \int f^+$ και

$$\int (cf)^- = \int c \cdot f^- = c \int f^- \,. \quad \text{Άρα}$$

$$\int cf = \underbrace{c\int f^+ - c\int f^-}_{\int (cf)^+ - \int (cf)^-} = c\left(\int f^+ - \int f^-\right) =$$

$$= c \int f$$

Αν $c<0$ τότε $(cf)^+ = |c| \cdot f^-$ και $(cf)^- = |c| f^+$

(πχ $(cf)^- = \max\{-cf, 0\} \overset{-c>0}{=\!=} -c \cdot \max\{f, 0\}$

$= |c| \cdot f^+)$

$\int(cf) = \int(cf)^+ - \int(cf)^- = \int |c| \cdot f^- - \int |c| f^+ = -|c| \left(\int f^+ - \int f^-\right) = c \int f$

(ii) $(f+g)^{\pm} \leq |f+g| \leq |f| + |g| =$

Άρα $\int (f+g)^{\pm} \leq \int |f| + \int |g|$ $<\infty$ συνεπώς

η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον

$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^- \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int(f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int(f+g)^- \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int (f+g)^+ - \int(f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- \Longrightarrow \int (f+g) = \int f + \int g.$

(iii) $f \leq g \Rightarrow g - f \geq 0 \Longrightarrow \int(g-f) \geq 0 \Longrightarrow \int g - \int f \geq 0$

$\Rightarrow \int f \leq \int g$ (χρησιμοποιήσαμε ότι $\int f < \infty$)

(iv) $\int_{A\cup B} f = \int f \chi_{A\cup B} = \int f(\chi_A + \chi_B) = \int f\chi_A + \int f \chi_B =$

$= \int_A f + \int_B f$

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (ΘΚΣ)

Αν g ολοκληρώσιμη στο μετρήσιμο E & f_n μετρήσιμες

με $|f_n| \leq g$ και $f_n \longrightarrow f$ σ.π. τότε

$\int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n$, (δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim\limits_{n\to\infty} f_n$)

Απόδειξη

$$f_n \le |f_n| \le g \Rightarrow g - f_n \ge 0 \xrightarrow{\text{Fatou}}$$

$$\Rightarrow \int (g-f) \le \liminf_{n\to\infty} \int (g-f_n) \Rightarrow \int g - \int f \le \int g - \limsup \int f_n$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int f_n \le \int f.$$

$$-f_n \le |f_n| \le g \Rightarrow g+f_n \ge 0 \xrightarrow{\text{Fatou}}$$

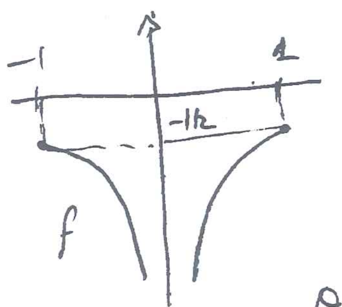
$$\Rightarrow \int (g+f) \le \liminf \int (g+f_n) \Rightarrow \int g + \int f \le \int g + \liminf \int f_n$$

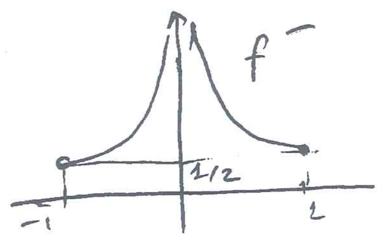
$$\Rightarrow \int f \le \liminf \int f_n$$

Άρα $\int f \le \liminf \int f_n \le \limsup \int f_n \le \int f \Rightarrow \int f = \lim_n \int f_n$ ■

Παράδειγμα ~~Άσκηση~~ Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f: [-1,1]\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

με $f(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{αν } x>0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{αν } x<0. \end{cases}$

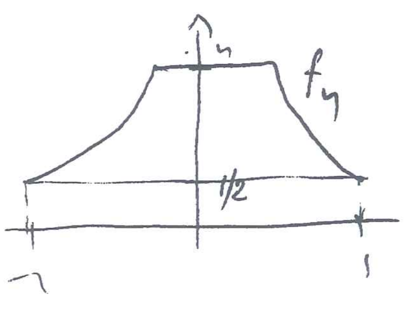




$f^+ = 0 \qquad f^- = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$

Είναι η f^- ολοκληρώσιμη;

Θεωρούμε την $f_n(x) = \begin{cases} f^-(x) & \text{αν } f^-(x) \le n \\ n & \text{αν } f^-(x) > n \end{cases}$



$f_n \uparrow$ και $f_n(x) \to f^-(x)$. Άρα από το ΘΜΣ $\int f^- = \lim \int f_n$

Πόσο είναι όμως το $\int f_n$; (ολοκλήρωμα Lebesgue)

Σελ 4

Θεώρημα (Lebesgue) Έστω ότι η f είναι φραγμένη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a\ b]$

(i) Αν f R-ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$ f L-μετρήσιμη κ αρα ολοκληρώσιμη

Επίσης $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a\,b]} f(x)\,d\mu(x)$

(ii) Η f είναι R-ολοκληρώσιμη $\iff$ $\mu(\{x\in[a\,b] : f \text{ συνεχής στο } x\})=0$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα η f_n είναι R-ολοκληρώσιμη

άρα
$$\int_{[-1\,1]} f_n(x)\,d\mu(x) = \int_{-1}^{1} f_n(x) = \int_{-1/4n^2}^{1/4n^2} n + 2\int_{1/4n^2}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \cancel{n}\cdot\frac{2}{4n^{\cancel{2}}} + 2\left(\sqrt{1}-\sqrt{\frac{1}{4n^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2n} + 2 - \frac{1}{n}$$

$$= 2 - \frac{2}{2n} \longrightarrow 2$$

Άρα $\int_{[-1\,1]} f(x)\,d\mu(x) = -2$

$\int f^+ - \int f^- = 0 - 2$