Μάθημα 24

Άσκηση 7.6.1 Αν $f:\mathbb{R}\to[0\ \infty]$ ολοκληρώσιμη αποδείξτε ότι $\forall\ a\in(0,\infty]$ ισχύει $\mu(\{x\in\mathbb{R} : f(x)\geq a\})<\infty$

Λύση

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} f(x) \overset{f\geq 0}{\geq} \int_{\{x:\, f(x)\geq a\}}$$

Άσκηση 7.6.3 Δείξτε με τη βοήθεια της $f_n=\chi_{[n,\,n+1)}$ ότι η ανισότητα Fatou μπορεί να είναι γνήσια

Λύση

$f_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ αλλά $0=\int 0\leq$

Άσκηση 7.6.5 Αν $h:\mathbb{R}\to[0\ \infty]$ μετρήσιμη με $\int h<\infty$ και f_n μετρήσιμες $\geq -h$ αποδείξτε ότι $\int(\liminf f_n)\leq\liminf\int f_n$

Λύση $f_n+h\geq 0 \overset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow}$ $\cancel{\int(f_n+h)}$ $\int\liminf(f_n+h)\leq\liminf\int(f_n+h)$

$\Longrightarrow$ $\int((\liminf f_n)+h)\leq\liminf(\int f_n+\int h)$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$

Ασκηση Αποδείξτε ότι $\int_{[0\infty]} \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) = \frac{\pi}{2}$

Λύση $\int_{[0\infty]} \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) \overset{\Theta M \Sigma}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_{[0\,\infty]} \left(\frac{1}{1+t^2} \chi_{[0\,n]}(t) \right) d\mu(t)$

$=$

Ασκηση 7.8.10| Υπολογίστε τα όρια αιτιολογώντας τις πράξεις σας

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}\, dx$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} dx$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n \sin\frac{x}{n} \left(x(1+x^2)\right)^{-1} dx$ (iv) $\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1} dx$

Λύση (i) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{}$

$\Big|\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}}_{f_n(x)}\Big| \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = \text{———} \le \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}}_{g(x)}$

$\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^\infty \overset{x>0}{\le} \int_0^\infty \overset{x=2t}{=\!=} \int_0^\infty \frac{2}{1+t^2} dt$

Άρα από ΘΚΣ $\lim \int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim f_n = \int_0^\infty 0 = 0.$

(ii) $\frac{1+nx^2}{(1+x^2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \forall x>0$ η $\frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \overset{\text{Bernoulli}}{\le} = 1 = g$

(iii) $n \sin\frac{x}{n} \left(x(1+x^2)\right)^{-1} = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(\frac{x}{n}\right)} \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow$

$\Big|\overbrace{n \sin\frac{x}{n} \left(x(1+x^2)\right)^{-1}}^{f_n}\Big| \le n \frac{x}{n} \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = g(x) + \Theta K \Sigma$

$\int g = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < \infty$ άρα $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n = \int \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

(iv) $\int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x} \overset{\Theta M \Sigma}{=\!=} \lim_{m\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1+n^2x} \chi_{[a\ m]}(x)$ γιατί

η $f_{n,m}(x) = \frac{n}{1+n^2x}\chi_{[a\ m]}(x) \le \frac{n}{1+n^2x}\chi_{[a\ m+1]}(x) = f_{n,m+1}(x)$

& $\lim_{m\to\infty} f_{n,m} = f_n$.

Άρα $\int_0^\infty \frac{n}{1+n^2x} = \lim_{m\to\infty} \int_0^m \frac{n}{1+n^2x} = \lim_{m\to\infty} \arctan(nx)\Big|_{x=a}^{x=m}$

$= \lim_{m\to\infty}\left(\arctan(\quad) - \arctan(na)\right) =$

$= \text{—} - \lim_{m\to\infty} \arctan(na) = \begin{cases} & a>0 \\ & a=0 \\ . & a<0 \end{cases}$

Άσκηση 7.6.4 Έστω ότι $f_n \ge 0$, $f_n \to f$ & $\int f = \lim \int f_n < \infty$

Τότε $\forall E$ μετρήσιμο $\subseteq \mathbb{R}$ $\int_E f_n \to \int_E f$. Το αποτέλεσμα

δεν είναι σωστό αν $\int f = \infty$

Λύση Από το Λήμμα Fatou

$\int_E f = \int f\chi_E \le \liminf_n \int f_n \chi_E = \liminf \int_E f_n \qquad \forall E \in \mathcal{M}$

Άρα $\int f - \int_E f = \int_{E^c} f \overset{E^c\in\mathcal{M}}{\le} \qquad =$

$= \qquad \Rightarrow \int_E f \ge \qquad \ge \qquad \ge \int_E f$

Αν τώρα $F = (-\infty\ 0)$ $F_n = F \cup [n, n+1)$, $\chi_F, \chi_{F_n} \ge 0$ $\chi_{F_n} \to \chi_F$

$\int \chi_{F_n} = \qquad = \int \chi_F$. Αν $E = (0\ \infty)$ $\int_E \chi_{F_n} = \qquad \ne \int_{(0\infty)} \chi_F =$

<u>Άσκηση 7.7.1</u> Αν f ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ & g μετρήσιμη και φραγμένη $\Rightarrow$ $f\cdot g$ ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Δεν ισχύει ότι το γινόμενο ολοκληρώσιμων είναι ολοκληρώσιμη

<u>Λύση</u> Γνωρίζουμε ότι fg μετρήσιμη. Έστω $M>0$: $|g|\leq M$

$\Rightarrow -M \leq g \leq M$.

<u>Ισχυρισμός</u> $|f|$ ολοκλ. $\Longleftrightarrow$ f ολοκλ. & $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

$\Big[$ "$\Leftarrow$" f ολοκλ $\Rightarrow$ $\int f^+, \int f^- < \infty$ $\Rightarrow$ $\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$

"$\Rightarrow$" $\int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f| < \infty$ άρα $\int f^+, \int f^- < \infty \Big]$

Από τον ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $|fg|$ ολοκληρώσιμη

Αλλά f ολοκλ. $\xrightarrow{\text{Ισχ}}$ $|f|$ ολοκλ. $\Rightarrow$

$$\int |fg| = \int |f|\,|g| \leq \qquad = \qquad < \infty \qquad \blacksquare$$