Μάθημα 25

Άσκηση 7.7.2 | $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ολοκληρώσιμες

ώς $f_n \rightrightarrows f$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b |f_n-f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Λύση Η f είναι μετρήσιμη ως ______

$\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(x)-f(x)|\le 1$ $\forall x\in[a,b]$ αφού ____

Άρα $\big||f_{n_0}(x)|-|f(x)|\big| \le$ $\qquad\le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 \le$ $\qquad\Rightarrow |f|\le 1+|f_{n_0}|$

$\Rightarrow \int_{[a,b]}|f| \le$ $\qquad<\infty$ αφού f_{n_0} ____

Άρα f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Επίσης $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_1\in\mathbb{N}$: $\forall n\ge n_1$ $|f_n(x)-f(x)|\le \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x\in[a,b]$

Άρα

αφού ______

$\int_{[a,b]}|f_n(x)-f(x)| \le$ $\qquad=\varepsilon \Rightarrow \int_{[a,b]}|f_n-f|\to 0$ ∎

Άσκηση 7.7.3 | f_n, f ολοκληρώσιμες και $\int|f_n-f|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Δείξτε ότι $\int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{}\int f$ και $\int|f_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}\int|f|$

Λύση

$$\left|\int|f_n|-\int|f|\right| = \left|\int(|f_n|-|f|)\right| \le \int \big||f_n|-|f|\big|$$

$$\le \int \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .\quad \text{και}$$

______

$\left|\int f_n - \int f\right| \le$ ∎

<u>Άσκηση 7.10.1</u> | f_n μετρήσιμες & $f_n \geq f_{n+1}$ και $\exists\, k \in \mathbb{N}$ (1)

ώστε $\int f_k < \infty$. Τότε $\int f = \lim_n \int f_n$ όπου $f = \lim_n f_n$ (2)

<u>Λύση</u> $\forall n > k$ θέτουμε $g_n = f_k - f_n \geq 0$ και (3)

$$g_{n+1} \geq g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_k - f$$ (4)

Άρα από ΘΜΣ $\int (f_k - f) = \lim_n \int (f_k - f_n)$ (5)

(6)

$\implies$ $\implies$

<u>Παρατήρηση</u> Η ύπαρξη k: $\int f_k < \infty$ είναι απαραίτητη γιατί (7)

η $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ είναι φθίνουσα $\int f_n = +\infty$ αλλά $f_n \longrightarrow$ ---- (8)

άρα $\int \lim f_n = 0 \neq \lim_n \int f_n = +\infty$ (9)

<u>Άσκηση 7.10.2</u> Έστω f μετρήσιμη $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\int f < \infty$. Δείξτε (10)

ότι $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\mu(A) < \infty$ & $\int_A f > (\int f) - \varepsilon$ (11)

<u>Λύση</u> Αν $f \geq 0$ τότε η $f_n = f\chi_{[-n,n]}$ είναι αύξουσα (12)

(ελέγξτε το) & $f_n \longrightarrow f$ (13)

Από ΘΜΣ $\int f_n \longrightarrow \int f$, άρα $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε (14)

$$\left| \int f_{n_0} - \int f \right| < \varepsilon \implies -\varepsilon < \int f \chi_{[-n_0,n_0]} - \int f$$ (15)

$\implies (\int f) - \varepsilon <$ (16)

.....

Για τη γενική $f = f^+ - f^-$ βρίσκουμε $A_1 \subseteq \mathbb{R}$ ώστε όπως πριν (17)

$\left| \int_{A_1} f^+ - \int f^+ \right| < \varepsilon/2$ & $A_2 \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\left| \int_{A_2} f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2$ (18)

Θέτουμε $A = A_1 \cup A_2$ και έχουμε (19)

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^+ < \int_{A_1} f^+ \le \int_A f^+ \le \int f^+ < \int f^+ + \varepsilon/2$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_A f^+ - \int f^+ \right| < \varepsilon/2$$

Ομοίως

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^- < \int_{A_2} f^- \le \int_A f^- \le \int f^- < \int f^- + \varepsilon/2$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \int_A f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2$$

Άρα $$\left| \int_A f - \int f \right| = \left| \int_A f^+ - \int_A f^- - \int f^+ + \int f^- \right| \le$$

$$\le \left| \int_A f^+ - \int f^+ \right| + \left| \int_A f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad ■$$

Άσκηση 7.10.3 Βρείτε $f_n \rightrightarrows 0$ στο $\mathbb{R}$ αλλά $\int f_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $g_n \longrightarrow 0$ στο $[0\ 1]$ αλλά $\int g_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Λύση $f_n(x) =$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g_n(x) = \dots \chi_{[0\ \frac{1}{n}]}$

Άσκηση 7.10.4 Αν $\mu(E) < \infty$ και $f_n \rightrightarrows f$ στο E και f_n ολοκληρώσιμες δείξτε ότι f ολοκληρώσιμη και $\lim_n \int f_n = \int f$

Λύση (Υπενθύμιση f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \int f^+, \int f^- < \infty \Leftrightarrow \int |f| < \infty$ $\Leftrightarrow |f|$ ολοκληρώσιμη)

Αρκεί να δείξουμε ότι $|f|$ ολοκληρώσιμη. Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 7.7.2 (αφήνεται ως άσκηση)

Άσκηση 7.10.5 Αν $\mu(E)<\infty$ f_n, f, g_n, g ολοκληρώσιμες (1)

με $f_n \longrightarrow f$ σπ $g_n \longrightarrow g$ σπ και $|f_n| \le g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (2)

και $\lim_n \int g_n = \int g$, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$ (3)

εφαρμόζοντας το Λ. Fatou για τις

Λύση Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του ΘΚΣ (4)

$g_n - f_n \ge 0$ και $g_n + f_n \ge 0$ (5)

(αφού $|f_n| \le g_n \Longrightarrow -g_n \le f_n \le g_n$) (6)

(δική σας ...)

Άσκηση 7.10.6 Αν f ολοκληρώσιμη τότε η (7)

$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f$ είναι συνεχής συνάρτηση του $x \in \mathbb{R}$. (8)

Λύση

$|F(x) - F(x_0)| = \qquad = \qquad$ ή (9)

αναλόγως με το αν $x_0 > x$ ή $x_0 < x$. (10)

Από την Πρόταση 7.6.10 $\exists\, \delta > 0$ ώστε αν $\mu(E) < \delta$ (11)

$\Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon$. Άρα αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \mu(x_0, x] < \delta$ (12)

$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| \le \left| \int_{(x_0, x]} f \right| \le \int_{(x_0,x]} |f| < \varepsilon$ ■ (13)