Μάθημα 25

Άσκηση 7.7.2 | $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ολοκληρώσιμες (1)

Ισ $f_n \rightrightarrows f$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και (2)

$\int_a^b |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (3)

Λύση Η f είναι μετρήσιμη ως - - - - - - (4)

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq 1$ $\forall x \in [a,b]$ αφού ---- (5)

Άρα $\big|\, |f_{n_0}(x)| - |f(x)| \,\big| \leq$ $\leq 1 \rightarrow$ (6)

$\Rightarrow -1 \leq$ $\Rightarrow |f| \leq 1 + |f_{n_0}|$ (7)

$\Rightarrow \int_{[a,b]} |f| \leq$ $< \infty$ αφού f_{n_0} ---- (8)

(9)

Άρα f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Επίσης $\forall \epsilon > 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_1$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in [a,b]$ (10)

(11)

αφού - - - - - - Άρα

$\int_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq$ $= \varepsilon$ $\Rightarrow \int_{[a,b]} |f_n - f| \to 0$ ∎ (12)

Άσκηση 7.7.3 | f_n, f ολοκληρώσιμες και $\int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (13)

Δείξτε ότι $\int f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f$ και $\int |f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \int |f|$ (14)

Λύση

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| = \left| \int (|f_n| - |f|) \right| \leq \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big|$$ (15)

$\leq \int$ $\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. και (16)

- - - - - -

$\left| \int f_n - \int f \right| \leq$ ∎ (17)

<u>Άσκηση 7.10.1</u> f_n μετρήσιμες και $f_n \ge f_{n+1}$ και $\exists\, k\in\mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Τότε $\int f = \lim_n \int f_n$ όπου $f = \lim_n f_n$

<u>Λύση</u> $\forall n > k$ θέτουμε $g_n = f_k - f_n \ge 0$ και

$$g_{n+1} \ge g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f_k - f$$

Άρα από ΘΜΣ $\displaystyle \int (f_k - f) = \lim_n \int (f_k - f_n)$

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$

<u>Παρατήρηση</u> Η ύπαρξη $k : \int f_k < \infty$ είναι απαραίτητη γιατί η $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ είναι φθίνουσα $\int f_n = +\infty$ αλλά $f_n \longrightarrow$ ___

άρα $\displaystyle \int \lim f_n = 0 \ne \lim_n \int f_n = +\infty$

<u>Άσκηση 7.10.2</u> Έστω f μετρήσιμη $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\int f < \infty$. Δείξτε ότι $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\mu(A) < \infty$ και $\int_A f > (\int f) - \varepsilon$

<u>Λύση</u> Αν $f \ge 0$ τότε η $f_n = f\chi_{[-n,n]}$ είναι αύξουσα (ελέγξτε το) και $f_n \longrightarrow f$

Από ΘΜΣ $\int f_n \longrightarrow \int f$, άρα $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left| \int f_{n_0} - \int f \right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \int f \chi_{[-n_0, n_0]} - \int f$$

$$\Rightarrow \left(\int f\right) - \varepsilon <$$

....

Για τη γενική $f = f^+ - f^-$ βρίσκουμε $A_1 \subseteq \mathbb{R}$ ώστε όπως πριν $\left| \int_{A_1} f^+ - \int f^+ \right| < \varepsilon/2$ και $A_2 \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $\left| \int_{A_2} f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2$

Θέτουμε $A = A_1 \cup A_2$ και έχουμε

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^+ < \int_{A_1} f^+ \le \int_A f^+ \le \int f^+ < \int f^+ + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \quad \left| \int_A f^+ - \int f^+ \right| < \varepsilon/2$$

Ομοίως

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int f^- < \int_{A_2} f^- \le \int_A f^- \le \int f^- < \int f^- + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \quad \left| \int_A f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2$$

Αρα $\left| \int_A f - \int f \right| = \left| \int_A f^+ - \int_A f^- - \int f^+ + \int f^- \right| \le$

$$\le \left| \int_A f^+ - \int f^+ \right| + \left| \int_A f^- - \int f^- \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Ασκηση 7.10.3 Βρείτε $f_n \rightrightarrows 0$ στο $\mathbb{R}$ αλλά $\int f_n = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$
και $g_n \longrightarrow 0$ στο $[0\ 1]$ αλλά $\int g_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Λύση $f_n(x) =$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g_n(x) = \dots \chi_{[0\ \frac{1}{n}]}$

Ασκηση 7.10.4 Αν $\mu(E) < \infty$ και $f_n \rightrightarrows f$ στο E και f_n ολοκληρώσιμες δείξτε ότι f ολοκληρώσιμη και
$\lim_n \int f_n = \int f$

Λύση (Υπενθύμιση f ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow$ $\int f^+, \int f^- < \infty \Leftrightarrow \int |f| < \infty$
$\Leftrightarrow$ $|f|$ ολοκληρώσιμη)

Αρκεί να δείξουμε ότι $|f|$ ολοκληρώσιμη. Συνεχίζουμε όπως
στην άσκηση 7.7.2 (αφήνεται ως άσκηση)

<u>Άσκηση 7.10.5</u> Αν $\mu(E)<\infty$ f_n, f, g_n ολοκληρώσιμες
με $f_n \longrightarrow f$ σ.π. $g_n \longrightarrow g$ σ.π. και $|f_n| \le g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
και $\lim\limits_n \int g_n = \int g$, δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = \int f$

<u>Λύση</u> Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του ΘΚΣ (εφαρμόζοντας το λ. Fatou) για τις

$g_n - f_n \geq 0$ και $g_n + f_n \geq 0$

(αφού $|f_n| \le g_n \Longrightarrow -g_n \le f_n \le g_n$)

(δική σας...)

<u>Άσκηση 7.10.6</u> Αν f ολοκληρώσιμη τότε η
$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f$ είναι συνεχής συνάρτηση του $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u> $|F(x) - F(x_0)| =$ $\qquad = \qquad$ ή

ανάλογα με το αν $x_0 > x$ ή $x_0 < x$.

Από την Πρόταση 7.6.10 $\exists\, \delta > 0$ ώστε αν $\mu(E) < \delta$
$\Rightarrow \int_E |f| < \varepsilon$. Άρα αν $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \mu(x_0, x] < \delta$ ■
$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{(x_0,x]} f\right| \le \int_{(x_0,x]} |f| < \varepsilon$